Tentamen Infinitesimaalrekening A, Uitwerking

27 oktober 1999, 14.00 - 17.00 uur

Opmerking: De onderstaande uitwerkingen zijn niet de enig mogelijke! Er zijn ook andere goede oplossingen denkbaar.

1. **a.** We integreren twee keer partieel: $\int x^2 \cos x dx = x^2 \sin x - \int 2x \sin x dx = x^2 \sin x + 2x \cos x - \int 2 \cos x dx = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x$. Door differentiëren controleren we dit antwoord.

   b. In $\int x \cos(x^2) dx$ stellen we $x^2 = y$ en we vinden met de substitutiestelling $\int x \cos(x^2) dx = \frac{1}{2} \int \cos y dy = \frac{1}{2} \sin y = \frac{1}{2} \sin x^2$. Differentiëren laat weer zien dat dit antwoord correct is.

   c. De functie $f : x \to e^x$ is oneindig vaak differentieerbaar, en $f(0) = f'(0) = f''(0) = f'''(0) = f^{iv}(0) = 1, f^v(t) = e^t$ en dus hebben we (Taylorveelterm met restterm, steunpunt 0):

   $$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} e^t$$

   voor een t tussen 0 en x. Kiezen we $x = 1/3$,

   $$y = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}$$

   dan is y rationaal, en $|y - e^{\frac{1}{3}}| \leq \frac{2}{3^5.120} \leq \frac{1}{60 \cdot 243} \leq \frac{1}{1000}$ (zelfs $\frac{1}{10000}$). Omdat $e < 3$ geldt namelijk $1 \leq e^t \leq e^{\frac{1}{3}} \leq 2$.

2. **a.** Er geldt:

   $$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1 - a_2 b_1 c_3 - a_1 b_3 c_2$$

   met de op het college behandelde definitie; evenzo

   $$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3 - c_1 b_2 a_3 - b_1 a_2 c_3 - a_1 c_2 b_3.$$

   Deze twee uitdrukkingen zijn aan elkaar gelijk.

b. (i)-(ii) Gegeven $P_1 = (1,1,1), P_2 = (2,4,3), P_3 = (3,2,-1)$. We berekenen het uitproduct $(P_2 - P_1) \times (P_3 - P_1) = (1,3,2) \times (2,1,-2) = (-8,6,-5)$. Deze vector staat loodrecht op het in (i) gevraagde vlak door P_1, P_2, P_3 (hiermee is (ii) dus opgelost).

De vergelijking van dit vlak is $< (-8,6,-5), (x,y,z) - (1,1,1) >= 0$, dat wil zeggen $-8x + 6y - 5z = -7$.

(iii) De oppervlakte van de driehoek met hoekpunten P_1, P_2, P_3 is de helft van de oppervlakte van het parallelogram opgespannen door $(P_2 - P_1)$ en $(P_3 - P_1)$, dat is dus de helft van de lengte van het uitproduct, dat is $\frac{1}{2}\sqrt{8^2 + 6^2 + 5^2} = \frac{1}{2}\sqrt{125} = \frac{5}{2}\sqrt{5}$.

c. De inhoud van het parallelepipedum opgespannen door de vectoren $\vec{OP_1}, \vec{OP_2}, \vec{OP_3}$ is de absolute waarde van de determinant

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}.$$

Door de eerste rij twee keer van de tweede rij af te trekken en drie keer van de derde rij zien we dat de determinant gelijk is aan

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -4 \end{vmatrix},$$

dat is 1. (-8+1) = -7. De inhoud van het parallelepipedum is dus +7.

3. (i) A bestaat uit $\mathbf{R}^3$ zonder het punt $(0,0,0)$, en $f : A \to \mathbf{R}^2$ is gegeven door

$$f(x,y,z) = (\frac{1}{2x^2 + y^2 + z^2}, xyz).$$

a. Als $P = (x,y,z)$ een punt in A is, dan is de afstand tot (0,0,0) gelijk aan $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, en $r > 0$. Het punt $(0,0,0)$ ligt op de rand van de bol met middelpunt P en straal r, dus die bol zelf (die bestaat uit punten Q met afstand tot P kleiner dan r) is deel van A. A is dus open.

We schrijven nu $f_1(x,y,z) = \frac{1}{(2x^2+y^2+z^2)}$, $f_2(x,y,z) = xyz$.

De partiële afgeleiden van f_1 zijn $\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y,z) = \frac{-4x}{(2x^2+y^2+z^2)^2}$, $\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y,z) = \frac{-2y}{(2x^2+y^2+z^2)^2}$, $\frac{\partial f_1}{\partial z}(x,y,z) = \frac{-2z}{(2x^2+y^2+z^2)^2}$. De tellers en noemers van deze functies zijn veeltermen en dus continu, en de noemers zijn op A niet nul, dus de partiële afgeleiden van f_1 zijn continu.

