Tentamen Infinitesimaalrekening 1B

23 december 1999, Uitwerkingen

Nota Bene: in de onderstaande uitwerkingen vind je een *mogelijke* oplossing van de opgave. Een andere oplossing (met hetzelfde antwoord) kan ook goed zijn! De uitwerkingen hieronder zijn voor de duidelijkheid heel erg uitgebreid.
Het tentamencijfer is het aantal punten gedeeld door 10.

1. **a.** (8 punten) Één oplossing is onmiddellijk te zien: $f(x) = -\frac{1}{4}$. (Als je die niet meteen ziet, stel $f(x) = c$ en vul in.) Daarna lossen we het homogene probleem op: $xf'(x) - 4f(x) = 0$ levert $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{4}{x}$, hieruit volgt door integreren $\log|f(x)| = 4\log|x| + c$, dus $|f(x)| = e^{4\log|x|} \cdot e^c = (e^{\log|x|})^4 \cdot k$ met $k > 0$, zodat $f(x) = \pm kx^4$ met $k > 0$. Door proberen zie je dat $k = 0$ ook een oplossing levert. Conclusie: de oplossing van het homogene probleem is $f(x) = cx^4$ met $c \in \mathbf{R}$.

   Dus is de oplossing van de oorspronkelijke vergelijking is

   $$f(x) = cx^4 - \frac{1}{4}.$$

   Wie verstandig is controleert deze oplossing even door invullen.

   b. (8 punten) We lossen eerst de vergelijking $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$ op, we vinden een dubbele wortel $\lambda = -2$. Daarom is de algemene oplossing van $f''(x) + 4f'(x) + 4f(x) = 0$: $f(x) = pe^{-2x} + qxe^{-2x}$ met p, q willekeurige reële constanten. Invullen van de beginvoorwaarden levert:
   $1 = f(0) = p$ en $1 = f'(0) = -2p + q$, dus $p = 1$ en $q = 3$. De oplossing van de gevraagde vergelijking is dus $f(x) = e^{-2x} + 3xe^{-2x}$.

   c. (9 punten) Het homogene probleem hebben we in onderdeel b. al opgelost. We proberen nu één oplossing van het inhomogene probleem te vinden en stellen daarvoor $f(x) = ax^2 + bx + c$. Dan geldt $f'(x) = 2ax + b$ en $f''(x) = 2a$, door invullen vinden we

   $$2a + 8ax + 4b + 4ax^2 + 4bx + 4c = x^2 + 4x + 4.$$

   Dit levert $4a = 1$, $8a + 4b = 4$, $2a + 4b + 4c = 4$, dus $a = \frac{1}{4}, b = \frac{1}{2}, c = \frac{3}{8}$ dus $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}$. (Invullen leert dat deze f inderdaad voldoet.)
   Als oplossing van de oorspronkelijke vergelijking krijgen we nu

   $$f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8} + pe^{-2x} + qxe^{-2x}$$

   met p, q willekeurige reële constanten.

2. W is het gebied begrensd door het vlak $z = 1$ en de paraboloïde $z = x^2 + y^2$.

a. (8 punten) Om W te schetsen bepalen we bijv. de doorsneden met de vlakken $x = 0$, $y = 0, z = 1$. De inhoud van W bepalen kan bijvoorbeeld met de plakjes-methode: we verdelen W door vlakken evenwijdig aan het horizontale $x - y$ vlak in plakjes ter dikte Δz. De horizontale doorsnede ter hoogte z is de cirkel met straal $\sqrt{z}$, die heeft oppervlakte πz. De inhoud van een plakje ter hoogte z is dan ongeveer $\pi z \Delta z$. De inhoud van W is daarom

$$\int_0^1 \pi z dz = \frac{\pi}{2}.$$

b. (8 punten) Het lichaam W is rotatiesymmetrisch t.o.v. de $z - as$, daarom moet het zwaartepunt op de $z - as$ liggen. Of, je kunt ook de integralen $\int\int\int_W x dV$ en $\int\int\int_W y dV$ uitrekenen, die zijn beide 0. (Dat zie je bijv. zo: $\int\int\int_W x dV = \int_0^1 \int_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}} \int_{-\sqrt{z-y^2}}^{\sqrt{z-y^2}} x dx dy dz$ en $\int_{-\sqrt{z-y^2}}^{\sqrt{z-y^2}} x dx = 0$. Zelfde verhaal voor y door verwisselen van integratievolgorde (x en y)).

