

Tentamen Infinitesimaalrekening 1a

3 januari 2002

9 – 12 uur

- Zet uw naam op elk blad dat u inlevert. Zet op het eerste blad ook het nummer van uw collegekaart.
- Geef niet alleen antwoorden, maar laat de hele redenering zien die tot het antwoord leidt.
- Gebruik gerust beweringen uit vorige onderdelen, ook als u daar niet uit kwam.
- Op het tentamen mag een eenvoudig rekenapparaat gebruikt worden, maar geen andere hulpmiddelen zoals grafische of symbolische rekenmachine, formulekaarten, dictaat, boek, eigen aantekeningen.
- Bij elke opgave staat het aantal punten dat u ermee kunt behalen.

Opgave 1 (9)

Geef de vijfde-orde Taylorveelterm in het steunpunt $\frac{\pi}{2}$ van de functie $x \mapsto \sin x$.

Opgave 2 (9)

Bereken de volgende integraal: $\int_1^e u \log u \, du$.

Opgave 3 (9)

Geef een zo groot mogelijk domein waarop het functievoorschrift

$$x \mapsto \log \left(\sqrt{4 + t^2} - t \right)$$

een functie definieert.

Op welk deel van dit domein is de functie differentieerbaar, en wat is daar de afgeleide functie?

Opgave 4 (10)

Onderzoek de limiet $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sinh x)^2}{1 - \cosh x}$ met behulp van de stelling van Taylor.

Opgave 5 (9)

- a) Onderzoek of de deelverzameling $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 7\}$ van $\mathbb{R}^2$ open is.
- b) Onderzoek ook of $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq y\}$ een open deelverzameling van $\mathbb{R}^2$ is.

Opgave 6 (9)

Beschouw de matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 5 & 7 & a \end{pmatrix}.$$

Bepaal a zo dat de determinant van A gelijk wordt aan 1.

Opgave 7 (9)

Beschouw de afbeeldingen $p : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ en $q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ gegeven door $p(x, y, z) = (e^z, x + y + z)$ en $q(x, y) = (x^2, xy, y^2)$. Bepaal de matrix van partiële afgeleiden van p , van q en van de samengestelde functie $q \circ p$.

Opgave 8 (10)

Geef een rationaal getal y zó dat $|y - \arctan \frac{1}{10}| < \frac{1}{100}$, en toon aan dat het aan deze eisen voldoet.

Opgave 9 (10)

Door de punten $(1, 1, 1)$, $(1, 3, 2)$ en $(2, 1, 0)$ in $\mathbb{R}^3$ gaat een vlak. Bereken de afstand van het punt $(-2, 3, 1)$ tot dit vlak.

Opgave 10 (16)

We bekijken differentieerbare functies $a : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $a(x, y) = \frac{y}{x^2+1}$, $b : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, en $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

- a) Bepaal de gradiënt van de functie $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ die wordt gegeven door $F(x, y) = a(c(y), b(x, y))$.
- b) Bepaal expliciete formules voor $b(x, y)$ en $c(y)$ zó dat de gradiënt van F in het punt $(0, 0)$ voldoet aan

$$\nabla F(0, 0) = (1, 0).$$

(Dit kan op veel verschillende manieren.)