Tentamen Infinitesimaalrekening 1A

7 januari 2000, 14.00 - 17.00 uur

- *Maak elke opgave op een apart vel!*
- Zet op elk vel dat je inlevert je naam en het nummer van je collegekaart. Gebruik voor elke opgave een nieuw vel. De opgaven moeten op aparte stapels worden ingeleverd.
- De drie opgaven tellen even zwaar.
- Schrijf je naam en adres op het tentamenbriefje en lever dat op een apart stapeltje in.
- Laat bij elke opgave duidelijk zien hoe je aan je antwoorden komt.
- Het boek, college- of werkcollegeaantekeningen, rekenmachines e.d. mogen niet gebruikt worden.
- *VEEL SUCCES!*

1. **a.** Primitiveer de functie $f:(0,\infty)\to\mathbf{R}$ met $f(x)=(x+1)^2\log x$.

   b. Primitiveer de functie $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ met $f(x)=\sqrt{x^2+9}$.

   c. Onderzoek de volgende limiet:

   $$\lim_{x\to 0}\frac{2\sin(\frac{x}{2})-\sin x}{x\,(\cos x-\cosh x)}.$$

   Geef niet alleen een antwoord maar beredeneer ook waarom de limiet dit antwoord heeft.

   d. Bepaal met behulp van een Taylorveelterm van $\sqrt{1+x}$ een benadering $y\in\mathbf{Q}$ van $\sqrt{1\frac{1}{20}}$ zodat

   $$|y-\sqrt{1\frac{1}{20}}|\le\frac{1}{100.000}.$$

   Laat ook zien (d.m.v. schatting van de restterm) dat dit getal y deze eigenschap heeft.

Z.O.Z !!!!!!!!!!!!

2. **a.** Laat zien door uitschrijven dat voor alle vectoren a, b in $\mathbf{R}^3$ geldt dat $(a \times b)$ loodrecht staat op a en op b, en dat $(a \times b)$ = - $(b \times a)$.

   b. Bepaal het snijpunt van het vlak door $(0,0,0)$ opgespannen door de vectoren $(1,0,1)$ en $(0,1,1)$ met de rechte lijn door $(2,3,4)$ loodrecht op dit vlak. Bepaal ook de afstand van $(2,3,4)$ tot dit vlak.

   c. Bepaal de inhoud van het parallelepipedum opgespannen door de vectoren $(1,3,2)$, $(-1,4,3)$ en $(2,5,1)$.

   d. Bepaal het raakvlak aan het oppervlak $x^3 - y^3 + xyz + z^3 = 2$ in het punt $(1,-1,1)$.

3. Laat $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ gegeven zijn door

$$f(x,y,z) = (\sin(xy+z),\ \ ye^x + 2z).$$

   a. Laat zien dat f differentieerbaar is op $\mathbf{R}^3$.

   b. Bepaal de functie g die de beste lineaire benadering van f is in de buurt van $(0,2,0)$.

   c. Stel Φ is de substitutie gegeven door

$$\Phi(\rho,\theta,\phi) = (\rho\cos\theta\sin\phi, \rho\sin\theta\sin\phi, \rho\cos\phi).$$

   Hierbij is $\rho > 0$. Stel $f_1 = f \circ \Phi$. Bepaal de functie g_1 die de beste lineaire benadering is van f_1 in de buurt van $(1,0,0)$.

   d. Laat zien dat de drie vectoren

$$e_1 = (D\Phi)(\rho,\theta,\phi)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ e_2 = (D\Phi)(\rho,\theta,\phi)\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\ e_3 = (D\Phi)(\rho,\theta,\phi)\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

   loodrecht op elkaar staan.

EINDE

Normering: som 1 totaal 34 punten, a: 8, b: 8, c: 8, d: 10.

som 2 totaal 33 punten, a: 8, b: 8, c: 8, d: 9.

som 3 totaal 33 punten, a: 8, b: 8, c: 9, d: 8.