De partiële afgeleiden van f_2 zijn $\partial f_2/\partial x(x,y,z) = yz$, $\partial f_2/\partial y(x,y,z) = xz$, $\partial f_2/\partial z(x,y,z) = xy$, dit zijn alledrie veeltermen, die dus continu zijn. Conclusie is dat f differentieerbaar is op A (zelfs C^1).

b. Door invullen in de partiële afgeleiden vinden we

$$DF(2,0,1) = \begin{pmatrix} \frac{-8}{81} & 0 & \frac{-2}{81} \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

De beste lineaire benadering van f is in de buurt van $(2,0,1)$ wordt gegeven door de functie

$$g(x,y,z) = f(2,0,1) + \begin{pmatrix} \frac{-8}{81} & 0 & \frac{-2}{81} \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-2 \\ y \\ z-1 \end{pmatrix},$$

dus $g(x,y,z) = (\frac{1}{9} - \frac{8}{81}(x-2) - \frac{2}{81}(z-1),\ 2y)$.

c. Om het raakvlak aan het niveauoppervlak $f_1(x,y,z) = \frac{1}{4}$ in het punt $(1,1,1)$ te bepalen berekenen we $\nabla f(1,1,1) = (-\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, -\frac{1}{8})$. De vergelijking is dan $< (-\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, -\frac{1}{8}), (x,y,z) - (1,1,1) > = 0$. Dit levert uiteindelijk $2x + y + z = 4$.

4. **a.** Omdat $F(x,y,z) = (x^3 - xy + y^3,\ y^3 - yz + z^3,\ z^3 - zx + x^3)$, geldt

$$DF(x,y,z) = \begin{pmatrix} 3x^2 - y & 3y^2 - x & 0 \\ 0 & 3y^2 - z & 3z^2 - y \\ 3x^2 - z & 0 & 3z^2 - x \end{pmatrix}.$$

Er geldt $G(x,y,z) = F(F(x,y,z))$. De kettingregel levert nu:
$DG(0,1,0) = DF(F(0,1,0)) \circ DF(0,1,0) = DF(1,1,0) \circ DF(0,1,0) =$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 12 & -2 \\ 0 & 9 & -3 \\ -3 & 9 & 0 \end{pmatrix}.$$

b. Stel $k(x,y) = (x, y, f(x,y))$. Omdat f differentieerbaar is en de functies $(x,y) \to x$ en $(x,y) \to y$ ook, is k differentieerbaar. Nu volgt met de kettingregel $Dh(x,y) = Dg(k(x,y)) \circ Dk(x,y)$. (We kunnen hier zonder gevaar voor verwarring de drie variabelen van g de namen (x,y,z) geven en $z = f(x,y)$ schrijven.) Uitgeschreven wordt dit:

$$(\frac{\partial h}{\partial x}(x,y)\ \frac{\partial h}{\partial y}(x,y)) = (\frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z)\ \frac{\partial g}{\partial y}(x,y,z)\ \frac{\partial g}{\partial z}(x,y,z)) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}.$$

Dus $\nabla h(x,y) = (\frac{\partial h}{\partial x}(x,y), \frac{\partial h}{\partial y}(x,y))$
$= (\frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z) + \frac{\partial g}{\partial z}(x,y,z) \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial g}{\partial y}(x,y,z) + \frac{\partial g}{\partial z}(x,y,z) \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(x,y))$.

c. Voor $x = 1$, $y = 1$ hebben we $c^3 + c - 2 = 0$, hieraan wordt voldaan door $c = 1$. Conclusie $c(1,1) = 1$. Nu kunnen we onderdeel b. toepassen met $z = f(x,y) = c(x,y)$, $g(x,y,z) = z^3 + zy^2 - 2x^2$. We krijgen dan $h(x,y) = 0$ dus $\nabla h(x,y) = (0,0)$. Invullen levert twee vergelijkingen:
Ten eerste $0 = \frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z) + \frac{\partial g}{\partial z}(x,y,z) \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -4x + (3c^2 + y^2)\frac{\partial c}{\partial x}(x,y)$, hieruit krijgen we voor $x = 1, y = 1, c = 1$, $\frac{\partial c}{\partial x}(1,1) = 1$.
Ten tweede $0 = \frac{\partial g}{\partial y}(x,y,z) + \frac{\partial g}{\partial z}(x,y,z) \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2cy + (3c^2 + y^2)\frac{\partial c}{\partial y}(x,y)$. Voor $x = 1, y = 1, c = 1$ komt er $0 = 2 + 4\frac{\partial c}{\partial y}(1,1)$ dus $\frac{\partial c}{\partial y}(1,1) = -\frac{1}{2}$.