Verder hebben we $\int\int\int_W z dV = \int_0^1 \int_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}} \int_{-\sqrt{z-y^2}}^{\sqrt{z-y^2}} z dx dy dz$. De binnenste dubbele integraal (over dx en dy) is z maal de oppervlakte van de cirkel met straal $\sqrt{z}$, dus z maal πz. En dus is $\int\int\int_W z dV = \pi \int_0^1 z^2 dz = \frac{\pi}{3}$. Deze integraal gedeeld door de inhoud is $\frac{2}{3}$. Het zwaartepunt is dus $(0, 0, \frac{2}{3})$.

c. (9 punten) Nu ontkomen we niet aan een substitutie (ik heb a. en b. zonder substitutie gedaan om te laten zien hoe dat kan, maar ze kunnen ook met dezelfde substitutie als hieronder). Het handigste is cylindercoördinaten te substitueren (of, anders gezegd, poolcoördinaten in plaats van x en y): stel $\Phi(r, \theta, z) = (x, y, z)$ met $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$, en $0 \leq z \leq 1$, $0 \leq r \leq \sqrt{z}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. (Dit is een keurig "elementair gebied" volgens het boek.) De transformatie $\Phi(r, \theta, z) = (x, y, z)$ is continu differentieerbaar en 1-1 op dit gebied behalve de rand, en $D\Phi(r, \theta, z) = r$.

Er komt dan $\int\int\int_W (x^2 + y^2) z^2 dV = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{z}} \int_0^{2\pi} r^3 z^2 d\theta dr dz = 2\pi \int_0^1 \frac{1}{4} z^4 dz = \frac{1}{10}\pi$.

3. **a.** (7 punten) Door het invullen in de definities zien we grad(f) $= (2xyz, x^2z, x^2y)$, div $\mathbf{F} = y^2 + 0 + xy = y^2 + xy$, en rot $\mathbf{F} = (xz - x^2, -yz, 2xz - 2xy)$.

b. (8 punten) $\mathbf{G}(x, y, z) =$ grad $f(x, y, z)$ met f als in onderdeel a, dus $\int_c \mathbf{G} \cdot d\mathbf{s} = f(c(1)) - f(c(0)) = f(3, 1, -1) - f(0, 0, 0) = -9$.

c. (10 punten)
We noteren $x(s,t) = s^2 + t^2, y(s,t) = 2st$.
In het volgende nemen we de functie f en de partiële afgeleiden steeds in het punt $(x(s,t), y(s,t))$, en de functies x en y en hun partiële afgeleiden steeds in het punt (s,t).

De kettingregel levert:
$g_s = f_x \cdot x_s + f_y \cdot y_s$.
Hieruit volgt met de produktregel: $g_{st} = (g_s)_t = (f_x)_t x_s + f_x x_{st} + (f_y)_t y_s + f_y y_{st}$.
Met de kettingregel krijgen we:
$(f_x)_t = f_{xx}x_t + f_{xy}y_t$ en $(f_y)_t = f_{yx}x_t + f_{yy}y_t$.
Omdat f twee keer continu differentieerbaar is geldt $f_{xy} = f_{yx}$.
Conclusie:

$$g_{st} = f_{xx}x_s x_t + f_{xy}(x_s y_t + x_t y_s) + f_{yy}y_s y_t + f_x x_{st} + f_y y_{st}.$$

Nu gaan we invullen: $x_s = 2s, x_t = 2t, y_s = 2t, y_t = 2s, x_{st} = 0, y_{st} = 2$. Er komt dan:
$g_{st} = 4st f_{xx} + (4s^2 + 4t^2) f_{xy} + 4st f_{yy} + 2f_y$.

4. **a.** (8 punten) We substitueren bolcoördinaten: $(x,y,z) = \Phi(\rho,\theta,\phi) =$
$= (\rho\cos\theta\sin\phi, \rho\sin\theta\sin\phi, \rho\cos\phi)$ op het gebied $0 \le \rho \le R$, $0 \le \theta \le 2\pi$, $0 \le \phi \le \pi$. De substitutie Φ is continu differentieerbaar op dit gebied en 1-1 op dit gebied behalve de rand, en men rekent eenvoudig uit dat $\det(D\Phi((\rho,\theta,\phi)) = -\rho^2\sin\phi$, zodat $|\det(D\Phi((\rho,\theta,\phi))| = \rho^2\sin\phi$.
Er volgt nu

$$\int\int\int_B z^2 dV = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \rho^2\cos^2\phi \cdot \rho^2 \sin\phi \, d\phi \, d\theta \, d\rho =$$

$$= \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \rho^4 \cos^2\phi \sin\phi \, d\phi \, d\theta \, d\rho = 2\pi \int_0^R \rho^4 d\rho \int_0^{\pi} \cos^2\phi \sin\phi \, d\phi =$$

$$= 2\pi \cdot \frac{R^5}{5} \cdot \left(-\frac{1}{3}\cos^3(\pi) + \frac{1}{3}\cos^3(0)\right) = \frac{4}{15}\pi R^5.$$

