Infinitesimaalrekening 1a

Tentamen 21 oktober 2002

14.00 – 17.00 uur

- Maak de opgaven op het uitgereikte papier.
- Vul op elk blad dat u inlevert uw naam en uw studentnummer in.
- Zet op het eerste blad de naam van uw werkcollegebegeleider: 1) Taoufik Bakri, 2) Natasja Davydova, 3) Martijn van Manen, 4) Arno Swart, 5) Steven Wepster, 6) Barbara van den Berg, of meld "niet aan werkcollege deelgenomen".
- Geef niet alleen het antwoord, maar laat ook zien hoe u aan dat antwoord komt.
- Bij elk onderdeel staat aangegeven hoeveel punten u ermee kunt behalen.
- Op dit tentamen mogen geen grafische of symbolische rekenapparaten gebruikt worden. Ook het raadplegen van boeken, dictaten of eigen aantekeningen is niet toegestaan.
- Veel succes!

Opgave 1 (5)

Zoals u weet hangen in $\mathbb{R}^2$ de rechthoekige coördinaten x en y samen met de poolcoördinaten r en θ via de relaties

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta.$$

Bepaal de poolcoördinaten van het punt met rechthoekige coördinaten $(-1, \sqrt{3})$.
Uitwerking: Uit $x = -1$, $y = \sqrt{3}$ volgt dat $r^2 = x^2 + y^2 = 4$, dus $r = 2$.
Van θ weet ik dat $0 \le \theta < 2\pi$, $\cos\theta = \frac{x}{r} = -\frac{1}{2}$ en $\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$. Uit $\sin\theta = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ zie ik dat $0 < \theta < \pi$, en wel $\theta = \frac{\pi}{3}$ of $\theta = \frac{2\pi}{3}$. Omdat $\cos\theta < 0$ moet het $\theta = \frac{2\pi}{3}$ zijn.

Opgave 2 (15)

Als u voor werkcollegequiz Q1 meer punten gekregen hebt dan u voor deze opgave behaalt, dan telt het aantal punten van die quiz.

i) Geef alle reële getallen q die voldoen aan

$$2 + q = \sqrt{4 + 4q + q^2}.$$

ii) Schrijf eenvoudiger: $\cosh^2 t - \sinh^2 t = \ldots$

iii) Onderzoek $\lim_{\varphi\to-\pi}\dfrac{\sin\varphi}{\varphi+\pi}$.
(Vergeet niet naast het antwoord ook de redenering te geven.)

Uitwerking: In i) is de wortel niet-negatief, dus $2+q\geq 0$, dus alleen $q\geq -2$ zijn mogelijk. Onder deze beperking zijn beide leden van de vergelijking ≥ 0, en komt de vergelijking neer op $(2+q)^2 = 4+4q+q^2$. Uitwerking van de haakjes geeft $4+4q+q^2 = 4+4q+q^2$. Dat levert geen verdere beperking. Dus alle oplossingen zijn $q\in[-2,\infty)$.
In ii) volgt uit $\cosh t = \frac{e^t+e^{-t}}{2}$ en $\sinh t = \frac{e^t-e^{-t}}{2}$ dat $\cosh^2 t-\sinh^2 t = \frac{(e^t+e^{-t})^2}{4}-\frac{(e^t-e^{-t})^2}{4} = \frac{e^{2t}+2+e^{-2t}-(e^{2t}-2+e^{-2t})}{4} = \frac{4}{4} = 1$.
In iii) herken ik de afgeleide van de sinusfunctie in het punt $-\pi$:

$$\lim_{\varphi\to-\pi}\frac{\sin\varphi}{\varphi+\pi} = \lim_{\varphi\to-\pi}\frac{\sin\varphi-\sin(-\pi)}{\varphi-(-\pi)} = \sin'(-\pi) = \cos(-\pi) = -1.$$

Opgave 3 (15)

Als u voor werkcollegequiz Q2 meer punten gekregen hebt dan u voor deze opgave behaalt, dan telt het aantal punten van die quiz.

i) Bepaal $\displaystyle\int_{-33}^{33} u^2\arctan u\,du$.

ii) Zoek twee vectoren $\mathbf{a}$ *en* $\mathbf{b}$ *in* $\mathbb{R}^3$ *die beide loodrecht staan op* $\mathbf{i}-\mathbf{j}$ *en met elkaar een hoek van* $\frac{\pi}{4}$ *maken.*

Uitwerking: Die integraal in i) ziet er knap ingewikkeld uit. Allicht is het niet de bedoeling dat ik partieel ga integreren. De kwadraatfunctie is even, de arctangens is oneven, dus de hele functie is oneven. De integraal van -33 naar 0 valt dus weg tegen de integraal van 0 naar 33. Het geheel levert dus 0 op.
Laat ik in ii) maar voor $\mathbf{a}$ een gemakkelijke vector kiezen die loodrecht op $\mathbf{i}-\mathbf{j} = (1,-1,0)$ staat. Dan komt $\mathbf{a} = \mathbf{k} = (0,0,1)$ in gedachten. Deze staat loodrecht op $\mathbf{i}-\mathbf{j}$:

