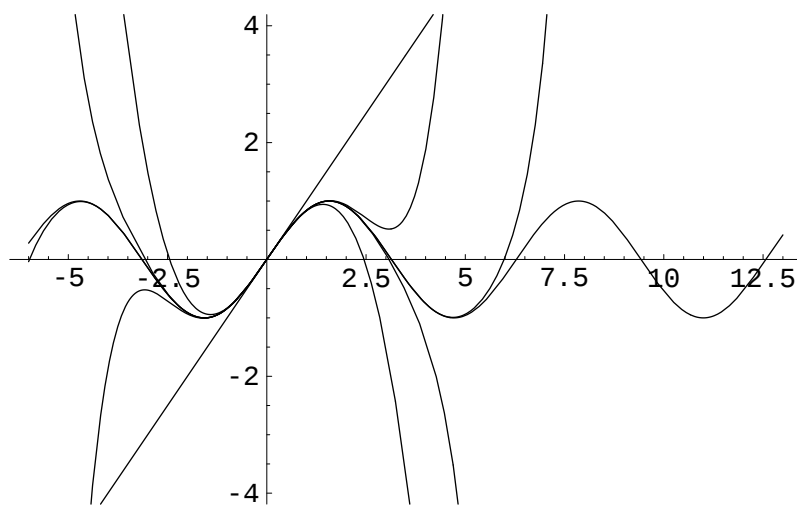


Wiskundige Technieken I



Mathematisch Instituut
Universiteit Utrecht
2007

1 Algemene informatie

Informatie over het vak Mathematische Technieken 1 en 2 is te vinden op <http://www.math.uu.nl/people/vdleur/mathtech/index.html>

Boek

Bij Aeskwadraat kun je het boek Mathematical Techniques (an introduction for the engineering, physical and mathematical sciences) van D.W. Jordan and P. Smith kopen. Dit is de verplichte literatuur bij dit vak.

College/Werkcollege

Het college wordt 3 keer in de week gegeven in een grote collegezaal, waarin je zit met veel studenten de docent introduceert hier de wiskunde stof. De hoeveelheid stof is groot en niet alles wordt in detail op het college behandeld. Het behandelde is meestal terug te vinden in het dictaat of boek. Tijdens het werkcollege leer je om te gaan met de besproken stof. Je zit in een groep van zo'n 20 studenten onder leiding van een medewerker en een ouderejaars student. Je maakt hier driemaal in de week een aantal opgaven, de zogenaamde werkcollege-opgaven. Ook kun je hier vragen stellen over de stof. Af en toe zal je begeleider tijdens het werkcollege kort ingaan op de gemaakte werkcollege-opgaven. Niet altijd zul je alle opgaven tijdens het werkcollege afkrijgen. Maak de rest thuis en noteer daarbij de optredende problemen, daar kun je hulp bij vragen op het volgende werkcollege. Elke week wordt op het werkcollege een inleveropgave opgegeven. Deze lever je in bij je werkcollegebegeleider uiterlijk een week later. Deze inleveropgave wordt nagekeken en beoordeeld.

Opgaven

Zoals je uit het voorgaande misschien al begrijpt zijn er twee soorten opgaven:

De werkcollege-opgaven, deze opgaven maak je tijdens het werkcollege, eventueel met hulp van de werkcollegebegeleiders.

De inleveropgave, deze krijg je elke week op. Deze opgave is niet vrijblijvend. Je moet deze opgaven uiterlijk een week later bij je werkcollegebegeleider inleveren. Ze tellen voor 10 % mee voor je eindcijfer.

Toetsing

Er is een tentamen (en een hertentamen), dit telt voor 90 % mee voor je eindcijfer. De tijd en plaats vind je op het tentamenrooster. Samen met de inleveropgaven bepaalt het tentamen je eindcijfer.

Werkcollegequizzes

Om voor jezelf na te gaan of je de stof beheerst zijn er twee werkcollegequizzes. Dit zijn korte tests (30 minuten). Als je een hoog cijfer haalt voor deze quizzes kan dat een verlichting zijn voor het eerste tentamen.

Formulekaart

Op het eindexamen mocht je een formulekaart gebruiken. Tijdens het tentamen en de werkcollegequizzes mag dit niet meer. Je moet een aantal formules standaard paraat hebben.

