Infinitesimaalrekening 1b

Tentamen 16 december 2002

14.00 – 17.00 uur

Dit is het tentamen voor eerstejaars, en voor ouderejaars die aan het werkcollege (inclusief de Mathematica-opgaven) hebben deelgenomen. Andere ouderejaars leggen een tentamen Infinitesimaalrekening 1B af over de stof van 2001/2002.

- Maak de opgaven op het uitgereikte papier.
- Vul op elk blad dat u inlevert uw naam en uw studentnummer in.
- Zet op het eerste blad de naam van uw werkcollegebegeleider: 1) Taoufik Bakri, 2) Natasja Davydova, 3) Martijn van Manen, 4) Arno Swart, 5) Steven Wepster, 6) Barbara van den Berg.
- Geef niet alleen het antwoord, maar laat ook zien hoe u aan dat antwoord komt.
- Bij elk onderdeel staat aangegeven hoeveel punten u ermee kunt behalen.
- Op dit tentamen mogen geen grafische of symbolische rekenapparaten gebruikt worden. Ook het raadplegen van boeken, dictaten of eigen aantekeningen is niet toegestaan.
- Veel succes!

Opgave 1 (7)

Bepaal het reële en imaginaire deel van $\frac{7+i}{5-i}$.

Uitwerking: $\alpha = \frac{7+i}{5-i} = \frac{(7+i)(5+i)}{(5-i)(5+i)} = \frac{34+12i}{26} = \frac{17}{13} + \frac{6}{13}i$. Dus $\operatorname{Re}\alpha = \frac{17}{13}$ en $\operatorname{Im}\alpha = \frac{6}{13}$.

Opgave 2 (8)

Bepaal alle complexe oplossingen van $z^2 + 2z + 2 = 0$.

Uitwerking: Ik gebruik de abc-formule met $a = 1$, $b = 2$, $c = 2$. De discriminant is $b^2 - 4ac = -4 = (2i)^2$. De oplossingen zijn dus $\frac{-2\pm 2i}{2} = -1 \pm i$; ofwel $-1 + i$ en $-1 - i$.

Opgave 3 (10)

Bepaal de functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *die voldoet aan* $f'(t) - 2tf(t) = t$ *en* $f(0) = 1$.

Uitwerking: Dit is een lineaire inhomogene differentiaalvergelijking van de eerste orde. Als ik één oplossing f_0 heb, vind ik alle oplossingen als $f = f_0 + g$, waarbij g de oplossingen van de bijbehorende homogene differentiaalvergelijking doorloopt.

Eén oplossing vind ik door een constante te proberen: $f_0(t) = a$. Invullen levert $0 - 2ta = t$. Dat lukt met $a = -\frac{1}{2}$. Dus één oplossing is $f_0(t) = -\frac{1}{2}$.
De bijbehorende homogene differentiaalvergelijking is $g'(t) - 2tg(t) = 0$. Dit heeft de vorm $g'(t) + a(t)g(t) = 0$ met $a(t) = -2t$. Een primitieve van a is $A(t) = -t^2$. Dan weet ik dat alle oplossingen van de homogene differentiaalvergelijking de vorm $g(t) = ce^{-A(t)} = ce^{t^2}$ hebben, met c een constante.
Alle oplossingen zijn dus $f(t) = -\frac{1}{2} + ce^{t^2}$. Er moet gelden $f(0) = 1$. Invullen levert $-\frac{1}{2} + ce^0 = 1$, dus $c = \frac{3}{2}$.
Daarmee heb ik de gevraagde oplossing gevonden: $f(t) = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}e^{t^2}$.

Opgave 4 (12)

De functie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ voldoet aan $g''(t) + 2g'(t) + 10g(t) = 0$, $g(0) = 0$, $g'(0) = i$. Bereken $g(\pi/2)$, en schrijf het antwoord in de vorm $a + ib$ met $a, b \in \mathbb{R}$.

Uitwerking: Dit is een homogene lineaire differentiaalvergelijking met constante coëfficiënten. Als ik geluk heb kan ik alle oplossingen opbouwen uit e-machten. Ik probeer $g(t) = e^{\lambda t}$.
Invullen levert: $\lambda^2 e^{\lambda t} + 2\lambda e^{\lambda t} + 10e^{\lambda t} = 0$. De factor $e^{\lambda t}$ is ongelijk nul. Uitdelen levert de vergelijking $\lambda^2+2\lambda+10 = 0$, met oplossingen $\lambda_1 = -1+3i$ en $\lambda_2 = -1-3i$, gevonden met de abc-formule. De wortels zijn verschillend, dus alle oplossingen hebben de vorm:

$$g(t) = c_1 e^{(-1+3i)t} + c_2 e^{(-1-3i)t}.$$

Door de voorwaarde $g(0) = 0$ in te vullen, zie ik dat $c_1 + c_2 = 0$, dus $c_2 = -c1$, en

$$\begin{aligned} g(t) &= c_1 \left(e^{(-1+3i)t} - e^{(-1-3i)t}\right), \\ g'(t) &= c_1 \left((-1 + 3i)e^{(-1+3i)t} - (-1 - 3i)e^{(-1-3i)t}\right). \end{aligned}$$