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{i}-\mathbf{j}) = (0,0,1)\cdot(1,-1,0) = 0\cdot 1+0\cdot(-1)+1\cdot 0 = 0.$$

Ik schrijf $\mathbf{b} = (x,y,z)$, met nog nader te bepalen $x,y,z\in\mathbb{R}$. De loodrechtheid van $\mathbf{b}$ op $\mathbf{i}-\mathbf{j}$ levert de eis dat

$$\mathbf{b}\cdot(\mathbf{i}-\mathbf{j}) = (x,y,z)\cdot(1,-1,0) = x-y$$

nul is. Dus ik moet $y=x$ nemen: $\mathbf{b} = (x,x,z)$. De hoek φ tussen $\mathbf{a}$ en $\mathbf{b}$ heeft cosinus $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Dus

$$\begin{aligned}\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\|\,\cos\varphi &= 1\cdot\sqrt{2x^2+z^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\\ &= 0\cdot x+0\cdot x+1\cdot z = z.\end{aligned}$$

Ik moet dus voldoen aan de eis dat $z = \sqrt{2x^2+z^2}/\sqrt{2}$. Dan moet dus $z\geq 0$ zijn, en voldoen aan $z^2 = \frac{2x^2+z^2}{2}$, ofwel $z^2 = 2x^2$. Ik kies $x=13$, dus $z = 13\sqrt{2}$ en vind

$$\mathbf{a} = \mathbf{k} = (0,0,1),\qquad \mathbf{b} = x(\mathbf{i}+\mathbf{j})+z\mathbf{k} = (13,13,13\sqrt{2}).$$

Dit is wel erg breedsprakig opgeschreven. Op een tentamen zou ik het allicht op een kladblaadje uitvoeren, en dan als uitwerking geven: Ik kies $\mathbf{a} = (0, 0, 1)$ en $\mathbf{b} = (13, 13, 13\sqrt{2})$. Deze voldoen aan de eisen, want

$$\rho a \cdot (\mathbf{i} - \mathbf{j}) = 0 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 = 0,$$

dus $\mathbf{a}$ staat loodrecht op $\mathbf{i} - \mathbf{j}$. Op soortgelijke manier zou ik dan laten zien dat aan de andere twee eisen voldaan is.

Opgave 4 (10)

Wat is de oppervlakte van de driehoek met hoekpunten $(0, 1, 0)$, $(1, 0, 1)$ *en* $(2, 2, 1)$*?*

Uitwerking: Ik weet dat $\frac{1}{2}|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ de oppervlakte geeft van de driehoek tussen twee vectoren die in de oorsprong beginnen. De driehoek in de opgave verandert niet van oppervlakte als ik hem over $(0, 1, 0)$ verschuif. Ik neem dus $\mathbf{a} = (1, 0, 1) - (0, 1, 0) = (1, -1, 1)$ en $\mathbf{b} = (2, 2, 1) - (0, 1, 0) = (2, 1, 1)$. Het uitproduct is

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 - (-1) \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

De gevraagde oppervlakte is dus gelijk aan $\frac{1}{2}\|(-2, 1, 3)\| = \frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 3^2} = \frac{1}{2}\sqrt{14}$.

Opgave 5 (10)

Bepaal een primitieve van de functie $x \mapsto xe^{x/3}$.

Uitwerking: Dit vraagt om partiële integratie: $\int xe^{x/3}\,dx = x \cdot 3e^{x/3} - \int 1 \cdot 3e^{x/3}\,dx = 3xe^{x/3} - 3 \cdot 3e^{x/3} = (3x - 9)e^{x/3}$.

Opgave 6 (10)

Bepaal de som: $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!}$.

Uitwerking: Dit doet me denken aan de Taylorreeks voor de exponentiële functie met steunpunt 0:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n \quad \text{convergent voor alle } x \in \mathbb{R}.$$

De $(-1)^m$ krijg ik door $x = -1$ te nemen. De reeks begint bij 1 in plaats van 0; ik krijg dus:

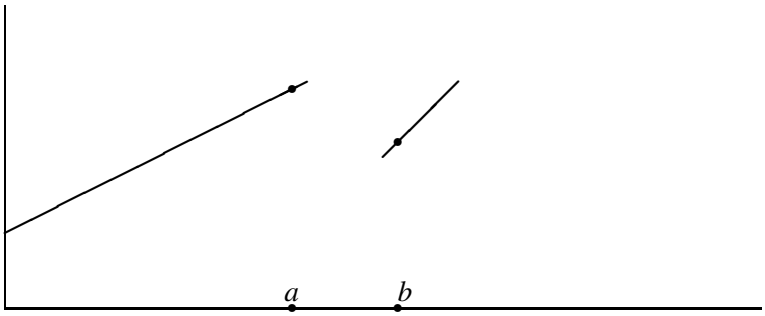
$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(-1)^n - \frac{1}{0!}(-1)^0 = e^{-1} - 1.$$

Opgave 7 (10)

Bedenk een differentieerbare functie f die niet monotoon stijgend is, maar wel differentieerbaar met $f'(x) > 0$ voor alle $x \in \mathrm{dom}(f)$.