Grafische rekenmachine

Tijdens de werkcollegequizzes is het gebruik van geen enkele rekenmachine toegestaan. Het berekenen van integralen en het schetsen van eenvoudige functies moet je ook zonder hulpmiddelen gaan beheersen. Tijdens het tentamen mag je wel een (grafische) rekenmachine gebruiken.

Werkschema

Op [www](http://www.math.uu.nl) vind je een werkschema van Mathematische Methoden 1 en 2.

Dit dictaat

Dit dictaat behandelt *verzamelingen*, *ontbinden*, *kwadraatafsplitsen* en *uitdelen van veeltermen*. Het is mogelijk dat er later nog enige handouts uitgereikt gaan worden. Deze kun je dan ook altijd downloaden op de [www](http://www.math.uu.nl)-pagina van dit vak, waar ze als pdf-file worden geplaatst.

Op- of aanmerkingen

Mocht je op- of aanmerkingen hebben over de stof, het college, werkcollege of andere zaken die betrekking hebben op dit vak, dan stel ik dat zeer op prijs om te horen. Je kunt me altijd benaderen, opbellen (030-2533833) of e-mailen (vdleur@math.uu.nl). Ook als je fouten ontdekt in boek of dictaat dan wil ik dat graag weten.

juni 2007
Johan van de Leur

2 Verzamelingen

Voorkennis: Eindexamen wiskunde B1(2)

Doel: Invoeren van verzamelingen en bijbehorende notaties.

2.1 Verzamelingen

Een *verzameling* is een wiskundig basisbegrip, waarvan we hier geen formele definitie zullen geven, maar volstaan met de opmerking dat een verzameling bepaald wordt door de objecten in die verzameling. De objecten van een verzameling kunnen zijn getallen, postzegels, maanden, knikkers, mensen, enz. Deze objecten noemen we ook wel de *elementen* van de verzameling. Een bekende verzameling, die vaak in de wiskunde gebruikt wordt, is de *verzameling van de gehele getallen*, dat zijn $\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots$. Hiervoor hebben we binnen de wiskunde zelfs een speciaal symbool, namelijk $\mathbb{Z}$.

Het is gebruikelijk om verzamelingen te beschrijven met behulp van accolades. We geven zo'n verzameling dan aan door om alle elementen van die verzameling accolades te plaatsen, bijvoorbeeld

$$\{\text{januari}, \text{februari}, \text{maart}\}$$

voor de verzameling maanden in het eerste kwartaal van een jaar. We kunnen zo'n verzameling ook een naam geven of met een letter aangeven:

$$W = \{\text{januari}, \text{februari}, \text{maart}\}, \\ \mathbb{Z} = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}.$$

We kunnen de verzameling W ook als volgt noteren:

$$W = \{\text{januari}, \text{februari}, \text{maart}, \text{maart}, \text{maart}\}.$$

Of we nu een element één of drie keer binnen accolades plaatsen, de verzameling verandert hier niet door. De maand *februari* is een *element van de verzameling* W , we gebruiken hiervoor de verkorte notatie

$$\text{februari} \in W.$$

Een speciale verzameling is de zogenaamde *lege verzameling*. Dit is de verzameling die geen elementen bevat. Ook hier hebben we een speciaal symbool voor, namelijk $\emptyset$.

Een andere manier om verzamelingen te noteren is als volgt. Bijvoorbeeld de *verzameling van alle natuurlijke getallen* $1, 2, 3, 4, \dots$:

$$\mathbb{N} = \{g \in \mathbb{Z} : g > 0\}.$$

In woorden, $\mathbb{N}$ is de verzameling van de elementen g uit $\mathbb{Z}$ (de verzameling van de gehele getallen) die groter zijn dan 0. Merk op dat $\mathbb{N}$ een *deelverzameling van* $\mathbb{Z}$ is. We gebruiken hiervoor de notatie

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}.$$

Het is belangrijk om de symbolen $\in$ en $\subset$ goed te gebruiken, zo is

$$\emptyset \notin W, \quad \emptyset \subset W, \quad \text{maart} \in W, \quad \{\text{maart}\} \subset W \quad \text{en} \quad \{\text{maart}\} \notin W.$$

