

Infinitesimaalrekening

Eerste deelttoets 6 november 2006, 15.00 – 18.00 uur

- Maak de opgaven op het uitgereikte papier.
- Vul op elk blad dat u inlevert uw naam en uw studentnummer in.
- Zet op het eerste blad de naam van uw werkcollegebegeleider.
Nummers van werkcollegegroepen en namen van werkcollegebegeleiders:
1 (BBL 165) Joost Rommes,
2 (BBL108) Jeroen Sijsling,
3 (MG 207) Budhi Arta Surya (Klaas Slooten in begin),
4 (MIN 204) Andor Lukacs,
5 (MIN 023) Alex Boer,
6 (MG 021) Bas Janssens,
7 (MG 018) Camilo Arias Abad,
8 (MG 016) Vincent van der Noort,
9 (MG 012) Charlene Kalle.
- Geef niet alleen het antwoord, maar laat ook zien hoe u aan dat antwoord komt.
- Bij elk onderdeel staat aangegeven hoeveel punten u ermee kunt behalen.
- Op dit tentamen mogen geen grafische of symbolische rekenapparaten gebruikt worden. Een gewoon rekenapparaat is wel toegestaan. Ook het raadplegen van boeken, dictaten of eigen aantekeningen is niet toegestaan.
- Veel succes!

Opgave 1 (15 punten)

Indien u t/m 16 oktober steeds aanwezig bent geweest op het werkcollege, dan geldt het volgende: Het cijfer dat u voor werkcollegequiz 1 behaald hebt vermenigvuldigd met $\frac{3}{2}$ wordt vergeleken met het puntenaantal dat u voor deze opgave behaalt. Het hoogste van beide telt.

i) Bereken: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos x}{x^2}$.

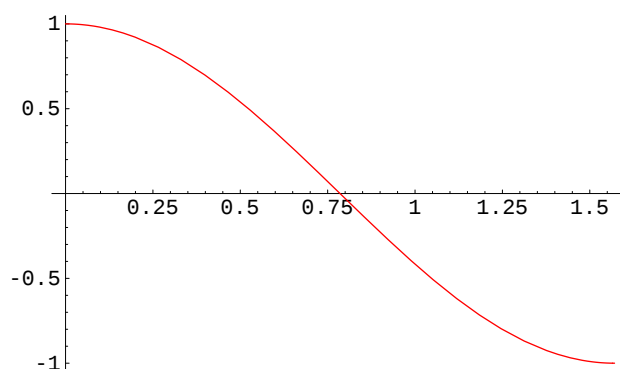
Antwoord: Gebruik de insluitstelling: Omdat $-1 \leq \cos x \leq 1$ is

$$0 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1}{x^2} \leq \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos x}{x^2} \leq \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = 0,$$

$$\text{dus } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos x}{x^2} = 0.$$

- ii) Is de functie $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \cos(2x)$ injectief, surjectief en/of bijectief?

Antwoord: Als je deze functie tekent zie je dat de functie strikt monotoon dalend is op het interval $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$:



dus is de functie injectief. De functie is niet surjectief en dus ook niet bijectief omdat bijvoorbeeld $5 \notin \text{Im } f$

- iii) Is $g(x) = \sin x \cos^3 x$ een even, oneven functie of geen van beide?

Antwoord: Omdat

$$g(-x) = \sin(-x) \cos^3(-x) = (-\sin x) (\cos x)^3 = -\sin x \cos^3 x = -g(x)$$

is de functie oneven.

Opgave 2 (15 punten)

Indien u t/m 16 oktober steeds aanwezig bent geweest op het werkcollege, dan geldt het volgende: Het cijfer dat u voor werkcollegequiz 2 behaald hebt vermenigvuldigd met $\frac{3}{2}$ wordt vergeleken met het puntenaantal dat u voor deze opgave behaalt. Het hoogste van beide telt.

i) Bereken $\sum_{j=0}^4 \binom{5}{j} 3^j$.

