

# Combinatoriek en partities

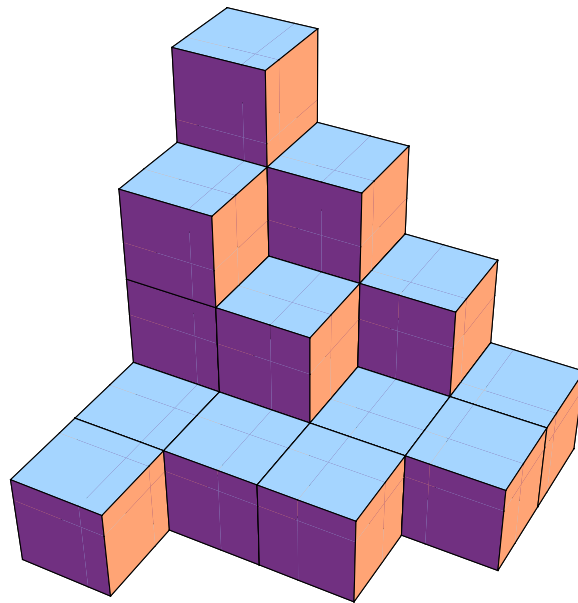
Veel verschillende vormen van tellen in uiteenlopende situaties

een module wiskunde-D voor 6vwo

Johan van de Leur en Valentijn de Marez Oyens

Voorjaar 2011

**Junior College Utrecht**



**Naam** .....

*A mathematician, like a painter or a poet, is a maker of patterns. [...] The mathematician's patterns, like the painter's or the poet's, must be beautiful; the ideas, like the colours or the words, must fit together in a harmonious way. Beauty is the first test: there is no permanent place in the world for ugly mathematics.*

G. H. Hardy, A mathematician's apology (Cambridge, 1940).

## Colofon

De module Combinatoriek en Partities is bedoeld voor Wiskunde-D in 6vwo, domein H (keuzeonderwerpen).

De module is gemaakt door medewerkers van het mathematisch Instituut van de Universiteit Utrecht, in samenwerking met het Junior College Utrecht ([www.uu.nl/jcu](http://www.uu.nl/jcu)).

De module is ontwikkeld door een ontwikkelteam onder leiding van dr. Johan van de Leur.

Met bijdragen van:

Universiteit Utrecht, Mathematisch Instituut:

- Dr. J.W. van de Leur
- V. de Marez Oyens

Universiteit Utrecht, Junior College Utrecht:

- Dr. A.E. van der Valk (curriculumcoördinator)
- H.E. van Egmond
- Drs. A. Goddijn

Voor deze module geldt een Creative Commons Naamsvermelding-Niet-commercieel-Gelijk delen 3.0 Nederland Licentie

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/nl>



Het auteursrecht op de module berust bij de Universiteit Utrecht, het Junior College Utrecht. Aangepaste versies van deze module mogen alleen verspreid worden indien in de module vermeld wordt dat het een aangepaste versie betreft, onder vermelding van de naam van de auteur van de wijzigingen.

De auteurs hebben bij de ontwikkeling van dit materiaal gebruik gemaakt van materiaal van derden. Waar dat is gebeurd, is zo veel mogelijk de bron vermeld en gaat het, tenzij anders vermeld, om een soortgelijke of ruimere licentie. Mocht er onverhoopt toch materiaal zijn opgenomen waarvan de bronvermelding of licentie niet correct zijn weergegeven, dan verzoeken we u contact op te nemen met het Junior College Utrecht.

De module is met zorg samengesteld. De Universiteit Utrecht aanvaardt geen enkele aansprakelijkheid voor enige schade voortkomend uit (het gebruik van) deze module.

Versie 0.2, 2011

# Inhoudsopgave

|                                                                              |           |
|------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Inhoudsopgave</b>                                                         | <b>1</b>  |
| <b>Voorwoord</b>                                                             | <b>3</b>  |
| <b>1 Inleiding</b>                                                           | <b>4</b>  |
| 1.1 Andrei Okounkov . . . . .                                                | 5         |
| 1.2 Wiskunde . . . . .                                                       | 6         |
| <b>2 3-d partities</b>                                                       | <b>7</b>  |
| 2.1 3-d partities . . . . .                                                  | 7         |
| <b>3 IJsmodel</b>                                                            | <b>11</b> |
| 3.1 IJs op een raster . . . . .                                              | 11        |
| 3.2 Voorwaarden op de randen . . . . .                                       | 12        |
| 3.3 Een drie dimensionale variant . . . . .                                  | 15        |
| <b>4 2-d partities</b>                                                       | <b>16</b> |
| 4.1 2-d partities . . . . .                                                  | 16        |
| 4.2 $\lambda$ -notatie . . . . .                                             | 17        |
| 4.3 Frobenius-notatie van een partitie . . . . .                             | 18        |
| <b>5 Andere notaties voor 2-d partities</b>                                  | <b>21</b> |
| 5.1 Partities als Diophantische vergelijkingen . . . . .                     | 21        |
| 5.2 De frequentie-notatie van een partitie . . . . .                         | 23        |
| <b>6 3-d partities nader bekeken</b>                                         | <b>25</b> |
| 6.1 3-d partities opdelen in 2-d partities . . . . .                         | 25        |
| 6.2 De Matrix notatie . . . . .                                              | 28        |
| <b>7 Producten en combinatoriek</b>                                          | <b>31</b> |
| 7.1 De combinatoriek van $(1+x)^n$ . . . . .                                 | 31        |
| 7.2 Binomium van Newton . . . . .                                            | 34        |
| 7.3 Producten met oplopende machten en combinatoriek . . . . .               | 36        |
| 7.4 Producten met meerdere termen . . . . .                                  | 38        |
| <b>8 3-d partities en andere afbeeldingen</b>                                | <b>41</b> |
| 8.1 3-d partities en niet snijdende paden . . . . .                          | 41        |
| 8.2 3-d partities en ruitbetegelingen . . . . .                              | 44        |
| 8.3 3-d partities en honingraatbetegeling . . . . .                          | 47        |
| <b>9 Berekeningen met behulp van de computer</b>                             | <b>50</b> |
| 9.1 Mathematica . . . . .                                                    | 50        |
| 9.2 Wolfram Alpha . . . . .                                                  | 53        |
| <b>10 Op zoek naar een telfunctie voor 2 dimensionale partities</b>          | <b>58</b> |
| 10.1 Een formule voor $1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^{m-1} + q^m$ . . . . . | 58        |
| 10.2 Een zelf-geconjugeerde Frobenius partitie uitvouwen . . . . .           | 59        |
| 10.3 De meetkundige reeks $1 + q + q^2 + q^3 + \cdots$ . . . . .             | 61        |
| 10.4 De telfunctie van gewone partities . . . . .                            | 62        |
| 10.5 Telfuncties voor muntstukken . . . . .                                  | 63        |
| 10.6 Een observatie van Schur (*) . . . . .                                  | 64        |

|                                                                                                                |            |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>11 Een recursieve formule voor <math>p(n)</math></b>                                                        | <b>67</b>  |
| <b>12 Dominostenen, Fibonacci en genererende functies</b>                                                      | <b>71</b>  |
| 12.1 Dominostenen . . . . .                                                                                    | 71         |
| 12.2 Fibonacci . . . . .                                                                                       | 72         |
| 12.3 Genererende functie . . . . .                                                                             | 73         |
| <b>13 Van partities naar Mayadiagrammen</b>                                                                    | <b>76</b>  |
| 13.1 Mayadiagrammen . . . . .                                                                                  | 76         |
| 13.2 Mayadiagrammen van gewicht $m$ . . . . .                                                                  | 79         |
| 13.3 Electronen en de Dirac-zee . . . . .                                                                      | 80         |
| <b>14 Matrices van afwisselend teken en hun telfunctie</b>                                                     | <b>82</b>  |
| 14.1 Matrices van afwisselend teken . . . . .                                                                  | 82         |
| 14.2 Matrices van afwisselend teken en het ijsmodel met randvoorwaarden . . . . .                              | 83         |
| 14.3 Drie kleuren schaakborden en matrices van afwisselend teken . . . . .                                     | 83         |
| 14.4 Determinanten van matrices uitrekenen en matrices van afwisselend teken . . . . .                         | 86         |
| 14.5 Het ijsmodel met randvoorwaarden en monotone driehoeken . . . . .                                         | 88         |
| 14.6 Op zoek naar een formule voor het aantal mogelijkheden voor het ijsmodel met randvoorwaarden(*) . . . . . | 92         |
| 14.7 Totaal symmetrische zelf complementaire 3-d partities en matrices van afwisselend teken? . . . . .        | 96         |
| <b>15 De telfunctie van 3d-partities</b>                                                                       | <b>98</b>  |
| <b>16 Slotopdrachten</b>                                                                                       | <b>102</b> |
| <b>Referenties</b>                                                                                             | <b>111</b> |
| <b>Index</b>                                                                                                   | <b>113</b> |
| <b>Sjabloonpagina voor zeshoeken</b>                                                                           | <b>116</b> |

## Voorwoord

In de inleiding van dit dictaat stellen we de vraag of we iets kunnen zeggen over op hoeveel manieren we een 3-d partitie kunnen maken met 65 blokjes.

Ongeveer honderd pagina's later komen we uit op een formule die ons antwoord geeft op deze vraag voor ieder willekeurig aantal blokjes.

De hoofdroute in dit dictaat gaat van deze vraag in de inleiding naar deze formule aan het einde. Daarvoor zijn de hoofdstukken 1, 2, 4, 6, 7, 9, 10 en 15 nodig.

Onderweg komen in de andere hoofdstukken diverse onderwerpen langs die hier zeer nauw aan verwant zijn. Ze verrijken en verbreden de context van de combinatoriek en partities. Mogelijk dat ze niet allemaal aan bod komen in een concrete lessituatie.

Sommige opgaven of paragrafen hebben een diepgang of moeilijkheidsgraad die de standaard overstijgen. Ze zijn opgenomen voor wie de extra uitdaging zoekt. Ze zijn herkenbaar aan (\*).

Stellingen en definities markeren we in dit dictaat in groene tekstblokken. Aan het einde van de hoofdstukken geven we een beknopte samenvatting in roze tekstblokken. Van enkele genoemde wiskundigen hebben we een korte levensbeschrijving opgenomen in gele tekstblokken.

Op veel plaatsen hebben we ter verduidelijking en ondersteuning gebruik gemaakt van kleur. Desalniettemin zal het ook goed bruikbaar zijn, indien het wordt afgedrukt in grijstinten. Voor de pagina's 31, 37 en 39 is afdrucken in kleur echter wel erg essentieel.

Dit dictaat is ontwikkeld in opdracht van Junior College Utrecht en met ondersteuning van het GQT-cluster (Geometry en Quantum Theory). De leerlingen van het Junior College Utrecht hebben ons hierbij geholpen en geïnspireerd. Speciale dank gaat hierbij uit naar Corné Ruwaard, Femke Jaarsma, Fons van der Laan, Gerben Wierda en Lars van den Berg. Voor veel praktische ondersteuning gaat onze dank uit naar Lydia Stienstra. Voor de totstandkoming van dit dictaat zijn we veel dank verschuldigd aan enkele mensen die hebben meegelezen en ons van waardevol commentaar hebben voorzien: Philip van Egmond, Ton van der Valk, Jop Schaap, Aad Goddijn en Joke Daemen.

Januari 2011

Johan van de Leur en Valentijn de Marez Oyens

# 1 Inleiding

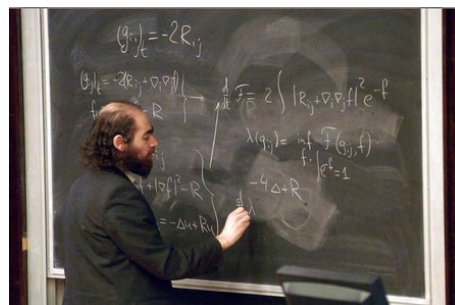
Ik wist dat ik Jason teleur zou stellen als hij dacht dat ik maar in mijn eigen cirkeltjes van chaotisch verdriet zou blijven rondraaien. Ik las wel degelijk ook kranten.

'Heb jij wel eens gehoord van het vermoeden van Poincaré?' vroeg ik. 'Wat houdt dat vermoeden in?' Dit was toch een gespreksonderwerp van allure, meende ik.

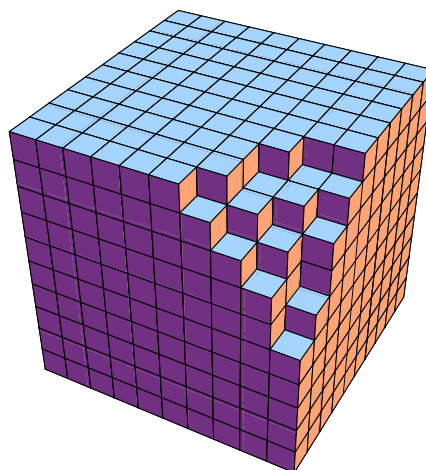
'Dat is wiskunde,' zei Jason, 'het heeft iets te maken met waarschijnlijkheidsrekening. Iets met een lasso om een bolvorm of zoiets, het is lang geleden op school dat ik ervan hoorde. Hoe kom je daar nu op?'

Ik haalde het krantenknipsel tevoorschijn dat meldde dat een zekere stinkende zonderling uit Rusland, een geniale wiskundige die sinds de ramp in Tsjernobyl niet meer in bad was geweest, niet was komen opdagen op de bijeenkomst van de International Mathematical Union in Madrid, waar hem de Fields Medal zou worden uitgereikt, de hoogste onderscheiding in de wiskunde. Hij had op een normale werkdag het pand van zijn instituut verlaten en was sindsdien onvindbaar verdwenen. De prijs was hem toegekend voor het bewijs van een hypothese uit 1904 van Poincaré, die onder de geheimzinnige naam het vermoeden van Poincaré de geschiedenis was in gegaan.

Het veertigjarige genie uit Rusland, Grigori Perelman, had acht jaar ongewassen aan zijn moeders keukentafel nodig gehad om te bewijzen dat Poincaré gelijk had. Perelman, die in het krantenartikel oblikaat het woord Raspoetinachtig kreeg opgeplakt, had geen interesse voor de prijs van één miljoen dollar, waarmee hij zijn moeder een bad cadeau had kunnen doen, wat in het algemeen, al zou je het niet zeggen, het geluksniveau van de mensen bevorderde. Perelman vond dat de keukentafel van zijn moeder goed dienst had gedaan en verdween in de oneindig zingende bossen van Rusland. Alles in het berichtje in de krant had me verrukt.