b. (10 punten) Omdat de rand van B een gesloten en begrensde verzameling is en de functie f continu is, weten we zeker dat het maximum en minimum ergens op de rand van B aangenomen worden. Het gaat er nu om, die punten te vinden. Stel het maximum of minimum wordt aangenomen op een punt (x, y, z). Noem $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Dan $\nabla g(x, y, z) = (2x, 2y, 2z) \neq (0, 0, 0)$ voor punten (x, y, z) op de rand. De multiplicatorenmethode van Lagrange levert $(2x, z, y) = \nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z) = \lambda(2x, 2y, 2z)$ voor een getal λ, en dit levert drie vergelijkingen op:
$2x = \lambda \cdot 2x$,
$z = \lambda \cdot 2y$,
$y = \lambda \cdot 2z$.
Omdat (x, y, z) op de rand van B ligt geldt nog een (vierde) vergelijking
$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Uit de eerste vergelijking volgt $x = 0$ of $\lambda = 1$.
Stel eerst $\lambda = 1$. Dan krijgen we uit de tweede en derde vergelijking $z = 2y = 4z$, dus $z = 0$ en ook $y = 0$. Dus is $x^2 = R^2$. We krijgen twee mogelijke punten: $P_1 = (R, 0, 0)$ en $P_2 = (-R, 0, 0)$.

Stel nu $x = 0$. Dan krijgen we uit de tweede en derde vergelijking $z = \lambda^2 \cdot 4z$. Als $z = 0$ zou zijn, zou vanwege $y = \lambda \cdot 2z$ ook $y = 0$, dus dan $(x, y, z) = (0, 0, 0)$, maar dit kan niet want het punt ligt op de rand van de bol. Dus $z \neq 0$. Maar dan volgt $4 \cdot \lambda^2 = 1$ dus $\lambda = +\frac{1}{2}$ of $\lambda = -\frac{1}{2}$.
Als $\lambda = \frac{1}{2}$ volgt $z = y$, maar ook $y^2 + z^2 = R^2$ (immers $x = 0$), dus $y^2 = z^2 = \frac{R^2}{2}$. We krijgen twee mogelijke punten $P_3 = (0, \frac{R}{\sqrt{2}}, \frac{R}{\sqrt{2}})$ en $P_4 = (0, -\frac{R}{\sqrt{2}}, -\frac{R}{\sqrt{2}})$.
Als $\lambda = -\frac{1}{2}$ volgt $z = -y$, maar ook $y^2 + z^2 = R^2$ (immers $x = 0$), dus alweer $y^2 = z^2 = \frac{R^2}{2}$. We krijgen twee mogelijke punten $P_5 = (0, -\frac{R}{\sqrt{2}}, \frac{R}{\sqrt{2}})$ en $P_6 = (0, \frac{R}{\sqrt{2}}, -\frac{R}{\sqrt{2}})$.
Het maximum en het minimum worden allebei aangenomen in één of meer van de zes punten P_1 tot en met P_6.

Dit lijkt erger dan het is: we hoeven alleen maar de functiewaarden in deze punten uit te rekenen door in te vullen in $f(x, y, z) = x^2 + yz$, er komt:
$f(P_1) = f(P_2) = R^2, f(P_3) = f(P_4) = \frac{R^2}{2}, f(P_5) = f(P_6) = -\frac{R^2}{2}$.
Conclusie: het maximum is R^2, aangenomen in $(R, 0, 0)$ en $(-R, 0, 0)$, en het minimum is $-\frac{R^2}{2}$, aangenomen in $(0, -\frac{R}{\sqrt{2}}, \frac{R}{\sqrt{2}})$ en in $(0, \frac{R}{\sqrt{2}}, -\frac{R}{\sqrt{2}})$.
Nota bene: we hoeven verder helemaal niet naar P_3 en P_4 te kijken.

c. (7 punten) Het inwendige van B is een open verzameling, en daarom kan f daar alleen een extreem hebben in een kritiek punt. Kritieke punten zijn de punten (x, y, z) met $\nabla f(x, y, z) = (0, 0, 0)$, dat wil zeggen $(2x, z, y) = (0, 0, 0)$. Het enige kritieke punt is dus $(0, 0, 0)$. Als f een extreem in het inwendige van B heeft dan kan dat alleen in $(0, 0, 0)$ zijn. Echter, als je langs het pad $c(t) = (t, 0, 0)$ naar dit punt nadert heb je hierop $f(c(t)) = t^2$. In elke omgeving van $(0, 0, 0)$ komen dus positieve functiewaarden van f voor. Als je nadert langs het pad $k(t) = (0, t, -t)$ krijg je $f(k(t)) = -t^2$. In elke omgeving van $(0, 0, 0)$ komen dus ook negatieve functiewaarden voor. Conclusie: $(0, 0, 0)$ is een zadelpunt, dus geen extreem. Dus heeft f geen extremen op het inwendige van B.