

Tentamen Infinitesimaalrekening A, Uitwerking

27 oktober 1999, 14.00 - 17.00 uur

Opmerking: De onderstaande uitwerkingen zijn niet de enig mogelijke! Er zijn ook andere goede oplossingen denkbaar.

1. **a.** We integreren twee keer partieel: $\int x^2 \cos x dx = x^2 \sin x - \int 2x \sin x dx = x^2 \sin x + 2x \cos x - \int 2 \cos x dx = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x$. Door differentiëren controleren we dit antwoord.
- b.** In $\int x \cos(x^2) dx$ stellen we $x^2 = y$ en we vinden met de substitutistelling $\int x \cos(x^2) dx = \frac{1}{2} \int \cos y dy = \frac{1}{2} \sin y = \frac{1}{2} \sin x^2$. Differentiëren laat weer zien dat dit antwoord correct is.
- c.** De functie $f: x \rightarrow e^x$ is oneindig vaak differentieerbaar, en $f(0) = f'(0) = f''(0) = f'''(0) = f^{iv}(0) = 1, f^v(t) = e^t$ en dus hebben we (Taylorveelterm met restterm, steunpunt 0):

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} e^t$$

voor een t tussen 0 en x . Kiezen we $x = 1/3$,

$$y = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}$$

dan is y rationaal, en $|y - e^{\frac{1}{3}}| \leq \frac{2}{3^5 \cdot 120} \leq \frac{1}{60 \cdot 243} \leq \frac{1}{1000}$ (zelfs $\frac{1}{10000}$). Omdat $e < 3$ geldt namelijk $1 \leq e^t \leq e^{\frac{1}{3}} \leq 2$.

2. **a.** Er geldt:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1 - a_2 b_1 c_3 - a_1 b_3 c_2$$

met de op het college behandelde definitie; evenzo

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3 - c_1 b_2 a_3 - b_1 a_2 c_3 - a_1 c_2 b_3.$$

Deze twee uitdrukkingen zijn aan elkaar gelijk.

- b. (i)-(ii) Gegeven $P_1 = (1, 1, 1), P_2 = (2, 4, 3), P_3 = (3, 2, -1)$. We berekenen het uitproduct $(P_2 - P_1) \times (P_3 - P_1) = (1, 3, 2) \times (2, 1, -2) = (-8, 6, -5)$. Deze vector staat loodrecht op het in (i) gevraagde vlak door P_1, P_2, P_3 (hiermee is (ii) dus opgelost).

De vergelijking van dit vlak is $\langle (-8, 6, -5), (x, y, z) - (1, 1, 1) \rangle = 0$, dat wil zeggen $-8x + 6y - 5z = -7$.

(iii) De oppervlakte van de driehoek met hoekpunten P_1, P_2, P_3 is de helft van de oppervlakte van het parallelogram opgespannen door $(P_2 - P_1)$ en $(P_3 - P_1)$, dat is dus de helft van de lengte van het uitproduct, dat is $\frac{1}{2}\sqrt{8^2 + 6^2 + 5^2} = \frac{1}{2}\sqrt{125} = \frac{5}{2}\sqrt{5}$.

- c. De inhoud van het parallelepipedum opgespannen door de vectoren $\vec{OP}_1, \vec{OP}_2, \vec{OP}_3$ is de absolute waarde van de determinant

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}.$$

Door de eerste rij twee keer van de tweede rij af te trekken en drie keer van de derde rij zien we dat de determinant gelijk is aan

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -4 \end{vmatrix},$$

dat is 1. $(-8+1) = -7$. De inhoud van het parallelepipedum is dus $+7$.

3. (i) A bestaat uit $\mathbf{R}^3$ zonder het punt $(0, 0, 0)$, en $f : A \rightarrow \mathbf{R}^2$ is gegeven door

$$f(x, y, z) = \left(\frac{1}{2x^2 + y^2 + z^2}, xyz \right).$$

- a. Als $P = (x, y, z)$ een punt in A is, dan is de afstand tot $(0, 0, 0)$ gelijk aan $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, en $r > 0$. Het punt $(0, 0, 0)$ ligt op de rand van de bol met middelpunt P en straal r , dus die bol zelf (die bestaat uit punten Q met afstand tot P kleiner dan r) is deel van A . A is dus open.

We schrijven nu $f_1(x, y, z) = \frac{1}{(2x^2 + y^2 + z^2)}$, $f_2(x, y, z) = xyz$.

De partiële afgeleiden van f_1 zijn $\frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y, z) = \frac{-4x}{(2x^2 + y^2 + z^2)^2}$, $\frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y, z) = \frac{-2y}{(2x^2 + y^2 + z^2)^2}$, $\frac{\partial f_1}{\partial z}(x, y, z) = \frac{-2z}{(2x^2 + y^2 + z^2)^2}$. De tellers en noemers van deze functies zijn veeltermen en dus continu, en de noemers zijn op A niet nul, dus de partiële afgeleiden van f_1 zijn continu.