De voorwaarde $g'(0) = i$ levert de vergelijking $c_1\,(-1 + 3i + 1 + 3i) = i$, en dus $c_1 = \frac{1}{6}$. Daarmee heb ik gevonden:

$$g(t) = \frac{1}{6}\left(e^{(-1+3i)t} - e^{(-1-3i)t}\right) = \frac{1}{6}e^{-t}\left(e^{3it} - e^{-3it}\right).$$

Dus $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{e^{-\pi/2}}{6}\left(e^{\frac{3}{2}\pi i} - e^{-\frac{3}{2}\pi i}\right) = \frac{1}{6}e^{-\pi/2}(-i - i) = -\frac{i}{3}e^{-\pi/2} = 0 - \frac{1}{3}e^{-\pi/2}i.$

Opgave 5 (10)

Bepaal $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)$ voor de functie $f(x, y) = g(a(x, y), b(x, y))$, met a en b twee keer differentieerbare functies $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ en $g(u, v) = ue^v$.

Uitwerking: $f(x, y) = g(a(x, y), b(x, y)) = a(x, y)e^{b(x,y)}$. Dus $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial a}{\partial x}(x, y)e^{b(x,y)} + a(x, y)e^{b(x,y)}\frac{\partial b}{\partial x}(x, y)$. Nu ook nog naar y differentiëren: $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial^2 a}{\partial x \partial y}(x, y)e^{b(x,y)} + \frac{\partial a}{\partial x}(x, y)e^{b(x,y)}\frac{\partial b}{\partial y}(x, y) + \frac{\partial a}{\partial y}(x, y)e^{b(x,y)}\frac{\partial b}{\partial x}(x, y) + a(x, y)e^{b(x,y)}\frac{\partial b}{\partial y}(x, y)\frac{\partial b}{\partial x}(x, y) + a(x, y)e^{b(x,y)}\frac{\partial^2 b}{\partial x \partial y}(x, y)$.
Maar dit is $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, terwijl $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ gevraagd wordt. Gelukkig hoef ik de berekening niet over te doen, want alle betrokken functies zijn twee keer differentieerbaar, dus de volgorde van differentiatie maakt niet uit. (Beter was geweest met $\frac{\partial f}{\partial y}$ te beginnen.)

Opgave 6 (10)

Bepaal de lengte van de kromme beschreven door het pad $\mathbf{c}(t) = \left(t, t^{3/2}, -t^{3/2}\right)$, *met* $0 \leq t \leq 3$.

Uitwerking: Er geldt $\mathbf{c}'(t) = \left(1, \frac{3}{2}t^{1/2}, -\frac{3}{2}t^{1/2}\right)$, en

$$\|\mathbf{c}'(t)\| = \sqrt{1^2 + \left(\tfrac{3}{2}t^{1/2}\right)^2 + \left(-\tfrac{3}{2}t^{1/2}\right)^2} = \sqrt{1 + \tfrac{9}{2}t}.$$

De lengte van de kromme wordt gegeven door

$$\int_{\mathbf{c}} d\mathbf{s} = \int_0^3 \|\mathbf{c}'(t)\|\, dt = \int_0^3 \sqrt{1 + \tfrac{9}{2}t}\, dt = \left(1 + \tfrac{9}{2}t\right)^{3/2} \tfrac{2}{3}\tfrac{2}{9}\Big|_0^3 = \frac{4}{27}\left(\left(\frac{29}{2}\right)^{3/2} - 1^{3/2}\right)$$

$$= \frac{116\sqrt{29}}{54\sqrt{2}} - \frac{4}{27}.$$

Opgave 7 (10)

a) *Bepaal de divergentie van het vectorveld* $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} - z\mathbf{j} + y\mathbf{k}$.

b) *Waarom is dit vectorveld* $\mathbf{F}$ *niet de rotatie van een vectorveld?*

Uitwerking: a) $\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}x + \frac{\partial}{\partial y}(-z) + \frac{\partial}{\partial z}y = 1 + 0 + 0 = 1$.
b) Als $\mathbf{F} = \mathbf{rot}\,\mathbf{G}$ voor één of ander vectorveld $\mathbf{G}$ zou zijn, dan zou $\operatorname{div} \mathbf{F} = \operatorname{div} \mathbf{rot}\,\mathbf{G} = \mathbf{0}$ zijn, in tegenspraak met het in a) berekende.

Opgave 8 (11)

Bereken $\int_K e^{x^2+y^2}\, dxdydz$, *waarbij* K *het gebied in* $\mathbb{R}^3$ *is beschreven door* $x \leq 0$, $y \leq 0$, $0 \leq z \leq 3$, $x^2 + y^2 \leq 4$.

