Tentamen Infinitesimaalrekening 1A

24 oktober 2000, 14.00 - 17.00 uur

- *Maak elke opgave op een apart vel!*
- Zet op elk vel dat je inlevert je naam, het nummer van je collegekaart, en de naam van je werkcollegeleid(st)er (Tobias Muehlenbruch, Philipp Getto, Pieter Hofstra, Pepijn van der Laan, Roderik Lindenbergh, Alexa van der Waall, Barbara van den Berg). Als je de naam van je werkcollegeleider niet weet, zet dan op elk vel het nummer van de zaal van het werkcollege. Als je geen werkcollege hebt gevolgd, schrijf dan "geen werkcollege" op elk vel. De opgaven moeten op aparte stapels worden ingeleverd. Zelf inleveren bij de surveillanten, niet op de tafeltjes laten liggen!
- Aan het begin van elke opgave staat het aantal punten dat je met die opgave kan behalen. Het tentamencijfer is het totaal aantal punten gedeeld door 10. (Het eindcijfer is het tentamencijfer plus de eventueel met de steropgaven behaalde bonus, afgerond op een geheel getal.)
- Laat bij elke opgave duidelijk zien hoe je aan je antwoorden komt.
- Het boek, college- of werkcollegeaantekeningen, rekenmachines e.d. mogen niet gebruikt worden.
- *VEEL SUCCES!*

1. (25 punten)

   a. Primitiveer de functie $x \to xe^{3x+1}$.

   b. Bepaal met behulp van een Taylorveelterm een benadering $y \in \mathbf{Q}$ van $\cos(\frac{1}{10})$ zodat

   $$|y - \cos(\frac{1}{10})| < \frac{1}{100.000}.$$

   Laat ook zien dat dit getal y deze eigenschap heeft.

   c. Bepaal

   $$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(5x) - 5\sin x}{x\,(1-\cos x)}.$$

   Geef niet alleen een antwoord maar geef ook kort aan waarom de limiet dit antwoord heeft.

Z.O.Z!!!

2. (20 punten) Laten $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ en $\overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ vectoren in $\mathbf{R}^3$ zijn.

a. Bereken de inhoud van het parallellepipedum opgespannen door $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ en $\overrightarrow{c}$.

b. Bereken de oppervlakte van de driehoek met als hoekpunten $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ en $\overrightarrow{c}$.

c. Bepaal een parametrisatie of een vergelijking voor het vlak door $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ en $\overrightarrow{c}$.

d. Bereken de afstand van dit vlak tot de oorsprong.

3. (25 punten)

a. Bepaal het raakvlak aan het oppervlak $x^3 + y^2 - z^3 = 1$ in het punt $(0, 3, 2)$.

Laat nu $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ gegeven zijn door

$$f(x, y, z) = (z^2,\ xy).$$

b. Laat met de definitie van differentieerbaarheid zien dat f differentieerbaar is.

c. Bepaal een functie g die de beste lineaire benadering van f is in de buurt van $(2, -1, 1)$.

4. (30 punten)

a. Stel $g(\rho, \phi, \theta) = (\rho\cos\phi\sin\theta, \rho\cos\phi\cos\theta, \rho\sin\phi)$. Laat zien dat g differentieerbaar is op $\mathbf{R}^3$.

b. Stel nu $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ is een differentieerbare functie. Schrijf $h(\rho, \phi, \theta) = f(g(\rho, \phi, \theta))$. Druk $\frac{\partial h}{\partial \rho}$ en $\frac{\partial h}{\partial \theta}$ uit in de partiële afgeleiden van f.

c. Controleer de formules die je in b. gevonden hebt voor het geval $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, voor $\rho > 0$.

d. Voor twee reële getallen x, y definiëren we het reële getal $w > 0$ door

$$w^w = 1 + x^2 + 2y^2.$$

Zo ontstaat een functie $w : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, die aan elk getallenpaar (x, y) het getal $w(x, y)$ toevoegt.

Je mag aannemen dat deze functie differentieerbaar is.

Bepaal de beste lineaire benadering van deze functie in de buurt van $(1, 1)$.