Figuur 1: Grigori Perelman



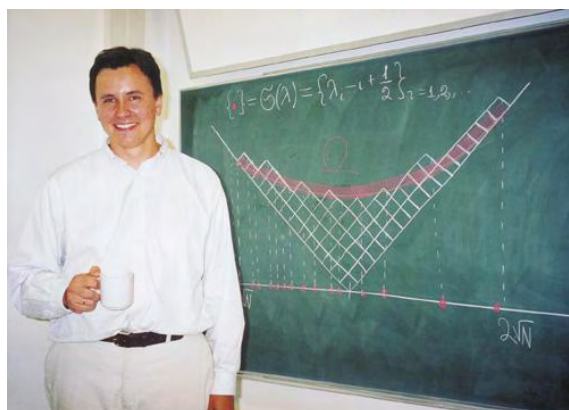
Figuur 2: Een smeltend kristal

In November 2008 wint Doeschka Meijsing de AKO literatuurprijs voor haar roman *Over de Liefde*. Uit het eerste hoofdstuk van dit boek is hierboven een citaat opgenomen. De hoofdpersoon Pip van deze roman is behoorlijk van slag door het net uit gaan van haar relatie. In het begin van het boek is ze op bezoek bij een goede vriend Jason aan wie ze graag wil aantonen dat ze niet vast zit in haar verdriet. Ze kijkt wel degelijk ook om zich heen en is met andere dingen bezig, zoals boeiend nieuws uit de kranten.

Tijdens het *International Congress of Mathematicians* te Madrid in 2006 was het de bedoeling om aan Grigori Perelman een Fields Medal uit te reiken. De Fields Medal wordt algemeen gezien als de Nobelprijs voor wiskundigen. Perelman is inderdaad niet op komen dagen en heeft deze prijs aan zich voorbij laten gaan.

## 1.1 Andrei Okounkov

Bij deze conferentie in Madrid kregen nog drie andere wiskundigen een Fields Medal. Zij waren wel aanwezig en hebben hem in ontvangst genomen. Eén van hen is Andrei Okounkov (figuur 3).



Figuur 3: Andrei Okounkov (1969 - )

### Andrei Yuryevich Okounkov

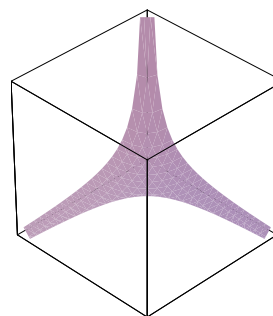
Andrei Yuryevich Okounkov, geboren in 1969, is een Russisch wiskundige. Hij werkt op het gebied van de representatie theorie en de toepassingen daarvan in algebraïsche meetkunde, wiskundige natuurkunde, kansrekening en speciale functies. Op dit moment is hij hoogleraar aan de universiteit van Colombia. Hiervoor was hij werkzaam bij de universiteiten van Princeton, Berkeley en Chicago. In 2006, op het 25<sup>e</sup> *International Congress of Mathematicians* in Madrid kreeg hij de *Fields Medal* voor zijn bijdrage aan het overbruggen van kansrekening, representatie theorie en algebraïsche meetkunde.

Bron (17).

Aan de basis van het onderzoekswerk van Okounkov liggen basale begrippen, zoals partities. Hiermee is het Okounkov gelukt spectaculaire resultaten te boeken in zeer uiteenlopende terreinen van wiskunde: algebraïsche meetkunde, kansrekening, dynamische systemen en lus- theorie.

In het werk van Okounkov op het gebied van de Lus-theorie (in het Engels ‘String Theory’) beschrijven hij en zijn mede-auteurs een verband met het smelten van een kristal. Het beeld dat ze voor ogen hebben van zo’n kristal is het volgende. Een bevroren kristal bestaat uit een grote kubus die opgebouwd is uit heel veel kleine kubussen, de moleculen. Als het kristal bevroren is, zijn alle moleculen aanwezig. We “verwarmen” nu het kristal in een hoekpunt, waardoor het gaat smelten. Het smelten stellen we voor als dat we vanuit het hoekpunt op een bepaalde manier kleine kubussen (moleculen) verwijderen. Dit gebeurt volgens vastgestelde regels, waarop we later terugkomen. Zie figuur 2.

Op een vrij willekeurige manier haal je blokjes weg. Een vraag die zij beantwoorden is de volgende. Stel je doet dit voor een gigantische kubus, waarbij je heel veel blokjes wegneemt, bijvoorbeeld 20.000, en je bekijkt alle mogelijkheden, hoe zal dan in de meeste gevallen zo’n gedeeltelijk gesmolten kristal eruit zien? Het antwoord staat in figuur 4. Daar zie je in het paars precies de grens tussen wat er nog over is van het smeltende kristal en wat er inmiddels is weggesmolten.



Figuur 4: Limietvorm van een smeltend kristal

## 1.2 Wiskunde

De aanpak die we hier beschreven hebben is een mooi voorbeeld van hoe wiskundigen vaak aan de slag gaan. De eerste vraag die voorligt over bijvoorbeeld het smeltende kristal bevat veel nuances en onbekende factoren, maar ook veel ruis en overbodige informatie. De vraag die een wiskundige zich stelt is: kan ik het tot de essentie terug brengen? Welk onderdeel van de vraag ben ik in geïnteresseerd en hoe kan ik de vraag zo versimpelen dat precies dat onderdeel de essentie is? Ontstaat er een patroon? Kunnen we het efficiënter noteren? In de wiskunde gaat het er vaak om een stukje werkelijkheid te vangen in een model. Dit modelleren doen wiskundigen erg rigoureuus. Bij dit modelleren wordt de werkelijkheid geweld aan gedaan. Maar dat geeft niet, want uiteindelijk ontstaat er een model waarmee we kunnen werken en de situatie onderzoeken. En van daaruit kunnen we het model weer geleidelijk rijker, complexer en mogelijk passender maken.

Wat we in deze lessenreeks willen doen, is proberen de combinatoriek van 3-dimensionale, en ook de eenvoudigere 2-dimensionale partities beschrijven.

### **Definitie 1.1. Combinatoriek**

*Combinatoriek is de tak van wiskunde die zich bezig houdt met het tellen van het aantal objecten dat aan speciale voorwaarden voldoet of het tellen van het aantal manieren waarop een groep objecten gecombineerd kunnen worden volgens zekere voorwaarden.*

### **Definitie 1.2. Partitie**

*Een partitie van een getal is het opdelen van dat getal in een aantal stukken. Ieder stuk heeft een zekere omvang. Deze omvang is een positief geheel getal. De som van alle stukken samen is dan weer het oorspronkelijke getal waarvan we een partitie hebben.*

Om een 3-dimensionale partitie te krijgen, stapel je blokjes op een bepaalde manier. Op hoeveel verschillende manieren kun je stapelen met bijvoorbeeld 2 blokjes? Op hoeveel manieren met 3 blokjes? Kunnen we ook iets zeggen over 65 blokjes? We zullen ook zien dat er een relatie is met vlakvullingen van ruit vormen, niet snijdende paden en nog veel meer.

Genoeg gekletst, aan het werk.

### **Samenvatting hoofdstuk 1: Inleiding**

Via een boek van Doeschka Meijsing maken we kennis met de wiskundige prijs “Fields Medal”. We introduceren één van de Fields Medal winnaars Andrei Okounkov. Hij blijkt in staat complexe problemen te lijf te kunnen met betrekkelijk eenvoudige wiskunde, zoals partities.

We beschrijven de wiskunde als een rigoureuze vorm van modelleren en definiëren de begrippen uit de titel van dit dictaat: combinatoriek en partities.

## 2 3-d partities

Een partitie van een getal is het opdelen van dat getal in een aantal stukken. Het opdelen kan op verschillende manieren en zal altijd nog aan enkele extra voorwaarden moeten voldoen. We beginnen met 3 dimensionale partities.

### 2.1 3-d partities

Bij een 3 dimensionale partitie gaan we kleine kubusjes in een hoek opstapelen volgens een bepaalde manier. Het aantal kubusjes dat we gaan opstapelen heet het *getal van de partitie*. Aan het opstapelen stellen we enkele voorwaarden.

#### Definitie 2.1. 3-d partitie

Een 3-d partitie van het getal  $n$  is het opstapelen van  $n$  kubusjes in een hoek dat voldoet aan de volgende voorwaarden:

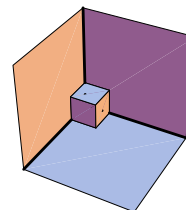
1. We hebben een hoek met een vloer en twee zijwanden;
2. De kubusjes stapelen we recht boven en of naast elkaar, zonder tussenruimte en aansluitend tegen vloer en zijwanden.

Als je deze twee voorwaarden goed bekijkt dan kom je er achter dat dit onder andere betekent dat als we vanaf een stapel kubusjes in een rechte lijn naar één van de twee zijwanden bewegen en de stapel kubusjes ligt niet direct tegen deze zijwand aan, dan treffen we een stapel kubusjes die niet kleiner is dan de stapel waar we vandaan komen. Met andere woorden: als je op een stapel kubusjes staat en je loopt richting een zijwand, dan moet je soms klimmen, maar je hoeft nooit te dalen.

Eigenlijk komen de voorwaarden er op neer dat je kubusjes stapelt in een situatie waar de zwaartekracht in drie richtingen werkt, namelijk in de richting van elk van de twee zijwanden en in de richting van een vloer.

In figuur 5 is een hoek getekend met hierin het eerste kubusje. De vloer is hier licht blauw, de zijwanden beige en paars. Voor dit eerste kubusje is alleen de hier getekende mogelijkheid helemaal aangesloten in de hoek. Voor een tweede kubusje zijn alleen de plekken mogelijk die (met een volledig zijvlak) direct op dit eerste kubusje aansluiten in één van de drie richtingen.

In figuur 6 zijn enkele verschillende voorbeelden (alleen zonder zijwanden) van 3-d partities met 4 kubusjes.



Figuur 5: Een hoek met het eerste kubusje

#### Opgave 2.1. De voorwaarden aan 3-d partities

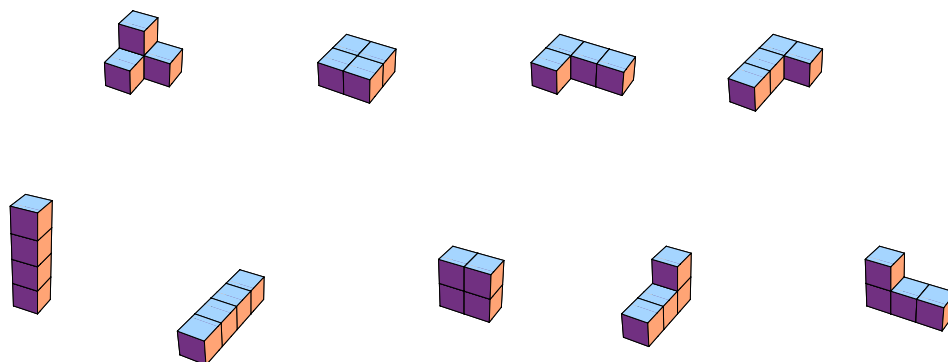
In deze opgave onderzoeken we wat de voorwaarden, die we aan 3-d partities gesteld hebben, nu precies betekenen.

**2.1 a.** Maak drie schetsen van stapelingen die aan de voorwaarden van een 3-d partitie voldoen. En leg uit hoe ze aan alle voorwaarden voldoen.

**2.1 b.** Maak drie schetsen van stapelingen die niet aan alle voorwaarden van een 3-d partitie voldoen. Beschrijf aan welke voorwaarde ze niet voldoen en waarom niet.

**2.1 c.** In figuur 7 tref je enkele stapelingen van kubusjes. Welke zijn wel en welke geen geldige 3-d partities? Motiveer je antwoord.

**2.1 d.** Geef in je eigen woorden een definitie van een 3-d partitie.



Figuur 6: Voorbeelden van verschillende 3-d partities van het getal 4

### Opgave 2.2. Aantal 3-d partities

We gaan nu de verschillende mogelijke partities onderzoeken met een vast aantal kubusjes. Voor deze opgave gaan we werkelijk aan de slag met een voorraad kleine kubusjes om te onderzoeken hoe verschillende mogelijkheden er uit kunnen zien.

**2.2 a.** Ga aan de slag met  $n$  kubusjes. Beschrijf verschillende mogelijkheden om 3-d partities te maken met  $n = 0, 1, 2, 3, 4$  of 5.

**2.2 b.** Laat zien dat er 6 verschillende mogelijkheden zijn om 3-d partities te maken van het getal  $n = 3$ .

**2.2 c.** Ga na hoeveel verschillende mogelijkheden er zijn om 3-d partities te maken van het getal  $n = 0, 1, 2$  of 4.

**2.2 d (\*)**. Ga na hoeveel verschillende mogelijkheden er zijn om 3-d partities te maken van het getal  $n = 5$ .

### Opgave 2.3. Notatie

Het is handig om gevonden partities te noteren, zodat je weet dat je ze al gehad hebt. Mogelijk heb je in opgave 2.2 al vormen van notaties gebruikt. Een goede notatie bevat geen overbodige informatie, maar wel precies die informatie die nodig is om de partitie te kunnen identificeren.