Uitwerking: Ik neem $f(x) = -1/x$ met domein $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Voor deze functie is $f'(x) = -1\frac{-1}{x^2} = \frac{1}{x^2} > 0$ voor alle $x \neq 0$. Als f monotoon stijgend zou zijn, dan zou uit $-1 < 3$ moeten volgend dat $f(-1) \leq f(3)$, en dat is niet het geval: $f(-1) = 1$, $f(3) = -\frac{1}{3}$.

Het kan ook aan de hand van een plaatje:



De functie f in het plaatje heeft domein $(0, 4) \cup (5, 6)$ en overal in het domein positieve afgeleide. Als f monotoon stijgend zou zijn, dan zou $f(a) \leq f(b)$ moeten gelden, want $a < b$. Dit geldt in het voorbeeld niet.

Opgave 8 (10)

Geef de tweede orde Taylorveelterm van arctan *in het steunpunt* 1.

Uitwerking: De gevraagde Taylorveelterm ziet er zo uit:

$$T_2(x) = \arctan 1 + (x-1)\arctan'(1) + \frac{1}{2}(x-1)^2 \arctan''(1).$$

Er geldt $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$; $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, dus $\arctan'(1) = \frac{1}{2}$; en $\arctan''(x) = \frac{-1}{(1+x^2)^2} \cdot 2x$, dus $\arctan''(1) = \frac{-2}{2^2} = -\frac{1}{2}$. Dus

$$T_2(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{4}(x-1)^2.$$

Opgave 9 (15)

De functie $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ wordt gegeven door $F(x, y) = a(b(x, y), c(x))$, met differentieerbare functies $a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $b : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ en $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

a) Druk de gradiënt ∇F uit in de (partiële) afgeleiden van a, b en c.

Verder is gegeven dat

$$a(x, y) = ye^x \quad , \qquad b(x, y) = x - y$$
$$c(x) = 3x + 1$$

b) Bereken $\nabla F(0, 0)$.

Uitwerking: Ik schrijf de functie F als samengestelde functie $F = a \circ G$, met $G(x,y) = \begin{pmatrix} b(x,y) \\ c(x) \end{pmatrix}$. Voor de kettingregel heb ik de Jacobimatrices nodig:

$$\mathbf{D}a(b,c) = \nabla a(b,c) = \left(\frac{\partial a}{\partial b}(b,c) \ \frac{\partial a}{\partial c}(b,c) \right),$$
$$\mathbf{D}G(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial b}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial b}{\partial y}(x,y) \\ c'(x) & 0 \end{pmatrix}$$

Met de kettingregel:

$$\begin{aligned} \nabla F(x,y) &= \mathbf{D}F(x,y) = \mathbf{D}a(G(x,y))\mathbf{D}G(x,y) \\ &= \left(\frac{\partial a}{\partial b}(G(x,y)) \ \frac{\partial a}{\partial c}(G(x,y)) \right) \begin{pmatrix} \frac{\partial b}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial b}{\partial y}(x,y) \\ c'(x) & 0 \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial a}{\partial b}(b(x,y),c(x)) \frac{\partial b}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial a}{\partial c}(b(x,y),c(x))c'(x) \ , \ \frac{\partial a}{\partial b}(b(x,y),c(x)) \frac{\partial b}{\partial y}(x,y) \right). \end{aligned}$$

Daarmee heb ik a) beantwoord.
Voor b) kan ik de extra gegevens gebruiken:

$$\begin{aligned} b(0,0) &= 0, \\ \frac{\partial b}{\partial x}(0,0) &= 1|_{(x,y)=(0,0)} = 1, \\ \frac{\partial b}{\partial y}(0,0) &= -1|_{(x,y)=(0,0)} = -1, \\ c(0) &= 1, \\ c'(0) &= 3b|_{x=0} = 3. \end{aligned}$$

Voor a schrijf ik eerst de gegevens om met andere namen voor de coördinaten.

$$\begin{aligned} a(b,c) &= ce^b, \\ \frac{\partial a}{\partial b}(0,1) &= ce^b\big|_{(b,c)=(0,1)} = 1e^0 = 1, \\ \frac{\partial a}{\partial c}(0,1) &= e^b\big|_{(b,c)=(0,1)} = e^0 = 1. \end{aligned}$$

tenslotte vul ik dit alles in:

$$\nabla F(0,0) = (1 \cdot 1 + 1 \cdot 3 \ , \ 1 \cdot (-1)) = (4,-1).$$