Let op, als V de volgende verzameling is

$$V = \{\{1\}, \{1, 2\}, 3\},$$

dan zijn $\{1\}$, $\{1, 2\}$ en 3 de drie elementen van V en zijn de getallen 1 en 2 geen elementen van V . De verzamelingen $\emptyset$, $\{\{1\}\}$, $\{\{1, 2\}\}$, $\{3\}$, $\{\{1\}, \{1, 2\}\}$, $\{\{1\}, 3\}$, $\{\{1, 2\}, 3\}$ en $\{\{1\}, \{1, 2\}, 3\}$ zijn de acht mogelijke deelverzamelingen van V en is bijvoorbeeld de verzameling $\{1\}$ geen deelverzameling van V . Naast speciale symbolen *element van* en *deelverzameling van* gebruiken we ook de volgende notaties voor *doorsnede*, *vereniging* en *complement van*:

x is een element van A :	$x \in A$
A is een deelverzameling van B :	$A \subset B$
B is een deelverzameling van A :	$A \supset B$
de doorsnede van A en B :	$A \cap B$
de vereniging van A en B :	$A \cup B$
het complement van B in A :	$A \setminus B$

De laatste verzameling staat voor:

$$A \setminus B = \{x \in A : x \notin B\}.$$

Opgave 2.1 Geef alle elementen van de volgende verzamelingen:

- | | |
|---|---|
| (a) $A = \{n \in \mathbb{Z} : -3 < n \leq 5\}$ | (b) $B = \{2x + 1 : x \in \mathbb{N}\}$ |
| (c) $C = \{n^2 : n \in \mathbb{N}, n^2 < 100\}$ | (d) $D = \{\{0\}, \{0, 1\}, 5, 3\}$ |
| (e) $E = \{\mathbb{N}\}$ | (f) $F = \{\emptyset\}$ |
| (g) $G = \{\{2\}\}$ | (h) $H = B \cap C$ |
| (i) $I = B \cup C$ | (j) $J = B \setminus C$ |
| (k) $K = C \setminus B$ | (l) $L = B \setminus A$ |
| (m) $M = A \cup B$ | (n) $N = A \cap B$ |
| (o) $O = (A \cap B) \cup C$ | (p) $P = A \cap (B \cup C)$ |

Opgave 2.2 Geef alle deelverzamelingen van

- | | |
|--|-----------------------------------|
| (a) $A = \{x \in \mathbb{Z} : -2 < n \leq 1\}$ | (b) $B = \{1, 4, 9\}$ |
| (c) $C = \{\{0\}, 0\}$ | (d) $D = \{1, \{1\}, \{\{1\}\}\}$ |
| (e) $E = A \cup B$ | (f) $F = A \cup C$ |
| (g) $G = A \cap B$ | (h) $H = A \cap C$ |

2.2 Deelverzamelingen van $\mathbb{R}$

De verzameling $\mathbb{R}$ bestaat uit alle reële getallen, bijvoorbeeld: -88 , $\frac{3}{2}$, $\sqrt{\pi}$, e , $\sqrt[41]{2}$. Al deze getallen kan men schrijven als, eventueel oneindige, decimale breuken. Meetkundig kan men reële getallen zien als punten op de getallenlijn.

Een aantal deelverzamelingen van $\mathbb{R}$:

$\mathbb{Q}$: de verzameling van alle *breuken*, ook wel *rationale getallen* genoemd; bijvoorbeeld: $\frac{2}{3}$, $5 = \frac{5}{1}$, $\frac{22}{7}$, -1 .

$\mathbb{Z}$: de verzameling van de *gehele getallen*. Dat zijn $\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$

$\mathbb{N}$: de verzameling van de *natuurlijke getallen*: $1, 2, 3, 4, \dots$. Dus $\mathbb{N} = \{m \in \mathbb{Z} : m > 0\}$. Soms ziet men ook 0 als een natuurlijk getal. Dat doen we hier niet. De verzameling $\mathbb{N} \cup \{0\}$ geven we met $\mathbb{N}_0$ aan.

Opgave 2.3 Geef getallen die wel in $\mathbb{Z}$ zitten, maar niet in $\mathbb{N}$.

Doe hetzelfde voor $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{Z}$, en voor $\mathbb{R}$ en $\mathbb{Q}$.

