Tentamen Infinitesimaalrekening 1A

27 oktober 1999, 14.00 - 17.00 uur

- *Maak elke opgave op een apart vel!*
- Zet op elk vel dat je inlevert je naam, het nummer van je collegekaart, en de naam van je werkcollegeleid(st)er (Lorna Booth, Christian van Enckevort, Menno Genseberger, Piet Lemmens, Tobias Muehlenbruch, Johan van de Leur, Bob Rink, Nils Bruin). Als je geen werkcollege hebt gevolgd, schrijf dan "geen werkcollege" op elk vel. De opgaven moeten op aparte stapels worden ingeleverd.
- De vier opgaven tellen even zwaar.
- Schrijf je naam en adres op het tentamenbriefje en lever dat op een apart stapeltje in.
- Laat bij elke opgave duidelijk zien hoe je aan je antwoorden komt.
- Het boek, college- of werkcollegeaantekeningen, rekenmachines e.d. mogen niet gebruikt worden.
- *VEEL SUCCES!*

1. **a.** Primitiveer de functie $x \to x^2 \cos x$.

   b. Primitiveer de functie $x \to x \cos(x^2)$.

   c. Bepaal met behulp van een Taylorveelterm een benadering $y \in \mathbf{Q}$ van $e^{\frac{1}{3}}$ zodat

$$|y - e^{\frac{1}{3}}| \leq \frac{1}{1000}.$$

   Laat ook zien dat dit getal y deze eigenschap heeft.

2. **a.** Laat door uitschrijven van de definitie van de determinant zien dat

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

   b. Gegeven drie punten $P_1 = (1,1,1), P_2 = (2,4,3), P_3 = (3,2,-1)$.
   Bepaal:
   (i) de vergelijking van het vlak door P_1, P_2, P_3,
   (ii) een vector loodrecht op dit vlak,
   (iii) de oppervlakte van de driehoek met hoekpunten P_1, P_2, P_3.

   c. Bepaal de inhoud van het parallelepipedum opgespannen door de vectoren $\vec{OP_1}, \vec{OP_2}, \vec{OP_3}$ (O is de oorsprong).

Z.O.Z!!!

3. Laat A bestaan uit $\mathbf{R}^3$ zonder het punt $(0,0,0)$, en laat $f : A \to \mathbf{R}^2$ gegeven zijn door

$$f(x,y,z) = (\frac{1}{2x^2+y^2+z^2},\ xyz).$$

a. Laat zien dat A open is en dat f differentieerbaar is op A.

b. Bepaal een functie g die de beste lineaire benadering van f is in de buurt van $(2,0,1)$.

c. We schrijven

$$f_1(x,y,z) = \frac{1}{2x^2+y^2+z^2}$$

(f_1 is dus de eerste coördinaatfunctie van f).
Bepaal het raakvlak aan het niveauoppervlak $f_1(x,y,z) = \frac{1}{4}$ in het punt $(1,1,1)$.

4. **a.** We definiëren de functie $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ door

$$F(x,y,z) = (x^3 - xy + y^3,\ y^3 - yz + z^3,\ z^3 - zx + x^3).$$

Stel $G(x,y,z) = F(F(x,y,z))$.
Bereken $DG(0,1,0)$.

b. Gegeven zijn een differentieerbare functie $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ en een differentieerbare functie $g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$.
Stel $h : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ is gedefinieerd door $h(x,y) = g(x,y,f(x,y))$.
Bepaal ∇h.

c. Voor elke $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ is er precies één getal $c \geq 0$ zodat $c^3 + cy^2 - 2x^2 = 0$. Dit mag u aannemen, en ook dat de zo ontstane functie c van x en y differentieerbaar is.
Laat zien $c(1,1) = 1$ en bepaal daarna $\partial c/\partial x(1,1)$ en $\partial c/\partial y(1,1)$.