

Infinitesimaalrekening

Eerste deelttoets 7 november 2005, 15.00 – 18.00 uur

- Maak de opgaven op het uitgereikte papier.
- Vul op elk blad dat u inlevert uw naam en uw studentnummer in.
- Zet op het eerste blad de naam van uw werkcollegebegeleider.

Nummers van werkcollegegroepen en namen van werkcollegebegeleiders:

- 1 (MIN 012) Tammo Jan Dijkema,
- 2 (MIN 016) Vincent van der Noort,
- 3 (MIN 018) Taoufik Bakri (Surya in sept),
- 4 (MIN 021) Oliver Lorscheid,
- 5 (MIN 023) Hil Meijer,
- 6 (BBL 108) Joost Rommes,
- 7 (BBL 165) Alex Boer,
- 8 (BBL 166A) Charlene Kalle.

- Geef niet alleen het antwoord, maar laat ook zien hoe u aan dat antwoord komt.
- Bij elk onderdeel staat aangegeven hoeveel punten u ermee kunt behalen.
- Op dit tentamen mogen geen grafische of symbolische rekenapparaten gebruikt worden. Een gewoon rekenapparaat is wel toegestaan. Ook het raadplegen van boeken, dictaten of eigen aantekeningen is niet toegestaan.
- Veel succes!

Opgave 1 (15 punten)

Indien u t/m 17 oktober steeds aanwezig bent geweest op het werkcollege, dan geldt het volgende: Het cijfer dat u voor werkcollegequiz 1 behaald hebt vermenigvuldigd met $\frac{3}{2}$ wordt vergeleken met het puntenaantal dat u voor deze opgave behaalt. Het hoogste van beide telt.

i) Bereken: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + 2x + 1}{2x^3 - 1}$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + 2x + 1}{2x^3 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3}}{2 - \frac{1}{x^3}} = \frac{3 + 0 + 0}{2 - 0} = \frac{3}{2}$$

- ii) Is de functie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^3 - x$ injectief, surjectief en/of bijectief?

De functie is niet injectief want bijvoorbeeld $f(0) = f(1) = 0$.

f is een continue functie op $\mathbb{R}$ (want het is een veelterm) en verder is $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ en $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$. Dus $\text{Im } f = \mathbb{R}$, m.a.w. f is surjectief.

Omdat f niet injectief is is f ook niet bijectief.

- iii) Is $g(x) = \frac{x^5 - x^3}{x^3 - x}$ een even, oneven functie of geen van beide?

Een even functie f voldoet aan $f(-x) = f(x)$ voor alle x in het domein van f . Op zijn domein $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$ geldt:

$$g(-x) = \frac{(-x)^5 - (-x)^3}{(-x)^3 - (-x)} = \frac{-x^5 + x^3}{-x^3 + x} = \frac{x^5 - x^3}{x^3 - x} = f(x)$$

Dus f is een even functie.

Opgave 2 (15 punten)

Indien u t/m 17 oktober steeds aanwezig bent geweest op het werkcollege, dan geldt het volgende: Het cijfer dat u voor werkcollegequiz 2 behaald hebt vermenigvuldigd met $\frac{3}{2}$ wordt vergeleken met het puntenaantal dat u voor deze opgave behaalt. Het hoogste van beide telt.

- i) Onderzoek de volgende limiet: $\lim_{x \downarrow 1} (x^2 - 1)^{\frac{1}{4}} \log(x^2 - 1)$.

Substitueer bijvoorbeeld eerst $x^2 = y$ dan nog steeds $\lim_{y \downarrow 1}$ en vervolgens $y - 1 = z$ dan $\lim_{z \downarrow 0}$ en krijgen we een standaardlimiet.

$$\lim_{x \downarrow 1} (x^2 - 1)^{\frac{1}{4}} \log(x^2 - 1) = \lim_{y \downarrow 1} (y - 1)^{\frac{1}{4}} \log(y - 1) = \lim_{z \downarrow 0} (z)^{\frac{1}{4}} \log(z) = 0.$$

Immers $\lim_{z \downarrow 0} (z)^r \log(z) = 0$ voor elke $r > 0$.