Opgave 2.4 Bedenk deelverzamelingen A , B , ... van $\mathbb{R}$ waarvoor de volgende uitspraken waar zijn:

- i) $A \subset B$, maar niet $A \supset B$.*
- ii) $A \subset B$ en $B \subset A$.*
- iii) $5 \in A \subset B$ en $3 \in A \cap B$.*
- iv) $5 \in \mathbb{R} \setminus A$.*

2.3 Intervallen

Intervallen zijn deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ “zonder gaten”. De volgende verzamelingen zijn intervallen:

$[a, b]$, met $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$, gedefinieerd door $\{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$.

(a, b) , met $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$, gedefinieerd door $\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$.

$[a, b)$, met $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$, gedefinieerd door $\{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$.

$[a, \infty)$, met $a \in \mathbb{R}$, gedefinieerd door $\{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$.

$(-\infty, b)$, met $b \in \mathbb{R}$, gedefinieerd door $\{x \in \mathbb{R} : x < b\}$.

Opgave 2.5 Definieer zelf $[a, b)$, (a, ∞) en $(-\infty, b]$.

Ook $\mathbb{R}$ is een interval. Men kan het als $(-\infty, \infty)$ schrijven.

Opgave 2.6 Waarom komt $[-\infty, b]$ hierboven niet voor?

Opgave 2.7 Schrijf in de vorm $\{x \in \mathbb{R} : \text{voorwaarde}\}$ en teken $(0, 2] \cap [1, \infty)$, $((0, 1] \cup (2, \infty)) \cap [\frac{1}{2}, \frac{7}{3}]$ en $(0, 1] \cup ((2, \infty) \cap [\frac{1}{2}, \frac{7}{3}])$.

De intervallen $[a, b]$, (a, b) , $[a, b)$ en $(a, b]$, met $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$, noemt men *begrensd*. Het interval $[1, \infty)$ *onbegrensd*.

Opgave 2.8 Geef een element van $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Geef een deelverzameling $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ met oneindig veel elementen.

2.4 $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$

In dit vak wordt veel gebruik gemaakt van de twee, drie en n -dimensionale Euclidische ruimte. We noteren dit met $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^n$. Bij *Wat is Wiskunde* wordt dit later precies ingevoerd. Op dit moment volstaan we met het volgende: $\mathbb{R}^2$ is de verzameling geordende paren (a, b) met $a, b \in \mathbb{R}$. Als je het paar $(4, -\pi)$ in het x, y -vlak tekent dan correspondeert $(4, -\pi)$ met het punt (of vector) met x -coördinaat 4 en y -coördinaat $-\pi$. Het zal duidelijk zijn dat dit niet hetzelfde is als $(-\pi, 4)$, wat correspondeert met het punt met x -coördinaat $-\pi$ en y -coördinaat 4. Het is dus van belang dat we spreken over geordende paren.

De verzameling $\mathbb{R}^3$ bestaat uit geordende tripels van reële getallen, d.w.z.

$$\mathbb{R}^3 = \{(a, b, c) : a, b, c \in \mathbb{R}\}.$$

De verzameling van reële n -tupels $\mathbb{R}^n$, zullen we niet vaak gebruiken. In de Lineaire Algebra komt deze verzameling wel veelvuldig voor. Ook in de natuurkunde speelt deze een rol. Als je bijvoorbeeld probeert de draaiing van een tol te beschrijven dan kun je dit niet goed in drie dimensies, het is dan handiger om meer dimensies tot je beschikking te hebben.

2.5 Extra opgaven

Deze opgaven zijn bedoeld als extra oefenstof. De antwoorden staan achterin in hoofdstuk 4.

Opgave 2.9 Geef alle elementen van de volgende verzamelingen:

- | | |
|---|---|
| (a) $A = \{x \in \mathbb{N} : 3 < x \leq 6\}$ | (b) $B = \{4x - 2 : x \in \mathbb{N}\}$ |
| (c) $C = \{n^3 : n \in \mathbb{N}, n^3 < 100\}$ | (d) $D = \{\{1\}, \{0\}, \text{februari}\}$ |
| (e) $E = \{\mathbb{R}\}$ | (f) $F = \emptyset$ |
| (g) $G = \{\{2\}, 3\}$ | (h) $H = B \cap C$ |
| (i) $I = B \cup C$ | (j) $J = B \setminus C$ |
| (k) $K = C \setminus B$ | (l) $L = B \setminus A$ |
| (m) $M = A \cup B$ | (n) $N = A \cap B$ |
| (o) $O = (A \cap B) \cup C$ | (p) $P = A \cap (B \cup C)$ |