**2.3 a.** Probeer een slimme manier te bedenken om een gevonden partitie te noteren.

**2.3 b.** Gebruik deze notatie om de afbeelding op de voorpagina te beschrijven.

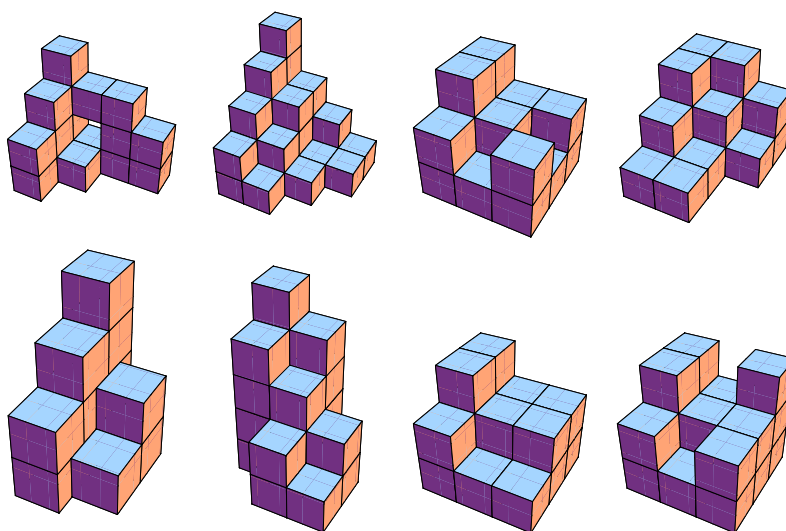
**2.3 c.** Bij opgave 2.3 a heb je een notatie methode geformuleerd. Vertaal nu de voorwaarden, opgelegd aan de stapelingen, aan het begin van deze paragraaf naar voorwaarden aan de geformuleerde notatie.

**2.3 d.** Overleg met je mede leerlingen welke notaties jullie gevonden hebben. Wissel met elkaar uit waarom je deze notatie hebt bedacht en onderzoek van elkaars notaties de voordelen en de nadelen.

### Opgave 2.4. Complement

Het is boeiend om van een 3-d partitie te kijken naar precies dat wat er niet is.

**2.4 a.** In figuur 2 hebben we een smeltend kristal weer gegeven. Het is een volledig gevulde kubus (in dit geval van 10 bij 10 bij 10) die in één hoek is gaan smelten. Is deze afbeelding een stapeling van kubusjes die voldoet aan de voorwaarden die we beschreven hebben voor 3-d partities?



Figuur 7: Voorbeelden van enkele stapelingen

**2.4 b.** *Laten we nu precies het gedeelte dat in deze afbeelding is weggesmolten op exact dezelfde manier weer opstapelen in een lege hoek, maar er dan vanuit precies de tegenovergestelde hoek naar kijken. Het kan helpen om het papier met afbeelding 2 ondersteboven te houden.*

*Maak hier een tekening van en noteer het resultaat met de notatiewijze die je bij opgave 2.3 a hebt gemaakt. Mogen we deze stapeling een 3-d partitie noemen?*

*In opdracht 2.4 b heb je van een gegeven partitie iets bepaald dat het complement heet. Het complement kun je omschrijven als precies dat wat er niet is.*

*In opdracht 2.2 heb je enkele 3-d partities gemaakt van het getal  $n$  met verschillende waarden voor  $n$ . We gaan nu deze 3-d partities bekijken binnen een kubus van  $m$  bij  $m$  bij  $m$  voor een geschikte waarde van  $m$ .*

**2.4 c.** *Onderzoek bij enkele van je voorbeelden hoe het complement van je 3-d partitie er uit ziet binnen deze kubus. Is het ook weer een 3-d partitie? Zo ja, van welk getal? Noteer zowel je oorspronkelijke 3-d partitie als je nu gevonden complement in de notatie uit opdracht 2.3 a.*

**2.4 d.** *In de vorige opgave heb je complementen gemaakt van 3-d partities van het getal  $n$  in een kubus van  $m$  bij  $m$  bij  $m$ . Welke waarde heb je voor  $m$  gekozen en waarom? Wat kun je in zijn algemeenheid zeggen over wat de meest geschikte waarde voor  $m$  is?*

**2.4 e (\*)**. *Is het complement van een 3-d partitie altijd weer een 3-d partitie? Zo nee, geef een voorbeeld waarin dit niet het geval is. Zo ja, leg uit waarom dit zo is.*

### Opgave 2.5. Samenvatting

*Geef in je eigen woorden een samenvatting van hoofdstuk 2: 3-d partities.*

*Wat heb je er van geleerd?*

*Wat heeft je verbaasd?*

**Samenvatting hoofdstuk 2: 3-d partities**

In dit hoofdstuk heb je kennis gemaakt met 3-d partities. We hebben gedefiniëerd wat we hieronder verstaan en aan welke voorwaarden het moet voldoen.

We hebben 3-d partities bekeken als stapelingen van kubusjes in een hoek met zwaartekracht in drie richtingen. Je hebt gekeken wat de voorwaarden uit de definitie nu precies betekenen en je bent gaan onderzoeken hoeveel verschillende 3-d partities mogelijk zijn met een vast aantal blokjes.

Je hebt nagedacht over een notatie voor een 3-d partitie en kennis gemaakt met het complement.

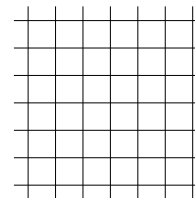
### 3 IJsmodel

Voordat we verder gaan met de partities, gaan we eerst aan de slag met een telprobleem in een iets andere omgeving. In de combinatoriek stellen we ons steeds de vraag: Op hoeveel verschillende manieren kan iets zich voordoen? Op zoek naar het antwoord op zo'n telprobleem kan het erg nuttig zijn om telproblemen die hier verwantschap mee hebben te onderzoeken. Antwoorden voor het ene telprobleem kunnen weer behulpzaam zijn in het kunnen zetten van een volgende stap bij een ander telprobleem. Daarom gaan we nu aan de slag met het ijsmodel.

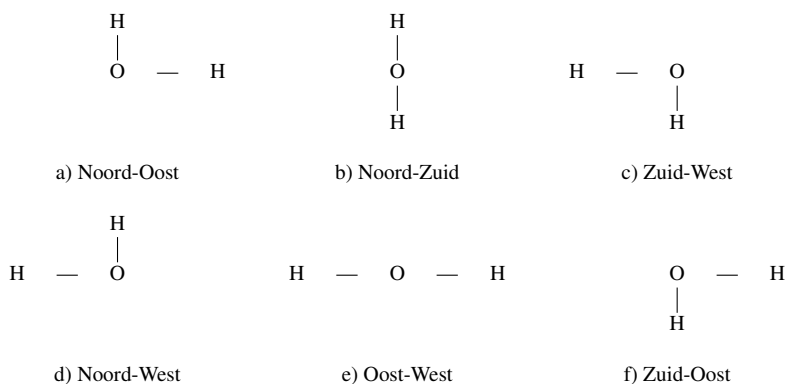
#### 3.1 IJs op een raster

Een watermolecuul bestaat uit een zuurstofatoom (O) en twee waterstofatomen (H). De formule is dan ook  $\text{H}_2\text{O}$ . Als water bevroert dan krijgt het een vaste vorm. Hierbij is het boeiend te kijken naar de manier waarop de drie atomen van een watermolecuul zich ordenen.

We gaan nu aan de slag met een twee dimensionaal model van ijs. Hierbij willen we dat de verbindingen tussen waterstof- en zuurstofatomen op een rechthoekig raster liggen zoals in figuur 8, met per rasterspunt een zuurstofatoom en per verbindingslijn tussen twee rasterspunten exact één waterstofatoom. Het waterstofatoom hoort òf bij het zuurstofatoom aan de ene

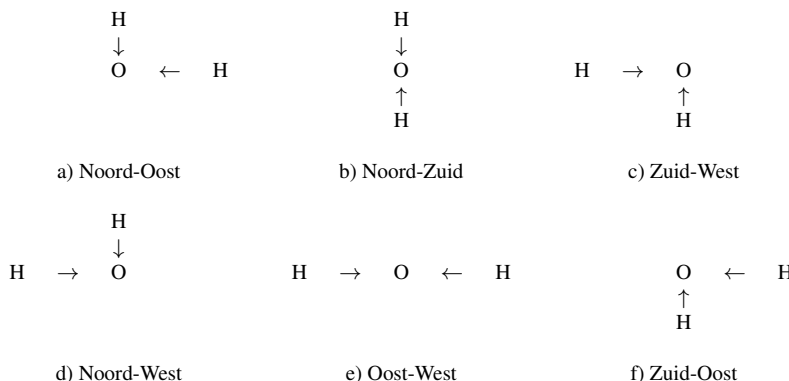


Figuur 8: **Raster voor het ijsmodel**



Figuur 9: **De zes mogelijkheden voor een watermolecuul**

kant, òf bij die aan de andere kant. De waterstof- en zuurstofatomen van één watermolecuul kunnen in een rechte lijn liggen, of ze kunnen een rechte hoek maken.



Figuur 10: **De watermoleculen uitgebreid met pijlen**

In dit model blijkt dus dat de hoek tussen twee waterstofatomen ten opzichte van het zuurstofatoom in een watermolecuul een hoek is van  $90^\circ$  of  $180^\circ$ . Zoals gezegd, dit is een model.

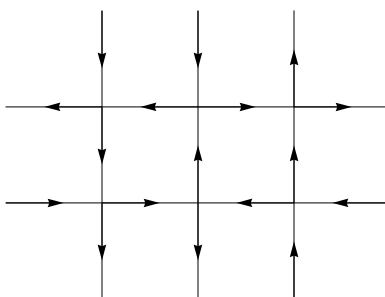
In werkelijkheid maken deze twee waterstofatomen een hoek van ongeveer  $109^\circ$ . Wat we hier beschrijven over het ijsmodel zal dus in veel gevallen niet opgaan voor werkelijk ijs. Neem het woord *ijs* in de term *ijsmodel* dus vooral niet te letterlijk.

Maar het twee dimensionale ijsmodel is wel een mooi wiskundig patroon met interessante eigenschappen, die we hier gaan onderzoeken. Het is een model dat in de statistische mechanica bestudeerd wordt. Dit is een van de weinige modellen in die context waar we alles over kunnen uitrekenen.

Rondom een zuurstofatoom zijn vier posities waar een waterstofatoom zou kunnen liggen, en we moeten er twee plaatsen. In figuur 9 tref je de zes verschillende mogelijkheden waarin je een watermolecuul kunt draperen.

### Opgave 3.1. Zes manieren voor een watermolecuul

Leg uit waarom er maar exact zes mogelijkheden zijn om op deze manier watermoleculen te vormen.



Figuur 11: De watermoleculen als raster

We kunnen nu ook de lijn van het waterstofatoom naar het zuurstofatoom voorzien van een pijl richting het zuurstofatoom waar het aan vast zit. Zie bijvoorbeeld de watermoleculen uit figuur 9 voorzien van de bijbehorende pijlen in figuur 10. De watermoleculen liggen op een raster, met per verbindingslijn tussen twee zuurstofatomen exact één waterstofatoom, waarbij dit waterstofatoom maar aan één van de twee zuurstofatomen vast zit. We kunnen deze pijlen dus ook op het raster plaatsen, om daarmee de ligging van de watermoleculen volledig te beschrijven. De watermoleculen uit de figuren 9 en 10 leiden dan tot het raster uit figuur 11.

Let hier bij op dat er dus nu een lijn is getekend tussen twee zuurstofatomen (namelijk de raster-snijpunten). Deze twee zuurstofatomen zijn echter *niet* met elkaar verbonden. Tussen de twee zuurstofatomen ligt een waterstofatoom dat met één van beide zuurstofatomen is verbonden. Welke dat is vertelt de pijl.

## 3.2 Voorwaarden op de randen

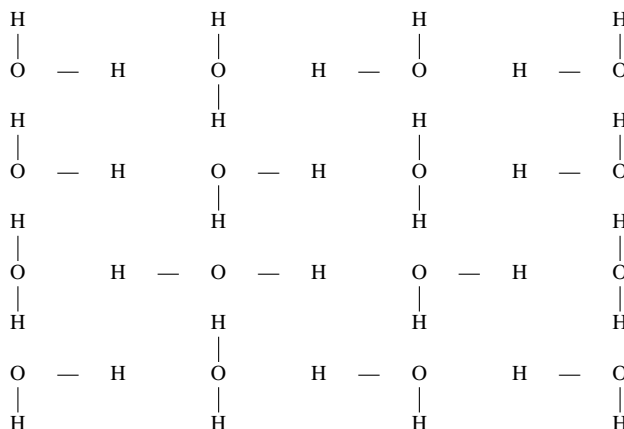
Aan dit raster gaan we nu extra eisen opleggen. Anders geformuleerd: we gaan het begrip randvoorwaarden zeer letterlijk nemen. We stellen voorwaarden aan de rand.

**Definitie 3.1. IJsmodel met randvoorwaarden**

Een ijsmodel met randvoorwaarden is een rechthoekig raster met hierop watermoleculen geplaatst. De zuurstofatomen zijn op de snijpunten van de rasterlijnen geplaatst. De waterstofatomen zijn op de lijnstukken tussen de snijpunten geplaatst, maximaal één per lijnstuk.

De plaatsing voldoet aan de volgende randvoorwaarden:

1. Aan de linker en rechter zijde wijzen de pijlen naar buiten. Met andere woorden, links en rechts steken geen waterstofatomen uit;
2. Aan de boven en onder zijde wijzen de pijlen naar binnen. Met andere woorden, boven en onder steken overall waterstofatomen uit.



Figuur 12: Voorbeeld van een ijsmodel van 4 bij 4 met randvoorwaarden

In figuur 12 is een voorbeeld getekend van een ijspatroon van 4 bij 4 watermoleculen dat voldoet aan de opgegeven randvoorwaarden.

In figuur 13 is dit zelfde voorbeeld vertaald naar een raster met pijlen.

**Opgave 3.2. Rasters van  $n$  bij  $n$** 

Ga aan de slag met een raster van  $n$  bij  $n$  raster-snijpunten en houd je voortdurend aan de randvoorwaarden geformuleerd in definitie 3.1.

**3.2 a.** Voor  $n = 1$  is er slechts één mogelijkheid. Teken deze.

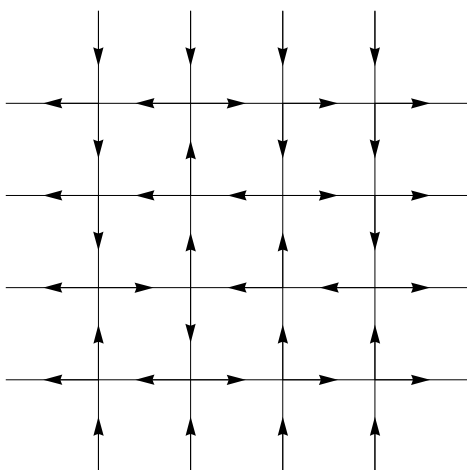
**3.2 b.** Beschrijf de verschillende mogelijkheden om deze rasters te vullen met watermoleculen met  $n = 2$  of 3. Teken zowel enkele voorbeelden met de notatie gebruikt in figuur 12 als enkele voorbeelden met de notatie gebruikt in figuur 13.

