Tentamen Infinitesimaalrekening 1b

8 maart 2002

9–12 uur

- Zet uw naam op elk blad dat u inlevert. Zet op het eerste blad ook het nummer van uw collegekaart.
- Geef niet alleen antwoorden, maar laat de hele redenering zien die tot het antwoord leidt.
- Gebruik gerust beweringen uit vorige onderdelen, ook als u daar niet uit kwam.
- Bij elke opgave staat het aantal punten dat u ermee kunt behalen.

Opgave 1 (9)

a) Geef alle (eventueel complexe) oplossingen van de vergelijking $x^3 + 2x^2 + 5x = 0$.

b) Geef alle complexe getallen x die voldoen aan $x^3 = i$.

Opgave 2 (9)

Geef de divergentie en rotatie ("curl") van de volgende vectorvelden:

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \left(y + \frac{x}{10}, -x + \frac{y}{10}, 0\right), \qquad \mathbf{G}(x,y,z) = \left(e^x \cos y + z, -e^x \sin y, x\right).$$

Opgave 3 (9)

We bekijken het vectorveld $\mathbf{T}(x,y) = \left(y + \frac{x}{10}, -x + \frac{y}{10}\right)$.

a) Schets het vectorveld $\mathbf{T}$.

b) Controleer dat $\mathbf{c}(t) = e^{t/10}(\cos t, -\sin t)$ een stroomlijn van $\mathbf{T}$ vormt.

Z.O.Z.

Opgave 4 (10)

Van de functie $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ weten we dat de gradiënt gelijk is aan

$$\nabla\varphi(x, y, z) = \left(ye^{xy} + z, \sin(y^2) + xe^{xy}, x\right),$$

en dat $\varphi(1, 0, 2) = 1$.
Bepaal $\varphi(0, 0, 0)$.

Opgave 5 (12)

i) Laat zien dat $x \mapsto \frac{-1}{2}\log\left(1 - x^2\right)$ een primitieve is van $x \mapsto \frac{x}{1-x^2}$, op het interval $(-1, 1)$.

ii) Bepaal een primitieve van de functie $x \mapsto \frac{1}{(1-x^2)^{3/2}}$ op het interval $(-1, 1)$ door middel van de substitutie $x = \sin\varphi$.

iii) Geef de oplossing, op het interval $(-1, 1)$, van de differentiaalvergelijking

$$f'(x) + f(x)x = 5 + x^2 f'(x)$$

die voldoet aan $f(0) = 1$. Gebruik hierbij de methode *variatie van constanten.*

Opgave 6 (13)

Geef de oplossing van de differentiaalvergelijking $f''(t) + f'(t) = 2f(t)$ die voldoet aan $f(0) = 1$ en $f'(0) = 0$.

Opgave 7 (15)

G is het deel van de massieve cylinder $x^2 + y^2 \leq 1$ dat ligt tussen de vlakken $x + y + z = 2$ en $x + 2y + z = -4$.

a) Maak een schets van G.

b) Bereken de inhoud van G.

Opgave 8 (13)

A is het gebied dat in poolcoördinaten beschreven wordt door $0 \leq r \leq 2 + \sin\theta$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

a) Schets het gebied A.

b) Bereken de oppervlakte van A.

Opgave 9 (10)

a) Bedenk een pad $\mathbf{c}$ in de ruimte met beginpunt $(1,0,0)$ en eindpunt $(0,1,1)$.

b) Bereken de lijnintegraal $\int_{\mathbf{c}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s}$, met $\mathbf{H}(x,y,z) = (z,y,x)$.

(Voor Infinitesimaalrekening B bestaat een reparatieregeling; zie de www-informatie.)