Opgave 2.10 Geef alle deelverzamelingen van

- | | |
|---|-----------------------------------|
| (a) $A = \{x \in \mathbb{N} : 3 < x \leq 5\}$ | (b) $B = \{4, 5, 9\}$ |
| (c) $C = \{\{4\}, 4\}$ | (d) $D = \{2, \{3\}, \{\{4\}\}\}$ |
| (e) $E = A \cup B$ | (f) $F = A \cup C$ |
| (g) $G = A \cap C$ | (h) $H = A \cap D$ |

Opgave 2.11 Schrijf in de vorm $\{x \in \mathbb{R} : \text{voorwaarde}\}$:

- | | | | |
|-----|---|-----|------------------------------------|
| (a) | $[1, 3) \cap (2, 5]$ | (b) | $[1, 3) \cap [5, 7]$ |
| (c) | $[1, 3) \setminus (2, 5]$ | (d) | $[1, 3) \cup (2, 5]$ |
| (e) | $([5, 7] \cup (2, 6)) \cap ([1, 5) \cup [3, 7])$ | (f) | $[1, 3) \cap ([5, 7] \cup (2, 6))$ |
| (g) | $([5, 7] \cup (2, 6)) \setminus ([1, 5) \cap [3, 7])$ | (h) | $([1, 3) \cap [5, 7]) \cup (2, 6]$ |

3 Ontbinden in factoren, kwadraatsplitsen en uitdelen

Voorkennis: Eindexamen wiskunde B1(2), uit dit dictaat §2

Doel: Ophalen vwo-stof over ontbinden in factoren, kwadraatsplitsen. Invoeren uitdelen van veeltermen.

3.1 Grafieken

Je grafisch rekenmachine is een goed hulpmiddel bij het schetsen van grafieken van ingewikkelde functies. Bij eenvoudige functies moet je het ook zonder hulp kunnen.

Opgave 3.1 a) *Maak uit de hand een schets van grafieken van de volgende functies:*

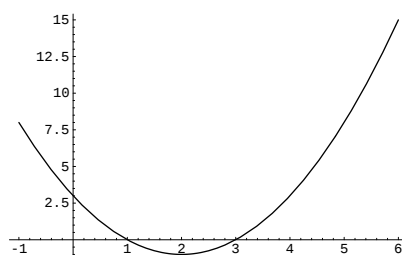
$$x \mapsto 5 - x, \quad x \mapsto \frac{1}{2}, \quad x \mapsto \sqrt{5 - x}.$$

b) *Controleer de gemaakte schetsen met behulp van een (zo mogelijk grafisch) rekenapparaat. Aandachtspunten: Klopt het algemene idee? Liggen de nulpunten goed? Zijn er grootste of kleinste waarden? Zo ja, liggen die op de juiste plaats?*

Laten we eens een voorbeeld bekijken:

$$x \mapsto (x - 3)(x - 1).$$

We weten dat dit een dalparabool is met nulpunten bij $x = 1$ en $x = 3$. Wegens symmetrie-overwegingen wordt het minimum aangenomen in $x = 2$. Het minimum is de bijbehorende functiewaarde, namelijk $(2 - 3)(2 - 1) = -1$. We vinden zo de volgende schets voor deze functie:



Opgave 3.2 *Maak uit de hand een schets van grafieken van de volgende functies:*

$$x \mapsto 5 - x^2, \quad x \mapsto \frac{1}{x+1}, \quad x \mapsto \sqrt{x^2}.$$

Controleer deze schetsen op de manier aangegeven in opgave 3.1b.

3.2 Hulpmiddel: Ontbinden in factoren, kwadraatafsplitsen en uitdelen

Om veeltermfuncties te kunnen schetsen kan het handig zijn om deze in factoren te ontbinden. Daarmee kun je eenvoudig de nulpunten bepalen. Voordat we beginnen met veeltermfuncties herhalen we de procedure voor tweede-graadsfuncties. Laten we dit doen aan de hand van een voorbeeld:

$$f(x) = x^2 - 4x + 3.$$

We willen dit schrijven als $(x + a)(x + b)$. Omdat

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab \quad \text{gelijk moet zijn aan } x^2 - 4x + 3$$

vinden we

$$a + b = -4 \quad \text{en} \quad ab = 3,$$

ofwel $a = 3$ en $b = 1$ of andersom. We vinden zo de kwadratische functie $f(x) = (x - 3)(x - 1)$ uit de vorige paragraaf.