**3.2 c.** Ga na hoeveel verschillende mogelijkheden er zijn om rasters te vullen met  $n = 2$  of 3.

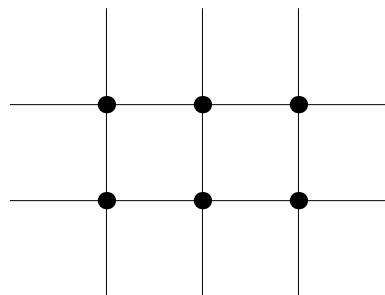
**Opgave 3.3. Noord-Zuid en Oost-West een speciale rol?**

De vormen (b) Noord-Zuid en (e) Oost-West (zoals beschreven in figuur 9) lijken een speciale rol te vervullen.

**3.3 a.** Tel in enkele voorbeelden die je gemaakt hebt in opdracht 3.2 per voorbeeld per kolom (verticaal) en per rij (horizontaal) hoe vaak de vorm Noord-Zuid voor komt, en hoe vaak de vorm Oost-West.



Figuur 13: Het zelfde voorbeeld van een ijsmodel van 4 bij 4 met randvoorwaarden uit figuur 12 maar nu met pijlen



Figuur 14: Een raster van twee bij drie

**3.3 b.** Laat in een voorbeeld de vormen Noord-Zuid en Oost-West liggen en haal de andere vormen weg. Kun je nu met op dezelfde posities de twee overgebleven vormen een ander voorbeeld maken en toch voldoen aan de randvoorwaarden? Zo ja, geef een voorbeeld. Zo nee, probeer te verklaren waarom.

**3.3 c (\*)**. Kun je een regelmaat vinden in de aantallen die je gevonden hebt bij opdracht 3.3 a, zo ja welke?

**3.3 d (\*)**. Als je bij opdracht 3.3 c een regelmaat hebt gevonden, probeer te verklaren waarom deze optreedt.

#### Opgave 3.4. Hoogte en breedte van de rasters

We gaan nu onderzoeken of er een relatie is tussen de hoogte en de breedte van de rasters, die mogelijk wordt opgelegd door de randvoorwaarden uit definitie 3.1.

**3.4 a.** In figuur 14 tref je een raster van 2 bij 3. Hoeveel waterstofatomen moet je in deze figuur plaatsen, zonder hierbij te letten op het aantal zuurstofatomen, om zowel het hele raster te vullen als ook aan de randvoorwaarden te voldoen?

**3.4 b.** Hoeveel waterstofatomen horen in dit raster, gezien het aantal zuurstofatomen?

**3.4 c.** Als we een raster hebben van  $n$  rijen en  $m$  kolommen, hoeveel zuurstofatomen hebben we dan? Hoeveel waterstofatomen horen bij dit aantal zuurstofatomen?

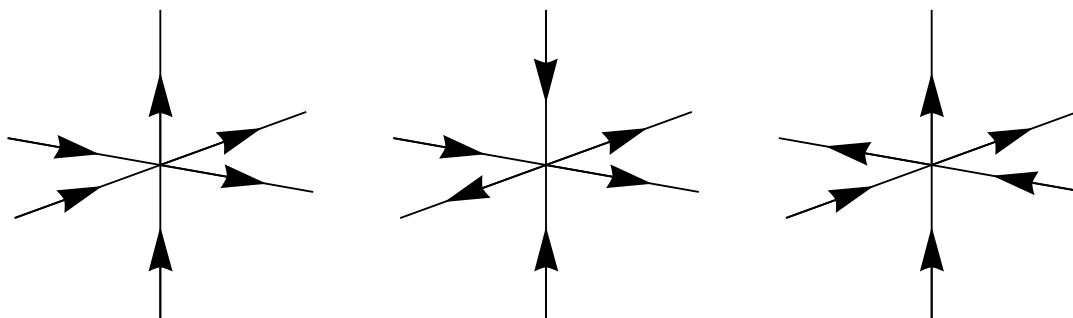
**3.4 d.** Gegeven de randvoorwaarden, hoeveel waterstofatomen moeten we plaatsten in een raster van  $n$  rijen en  $m$  kolommen, als we niet letten op het aantal zuurstofatomen?

**3.4 e.** Welk verband moet er bestaan tussen  $n$  (het aantal rijen) en  $m$  (het aantal kolommen) om het raster volgens de randvoorwaarden te kunnen maken, als we wel letten op de relatie tussen het aantal zuurstofatomen en het aantal waterstofatomen?

### 3.3 Een drie dimensionale variant

Een situatie die enigszins vergelijkbaar is met het ijsmodel, maar zich afspeelt in een driedimensionale ruimte krijgen we met het RheniumOxide model. Een RheniumOxidemolecuul dat bestaat uit één Rheniumatoom (Re) en drie zuurstofatomen (O).  $\text{ReO}_3$  smelt bij  $400^\circ$  dus het lijkt terecht dit in vaste toestand te bekijken. Dit kunnen we driedimensionaal modelleren met een raster met op ieder snijpunt een Rheniumatoom en midden op de assen tussen de snijpunten een zuurstofatoom dat hoort bij één van de twee Rheniumatomen waar het lijnstuk aan vast zit.

Net als bij het ijsmodel kunnen we dit weergeven door de lijnstukken te voorzien van een pijl in de richting van het snijpunt waar het Rheniumatoom zich bevindt waar het zuurstofatoom mee verbonden is. In figuur 15 zijn enkele mogelijke configuraties weergegeven van zo'n snijpunt en de eromheen liggende lijnstukken.



Figuur 15: Enkele mogelijke configuraties voor RheniumOxide

#### Opgave 3.5. Hoeveel configuraties voor RheniumOxide?

Beschrijf hoeveel van dergelijke verschillende configuraties er mogelijk zijn en waarom.

#### Opgave 3.6. Samenvatting

Geef in je eigen woorden een samenvatting van hoofdstuk 3: IJsmodel.

Wat heb je er van geleerd?

Wat heeft je verbaasd?

#### Samenvatting hoofdstuk 3: IJsmodel

In dit hoofdstuk behandelen we een tweedimensionaal model van ijs dat zich op een rechthoekig raster afzet.

We bekijken de verschillende vormen van een watermolecuul en introduceren een notatie op het raster.

Vervolgens definiëren we randvoorwaarden op het ijsmodel en onderzoeken en tellen we verschillende mogelijkheden op een gegeven raster.

We maken kennis met de speciale rol van de Noord-Zuid en Oost-West moleculen en met de relatie tussen hoogte en breedte van de rasters die horen bij deze randvoorwaarden.

Tot slot introduceren we een drie dimensionale variant.

## 4 2-d partities

In paragraaf 2.1 zijn we bezig geweest met 3-d partities. Uiteindelijk willen we er op uitkomen dat we kunnen berekenen op hoeveel verschillende manieren we een 3-d partitie kunnen maken met een gegeven aantal blokjes. Om dat te kunnen berekenen hebben we nog een lange weg af te leggen. Om daar te komen gaan we nu eerst een eenvoudiger variant onderzoeken: de 2-d partitie.

### 4.1 2-d partities

Bij een 2 dimensionale partitie stapelen we 2 dimensionale kubusjes in een 2 dimensionale ruimte. Met andere woorden: we stapelen vierkanten in een vlak met de bekende voorwaarden. Het enige verschil (naast het aantal dimensies) is dat de traditie wil dat we niet werken met een vloer waarvandaan we omhoog stapelen, maar met een linker zijwand, waarvandaan we naar rechts stapelen. Nu vervult het plafond de grensfunctie die bij 3-d partities door de twee zijwanden wordt vervult.

Ook hier geldt: het aantal vierkanten dat we stapelen is het getal van de partitie. Met andere woorden: een 2-d partitie van het getal  $n$  is een opdeling van  $n$  in positieve gehele getallen.

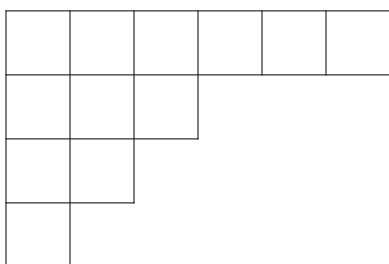
#### Definitie 4.1. 2-d partitie

*Een 2-d partitie van het getal  $n$  is het naast elkaar leggen van  $n$  vierkanten in een hoek dat voldoet aan de volgende voorwaarden:*

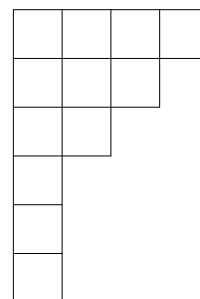
- 1. We hebben een hoek met een plafond en één linker zijwand;*
- 2. De vierkanten stapelen we recht onder en of naast elkaar, zonder tussenruimte en aansluitend tegen plafond en zijwand.*

Uit deze twee voorwaarden volgt onder andere dat als we vanaf een rij vierkanten (die niet tegen het plafond aanligt) een stap naar boven maken dan treffen we een rij die niet kleiner is dan de stapel waar we vandaan komen.

2-d partities noemen we ook wel gewoon *partities*.



Figuur 16: Een voorbeeld van een 2-d partitie van het getal 12



Figuur 17: Nog een voorbeeld van een 2-d partitie van het getal 12

Een voorbeeld van een 2-d partitie van het getal 12 is te vinden in figuur 16. Hierbij is 12 opgedeeld in 4 stapeltjes ter lengte 6, 3, 2 en 1. Een partitie weergegeven zoals in deze figuur 16 is gedaan heet een *Ferrersdiagram*.

Een alternatieve manier om van hetzelfde getal 12 een partitie te maken krijg je door de gevonden partitie te spiegelen in de diagonaal. De partitie die we zo krijgen heet de *geconjugeerde partitie*. Merk op dat dit proces de rijen

en kolommen van het Ferrersdiagram met elkaar verwisselt. In figuur 17 is de geconjugeerde partitie te zien van figuur 16.

#### Opgave 4.1. Aantal partities

We gaan nu verschillende mogelijke partities onderzoeken met een vast aantal vierkanten.

**4.1 a.** Bepaal enkele mogelijke partities voor  $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$  en  $6$ .

**4.1 b.** Laat zien dat er voor  $n = 3$  precies 3 verschillende partities mogelijk zijn.

**4.1 c.** Ga na hoeveel mogelijkheden er zijn voor elke  $n = 0, 1, 2, 4, 5$  en  $6$ .

**4.1 d.** Noteer ook alle bijbehorende Ferrersdiagrammen.

#### 4.2 $\lambda$ -notatie

Er zijn diverse vormen om een partitie mee te noteren. Eigenlijk is het zojuist gebruikte Ferrersdiagram al een notatiewijze. De eerst volgende die we gaan bekijken zit hier heel dicht tegen aan. Deze telt van boven naar beneden per stapel het aantal vierkanten en schrijft deze aantallen achter elkaar, gescheiden door komma's. De definitie is als volgt.

##### Definitie 4.2. Partitie in $\lambda$ -notatie

Een **partitie** van het getal  $n$  is een rij van positieve, gehele getallen  $\lambda_i$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots$ ,

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r). \quad (1)$$

Met de eigenschap dat

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r > 0 \quad \text{en} \quad n = \sum_{i=1}^r \lambda_i. \quad (2)$$

In deze definitie gebruiken we de Griekse hoofdletter sigma,  $\sum$ . In de wiskunde staat deze voor een reeks optellingen (sommatie).

##### Definitie 4.3. $\sum$

De uitdrukking  $\sum_{i=1}^r \lambda_i$  betekent het optellen van de uitdrukkingen  $\lambda_i$  voor alle waarden van  $i$  van 1 tot en met  $r$ . Met andere woorden

$$\sum_{i=1}^r \lambda_i = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_r.$$

Kijken we nu bijvoorbeeld naar de partities uit figuur 16 en 17 dan zien we dat de partities  $\lambda = (6, 3, 2, 1)$  en zijn geconjugeerde  $\lambda' = (4, 3, 2, 1, 1, 1)$  zijn. Deze notatie heet wel de *standaard notatie* of  $\lambda$ -notatie.

#### Opgave 4.2. $\lambda$ -notatie en geconjugeerde.

In deze opgave onderzoeken we geconjugeerde partities met behulp van de  $\lambda$ -notatie.

**4.2 a.** Bepaal de geconjugeerde partitie van  $\lambda = (11, 7, 7, 3, 3, 1, 1)$ ,  $\lambda = (8, 5, 4, 2)$ ,  $\lambda = (4, 3, 2, 1)$  en  $\lambda = (4, 3, 3, 1)$ .

**4.2 b.** Schrijf een aantal partities op waarvan de geconjugeerde gelijk is aan de partitie zelf.

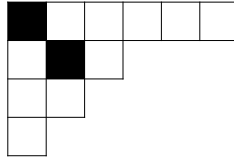
**4.2 c.** Gebruik de hier geïntroduceerde notatie  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$  voor je voorbeelden uit opdracht 4.1.

**4.2 d.** Beschrijf van de mogelijke partities van 6 die je in opdracht 4.1 hebt beschreven welke elkaars geconjugeerde zijn.

Het getal van een partitie is het getal waartoe hij optelt. In figuur 16 spreken we over een partitie van het getal 12. De notatie  $\lambda = (6, 3, 2, 1)$  schrijven we dan ook wel eens als optelling  $1 + 2 + 3 + 6 = 12$ . Of meer algemeen:  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$  noteren we ook wel als  $\lambda_r + \lambda_{r-1} + \dots + \lambda_1 = n$ . Bij deze notatie is het dus weer gangbaarder de getallen in de optelling niet-dalend te noteren in plaats van niet-stijgend. Deze notatie heet ook wel de *optel notatie*.