Uitwerking: In de tentamenopgave stond dat K een gebied in $\mathbb{R}^2$ is. Dat is aan het begin van het tentamen verbeterd.
De voorwaarde $x^2 + y^2 \leq 4$ vraagt om cylindercoördinaten $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ en $z = z$. De voorwaarde wordt nu $0 \leq r \leq 2$.
De voorwaarden $x \leq 0$ en $y \leq 0$ leggen vast dat (x, y) in het derde kwadrant ligt, dat wil zeggen $\pi \leq \theta \leq \frac{3}{2}\pi$.
Tenslotte blijft voor z de voorwaarde $0 \leq z \leq 3$.
Bij de overgang van cylindercoördinaten naar rechthoekige coördinaten is de absolute waarde van de Jacobideterminant gelijk aan r. De integraal is dus gelijk aan:

$$\int_K e^{x^2+y^2}\, dxdydz = \int_{[0,2]\times[\pi,3\pi/2]\times[0,3]} e^{r^2}\, r\, drd\theta dz = \int_{z=0}^{3} \int_{\theta=\pi}^{3\pi/2} \int_{r=0}^{2} re^{r^2} dr\, d\theta\, dz.$$

De binnenintegraal is $\int_{r=0}^{2} e^{r^2} r\, dr = \int_{u=0}^{4} e^u \frac{1}{2}\, du = \frac{1}{2}e^u\Big|_{u=0}^{4} = \frac{e^4-1}{2}$. Dat levert de middenintegraal: $\int_{\theta=\pi}^{3\pi/2} \frac{e^4-1}{2}\, d\theta = \frac{\pi(e^4-1)}{4}$. De hele integraal is gelijk aan $\int_{z=0}^{3} \frac{\pi(e^4-1)}{4}\, dz = \frac{3\pi(e^4-1)}{4}$.

Opgave 9 (12)

Waar ligt het zwaartepunt van het gebied in het vlak beschreven door $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le x^2$*? (Ga uit van een constante massadichtheid.)*

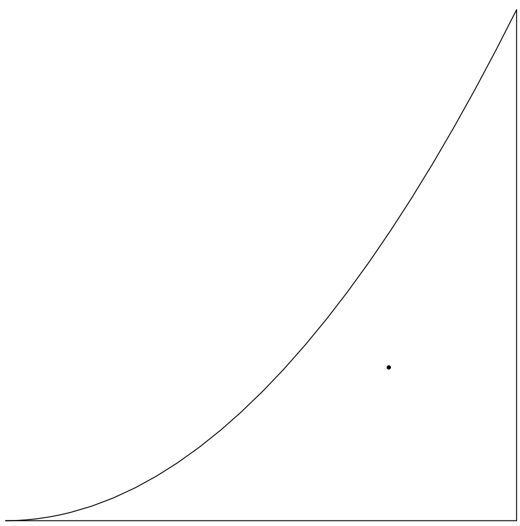
Uitwerking: Ik noem het gebied Q. Ik bereken eerst $\int_Q dxdy$, $\int_Q x\,dxdy$ en $\int_Q y\,dxdy$. Daarbij gebruik ik de integratievolgorde van de opgave:

$$\begin{aligned}
\text{vol} &= \int_Q dxdy = \int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{x^2} dy\,dx = \int_{x=0}^{1} x^2\,dx = \tfrac{1}{3},\\
i_x &= \int_Q x\,dxdy = \int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{x^2} x\,dy\,dx = \int_{x=0}^{1} x^3\,dx = \tfrac{1}{4},\\
i_y &= \int_Q y\,dxdy = \int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{x^2} y\,dy\,dx = \int_{x=0}^{1} \tfrac{1}{2}x^4\,dx = \tfrac{1}{10}.
\end{aligned}$$

Het zwaartepunt is:

$$\left(\tfrac{i_x}{\text{vol}}, \tfrac{i_y}{\text{vol}}\right) = \left(\tfrac{1/4}{1/3}, \tfrac{1/10}{1/3}\right) = \left(\tfrac{3}{4}, \tfrac{3}{10}\right).$$

Als toegift een plaatje:



Opgave 10 (10)

We bekijken het vectorveld $\mathbf{F} = \textbf{grad}\; xe^{xy^2}$ *op* $\mathbb{R}^2$.

Bereken de lijnintegraal van $\mathbf{F}$ *over een pad in* $\mathbb{R}^2$ *met beginpunt* $(2,0)$ *en eindpunt* $(0,3)$.

Uitwerking: Omdat het vectorveld $\mathbf{f}$ als de gradiënt van de potentiaal $f(x,y) = xe^{xy^2}$ gegeven is, ga ik natuurlijk geen rekenpartij uitvoeren. Ik gebruik de potentiaal:

$$\int_{\text{pad}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = f(\text{eindpunt}) - f(\text{beginpunt}) = f(0,3) - f(2,0) = 0 - 2e^0 = -2.$$

De uitslag zal pas in januari 2003 in Osiris worden ingevoerd. We zijn van plan de uitslag op studentnummer op www te zetten op vrijdagmiddag 20 december, voor zover dan beschikbaar. Zie de inf1-site onder "Tentamens2002/2003".