Opgave 3.3 Ontbind in factoren:

$$(a) \quad x^2 + 6x - 7,$$

$$(b) \quad 2x^2 + 8x - 24,$$

$$(c) \quad x^2 + x,$$

$$(d) \quad -x^2 + 3x + 2,$$

$$(e) \quad x^2 + (a + 1)x + a,$$

$$(f) \quad x^2 + 7x + 12.$$

Een andere methode die je soms ook kunt gebruiken om nulpunten van tweede-graadsfuncties te vinden is het kwadraatafsplitsen. Als we $x - 3$ kwadrateren krijgen we $x^2 - 6x + 9$, algemener geldt

$$(x - a)^2 = x^2 - 2ax + a^2.$$

Als we nu willen oplossen $x^2 - 6x + 4 = 0$, dan kunnen we niet eenvoudig ontbinden. Je zou de *abc*-formule kunnen toepassen, maar je kunt ook kwadraatafsplitsen. De functie $x^2 - 6x + 4$ lijkt op het kwadraat $(x - 3)^2 = x^2 - 6x + 9$, daarom schrijven we $x^2 - 6x + 4$ als $x^2 - 6x + 9 + \text{rest}$. Dus $x^2 - 6x + 4 = (x - 3)^2 - 5$, met andere woorden

$$x^2 - 6x + 4 = 0, \quad \text{ofwel} \quad (x - 3)^2 - 5 = 0, \quad \text{ofwel} \quad (x - 3)^2 = 5.$$

Dus

$$x - 3 = \pm \sqrt{5}, \quad \text{ofwel} \quad x = 3 \pm \sqrt{5}.$$

Opgave 3.4 Ga met behulp van de abc-formule na dat de oplossing klopt.

Opgave 3.5 Los de volgende vergelijkingen op via kwadraatafsplitsing:

$$(a) \quad x^2 + 6x - 3 = 0 \quad (b) \quad 2x^2 + 8x - 5 = 0, \quad (c) \quad -x^2 + 3x + 4 = 0$$

$$(d) \quad x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} = 0 \quad (e) \quad x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{6} = 0 \quad (f) \quad 2x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{2}{9} = 0$$

Opgave 3.6 Stel we hebben de tweede-graadsvergelijking

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad \text{met } a \neq 0.$$

Leid met behulp van kwadraatsplitsen de abc-formule af.

Stel dat we nu de functie

$$g(x) = \frac{2x^3 + 2x^2 - 20x + 16}{x - 2} \quad (3.1)$$

zouden willen schetsen, dan kan het handig zijn om uit te delen. We kunnen dit op dezelfde manier doen als we dat doen met een gewone breuk, bijvoorbeeld $\frac{3072}{32}$. We voeren een deling uit. We kijken hierbij hoe vaak $x - 2$ past in de teller. Voor de eerste stap is dat hoe vaak $x - 2$ past in $2x^3 + 2x^2 - 20x + 16$, we gebruiken hiervoor de macht van de variabele x als een graadmeter. We moeten $x - 2$ met de factor $2x^2$ vermenigvuldigen om iets te krijgen van de vorm $2x^3 + \dots$:

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 & +2x^2 & -20x & +16 & : & x-2 \\ \hline 2x^3 & -4x^2 & & & - & 2x^2 \\ \hline & 6x^2 & -20x & +16 & & \end{array}$$

We gaan nu verder, $x - 2$ past $6x$ maal in $6x^2 - 20x + 16$, daarom is de volgende stap:

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 & +2x^2 & -20x & +16 & : & x-2 \\ \hline 2x^3 & -4x^2 & & & - & 2x^2 \\ \hline & 6x^2 & -20x & +16 & & \\ & 6x^2 & -12x & & - & 6x \\ \hline & & -8x & +16 & & \end{array}$$

en tenslotte houden we over $-8x + 16$, daar past $x - 2$ nog -8 keer in:

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 & +2x^2 & -20x & +16 & : & x-2 \\ \hline 2x^3 & -4x^2 & & & - & 2x^2 \\ \hline & 6x^2 & -20x & +16 & & \\ & 6x^2 & -12x & & - & 6x \\ \hline & & -8x & +16 & & \\ & & -8x & +16 & - & -8 \\ \hline & & & 0 & & \end{array}$$