### 4.3 Frobenius-notatie van een partitie

Er is nog een andere manier om een partitie te presenteren. Deze is bedacht door Frobenius en is gebaseerd op het volgende. Laten we dit doen voor de stapeling in figuur 16: Verwijder de vierkanten op de diagonaal:



Figuur 18: De 2-d partitie van het getal 12 van figuur 16 met hier de vierkanten op de diagonaal uit weggelaten

dan houden we twee rijen over en twee kolommen. Als we de vierkanten in de overgebleven rijen tellen dan hebben we 5 respectievelijk 1 vierkant. Voor de kolommen 3 respectievelijk 1. De *Frobenius-notatie* is dan

$$\lambda = (5, 1 | 3, 1). \quad (3)$$

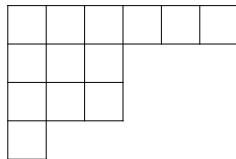
Om de Frobenius-notatie in formules op te schrijven is het handig om de *geconjugeerde partitie* te gebruiken.

Laat nu  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots)$  een partitie zijn en  $\lambda' = (\lambda'_1, \lambda'_2, \lambda'_3, \dots)$  de bijbehorende geconjugeerde partitie, dan is de Frobenius-notatie van de partitie  $\lambda$  gelijk aan

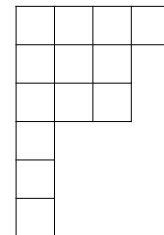
$$\lambda = (\lambda_1 - 1, \lambda_2 - 2, \dots | \lambda'_1 - 1, \lambda'_2 - 2, \dots). \quad (4)$$

We noteren in bovenstaande notatie alleen maar niet negatieve getallen. Ga na dat dit voor  $\lambda = (6, 3, 2, 1)$  de Frobenius-notatie  $\lambda = (5, 1 | 3, 1)$  geeft.

Het verwijderen van de vierkanten op de diagonaal ligt genuanceerd. Dit merk je als je de formule (4) hanteert samen met de opmerking dat we hierin alleen maar *niet negatieve* getallen noteren.



Figuur 19: Een voorbeeld van een 2-d partitie van het getal 13

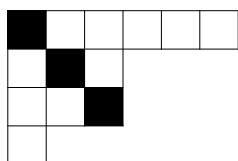


Figuur 20: De geconjugeerde van het voorbeeld van een 2-d partitie van het getal 13 uit figuur 19

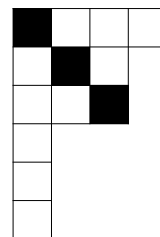
Kijken we bijvoorbeeld naar een partitie van 13 zoals in figuur 19 die sprekend lijkt op de eerder getoonde partitie van 12 uit figuur 16 behalve dat er een extra vierkantje op de diagonaal is bijgekomen. Deze partitie heeft een

geconjugeerde zoals afgebeeld in figuur 20. Halen we nu uit deze partitie de vierkanten op de diagonaal weg, zoals in figuur 21 en de geconjugeerde in figuur 22, dan lijkt het alsof we het zelfde over houden als bij de partitie van 12. Maar passen we formule 4 toe dan krijgen we als extra getallen nog twee keer een 0:

$$\begin{aligned}\lambda &= (\lambda_1 - 1, \lambda_2 - 2, \dots | \lambda'_1 - 1, \lambda'_2 - 2, \dots) = \\ (6 - 1, 3 - 2, 3 - 3, 1 - 4 | 4 - 1, 3 - 2, 3 - 3, 1 - 4, 1 - 5, 1 - 6) &= \\ (5, 1, 0, -3 | 3, 1, 0, -3, -4, -5) &= (5, 1, 0 | 3, 1, 0).\end{aligned}$$



Figuur 21: De 2-d partitie van het getal 13 van figuur 19 met hier de vierkanten op de diagonaal uit weggelaten



Figuur 22: De geconjugeerde 2-d partitie van het getal 13 van figuur 20 met hier de vierkanten op de diagonaal uit weggelaten

#### Opgave 4.3. Frobenius- en $\lambda$ -notatie

We bekijken nu hoe we partities kunnen uitwisselen tussen Frobenius- en  $\lambda$ -notatie.

**4.3 a.** Bepaal de frobenius notatie van  $\lambda = (11, 7, 7, 3, 3, 1, 1)$ ,  $\lambda = (8, 5, 4, 2)$ ,  $\lambda = (4, 3, 2, 1)$  en  $\lambda = (4, 3, 3, 1)$ .

**4.3 b.** Bepaal de notatie met  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$  voor de partities met frobenius notatie  $(6, 4, 0 | 5, 2, 0)$ ,  $(9, 8, 6, 4 | 6, 4, 1, 0)$  en  $(3, 1, 0 | 5, 4, 2)$ .

**4.3 c.** Bepaal de frobenius notatie voor je voorbeelden uit opdracht 4.1.

#### Opgave 4.4. Frobenius-notatie algemeen onderzocht

We hebben een frobenius notatie gegeven door  $(a_1, a_2, \dots, a_p | a'_1, a'_2, \dots, a'_q)$ , waarbij  $p$  het aantal getallen voor de verticale streep en  $q$  het aantal getallen na de verticale streep is. Hiermee gaan we algemene kenmerken van Frobenius-notaties onderzoeken.

**4.4 a.** Welke kenmerken heeft een frobenius notatie als een partitie gelijk is aan zijn geconjugeerde?

**4.4 b.** Geef een recept om van een frobenius notatie te komen tot een  $\lambda$  notatie.

**4.4 c.** Welk verband is er tussen  $p$  en  $q$ ? Welke relatie is er tussen  $p$  en  $q$  en het aantal vierkanten op de diagonaal dat is weg gelaten? Wat is dus het getal van de partitie achter deze frobenius notatie?

Deze Frobenius notatie lijkt niet direct een voor de hand liggende notatie te zijn. Hij is echter zeer behulpzaam bij het begrijpen van enkele kenmerken van de partitie waar we mee aan de slag zijn. Later in deze lessenreeks komen we hier nog uitgebreider op terug.

#### Opgave 4.5. Samenvatting

Geef in je eigen woorden een samenvatting van hoofdstuk 4: 2-d partities.

Wat heb je er van geleerd?

Wat heeft je verbaasd?



Figuur 23: **Ferdinand Frobenius**  
(1849 - 1917)

### Ferdinand Georg Frobenius

Ferdinand Georg Frobenius (Charlottenburg, 26 oktober 1849 Berlijn, 31 augustus 1917) was een Duitse wiskundige, die het meest bekend is voor zijn bijdragen aan de theorie van de differentiaalvergelijkingen en aan de groepentheorie. Hij heeft ook het eerste volledige bewijs voor de stelling van Cayley- Hamilton gegeven. Frobenius werd geboren in Charlottenburg, een voorstad van Berlijn, en werd opgeleid aan de Universiteit van Berlijn. Onder begeleiding van Karl Weierstrass schreef hij zijn proefschrift over de oplossing van differentiaalvergelijkingen. Na zijn afstuderen in 1870 gaf hij een aantal jaren wiskundeles aan Berlijnse scholen, totdat hij werd benoemd aan het Polytechnicum in Zürich (nu de ETH Zürich). In 1893 keerde hij terug naar Berlijn, waar hij werd gekozen in de Pruisische Academie van Wetenschappen.

*Bron (17).*

### Samenvatting hoofdstuk 4: 2-d partities

In dit hoofdstuk maak je kennis met 2-d partities. We onderzoeken wat de definitie betekent en tellen voor enkele getallen het aantal mogelijke partities.

Van een partitie maken we kennis met zijn geconjugeerde en enkele notatie mogelijkheden: Ferrersdiagram,  $\lambda$ -notatie, optel notatie en Frobenius-notatie.

De  $\lambda$ -notatie en Frobenius-notatie hebben we in enkele opgaven uitgebreid onderzocht.

## 5 Andere notaties voor 2-d partities

Naast de notaties voor 2-d partities, die genoemd zijn in de vorige paragraaf, bestaan nog veel varianten. Het onderzoeken van verschillende notaties kan je helpen bij het beter begrijpen van verschillende eigenschappen van partities. Door steeds met een andere bril naar hetzelfde te kijken, krijg je er steeds beter grip op. We noemen in deze paragraaf nog enkele notaties.

### 5.1 Partities als Diophantische vergelijkingen

Stel we hebben een partitie van 7 gegeven door  $\lambda = (4, 2, 1)$ ; of in optel notatie  $1 + 2 + 4 = 7$ . We kunnen dan kijken hoe vaak welk getal voorkomt. Aangezien we slechts positieve getallen gebruiken zal er in deze optelling nooit een getal voorkomen groter dan 7.

In deze partitie hebben we de 1, de 2 en de 4 alle drie één keer en de 3, de 5, de 6 en de 7 alle vier nul keer. We kunnen deze partitie dus ook schrijven als  $1.1 + 1.2 + 0.3 + 1.4 + 0.5 + 0.6 + 0.7 = 7$ . Een andere partitie van 7 zou dan kunnen zijn  $0.1 + 2.2 + 1.3 + 0.4 + 0.5 + 0.6 + 0.7 = 7$ .

Als we nog niet weten hoe vaak de 1, de 2 tot en met de 7 voorkomen kunnen we deze ook benoemen met de nu nog onbekenden  $x_1, x_2$  tot en met  $x_7$ . Elke partitie van 7 kun je dan schrijven als

$$x_1.1 + x_2.2 + x_3.3 + x_4.4 + x_5.5 + x_6.6 + x_7.7 = 7. \quad (5)$$

Omdat het gaat om een partitie weten we in ieder geval dat de onbekenden  $x_1, x_2$  tot en met  $x_7$  gehele getallen zijn die niet negatief zijn.

We hebben dus nu een vergelijking in 7 onbekenden. Dat is wellicht meer dan je gewend bent. Maar als een vergelijking met één of twee onbekenden kan, waarom dan niet ook met veel meer onbekenden?

Een vergelijking met onbekenden die alleen maar gehele getallen kunnen zijn heet ook wel een *Diophantische vergelijking*.

#### Opgave 5.1. Diophantische vergelijking

Geef nog enkele (niet negatieve en geheeltallige) oplossingen voor vergelijking (5).

Het vinden van een partitie van 7 is dus het vinden van een oplossing van de Diophantische vergelijking (5) met als extra voorwaarde dat de gevonden waarden voor  $x_1, x_2$  tot en met  $x_7$  niet negatief mogen zijn.

Het aantal mogelijke verschillende partities van 7 is dus gelijk aan het aantal verschillende niet negatieve oplossingen van vergelijking (5).

Herformuleren we het voor mogelijke partities van het nog niet bekende getal  $n$  dan krijgen we de Diophantische vergelijking (6).

De vraag hoeveel partities er zijn van het getal  $n$  komt dan neer op het aantal niet-negatieve geheeltallige oplossingen van een Diophantische vergelijking. Namelijk laat  $x_1, x_2, \dots, x_n$  variabelen zijn die de waarden 0, 1, 2, 3, ... kunnen aannemen. De mogelijke partities van  $n$  corresponderen precies met alle niet-negatieve geheeltallige oplossingen van de vergelijking

$$x_1.1 + x_2.2 + x_3.3 + \dots + x_{n-1}.(n-1) + x_n.n = n. \quad (6)$$

Merk op dat voor een partitie  $\lambda$  van  $n$  het getal  $x_1$  staat voor het aantal keren dat het getal 1 voorkomt in  $\lambda$ ; het getal  $x_2$  staat voor het aantal keren dat 2 voorkomt in  $\lambda$ ; etc.etc. Voor  $n = 5$  hebben we de volgende correspondentie tussen



Figuur 24: Titelpagina van een editie uit 1621 van *Arithmetica* van Diophantus

### Diophantus van Alexandrië

Diophantus van Alexandrië is een Griekse wiskundige, afkomstig uit Alexandrië. Wanneer hij leefde is niet erg duidelijk, het moet ergens tussen de 1e eeuw v.Chr. en de 4e eeuw na Chr. geweest zijn. Als meest waarschijnlijke datum geldt het midden van de 3e eeuw. Hij zou 84 jaar oud geworden zijn. Binnen de Griekse wiskunde neemt Diophantus een bijzondere positie in. Waar de andere Griekse wiskundigen zich voornamelijk met de meetkunde bezighielden, en de andere aspecten van de wiskunde vanuit de meetkunde beschouwden, hield Diophantus zich bezig met algebra als een 'doel op zich'.

Hij ontwierp hiervoor een van de eerste schrijfsystemen voor algebraïsche vergelijkingen. Zijn methode kon vergelijkingen aangeven met alle machten van de onbekende van  $-6$  tot  $6$ , maar had als nadeel dat het niet met meerdere onbekenden kon werken. Ook was hij mogelijk de eerste die negatieve getallen in zijn berekeningen gebruikte, hoewel hij ze niet accepteerde als oplossingen voor vergelijkingen.

Bron (17).

$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$  en  $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ :

| $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$ | $x_1.1 + x_2.2 + x_3.3 + x_4.4 + x_5.5 = 5$ | $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ |
|--------------------------------------------|---------------------------------------------|-----------------------------|
| $(1, 1, 1, 1, 1)$                          | $5.1 + 0.2 + 0.3 + 0.4 + 0.5 = 5$           | $(5, 0, 0, 0, 0)$           |
| $(2, 1, 1, 1)$                             | $3.1 + 1.2 + 0.3 + 0.4 + 0.5 = 5$           | $(3, 1, 0, 0, 0)$           |
| $(3, 1, 1)$                                | $2.1 + 0.2 + 1.3 + 0.4 + 0.5 = 5$           | $(2, 0, 1, 0, 0)$           |
| $(2, 2, 1)$                                | $1.1 + 2.2 + 0.3 + 0.4 + 0.5 = 5$           | $(1, 2, 0, 0, 0)$           |
| $(4, 1)$                                   | $1.1 + 0.2 + 0.3 + 1.4 + 0.5 = 5$           | $(1, 0, 0, 1, 0)$           |
| $(3, 2)$                                   | $0.1 + 1.2 + 1.3 + 0.4 + 0.5 = 5$           | $(0, 1, 1, 0, 0)$           |
| $(5)$                                      | $0.1 + 0.2 + 0.3 + 0.4 + 1.5 = 5$           | $(0, 0, 0, 0, 1)$           |

De rijtjes getallen  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  vormen zo een nieuwe notatie wijze voor een partitie: de *Diophantische notatie*.

#### Opgave 5.2. Diophantische notatie

Is dit een notatie wijze die een partitie precies vast legt? Leg uit waarom wel of niet.

