Tentamen Infinitesimaalrekening 1B

23 december 1999, 9.00 - 12.00 uur

- *Maak elke opgave op een apart vel!*
- Zet op elk vel dat je inlevert je naam, het nummer van je collegekaart, en de naam van je werkcollegeleid(st)er (Lorna Booth, Christian van Enckevort, Menno Genseberger, Piet Lemmens, Martijn Pistorius, Corrie Quant, Bob Rink, Liesbeth de Wreede). Als je geen werkcollege hebt gevolgd, schrijf dan "geen werkcollege" op elk vel. De opgaven moeten op aparte stapels worden ingeleverd.
- De vier opgaven tellen even zwaar.
- Schrijf je naam en adres op het tentamenbriefje en lever dat op een apart stapeltje in.
- Laat bij elke opgave duidelijk zien hoe je aan je antwoorden komt.
- Het boek, college- of werkcollegeaantekeningen, rekenmachines e.d. mogen niet gebruikt worden.
- *VEEL SUCCES!*

1. **a.** Vind alle differentieerbare functies $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ met

$$xf'(x) - 4f(x) = 1.$$

b. Bepaal een twee keer differentieerbare functie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ met

$$f''(x) + 4f'(x) + 4f(x) = 0,\ f(0) = 1,\ f'(0) = 1.$$

c. Vind alle twee keer differentieerbare functies $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ met

$$f''(x) + 4f'(x) + 4f(x) = x^2 + 4x + 4.$$

2. W is het gebied begrensd door het vlak $z = 1$ en de paraboloïde $z = x^2 + y^2$.

a. Schets W, en bepaal de inhoud van W.

b. Bepaal het zwaartepunt van W (de massadichtheid is 1).

c. Bereken

$$\int\int\int_W (x^2 + y^2)\, z^2 dV.$$

Z.O.Z!!!!!!!!!

3. **a.** We definiëren de functie $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ en het vectorveld $\mathbf{F} : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ door

$$f(x, y, z) = x^2yz, \quad \mathbf{F}(x, y, z) = (xy^2, x^2z, xyz).$$

Bepaal grad(f), div($\mathbf{F}$) en rot($\mathbf{F}$) (= curl($\mathbf{F}$)).

b. Stel $c : [0, 1] \to \mathbf{R}^3$ is het pad gegeven door $c(t) = (3t, t^2, -t)$, en stel $\mathbf{G}(x, y, z) = (2xyz, x^2z, x^2y)$.

Bereken $\int_c \mathbf{G} \cdot d\mathbf{s}$. (probeer zo handig mogelijk te rekenen)

c. Stel $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ is een twee keer continu differentieerbare functie. We definiëren $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ door

$$g(s, t) = f(s^2 + t^2, 2st).$$

U mag aannemen dat g nu ook twee keer continu differentieerbaar is.
We noteren (zoals gebruikelijk)

$$g_{st} = \frac{\partial^2}{\partial t \partial s}(g(s, t)).$$

Druk g_{st} uit in de partiële afgeleiden van f.

4. B is de bol $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ (met $R > 0$.)

a. Bereken

$$\int\int\int_B z^2 dV.$$

b. Bepaal het maximum en het minimum van $f(x, y, z) = x^2 + yz$ op de rand van B, en ook de punten waar het maximum en minimum aangenomen worden.

c. Heeft f extremen in het inwendige van B? Waarom wel of waarom niet? (Probeer zoveel mogelijk te zeggen, ook als je deze som niet helemaal kan oplossen.)

EINDE