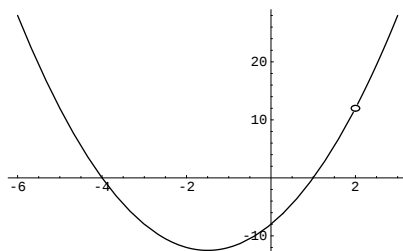
We vinden zo dat

$$2x^3 + 2x^2 - 20x + 16 = (x - 2)(2x^2 + 6x - 8).$$

De functie $g(x)$ is voor $x = 2$ niet gedefiniëerd, immers voor $x = 2$ zou je door nul delen. Daarom is het *definitiegebied* van de functie, dit wordt ook wel *domein* genoemd, de verzameling $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. Op dit domein is de functie dus gelijk aan

$$\frac{2x^3 + 2x^2 - 20x + 16}{x - 2} = 2x^2 + 6x - 8 = 2(x^2 + 3x - 4) = 2(x + 4)(x - 1), \quad x \neq 2$$

en kunnen we $g(x)$ eenvoudig schetsen:



Opgave 3.7 Schets de grafiek van de volgende functies:

$$\begin{array}{ll} (a) & \frac{x^2 - 1}{x + 1} \\ (b) & \frac{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}{x - 3} \\ (c) & \frac{x^3 + 4x^2 + x - 6}{x - 1} \\ (d) & \frac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{x + 2} \\ (e) & \frac{x^3 + 4x^2 + 5x + 2}{x + 2} \\ (f) & \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x - 1} \end{array}$$

Opgave 3.8 Ontbind in factoren en schets de grafiek van de bijbehorende functie:

$$\begin{array}{ll} (a) & x^3 - 3x^2 - 10x + 24 \\ (b) & x^3 - 2x^2 - 19x + 20 \\ (c) & x^3 - 6x^2 + 5x + 12 \\ (d) & x^3 + 9x^2 + 26x + 24 \\ (e) & x^3 + 7x^2 - 24x - 28 \\ (f) & 2x^3 + 12x^2 - 38x - 48 \end{array}$$

Hint: Ga eerst na of $-2, -1, 1, 2$ een nulpunt is van de functie. Deel vervolgens $(x - \text{nulpunt})$ uit en ontbind de overgebleven tweede-gradsfunctie in factoren.

3.3 Extra opgaven

Deze opgaven zijn bedoeld als extra oefenstof. De antwoorden staan achterin in hoofdstuk 4.

Opgave 3.9 Werk de haakjes weg:

$$\begin{array}{ll} (a) & (x - 3)^3 \\ (b) & (x - 1)(x - 2)(x - 3) \\ (c) & x(x^2 - 1)(x + 2) \\ (d) & (x + 4)(x - 5)(x + 6) \\ (e) & (2x - 1)(x - 2)^2 \\ (f) & (x^2 - 1)(x + 2)(2x - 3) \end{array}$$

Opgave 3.10 Ontbind in factoren en schets de grafiek (N.B. -3,-2,-1,1,2, of 3 is een nulpunt):

(a) $x^3 + 7x^2 + 2x - 40$ (b) $x^3 + 8x^2 + 4x - 48$

(c) $x^3 + 4x^2 - 20x - 48$ (d) $x^3 - 2x^2 - 16x + 32$

(e) $x^3 - x^2 - 14x + 24$ (f) $x^3 + 5x^2 - 2x - 24$

Opgave 3.11 Los de volgende vergelijkingen op via kwadraatsplitsing:

(a) $x^2 + 4x - 3 = 0$ (b) $2x^2 + 6x - 3 = 0$, (c) $-x^2 + 3x + 5 = 0$

(d) $x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{4} = 0$ (e) $x^2 + \frac{1}{4}x - \frac{5}{4} = 0$ (f) $2x^2 - \frac{4}{3}x - \frac{2}{3} = 0$