In deze notatie definitie gaan we steeds uit van  $x_1$  tot en met  $x_n$ . Nemen we  $x_n = 1$  en alle ander  $x_k = 0$  voor  $k < n$  dan hebben we ook een geldige partitie van  $n$ , namelijk  $\lambda = (n)$ .

**Opgave 5.3. Overbodige nullen in een Diophantische notatie**

Als we dan aan de slag gaan met een partitie zoals de al eerder onderzochte  $\lambda = (11, 7, 7, 3, 3, 1, 1)$ , dan eindigt de notatie met een lange rij nullen. Zonder verlies van informatie kunnen we de nullen op het einde weg laten en het herschrijven tot  $(2, 0, 2, 0, 0, 0, 2, 0, 0, 0, 1)$ .

**5.3 a.** Van welk getal is dit een partitie en hoeveel overbodige nullen hebben we nu achterwege gelaten?

**5.3 b.** Waarom kunnen we niet alle nullen achterwege laten?

Bij een Diophantische notatie  $(1, 2)$  is direct te zien dat dit geen  $\lambda$ -notatie kan zijn, want de reeks is niet niet-stijgend. Maar de Diophantische notatie  $(3, 1)$  die een partitie van 5 voorstelt, kunnen we ook lezen als een partitie van 4 in de  $\lambda$ -notatie, die dan weer in de Diophantische notatie zou neer komen op  $(1, 0, 1)$ . Om verwarring te voorkomen gebruiken we deze Diophantische notatie voor partities dan ook zelden tot nooit. Wel levert hij de input voor de frequentie notatie.

**5.2 De frequentie-notatie van een partitie**

In paragraaf 5.1 hebben we gezien dat we een partitie van een getal ook kunnen schrijven als een oplossing van (zie formule (6)):

$$x_1 \cdot 1 + x_2 \cdot 2 + x_3 \cdot 3 + \dots + x_{n-1} \cdot (n-1) + x_n \cdot n = n.$$

In plaats van de notatie met een optelling of een rijtje getallen  $x_k$  kan men de partitie nu ook op een andere wijze noteren met behulp van de  $x_k$ 's. Hierbij gebruiken we de  $x_k$  als macht van  $k$ . Met andere woorden: hoe vaak de  $k$  voor komt (de frequentie) noteren we als macht van  $k$ . Dit staat bekend als de *frequentie notatie*. In plaats van  $\lambda = (3, 1, 1)$ ,  $1 + 1 + 3$  of  $(2, 0, 1)$  schrijven we  $(1^2 2^0 3^1 4^0 5^0)$  of in het algemeen voor een partitie van het getal  $n$

$$(1^{x_1} 2^{x_2} 3^{x_3} \dots (n-1)^{x_{n-1}} n^{x_n}).$$

Voor  $n = 5$  krijgen we dan:

| $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$ | $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ | $(1^{x_1} 2^{x_2} 3^{x_3} 4^{x_4} 5^{x_5})$ |
|--------------------------------------------|-----------------------------|---------------------------------------------|
| $(1, 1, 1, 1, 1)$                          | $(5, 0, 0, 0, 0)$           | $(1^5 2^0 3^0 4^0 5^0)$                     |
| $(2, 1, 1, 1)$                             | $(3, 1, 0, 0, 0)$           | $(1^3 2^1 3^0 4^0 5^0)$                     |
| $(3, 1, 1)$                                | $(2, 0, 1, 0, 0)$           | $(1^2 2^0 3^1 4^0 5^0)$                     |
| $(2, 2, 1)$                                | $(1, 2, 0, 0, 0)$           | $(1^1 2^2 3^0 4^0 5^0)$                     |
| $(4, 1)$                                   | $(1, 0, 0, 1, 0)$           | $(1^1 2^0 3^0 4^1 5^0)$                     |
| $(3, 2)$                                   | $(0, 1, 1, 0, 0)$           | $(1^0 2^1 3^1 4^0 5^0)$                     |
| $(5)$                                      | $(0, 0, 0, 0, 1)$           | $(1^0 2^0 3^0 4^0 5^1)$                     |

Ook bij de frequentie notatie kunnen we zonder verlies aan informatie de waarden  $k^0$  aan het einde achterwege laten. Dus voor  $\lambda = (11, 7, 7, 3, 3, 1, 1)$  noteren we  $(1^2 2^0 3^2 4^0 5^0 6^0 7^2 8^0 9^0 10^0 11^1)$ .

**Opgave 5.4. Oefeningen met Diophantische en Frequentie notatie**

We bekijken nu hoe we partities kunnen uitwisselen tussen  $\lambda$ -notatie, de Diophantische en Frequentie notatie.

**5.4 a.** Bepaal de Diophantische en frequentie notatie van  $\lambda = (7, 7, 3, 1, 1)$ ,  $\lambda = (8, 5, 4, 2)$  en  $\lambda = (4, 3, 2, 1, 1, 1)$ .

**5.4 b.** Bepaal de notatie met  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$  en de frequentie-notatie voor de partities met Diophantische notatie  $(2, 3, 2, 0, 1)$ ,  $(0, 2, 1, 0, 0, 2)$  en  $(0, 0, 0, 3, 0, 0, 1)$ .

**5.4 c.** Bepaal de notatie met  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$  en de Diophantische notatie voor de partities met frequentie notatie  $(1^1 2^0 3^2 4^0 5^1)$ ,  $(1^2 2^1 3^0 4^2)$  en  $(1^1 2^1 3^1 4^0 5^0 6^1)$ .

**5.4 d.** Bepaal de Diophantische en frequentie notatie voor je voorbeelden uit opdracht 4.1.

### Opgave 5.5. Samenvatting

Geef in je eigen woorden een samenvatting van hoofdstuk 5: Andere notaties voor 2-d partities.

Wat heb je er van geleerd?

Wat heeft je verbaasd?

### Samenvatting hoofdstuk 5: Andere notaties voor 2-d partities

In dit hoofdstuk introduceren we de Diophantische notatie en de frequentie notatie als nieuwe notaties voor 2-d partities.

Hiertoe maken we eerst kennis met het begrip Diophantische vergelijking.

## 6 3-d partities nader bekeken

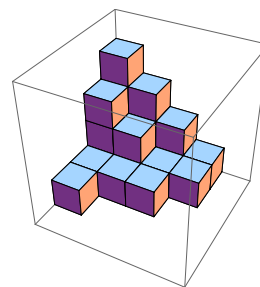
We keren nu weer terug naar de 3-d partities. We kijken nu naar 2-d partities binnen een 3-d partitie. Tevens introduceren we een notitie voor 3-d partities.

### 6.1 3-d partities opdelen in 2-d partities

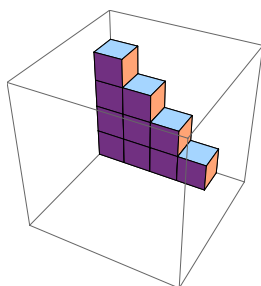
In paragraaf 2.1 hebben we uitgebreid gekeken naar 3-d partities en beschreven waar de stapelingen aan moeten voldoen. Als je deze eisen goed bekijkt dan zie je dat ze streng genoeg zijn om de 2-d partities van paragraaf 4 te omvatten. We moeten alleen weer even omhoog denken in plaats van naar beneden. Of juister geformuleerd: naar rechts veranderen we in omhoog en naar beneden veranderen we in naar rechts of naar links of wellicht zelfs naar voren, kijk maar.

We gaan nu onderzoeken hoe we 3-d partities kunnen opdelen in 2-d partities. We beginnen met het al eerder bekeken voorbeeld op de voorpagina van een 3-d partitie van 21. Om te beginnen beelden we het hier nogmaals af (zie figuur 25), maar nu inclusief de grenzen van de kubus waar we binnen blijven, zodat je nog kunt vinden waar we het over hebben als we slechts een gedeelte afbeelden.

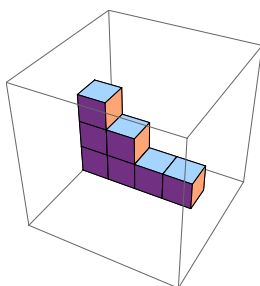
Laten we nu eens gaan kijken naar de stapelingen evenwijdig aan de rechter zijwand. Als we deze één voor één langs lopen krijgen we de stapelingen in de figuren 26, 27, 28 en 29. Hiermee krijgen we dus de 2-d partities  $\lambda_1 = (4, 3, 2, 1)$ ,  $\lambda_2 = (3, 2, 1, 1)$ ,  $\lambda_3 = (1, 1, 1)$  en  $\lambda_4 = (1)$ .



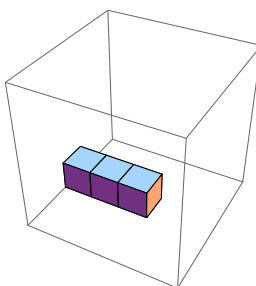
Figuur 25: Nogmaals het voorbeeld van een 3-d partitie van het getal 21



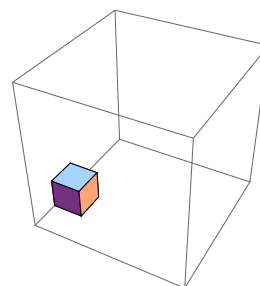
Figuur 26: De eerste 2-d deelpartitie van de 3-d partitie van het getal 21 evenwijdig aan de rechter zijwand



Figuur 27: De tweede 2-d deelpartitie van de 3-d partitie van het getal 21 evenwijdig aan de rechter zijwand

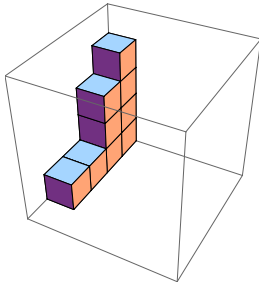


Figuur 28: De derde 2-d deelpartitie van de 3-d partitie van het getal 21 evenwijdig aan de rechter zijwand

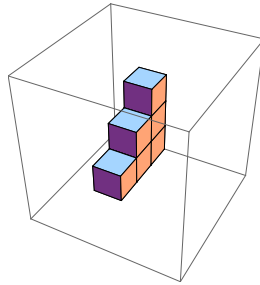


Figuur 29: De vierde 2-d deelpartitie van de 3-d partitie van het getal 21 evenwijdig aan de rechter zijwand

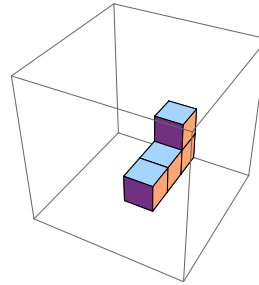
Net zo kunnen we kijken naar de stapelingen evenwijdig aan de linker zijwand. Als we deze één voor één langs lopen krijgen we de stapelingen in de figuren 30, 31, 32 en 33.



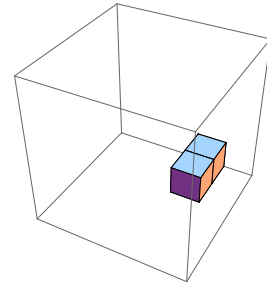
**Figuur 30: De eerste 2-d deelpartitie van de 3-d partitie van het getal 21 evenwijdig aan de linker zijwand**



**Figuur 31: De tweede 2-d deelpartitie van de 3-d partitie van het getal 21 evenwijdig aan de linker zijwand**

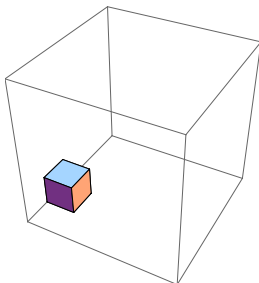


**Figuur 32: De derde 2-d deelpartitie van de 3-d partitie van het getal 21 evenwijdig aan de linker zijwand**

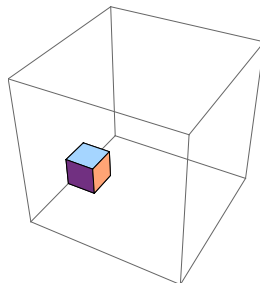


**Figuur 33: De vierde 2-d deelpartitie van de 3-d partitie van het getal 21 evenwijdig aan de linker zijwand**

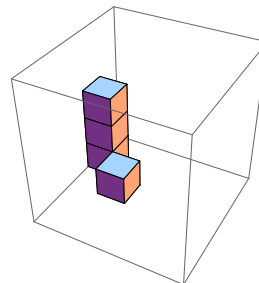
Maar verrassend genoeg kunnen we ook kijken naar de stapelingen evenwijdig aan de diagonaalwand. Onder de diagonaalwand (of de diagonaal zoals we hem ook zullen noemen) verstaan we de wand midden tussen de linker en de rechter zijwand. Deze diagonaalwand heeft als grondlijn de bissectrice van de hoek die door de vloer loopt. In figuur 37 zie je de 2-d deelpartitie door de diagonaal wand.



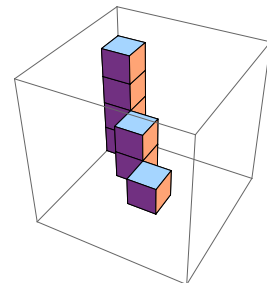
**Figuur 34: De eerste 2-d deelpartitie van de 3-d partitie van het getal 21 evenwijdig aan de diagonaal**



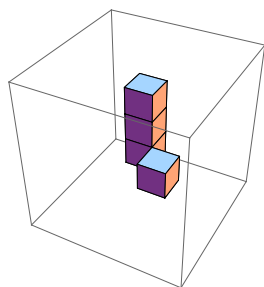
**Figuur 35: De tweede 2-d deelpartitie van de 3-d partitie van het getal 21 evenwijdig aan de diagonaal**



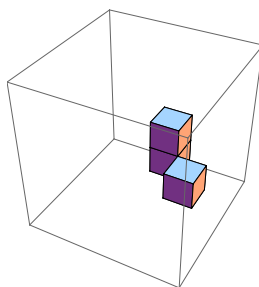
**Figuur 36: De derde 2-d deelpartitie van de 3-d partitie van het getal 21 evenwijdig aan de diagonaal**



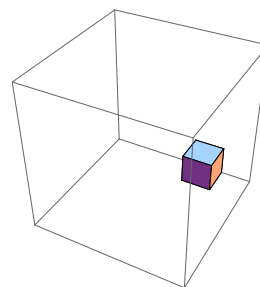
**Figuur 37: De vierde 2-d deelpartitie van de 3-d partitie van het getal 21 evenwijdig aan de diagonaal**



Figuur 38: De vijfde 2-d deelpartitie van de 3-d partitie van het getal 21 evenwijdig aan de diagonaal



Figuur 39: De zesde 2-d deelpartitie van de 3-d partitie van het getal 21 evenwijdig aan de diagonaal



Figuur 40: De zevende 2-d deelpartitie van de 3-d partitie van het getal 21 evenwijdig aan de diagonaal

Als we deze één voor één van links naar rechts langs lopen krijgen we de stapelingen in de figuren 34, 35, 36, 37, 38, 39 en 40.