- ii) Bereken: $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$.

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = [\arctan x]_0^1 = \arctan 1 - \arctan 0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}.$$

iii) Bepaal het reële en imaginaire deel van $\frac{1+i}{3-4i}$.

$$\frac{1+i}{3-4i} = \frac{3+4i}{3+4i} \cdot \frac{1+i}{3-4i} = \frac{-1+7i}{25} = -\frac{1}{25} + \frac{7}{25}i.$$

Dus reële deel is $-\frac{1}{25}$ en het imaginaire deel is $\frac{7}{25}$.

Opgave 3 (10 punten)

Bepaal alle complexe oplossingen van $z^4 + z^2 + 1 = 0$.

We bepalen eerst z^2 m.b.v. de abc-formule:

$$z^2 = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{3}i = e^{(\pm \frac{2}{3} + 2k)\pi i}$$

met $k \in \mathbb{Z}$. Dus $z = e^{(\pm \frac{1}{3} + k)\pi i}$, dit levert de mogelijkheden $z = e^{\pm \frac{1}{3}\pi i}$ en $z = e^{\pm \frac{4}{3}\pi i}$ ofwel $z = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{3}i$ en $z = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{3}i$.

Opgave 4 (10 punten)

a) Schrijf $\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i$ in de vorm $re^{i\phi}$ met $r \geq 0$ en $\phi \in \mathbb{R}$.

We gebruiken $z = re^{i\phi} = \cos \phi + i \sin \phi$ met $r = \left| \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i \right| = \frac{1}{2}$. Dus $\cos \phi = \frac{1}{2}$ en $\sin \phi = \frac{1}{2} \sqrt{3}$, hieruit concluderen we dat (bijvoorbeeld) $\phi = \frac{1}{3}\pi$. M.a.w. $\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{3}\pi i}$.

b) Bepaal $\text{Im} \left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i \right)^{50}$.

$$\left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i \right)^{50} = \left(\frac{1}{2}e^{\frac{1}{3}\pi i} \right)^{50} = \left(\frac{1}{2} \right)^{50} e^{\frac{50}{3}\pi i} = \left(\frac{1}{2} \right)^{50} e^{\frac{2}{3}\pi i} = \left(\frac{1}{2} \right)^{50} \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{3}i \right).$$

$$\text{Dus } \text{Im} \left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i \right)^{50} = \left(\frac{1}{2} \right)^{50} \sqrt{3}.$$

Opgave 5 (10 punten)

Geef een primitieve van $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto e^{2x} \cos(x)$.

We gebruiken twee keer partiële integratie:

$$\begin{aligned} \int e^{2x} \cos(x) dx &= \frac{1}{2} e^{2x} \cos(x) - \int \frac{1}{2} e^{2x} (-\sin(x)) dx \\ &= \frac{1}{2} e^{2x} \cos(x) + \int \frac{1}{2} e^{2x} \sin(x) dx \\ &= \frac{1}{2} e^{2x} \cos(x) + \frac{1}{4} e^{2x} \sin(x) - \int \frac{1}{4} e^{2x} \cos(x) dx \end{aligned}$$

Breng nu de laatste term naar de andere kant dan krijgen we

$$\frac{5}{4} \int e^{2x} \cos(x) dx = \frac{1}{2} e^{2x} \cos(x) + \frac{1}{4} e^{2x} \sin(x)$$

ofwel

$$\int e^{2x} \cos(x) dx = \frac{2}{5} e^{2x} \cos(x) + \frac{1}{5} e^{2x} \sin(x)$$

Natuurlijk is dit één primitieve, je mag hier elke constante bij optellen.

Opgave 6 (10 punten)

Onderzoek $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \cos x}{\sin x - x}$ met behulp van de stelling van Taylor.

