# Tentamen Infinitesimaalrekening 1a

3 januari 2002

9 – 12 uur

- Zet uw naam op elk blad dat u inlevert. Zet op het eerste blad ook het nummer van uw collegekaart.
- Geef niet alleen antwoorden, maar laat de hele redenering zien die tot het antwoord leidt.
- Gebruik gerust beweringen uit vorige onderdelen, ook als u daar niet uit kwam.
- Op het tentamen mag een eenvoudig rekenapparaat gebruikt worden, maar geen andere hulpmiddelen zoals grafische of symbolische rekenmachine, formulekaarten, dictaat, boek, eigen aantekeningen.
- Bij elke opgave staat het aantal punten dat u ermee kunt behalen.

**Opgave 1** (9)

Geef de vijfde-orde Taylorveelterm in het steunpunt $\frac{\pi}{2}$ van de functie $x \mapsto \sin x$.

**Opgave 2** (9)

Bereken de volgende integraal: $\displaystyle\int_1^e u \log u \, du$.

**Opgave 3** (9)

Geef een zo groot mogelijk domein waarop het functievoorschrift

$$x \mapsto \log\left(\sqrt{4+t^2} - t\right)$$

een functie definieert.
Op welk deel van dit domein is de functie differentieerbaar, en wat is daar de afgeleide functie?

**Opgave 4** (10)

Onderzoek de limiet $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(\sinh x)^2}{1-\cosh x}$ met behulp van de stelling van Taylor.

Z.O.Z.

**Opgave 5** (9)

a) Onderzoek of de deelverzameling $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 > 7\}$ van $\mathbb{R}^2$ open is.

b) Onderzoek ook of $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \geq y\}$ een open deelverzameling van $\mathbb{R}^2$ is.

**Opgave 6** (9)

Beschouw de matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 5 & 7 & a \end{pmatrix}.$$

Bepaal $a$ zo dat de determinant van $A$ gelijk wordt aan 1.

**Opgave 7** (9)

Beschouw de afbeeldingen $p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ en $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ gegeven door $p(x,y,z) = (e^z, x+y+z)$ en $q(x,y) = (x^2, xy, y^2)$. Bepaal de matrix van partiële afgeleiden van $p$, van $q$ en van de samengestelde functie $q \circ p$.

**Opgave 8** (10)

Geef een rationaal getal $y$ zó dat $\left|y - \arctan \frac{1}{10}\right| < \frac{1}{100}$, en toon aan dat het aan deze eisen voldoet.

**Opgave 9** (10)

Door de punten $(1,1,1)$, $(1,3,2)$ en $(2,1,0)$ in $\mathbb{R}^3$ gaat een vlak. Bereken de afstand van het punt $(-2,3,1)$ tot dit vlak.

**Opgave 10** (16)

We bekijken differentieerbare functies $a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $a(x,y) = \frac{y}{x^2+1}$, $b : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, en $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

a) Bepaal de gradiënt van de functie $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die wordt gegeven door $F(x,y) = a(c(y), b(x,y))$.

b) Bepaal expliciete formules voor $b(x,y)$ en $c(y)$ zó dat de gradiënt van $F$ in het punt $(0,0)$ voldoet aan

$$\nabla F(0,0) = (1,0).$$

(Dit kan op veel verschillende manieren.)