Antwoord: Met behulp van het binomium van Newton krijgen we:

$$\sum_{j=0}^4 \binom{5}{j} 3^j = -\binom{5}{5} 3^5 + \sum_{j=0}^5 \binom{5}{j} 3^j = -3^5 + (3+1)^5 = 4^5 - 3^5 = 781.$$

ii) Bereken: $\int_1^5 \frac{\log^3 x}{x} dx$.

Antwoord: Met behulp van de substitutie $u = \log x$ en dus $du = \frac{dx}{x}$ is

$$\int \frac{\log^3 x}{x} dx = \int u^3 du = \frac{1}{4} u^4 = \frac{1}{4} \log^4 x$$

en is

$$\int_1^5 \frac{\log^3 x}{x} dx = \left[\frac{1}{4} \log^4 x \right]_1^5 = \frac{1}{4} \log^4 5.$$

iii) Bepaal het reële en imaginaire deel van $\frac{2+3i}{1+4i}$.

Antwoord:

$$\frac{2+3i}{1+4i} = \frac{2+3i}{1+4i} \frac{1-4i}{1-4i} = \frac{14-5i}{17},$$

dus het reële deel is gelijk aan $\frac{14}{17}$ en het imaginaire deel aan $-\frac{5}{17}$.

Opgave 3 (10 punten)

Bepaal alle complexe getallen z die voldoen aan $z^2 = 4 - 4i$. Schrijf deze in de vorm $a + bi$ met $a, b \in \mathbb{R}$.

Antwoord: Merk op dat $|4 - 4i| = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$ dus $|z| = \sqrt{4\sqrt{2}} = 2\sqrt[4]{2}$. We bepalen nu één z de andere krijgen we door dit complexe getal met -1 te vermenigvuldigen. Eén z heeft argument $-\frac{\pi}{8}$ (immers z^2 heeft argument $-\frac{\pi}{4}$). Dit getal z ligt op de lijn door 0 en $4\sqrt{2} + (4 - 4i) = 4((1 + \sqrt{2}) - i)$ (ga na dat dit waar is, we tellen namelijk twee vectoren met dezelfde lengte op, namelijk de complexe getallen $4\sqrt{2}$ en $4 - 4i$). Dus z is een reëel veelvoud van $(1 + \sqrt{2}) - i$, namelijk

$$z = 2\sqrt[4]{2} \frac{(1 + \sqrt{2}) - i}{|(1 + \sqrt{2}) - i|} = 2\sqrt[4]{2} \frac{(1 + \sqrt{2}) - i}{\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}} = \sqrt[4]{8} \frac{(1 + \sqrt{2}) - i}{2 + \sqrt{2}}.$$

De andere oplossing is $z = -\sqrt[4]{8} \frac{(1+\sqrt{2})-i}{2+\sqrt{2}}$.

Opgave 4 (10 punten)

- a) Schrijf $\frac{1}{4} - \frac{1}{4}i$ in de vorm $re^{i\phi}$ met $r \geq 0$ en $\phi \in \mathbb{R}$.

Antwoord: $r = \left| \frac{1}{4} - \frac{1}{4}i \right| = \frac{1}{4} \sqrt{2}$. Men kan ϕ gelijk kiezen aan het argument, dit is $-\frac{\pi}{4}$. dus $z = \frac{1}{4} \sqrt{2} e^{-\frac{\pi}{4}i}$

- b) Bepaal $\text{Im} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}i \right)^{99}$.

Antwoord:

$$\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}i \right)^{99} = \left(\frac{1}{4} \sqrt{2} e^{-\frac{\pi}{4}i} \right)^{99} = \left(\frac{1}{4} \sqrt{2} \right)^{99} e^{-\frac{99\pi}{4}i} = \frac{\sqrt{2}}{2^{149}} e^{-\frac{3\pi}{4}i} = \frac{\sqrt{2}}{2^{149}} \left(-\frac{1}{2} \sqrt{2} - \frac{i}{2} \sqrt{2} \right).$$

Dus het imaginaire deel is gelijk aan $-\frac{\sqrt{2}}{2^{149}} \frac{1}{2} \sqrt{2} = -\frac{1}{2^{149}}$.

