

Tentamen Infinitesimaalrekening 1A

7 januari 2000, 14.00 - 17.00 uur

- *Maak elke opgave op een apart vel!*
- Zet op elk vel dat je inlevert je naam en het nummer van je collegekaart. Gebruik voor elke opgave een nieuw vel. De opgaven moeten op aparte stapels worden ingeleverd.
- De drie opgaven tellen even zwaar.
- Schrijf je naam en adres op het tentamenbriefje en lever dat op een apart stapeltje in.
- Laat bij elke opgave duidelijk zien hoe je aan je antwoorden komt.
- Het boek, college- of werkcollegeaantekeningen, rekenmachines e.d. mogen niet gebruikt worden.
- *VEEL SUCCES!*

1. a. Primitiveer de functie $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ met $f(x) = (x+1)^2 \log x$.
b. Primitiveer de functie $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ met $f(x) = \sqrt{x^2 + 9}$.
c. Onderzoek de volgende limiet:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin(\frac{x}{2}) - \sin x}{x (\cos x - \cosh x)}.$$

Geef niet alleen een antwoord maar beredeneer ook waarom de limiet dit antwoord heeft.

- d. Bepaal met behulp van een Taylorveelterm van $\sqrt{1+x}$ een benadering $y \in \mathbf{Q}$ van $\sqrt{1\frac{1}{20}}$ zodat

$$|y - \sqrt{1\frac{1}{20}}| \leq \frac{1}{100.000}.$$

Laat ook zien (d.m.v. schatting van de restterm) dat dit getal y deze eigenschap heeft.

Z.O.Z !!!!!!!!!!!!!

2. **a.** Laat zien door uitschrijven dat voor alle vectoren a, b in $\mathbf{R}^3$ geldt dat $(a \times b)$ loodrecht staat op a en op b , en dat $(a \times b) = - (b \times a)$.
- b.** Bepaal het snijpunt van het vlak door $(0, 0, 0)$ opgespannen door de vectoren $(1, 0, 1)$ en $(0, 1, 1)$ met de rechte lijn door $(2, 3, 4)$ loodrecht op dit vlak. Bepaal ook de afstand van $(2, 3, 4)$ tot dit vlak.
- c.** Bepaal de inhoud van het parallelepipedum opgespannen door de vectoren $(1, 3, 2)$, $(-1, 4, 3)$ en $(2, 5, 1)$.
- d.** Bepaal het raakvlak aan het oppervlak $x^3 - y^3 + xyz + z^3 = 2$ in het punt $(1, -1, 1)$.

3. Laat $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$ gegeven zijn door

$$f(x, y, z) = (\sin(xy + z), ye^x + 2z).$$

- a.** Laat zien dat f differentieerbaar is op $\mathbf{R}^3$.
- b.** Bepaal de functie g die de beste lineaire benadering van f is in de buurt van $(0, 2, 0)$.
- c.** Stel Φ is de substitutie gegeven door

$$\Phi(\rho, \theta, \phi) = (\rho \cos \theta \sin \phi, \rho \sin \theta \sin \phi, \rho \cos \phi).$$

Hierbij is $\rho > 0$. Stel $f_1 = f \circ \Phi$. Bepaal de functie g_1 die de beste lineaire benadering is van f_1 in de buurt van $(1, 0, 0)$.

- d.** Laat zien dat de drie vectoren

$$e_1 = (D\Phi)(\rho, \theta, \phi) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = (D\Phi)(\rho, \theta, \phi) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = (D\Phi)(\rho, \theta, \phi) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

loodrecht op elkaar staan.

EINDE

Normering: som 1 totaal 34 punten, a: 8, b: 8, c: 8, d: 10.

som 2 totaal 33 punten, a: 8, b: 8, c: 8, d: 9.

som 3 totaal 33 punten, a: 8, b: 8, c: 9, d: 8.