Tentamen Infinitesimaalrekening 1b

21 december 2001

14–17 uur

- Zet uw naam op elk blad dat u inlevert. Zet op het eerste blad ook het nummer van uw collegekaart en de naam van uw werkcollegebegeleider (Barbara van den Berg, Natasja Davydova, Pepijn van der Laan, Tobias Mühlenbruch, Arno Swart, Lennaert van Veen, Alexa van der Waall, Liesbeth de Wreede).
- Geef niet alleen antwoorden, maar laat de hele redenering zien die tot het antwoord leidt.
- Gebruik gerust beweringen uit vorige onderdelen, ook als u daar niet uit kwam.
- Bij elke opgave staat het aantal punten dat u ermee kunt behalen.

Opgave 1 (9)

a) Laat $\alpha = -i - \sqrt{3}$. Geef een complex getal β zó dat $\arg(\alpha\beta) \neq \arg(\alpha) + \arg(\beta)$.

b) Geef alle complexe getallen die voldoen aan $(z-1)^4 = 81$.

Opgave 2 (9)

Laat zien dat minstens één van de volgende twee vectorvelden geen potentiaal heeft (dat wil zeggen: niet de gradiënt van een functie is). Vergeet niet uw antwoord te beredeneren.

$$\mathbf{G}(x,y,z) = \left(e^x \cos y + z, -e^x \sin y, x\right), \qquad \mathbf{F}(x,y,z) = \left(y + \frac{x}{10}, -x + \frac{y}{10}, 0\right).$$

Opgave 3 (9)

We bekijken $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = x + ye^z$. Van de functies $g, h, k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ weten we alleen dat ze C^2 zijn. We definiëren $p(u,v) = f(g(u,v), h(u,v), k(u,v))$. Bepaal $\dfrac{\partial^2 p}{\partial u \partial v}(u,v)$ in termen van de partiële afgeleiden van g, h en k.

Z.O.Z.

Opgave 4 (10)

Integreer het vectorveld $\mathbf{T}(x,y) = \left(y + \frac{x}{10}, -x + \frac{y}{10}\right)$ over de eenheidscirkel in het vlak. Doorloop de cirkel eenmaal; geef aan welke oriëntatie u kiest.

Opgave 5 (12)

Geef de oplossing van de differentiaalvergelijking $f'(x) + f(x)\sin x = \sin x$ die voldoet aan $f(0) = 0$. Gebruik hierbij de methode *variatie van constanten.*

Opgave 6 (13)

Geef de oplossing van de differentiaalvergelijking $f''(t) - 2f'(t) + 2f(t) = t$ die voldoet aan $f'(0) = 0$ en $f(0) = 8$.

Opgave 7 (15)

We bekijken het pad $\mathbf{c}(t) = (\cos t, t, \sin t)$, $0 \le t \le \pi$.

a) Maak een schets van dit pad.

b) Bereken de lengte van dit pad.

c) Bepaal de ligging van het zwaartepunt van de kromme die door dit pad geparametriseerd wordt. Ga hierbij uit van een constante massadichtheid.

Opgave 8 (13)

We bekijken $\displaystyle\int_{y=0}^{1} \int_{x=y}^{y^{1/3}} e^{x^2}\,dx\,dy.$

a) Schets het integratiegebied.

b) Herschrijf de integraal door verwisseling van de integratievolgorde.

c) Bereken de integraal.

Opgave 9 (10)

a) Bedenk een vectorveld $\mathbf{A}$ in de $\mathbb{R}^3$ waarvoor de divergentie nul is, maar de rotatie (of "curl") ongelijk aan nul.

b) Bereken $\int_{\mathbf{c}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}$ voor het pad $\mathbf{c}(t) = (t, 0, 1-t)$ met $0 \le t \le 1$.