Opgave 5 (10 punten)

Bepaal de lokale maxima en minima van de functie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^4 - 8x^2 + 2$.

Antwoord: Voor een lokaal max of min moet de afgeleide in dat punt gelijk aan 0 zijn. Dus $f'(x) = 4x^3 - 16x = 0$, dus $x = 0$ en $x = \pm 2$. Om te bepalen of hier een lokaal max of min is bepalen we de waarde van de tweede afgeleide in deze punten. We hebben $f''(x) = 12x^2 - 16$, dus $f''(0) = -16$ hier hebben we dus een lokaal maximum, namelijk $f(0) = 2$; $f''(\pm 2) = 32$ hier hebben we een lokaal minimum, namelijk $f(\pm 2) = -14$.

Opgave 6 (10 punten)

Bepaal $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \log(1-x)}{\cos x - 1}$.

Antwoord: We passen l' Hôpital een aantal keren toe. Merk op dat bij invulling van de waarde $x = 0$ we twee keer $\frac{0}{0}$ hebben.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \log(1-x)}{\cos x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1-x) - \frac{x}{1-x}}{-\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x} - \frac{x}{(1-x)^2}}{-\cos x} = \frac{-2}{-1} = 2$$

Opgave 7 (10 punten)

Leid uit de formule $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ formules af voor $\cos(x-y)$ en $\sin(x-y)$ uitgedrukt in $\cos x$, $\cos y$, $\sin x$, $\sin y$.

Antwoord: Merk op dat $e^{-iy} = \cos y - i \sin y$, dus is $e^{i(x-y)} = \cos(x-y) + i \sin(x-y)$ en is $\cos(x-y) = \operatorname{Re}(e^{i(x-y)})$ en $\sin(x-y) = \operatorname{Im}(e^{i(x-y)})$. Anderzijds is

$$\begin{aligned} e^{i(x-y)} &= e^{ix} e^{-iy} \\ &= (\cos x + i \sin x)(\cos y - i \sin y) \\ &= \cos x \cos y + \sin x \sin y + (\sin x \cos y - \cos x \sin y) i. \end{aligned}$$

Dus is

$$\begin{aligned} \cos(x-y) &= \cos x \cos y + \sin x \sin y & \text{en} \\ \sin(x-y) &= \sin x \cos y - \cos x \sin y. \end{aligned}$$

Opgave 8 (10 punten)

Geef de 2^e-orde Taylorveelterm van de functie $x \mapsto x \log x$ in het steunpunt 1.

Antwoord: De algemene Taylorveelterm in steunpunt 1 is:

$$f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{1}{2} f''(1)(x-1)^2$$

We bepalen nu voor $f(x) = x \log x$ de afgeleiden: $f'(x) = \log x + 1$ en $f''(x) = \frac{1}{x}$, dus $f(1) = 0$, $f'(1) = 1$ en $f''(1) = 1$, m.a.w. de 2^e-orde Taylorveelterm is gelijk aan

$$(x-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2$$

Opgave 9 (10 punten)

Los op: $f'(x) - 8f(x) = x$, met $f(0) = 0$.

Antwoord: Oplossingen homogene stelsel $f'(x) - 8f(x) = 0$ zijn ce^{8x} . We zoeken vervolgens naar de particuliere oplossing. Hiervoor proberen we $f(x) = ax + b$, dit geeft $a - 8(ax + b) = x$, ofwel $-8a = 1$ en $a - 8b = 0$. Gauss-eliminatie van dit stelsel geeft $a = -\frac{1}{8}$ en $b = -\frac{1}{64}$. Dus de algemene oplossing is

$$f(x) = -\frac{1}{8}x - \frac{1}{64} + ce^{8x}.$$

vul nu in de beginvoorwaarde, dit geeft $-\frac{1}{64} + c = 0$, dus $c = \frac{1}{64}$ en de oplossing van het beginvoorwaardeprobleem is:

$$f(x) = -\frac{1}{8}x - \frac{1}{64} + \frac{1}{64}e^{8x}.$$