Deze opdeling evenwijdig aan de diagonaal is voor enkele vervolg toepassingen de meest veelbelovende. Hier is in het midden de grootste 2-d partitie (figuur 37) met aan beide kanten aflopende 2-d partities. Dan moeten we natuurlijk nog wel definiëren wat precies groter of kleiner van partities betekent. Hierop komen we later terug.

### Opgave 6.1. 3-d partities opdelen

We gaan nu het opdelen van een 3-d partitie in 2-d deelpartities aan de hand van enkele voorbeelden beter bekijken.

**6.1 a.** Bij de figuren 26, 27, 28 en 29 is de vertaling naar de  $\lambda$ -notatie al gegeven. Vertaal de overige hier getoonde 11 2-d deelpartities van de 3-d partitie van het getal 21 naar de  $\lambda$ -notatie.

**6.1 b.** Leg uit waarom 2-d partities die we op deze wijze construeren inderdaad voldoen aan de eisen aan 2-d partities zoals geformuleerd aan het begin van paragraaf 4.

**6.1 c.** In opdracht 2.2 heb je enkele 3-d partities gemaakt van het getal  $n$  met verschillende waarden voor  $n$ . Maak van enkele van deze 3-d partities een opdeling in 2-d partities met de hier getoonde drie methoden en noteer ze met de  $\lambda$ -notatie.

### Opgave 6.2. Verbanden tussen de 2-d deelpartities van één 3-d partitie

De 2-d partities die door deze opdeel methoden ontstaan uit een 3-d partitie hebben ook onderling nog regels waaraan ze voldoen. Formuleer deze regels voor elk van de methoden met behulp van de  $\lambda$ -notatie.

Mogelijk dat je de notatie iets moet uitbreiden om de onderlinge 2-d partities tot elkaar in relatie te brengen. Als je dit doet leg dan ook uit hoe deze uitbreiding werkt en waarom je voor deze uitbreiding hebt gekozen.

## 6.2 De Matrix notatie

In opdracht 2.3 a heb je een notatie verzonnen voor 3-d partities. Er zijn er diverse mogelijk. Een gangbaar voorbeeld is gebruik maken van een matrix.

### Definitie 6.1. Matrix

*Een matrix is een rechthoekig getallenschema.*

*Een verticale reeks getallen onder elkaar heet een kolom.*

*Een horizontale reeks getallen naast elkaar heet een rij.*

*Een  $n \times m$  matrix is een matrix met  $n$  rijen en  $m$  kolommen. Iedere rij bevat net zoveel getallen als er kolommen zijn en andersom. Dus een  $n \times m$  matrix is een matrix met  $n$  rijen van  $m$  getallen en met  $m$  kolommen van  $n$  getallen.*

*Het meervoud van matrix is matrices.*

In de matrix, om een 3-d partitie mee te noteren, nemen we als linker bovenhoek de hoek die in de beschrijving van paragraaf 2.1 grenst aan de linker en rechter zijwanden en hier noteren we het aantal blokjes in die hoek. Aan de bovenrand van de matrix noteren we de aantallen van de stapels vergelijkbaar met figuur 26. Aan de linkerzijde van de matrix noteren we de aantallen van de stapels uit figuur 30. En zo vullen we de rest van de matrix. Kolommen en rijen met alleen maar nullen laten we in deze notatie meestal achterwege.

Met het voorbeeld op de voorpagina krijgen we vervolgens:

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

### Opgave 6.3. Kennismaken met de matrix notatie

*We gaan nu de matrix notatie onderzoeken aan de hand van enkele voorbeelden van 3-d partities*

**6.3 a.** *Noteer met behulp van deze notatie het smeltend kristal uit figuur 2.*

**6.3 b.** *In opgave 2.1 a en 2.2 a heb je enkele voorbeelden van 3-d partities gegeven. Vertaal enkele hiervan naar de matrix notatie*

**6.3 c.** *Beschrijf hoe je uit de notatie van matrix (7) voor een 3-d partitie de 2-d deelpartities kunt vinden volgens de drie methoden uit de vorige paragraaf.*

Deze notatie kunnen we vatten in de volgende definitie:

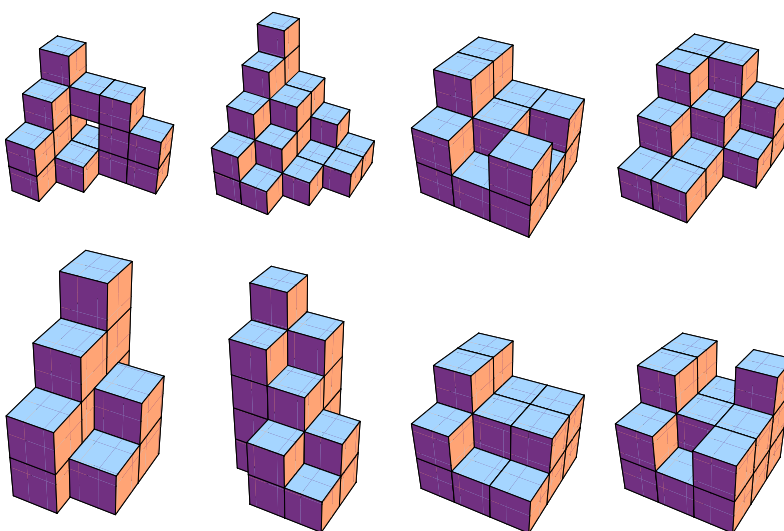
**Definitie 6.2. 3-d partitie in matrix notatie**

Een 3-dimensionale partitie van het getal  $n$  is een 2-dimensionale matrix van niet negatieve gehele getallen  $\pi(i, j)$ ,  $i, j = 1, 2, 3, \dots$ , die niet stijgt van links naar rechts, die niet stijgt van boven naar beneden en waarvan alle matrix getallen samen optellen tot het getal  $n$ . In wiskundige notatie

$$\pi = \begin{pmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \pi_{13} & \cdots \\ \pi_{21} & \pi_{22} & \pi_{23} & \cdots \\ \pi_{31} & \pi_{32} & \pi_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad (8)$$

met de eigenschap

$$\pi_{i,j} \geq \pi_{i,j+1}, \quad \pi_{i,j} \geq \pi_{i+1,j}, \quad \text{en} \quad n = \sum_{(i,j)} \pi_{i,j}. \quad (9)$$



Figuur 41: Voorbeelden van enkele stapelingen

**Opgave 6.4. Stapelingen vertalen naar de matrix notatie**

In figuur 41 hebben we de bekende voorbeelden van stapelingen. Noteer, indien mogelijk, de stapelingen in de vorm zoals gedefinieerd in definitie 6.2. Als een stapeling niet voldoet aan de voorwaarden van een 3-d partitie, beschrijf dan op welke plek hij aan welke eigenschap uit de definitie niet voldoet.

**Opgave 6.5. 2-d deelpartities onderzoeken met de matrix notatie**

We hebben een 3-d partitie gegeven door een matrix volgens definitie 6.2. We gaan van deze 3-d partitie de 2-d deelpartities evenwijdig aan de diagonaal onderzoeken. Hierbij maken we gebruik van de  $\lambda$ -notatie uit definitie 4.2.

**6.5 a.** Stel een 3-d partitie is in deze notatie gegeven door een  $n \times m$  matrix. Hoeveel 2-d deelpartities krijg je dan met de opdeling evenwijdig aan de diagonaal?

**6.5 b.** Laat zien dat er van een 3-d partitie, gegeven door een  $n \times n$  matrix, maximaal  $2n - 1$  van zulke 2-d deelpartities evenwijdig aan de diagonaal zijn.

We werken nu verder met deze  $n \times n$  matrix.

**6.5 c.** Maak een  $\lambda$ -notatie van de 2-d deelpartitie van de diagonaal. Hoeveel  $\lambda_i$  heeft deze partitie maximaal?

**6.5 d.** Maak nu  $\lambda$ -notaties van de 2-d deelpartities direct links en direct rechts naast de diagonaal. Hoeveel  $\lambda_i$  hebben deze partities maximaal?

**6.5 e.** Maak nu  $\lambda$ -notaties van de 2-d deelpartities  $k$  stappen links en  $k$  stappen rechts van de diagonaal. Hoeveel  $\lambda_i$  hebben deze partities maximaal?

**6.5 f.** Laat met behulp van definitie 6.2 en je vorige antwoorden zien dat als je vanaf de diagonaal één stap naar links of naar rechts zet dat je dan een 2-d partitie treft van een getal dat kleiner dan of gelijk aan het getal is van de partitie waar je vandaan komt.

**6.5 g.** Laat zien dat deze eigenschap van een stap zetten naar een partitie met een getal kleiner dan of gelijk aan de partitie waar je vandaan komt geldt voor iedere stap verder weg van de diagonaal.

### Opgave 6.6. Samenvatting

Geef in je eigen woorden een samenvatting van hoofdstuk 6: 3-d partities nader bekeken.

Wat heb je er van geleerd?

Wat heeft je verbaasd?

### Samenvatting hoofdstuk 6: 3-d partities nader bekeken

In dit hoofdstuk hebben we 3-d partities opgedeeld in 2-d deelpartities. Dit hebben we op drie verschillende manieren gedaan, langs de rechter zijwand, langs de linker zijwand en langs de diagonaal. We hebben de verbanden tussen de 2-d deelpartities van één zo'n opdeling onderzocht.

In dit hoofdstuk introduceren we het begrip matrix. Hiermee komen we tot een zeer bruikbare notatie voor 3-d partities: de matrix notatie.

## 7 Producten en combinatoriek

We willen graag op een formule komen die ons vertelt hoeveel partities er bestaan van een getal  $n$ . Om daar te komen hebben we wat gereedschap uit de combinatoriek nodig, zogenaamde *telfuncties*. We beginnen met  $(1+x)^n$  en willen aantonen dat de coëfficiënten iets tellen.

### 7.1 De combinatoriek van $(1+x)^n$

We werken van  $(1+x)^n$  de haakjes weg en kijken welke coëfficiënten op gaan treden voor een macht van  $x$ . Voorbeeld:

$$(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2.$$

**Opgave 7.1.** *Het uitwerken van  $(1+x)^3$ .*

*Doe dit nu zelf voor  $(1+x)^3$ .*

We doen dit nu ook voor  $(1+x)^4$ :

$$(1+x)^4 = (1+x)(1+x)(1+x)(1+x).$$

We schrijven vervolgens de  $x$ -en aan de rechterkant in kleuren en werken alles uit:

$$\begin{aligned} (1+\textcolor{red}{x})(1+\textcolor{blue}{x})(1+\textcolor{green}{x})(1+\textcolor{orange}{x}) = & 1 + \\ & \textcolor{red}{x} + \textcolor{blue}{x} + \textcolor{green}{x} + \textcolor{orange}{x} + \\ & \textcolor{red}{xx} + \textcolor{red}{x}\textcolor{blue}{x} + \textcolor{red}{x}\textcolor{green}{x} + \textcolor{red}{x}\textcolor{orange}{x} + \textcolor{blue}{xx} + \textcolor{blue}{x}\textcolor{green}{x} + \textcolor{blue}{x}\textcolor{orange}{x} + \\ & \textcolor{green}{xxx} + \textcolor{green}{xx}\textcolor{orange}{x} + \textcolor{green}{x}\textcolor{orange}{xx} + \textcolor{orange}{xxx} + \\ & \textcolor{orange}{xxxx}. \end{aligned}$$

We zien zo dat

$$(1+x)^4 = 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4.$$

Kijk naar de kleuren. Wat valt je nu op? Wat stelt bijvoorbeeld de 6 voor  $x^2$  voor? Kijk ook naar het onderstaande plaatje:

$$\textcolor{red}{x}\textcolor{blue}{x}\textcolor{green}{x}\textcolor{orange}{x} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{cc} \textcolor{red}{x} & \textcolor{blue}{x} \\ \textcolor{red}{x} & \textcolor{green}{x} \\ \textcolor{red}{x} & \textcolor{orange}{x} \\ \textcolor{blue}{x} & \textcolor{green}{x} \\ \textcolor{blue}{x} & \textcolor{orange}{x} \\ \textcolor{green}{x} & \textcolor{orange}{x} \end{array} \right.$$

De coëfficiënt 6 voor  $x^2$  is het aantal mogelijkheden dat je uit 4 verschillende kleuren er 2 kiest.

De 4 voor  $x$  staat het aantal mogelijkheden dat je uit 4 verschillende kleuren er 1 kiest.

De 4 voor  $x^3$  staat het aantal mogelijkheden dat je uit 4 verschillende kleuren er 3 kiest (wat dan weer vergelijkbaar is met het aantal mogelijkheden om één kleur niet te kiezen):

$$\textcolor{red}{x}\textcolor{blue}{x}\textcolor{green}{x}\textcolor{orange}{x} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} \textcolor{red}{x} & \textcolor{blue}{x} & \textcolor{green}{x} \\ \textcolor{red}{x} & \textcolor{blue}{x} & \textcolor{orange}{x} \\ \textcolor{red}{x} & \textcolor{green}{x} & \textcolor{orange}{x} \\ \textcolor{blue}{x} & \textcolor{green}{x} & \textcolor{orange}{x} \end{array} \right.$$

**Opgave 7.2.** *Het uitwerken van  $(1+x)^5$ .*

*Bereken nu op vergelijkbare manier:*

$$(1+x)^5 = (1+\textcolor{red}{x})(1+\textcolor{blue}{x})(1+\textcolor{green}{x})(1+\textcolor{orange}{x})(1+\textcolor{purple}{x})$$

*en beschrijf wat de coëfficiënten voor  $x^k$  met  $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$  voorstellen.*



Figuur 42: **Blaise Pascal (1623 - 1662)**

### Blaise Pascal

Blaise Pascal (Clermont-Ferrand, 19 juni 1623 - Parijs, 19 augustus 1662) was een buitengewoon begaafde Franse wis- en natuurkundige, christelijk filosoof en theoloog.

