Tentamen Infinitesimaalrekening 1a

22 oktober 2001

14–17 uur

- Zet uw naam op elk blad dat u inlevert. Zet op het eerste blad ook het nummer van uw collegekaart en de naam van uw werkcollegebegeleider (Barbara van den Berg, Natasja Davydova, Pepijn van der Laan, Tobias Mühlenbruch, Arno Swart, Pieter Hofstra, Alexa van der Waall, Liesbeth de Wreede).
- Geef niet alleen antwoorden, maar laat de hele redenering zien die tot het antwoord leidt.
- Gebruik gerust beweringen uit vorige onderdelen, ook als u daar niet uit kwam.
- Op het tentamen mag een eenvoudig rekenapparaat gebruikt worden, maar geen andere hulpmiddelen zoals grafische of symbolische rekenmachine, formulekaarten, dictaat, boek, eigen aantekeningen.
- Bij elke opgave staat het aantal punten dat u ermee kunt behalen.

Opgave 1 (9)

Geef de derde-orde Taylorveelterm van de functie $x \mapsto \sqrt{x}$ in het steunpunt 1.

Opgave 2 (8)

Onderzoek de volgende limiet: $\displaystyle\lim_{\varphi \to \pi/2} \frac{\varphi^{17}+1}{\sin^2\varphi - 1}$.

Opgave 3 (9)

Geef een zo groot mogelijk domein waarop het functievoorschrift $x \mapsto \sin\left(\frac{\arcsin x}{7}\right)$ een functie definieert.
Op welk deel van dit domein is de functie differentieerbaar, en wat is daar de afgeleide functie?

Opgave 4 (9)

Bereken de volgende integraal: $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{dt}{5+t^2}$.

Opgave 5 (12)

a) Geef een vergelijking van het raakvlak in het punt $(3, 1, 10)$ aan de grafiek van de functie $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x^2 + y^3$.

b) Geef een eenheidsnormaalvector op het raakvlak in onderdeel a).

Opgave 6 (8)

Bereken de inhoud van het parallellepipedum opgespannen door de vectoren $(1,2,3)$, $(0,2,1)$ en $(1,1,1)$.

Opgave 7 (24)

We bekijken de functie $f : U \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = xy|x| - 2$ op het gebied $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -2 < x < 2, -1 < y < 1\}$.

a) Bepaal de partiële afgeleiden van f op het gebied $U_0 = \{(x,y) \in U : x \neq 0\}$.

b) Beredeneer dat f op het gebied U_0 differentieerbaar is.

c) Bepaal de partiële afgeleiden van f in de resterende punten van U.

d) [1] Onderzoek of de functie f differentieerbaar is op U.

Opgave 8 (13)

Laat $F(x,y,z) = x^5 + y^4 \cosh z$.
We hebben een differentieerbare functie $f : U \to \mathbb{R}$ op een open verzameling $U \subset \mathbb{R}^2$. Er is gegeven dat $F(x,y,f(x,y)) = 0$ voor alle $(x,y) \in U$. Druk de partiële afgeleiden van f uit in x, y en $f(x,y)$.

Opgave 9 (8)

Zoals u weet, wordt het verband tussen de Cartesische coördinaten (x,y,z) in de ruimte en de bolcoördinaten (ρ,θ,φ) gegeven door

$$\begin{aligned} x &= \rho \sin\varphi \cos\theta & \qquad \rho &\geq 0, \\ y &= \rho \sin\varphi \sin\theta & 0 &\leq \theta < 2\pi, \\ z &= \rho \cos\varphi & 0 &\leq \varphi \leq \pi. \end{aligned}$$

De Cartesische coördinaten van het punt P zijn $(3,3,\sqrt{6})$. Vind de bolcoördinaten van P.

[1] Nummering verbeterd.