De partiële afgeleiden van f_2 zijn $\partial f_2 / \partial x(x, y, z) = yz$, $\partial f_2 / \partial y(x, y, z) = xz$, $\partial f_2 / \partial z(x, y, z) = xy$, dit zijn alledrie veeltermen, die dus continu zijn. Conclusie is dat f differentieerbaar is op A (zelfs C^1).

- b. Door invullen in de partiële afgeleiden vinden we

$$DF(2, 0, 1) = \begin{pmatrix} \frac{-8}{81} & 0 & \frac{-2}{81} \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

De beste lineaire benadering van f is in de buurt van $(2, 0, 1)$ wordt gegeven door de functie

$$g(x, y, z) = f(2, 0, 1) + \begin{pmatrix} \frac{-8}{81} & 0 & \frac{-2}{81} \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - 2 \\ y \\ z - 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{dus } g(x, y, z) = \left(\frac{1}{9} - \frac{8}{81}(x - 2) - \frac{2}{81}(z - 1), 2y\right).$$

- c. Om het raakvlak aan het niveauoppervlak $f_1(x, y, z) = \frac{1}{4}$ in het punt $(1, 1, 1)$ te bepalen berekenen we $\nabla f(1, 1, 1) = (-\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, -\frac{1}{8})$. De vergelijking is dan $\langle (-\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, -\frac{1}{8}), (x, y, z) - (1, 1, 1) \rangle = 0$. Dit levert uiteindelijk $2x + y + z = 4$.

4. a. Omdat $F(x, y, z) = (x^3 - xy + y^3, y^3 - yz + z^3, z^3 - zx + x^3)$, geldt

$$DF(x, y, z) = \begin{pmatrix} 3x^2 - y & 3y^2 - x & 0 \\ 0 & 3y^2 - z & 3z^2 - y \\ 3x^2 - z & 0 & 3z^2 - x \end{pmatrix}.$$

Er geldt $G(x, y, z) = F(F(x, y, z))$. De kettingregel levert nu:

$$DG(0, 1, 0) = DF(F(0, 1, 0)) \circ DF(0, 1, 0) = DF(1, 1, 0) \circ DF(0, 1, 0) =$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 12 & -2 \\ 0 & 9 & -3 \\ -3 & 9 & 0 \end{pmatrix}.$$

- b. Stel $k(x, y) = (x, y, f(x, y))$. Omdat f differentieerbaar is en de functies $(x, y) \rightarrow x$ en $(x, y) \rightarrow y$ ook, is k differentieerbaar. Nu volgt met de kettingregel $Dh(x, y) = Dg(k(x, y)) \circ Dk(x, y)$. (We kunnen hier zonder gevaar voor verwarring de drie variabelen van g de namen (x, y, z) geven en $z = f(x, y)$ schrijven.) Uitgeschreven wordt dit:

$$\left(\frac{\partial h}{\partial x}(x, y) \quad \frac{\partial h}{\partial y}(x, y)\right) = \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x, y, z) \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x, y, z) \quad \frac{\partial g}{\partial z}(x, y, z)\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix}.$$

$$\text{Dus } \nabla h(x, y) = \left(\frac{\partial h}{\partial x}(x, y), \frac{\partial h}{\partial y}(x, y)\right)$$

$$= \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x, y, z) + \frac{\partial g}{\partial z}(x, y, z) \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial g}{\partial y}(x, y, z) + \frac{\partial g}{\partial z}(x, y, z) \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right).$$

- c. Voor $x = 1, y = 1$ hebben we $c^3 + c - 2 = 0$, hieraan wordt voldaan door $c = 1$. Conclusie $c(1, 1) = 1$. Nu kunnen we onderdeel b. toepassen met $z = f(x, y) = c(x, y)$, $g(x, y, z) = z^3 + zy^2 - 2x^2$. We krijgen dan $h(x, y) = 0$ dus $\nabla h(x, y) = (0, 0)$. Invullen levert twee vergelijkingen:

Ten eerste $0 = \frac{\partial g}{\partial x}(x, y, z) + \frac{\partial g}{\partial z}(x, y, z) \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -4x + (3c^2 + y^2) \frac{\partial c}{\partial x}(x, y)$, hieruit krijgen we voor $x = 1, y = 1, c = 1$, $\frac{\partial c}{\partial x}(1, 1) = 1$.

Ten tweede $0 = \frac{\partial g}{\partial y}(x, y, z) + \frac{\partial g}{\partial z}(x, y, z) \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2cy + (3c^2 + y^2) \frac{\partial c}{\partial y}(x, y)$. Voor $x = 1, y = 1, c = 1$ komt er $0 = 2 + 4 \frac{\partial c}{\partial y}(1, 1)$ dus $\frac{\partial c}{\partial y}(1, 1) = -\frac{1}{2}$.