We gebruiken

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + R_3(\sin x; x, 0), \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + R_3(\cos x; x, 0).$$

Dan is

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \cos x}{\sin x - x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \left(1 - \frac{x^2}{2} + R_3(\cos x; x, 0)\right)}{-\frac{x^3}{6} + R_3(\sin x; x, 0)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - \frac{x^5}{2} + x^3 R_3(\cos x; x, 0)}{-\frac{x^3}{6} + R_3(\sin x; x, 0)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{x^2}{2} + R_3(\cos x; x, 0)}{-\frac{1}{6} + \frac{R_3(\sin x; x, 0)}{x^3}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1 - 0 + \lim_{x \rightarrow 0} R_3(\cos x; x, 0)}{-\frac{1}{6} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{R_3(\sin x; x, 0)}{x^3}} \\
&= \frac{1 - 0 + 0}{-\frac{1}{6} + 0} = -6,
\end{aligned}$$

omdat volgens Stelling 16.1 uit het dictaat voor de resttermen geldt

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{R_3(\sin x; x, 0)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{R_3(\cos x; x, 0)}{x^3} = 0$$

en dus ook

$$\lim_{x \rightarrow 0} R_3(\cos x; x, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{R_3(\cos x; x, 0)}{x^3} \lim_{x \rightarrow 0} x^3 = 0 \cdot 0 = 0.$$

Opgave 7 (10 punten)

Bepaal de som: $\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m 2^m}$.

Er geldt voor $-1 < x < 1$: $\log(1+x) = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{x^m}{m}$. Vul nu $x = -\frac{1}{2}$ in. Dit geeft:

$$-\log(2) = \log\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^m}{m} = -\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^m}{m} = -\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m 2^m}.$$

Dus

$$\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m 2^m} = -\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m 2^m} = -\frac{1}{2} + \log(2).$$

Opgave 8 (10 punten)

Geef de 2^e -orde Taylorveelterm van de functie $x \mapsto \sqrt{1+x}$ in het steunpunt 0.

Als $f(x) = \sqrt{1+x}$ dan is $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$ en $f''(x) = \frac{-1}{4(1+x)\sqrt{1+x}}$. De tweede-orde Taylorveelterm in het steunpunt 0 wordt gegeven door

$$f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2$$

Aangezien $f(0) = 1$, $f'(0) = \frac{1}{2}$ en $f''(0) = -\frac{1}{4}$ is deze tweede-orde benadering van $x \mapsto \sqrt{1+x}$ rond 0 gelijk aan

$$1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$$

Opgave 9 (10 punten)

Geef de cylinder- en bolcoördinaten van het punt in $\mathbb{R}^3$ met rechthoekige coördinaten

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -\sqrt{3} \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Cylindercoördinaten worden gegeven door (r, θ, z) , waarbij

$$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, z = z, \quad \text{met } r \geq 0, 0 \leq \theta < 2\pi, z \in \mathbb{R}.$$

Bolcoördinaten door (ρ, θ, ϕ) waarbij

$$x = \rho \sin \phi \cos \theta, y = \rho \sin \phi \sin \theta, z = \rho \cos \phi \quad \text{met } \rho \geq 0, 0 \leq \theta < 2\pi, 0 \leq \phi \leq \pi.$$

Merk op dat $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \rho \sin \phi$ en $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Dus $r = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ en $\rho = 4$. Hieruit leiden we af dat

$$\frac{x}{r} = \frac{1}{2} \sqrt{3} = \cos \theta, \quad \frac{y}{r} = -\frac{1}{2} = \sin \theta \quad \text{en} \quad \frac{z}{\rho} = \frac{1}{2} = \cos \phi$$

dus $\theta = \frac{11}{6}\pi$ en $\phi = \frac{1}{3}\pi$. We hebben dus

$$\text{cylindercoördinaten:} \quad \left(2\sqrt{3}, \frac{11}{6}\pi, 2 \right) \quad \text{en}$$

$$\text{bolcoördinaten:} \quad \left(4, \frac{11}{6}\pi, \frac{1}{3}\pi \right).$$