4 Antwoorden extra opgaven

2 Verzamelingen

- 2.9 (a) 4, 5, 6
(b) 2, 6, 10, 14, ... alle even natuurlijke getallen die geen viervoud zijn.
(c) 1, 8, 27, 64
(d) {1}, {0}, *februari*
(e) $\mathbb{R}$ (één element)
(f) geen elementen
(g) {2}, 3
(h) geen elementen
(i) 1, 8, 27, 64 en 2, 6, 10, 14, ...
(j) zelfde elementen als bij (b)
(k) zelfde elementen als bij (c)
(l) zelfde elementen als bij (b), behalve 6
(m) 4, 5 en 2, 6, 10, 14, ...
(n) 6
(o) 1, 6, 8, 27, 64
(p) 6
- 2.10 (a) $\emptyset, \{4\}, \{5\}, \{6\}, \{4, 5\}, \{4, 6\}, \{5, 6\}, A$
(b) $\emptyset, \{4\}, \{5\}, \{9\}, \{4, 5\}, \{4, 9\}, \{5, 9\}, B$
(c) $\emptyset, \{4\}, \{\{4\}\}, C$
(d) $\emptyset, \{2\}, \{\{3\}\}, \{\{\{4\}\}\}, \{2, \{3\}\}, \{2, \{\{4\}\}\}, \{\{3\}, \{\{4\}\}\}, D$
(e) $\emptyset, \{4\}, \{5\}, \{6\}, \{9\}, \{4, 5\}, \{4, 6\}, \{4, 9\}, \{5, 6\}, \{5, 9\}, \{6, 9\}, A, B, \{5, 6, 9\}, \{4, 6, 9\}, \{4, 5, 6, 9\}$
(f) $\emptyset, \{4\}, \{5\}, \{6\}, \{\{4\}\}, \{4, 5\}, \{4, 6\}, \{4, \{4\}\}, \{5, 6\}, \{5, \{4\}\}, \{6, \{4\}\}, A, C, \{5, 6, \{4\}\}, \{4, 6, \{4\}\}, \{4, 5, 6, \{4\}\}$
(g) $\emptyset, \{4\}$
(h) $\emptyset$
- 2.11 (a) $\{x \in \mathbb{R} : 2 < x < 3\}$
(b) Dit is de lege verzameling, dus bijvoorbeeld $\{x \in \mathbb{R} : 2 < x \text{ en } x > 2\}$
(c) $\{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x \leq 2\}$
(d) $\{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x \leq 5\}$
(e) $\{x \in \mathbb{R} : 2 < x \leq 7\}$
(f) $\{x \in \mathbb{R} : 2 < x < 3\}$
(g) $\{x \in \mathbb{R} : 2 < x < 3 \text{ of } 5 < x < 7\}$
(h) $\{x \in \mathbb{R} : 2 < x \leq 6\}$

3 Ontbinden in factoren, kwadraatsplitsen en uitdelen

- 3.9 (a) $x^3 - 9x^2 + 27x - 27$
(b) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$
(c) $x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x$
(d) $x^3 + 5x^2 - 26x - 120$
(e) $2x^3 - 9x^2 + 12x - 4$
(f) $2x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 6$
- 3.10 (a) $(x - 2)(x + 4)(x + 5)$
(b) $(x - 2)(x + 4)(x + 6)$
(c) $(x + 2)(x - 4)(x + 6)$
(d) $(x - 2)(x - 4)(x + 4)$
(e) $(x - 2)(x - 3)(x + 4)$
(f) $(x - 2)(x + 3)(x + 4)$

Gebruik MATHEMATICA om deze functies te schetsen.

- 3.11 (a) $x^2 + 4x - 3 = x^2 + 4x + 4 - 7 = 0 \rightarrow (x + 2)^2 = 7$
 (b) $2x^2 + 6x - 3 = 2\left(x^2 + 3x - \frac{3}{2}\right) = 2\left(x^2 + 3x + \frac{9}{4} - \frac{15}{4}\right) = 0 \rightarrow \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{15}{4}$
 (c) $-x^2 + 3x + 5 = -\left(x^2 - 3x + \frac{9}{4} - \frac{29}{4}\right) = 0 \rightarrow \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{29}{4}$
 (d) $x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{4} = x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{16} - \frac{13}{16} = 0 \rightarrow \left(x + \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{13}{16}$
 (e) $x^2 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{4} = x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{64} - \frac{17}{64} = 0 \rightarrow \left(x + \frac{1}{8}\right)^2 = \frac{17}{64}$
 (f) $2x^2 - \frac{4}{3}x - \frac{2}{3} = 2\left(x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} - \frac{4}{9}\right) = 0 \rightarrow \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$