Belangrijke prestaties zijn onder andere:

de grondslag voor de waarschijnlijkheidsrekening (samen met Fermat, die van mening was dat Pascal willekeurig welk wiskundig probleem zou kunnen oplossen).

de eerste mechanische rekenmachines *de pascaline* (optelling en aftrekking) (1642)

projectieve meetkunde (kegelsneden, stelling van Pascal) en combinatoriek (driehoek van Pascal).

de *Wet van Pascal*: De druk die op een vloeistof wordt uitgeoefend, plant zich in alle richtingen met dezelfde grootte voort.

Bron (17).

Merk op dat je in plaats van kleuren ook kunt denken aan 5 lootjes die in een vaas zitten en waaruit je  $k$  lootjes trekt zonder de getrokken lootjes terug te leggen. Of in plaats van lootjes denk ook aan knikkers of ballen of ...

Dus voor elk positief geheel getal  $n$  kunnen we de haakjes in  $(1+x)^n$  wegwerken. We krijgen dan

$$(1+x)^n = c_{n,0} + c_{n,1}x + c_{n,2}x^2 + c_{n,3}x^3 + \cdots + c_{n,n-1}x^{n-1} + c_{n,n}x^n, \quad (10)$$

waarbij de  $c_{n,k}$  bepaalde constanten zijn.

**De constanten  $c_{n,k}$  zijn gelijk aan het aantal mogelijkheden dat je  $k$  objecten kunt kiezen uit een verzameling van  $n$  verschillende objecten.**

Het is eenvoudig in te zien dat

$$c_{n,0} = c_{n,n} = 1. \quad (11)$$

Later zullen we aantonen dat je de andere constanten als volgt krijgt:

$$c_{n,k} = c_{n-1,k-1} + c_{n-1,k}. \quad (12)$$

**Opgave 7.3. Op zoek naar enkele waarden voor  $c_{n,k}$ .**

Bereken voor enkele waarden van  $n$  en  $k$  de  $c_{n,k}$ 's met behulp van de formules (11) en (12).

Merk op dat (11) en (12) alle  $c_{n,k}$  uniek bepalen.

We kunnen de methode van bovenstaande opgave eenvoudig weergeven in de *driehoek van Pascal*:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & & & c_{0,0} = 1 \\
 & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & & & c_{1,0} = 1 & c_{1,1} = 1 \\
 & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & & & c_{2,0} = 1 & c_{2,1} = 2 & c_{2,2} = 1 \\
 & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & & & c_{3,0} = 1 & c_{3,1} = 3 & c_{3,2} = 3 & c_{3,3} = 1 \\
 & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & & & c_{4,0} = 1 & c_{4,1} = 4 & c_{4,2} = 6 & c_{4,3} = 4 & c_{4,4} = 1
 \end{array}$$

of nog duidelijker zonder de  $c_{n,k}$ 's:

[illegible]

Deze driehoek is genoemd naar Blaise Pascal. Zie ook figuur 42. In 1654 heeft Pascal een boek geschreven waarin hij deze driehoek uitlegt en een belangrijke bijdrage levert aan de populariteit van deze driehoek. De driehoek zelf is echter al veel ouder. In 1303 publiceert de Chinese wiskundige Zhu Shijie een boek waaruit figuur 43 afkomstig is. Hij omschrijft in dit boek deze driehoek als een zeer ouderwetse methode. (Bron: [3])

**Opgave 7.4.** *Formule (12) bewijzen met het kiezen van gekleurde ballen.*

*Met de kleuren hebben we gevonden dat de constanten  $c_{n,k}$  gelijk zijn aan het aantal mogelijkheden dat je  $k$  ballen kunt kiezen uit  $n$  verschillend gekleurde ballen. Formule (11) is direct in te zien. Niets of alles pakken kan maar op één manier. Maar voor formule (12) is toch wel meer nodig.*

We hebben  $n$  verschillende ballen. We nemen aan dat één van de ballen de kleur groen heeft. Nu willen we weten op hoeveel manieren we hier  $k$  ballen uit kunnen kiezen. Trek nu  $k$  ballen. Dan zijn er twee mogelijke situaties.

1. *of de groene bal hoort wel bij de  $k$  ballen die we hebben gekozen,*
2. *of de groene bal hoort niet bij de  $k$  ballen die we hebben gekozen.*

**7.4 a.** *Beargumenteer dat we in situatie 1 in feite  $k - 1$  niet groene ballen hebben gekozen uit  $n - 1$  niet groene ballen.*

**7.4 b.** *Beargumenteer dat we in situatie 2 in feite  $k$  niet groene ballen getrokken hebben uit  $n - 1$  niet groene ballen.*

**7.4 c.** Bewijs formule (12) met behulp van wat je gevonden hebt in opdrachten 7.4 a en 7.4 b.

**Opgave 7.5.** *Formule (12) bewijzen met formule (10).*

*Formule (12) kunnen we ook op een andere manier bewijzen, gebruik makend van formule (10).*

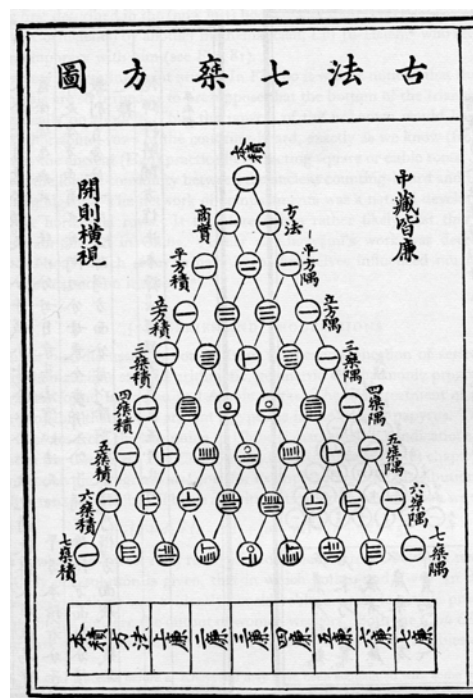
**7.5 a.** *Overtuig jezelf ervan dat als  $n > 0$  dan is*

$$(1+x)^n = (1+x).(1+x)^{n-1} = 1.(1+x)^{n-1} + x.(1+x)^{n-1}.$$

**7.5 b.** *Herschrijf formule (10) voor het geval we kijken naar  $(1+x)^{n-1}$ .*

**7.5 c.** *Bepaal met behulp van wat je gevonden hebt bij opdracht 7.5 b wat  $x \cdot (1 + x)^{n-1}$  is.*

**7.5 d.** *Tel de gevonden formules voor  $1 \cdot (1+x)^{n-1}$  en  $x \cdot (1+x)^{n-1}$  bij elkaar op en onderzoek welke uitdrukking er voor  $x^k$  staat voor een zekere  $k$ .*



**Figuur 43: Voorbeeld uit 1303 van de “Driehoek van Pascal”**

## 7.2 Binomium van Newton

We gaan nu een expliciete uitdrukking zoeken voor de  $c_{n,k}$ .

In de wiskunde bestaat ook de notatie  $\binom{n}{k}$ , men spreekt dit uit als  $n$  boven  $k$  of ook wel als  $k$  uit  $n$ .

Er geldt:

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} &= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!}.\end{aligned}\tag{13}$$

Deze notatie  $\binom{n}{k}$ , met deze eigenschap, kent een oorsprong die hem veelbelovend maakt voor de rol van de  $c_{n,k}$ , zoals deze gebruikt worden in formule (10). We gaan dit eens onderzoeken.

### Opgave 7.6. Formule (13) nader onderzocht

**7.6 a.** In formule (13) staat dat

$$\begin{aligned}&\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!}.\end{aligned}$$

Toon dit aan.

**7.6 b.** Toon met behulp van (13) aan dat

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

**7.6 c.** Bereken met formule (13) voor de volgende waarden van  $n$  en  $k$ :  $\binom{4}{0}$ ,  $\binom{3}{3}$ ,  $\binom{6}{3}$ ,  $\binom{3}{5}$  en  $\binom{7}{2}$ , en verifieer dat ze gelijk zijn aan de  $c_{n,k}$  in de driehoek van Pascal.

### Opgave 7.7. Formule (13) in relatie tot de formules (11) en (12).

In de vorige paragraaf staat de opmerking dat de formules (11) en (12) de  $c_{n,k}$  uniek bepalen. We gaan nu, geïnspireerd door opgave 7.6 c, onderzoeken of formule (13) voldoet aan de formules (11) en (12). Want als dat zo is, dan geldt in het algemeen dat  $\binom{n}{k}$  de waarden levert voor de  $c_{n,k}$  uit formule (10).

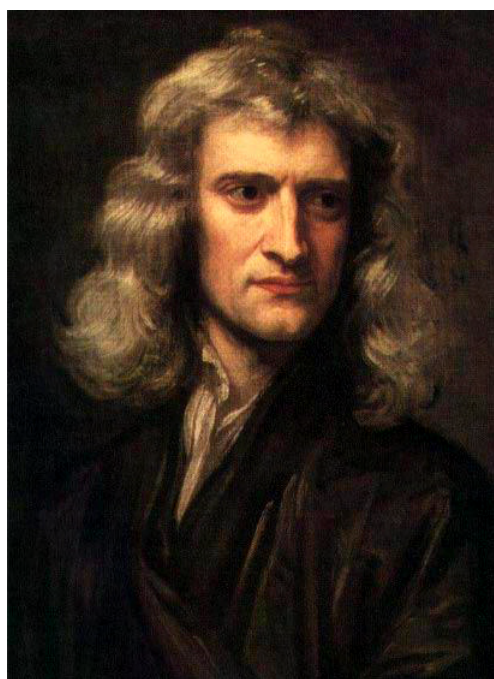
**7.7 a.** Toon aan dat (13) voldoet aan (11). Met andere woorden  $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ .

**7.7 b.** Toon aan dat (13) voldoet aan (12). Met andere woorden  $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ .

Met behulp van opdrachten 7.7 a en 7.7 b en de, bij opgave 7.3 gemaakte, opmerking dat de formules (11) en (12) de  $c_{n,k}$  uniek bepalen heb je dus nu stelling 7.1 aangetoond, die bekend staat als het *binomium van Newton*. De coëfficiënten  $c_{n,k}$ , met andere woorden de  $\binom{n}{k}$ , worden ook wel binomiaal-coëfficiënten genoemd.

**Stelling 7.1. Binomium van Newton**

$$\begin{aligned}(1+x)^n &= \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \binom{n}{3}x^3 + \cdots + \binom{n}{n-1}x^{n-1} + \binom{n}{n}x^n \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k.\end{aligned}\tag{14}$$



Figuur 44: Sir Isaac Newton (1643 - 1727)

**Sir Isaac Newton**

Sir Isaac Newton (Woolsthorpe-by-Colsterworth, 4 januari 1643 - Kensington, 31 maart 1727) was een Engelse natuurkundige, wiskundige, astronoom, natuurfilosoof, alchemist en theoloog.

In de wiskunde ontdekte hij onder meer de differentiaalrekening en de integraalrekening (met Leibniz) en verder het Binomium van Newton en benaderingsmethoden.

In zijn hoofdwerk *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* uit 1687 beschreef Newton onder andere de zwaartekracht en de drie wetten van Newton, waardoor hij de grondlegger van de klassieke mechanica werd.

Op het gebied van optica schreef hij het standaardwerk *Opticks*, vond hij de Newtontelescoop uit en ontwikkelde hij een theorie over kleuren, gebaseerd op het prisma, dat van wit licht een zichtbaar spectrum maakt. Hij bestudeerde ook de geluidssnelheid.

Bron (17).

**Opgave 7.8. Rekenen met het binomium van Newton**

**7.8 a.** Toon aan dat  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$ .

**7.8 b.** Bereken  $\sum_{k=0}^4 \binom{4}{k} 3^k$ .

**7.8 c.** Bereken  $\sum_{k=0}^9 \binom{10}{k} 2^k$ .

**7.8 d.** Bereken  $\sum_{k=2}^7 \binom{7}{k} 2^k$ .

**Opgave 7.9 (\*). Het binomium van Newton voor twee onbekenden**

In de hier gegeven formule (14) is van de twee termen uit de optelling die we tot de macht  $n$  verheffen er maar één onbekend, de ander is 1. Wat zouden we hiermee kunnen zeggen over een optelling waarbij beiden onbekend zijn, laten we zeggen  $(a + b)^n$ ? Laten we dat eens gaan onderzoeken.

**7.9 a.** Wat komt er uit  $(a + b)^n$  als  $a = 0$ ?

**7.9 b.** Toon aan dat als  $a \neq 0$ , dat dan geldt  $(a + b) = a\left(\frac{a}{a} + \frac{b}{a}\right)$ .

**7.9 c.** Hoe zou je  $(a + b)^n$  kunnen herschrijven (als  $a \neq 0$ ) zodat we formule (14) kunnen gebruiken?

**7.9 d.** Je hebt  $(a + b)^n$  nu herschreven als product van twee factoren waarbij je één van de twee factoren kunt uitwerken met formule (14). Werk dit uit.

**7.9 e.** Laat zien dat je zo kunt bewijzen dat  $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$ .

**7.9 f.** Klopt de formule die je nu in opgave 7.9 e hebt bewezen ook met wat je hebt gevonden in opgave 7.9 a als  $a = 0$ ?

In deze paragraaf hebben we dus gezien dat de coëfficiënten voor  $x^k$  in de uitwerking van  $(1 + x)^n$  een combinatorische betekenis hebben. *De coëfficiënten tellen iets.* Ze tellen namelijk het kiezen van  $k$  objecten uit een verzameling van  $n$  objecten. Met andere woorden: we hebben een functie in  $x$ , waarbij de coëfficiënten van  $x^k$  iets vertellen over een situatie die gerelateerd is aan  $k$ . Dit is een totaal andere benadering van functies in  $x$ , dan je wellicht gewend bent. Een functie die op deze manier betekenis heeft en waarbij de coëfficiënten iets voor ons tellen noemen we een *telfunctie*. Waarden voor  $x$  of de uitkomst van de gehele functie voor een concrete waarde van  $x$  zijn in dit kader veel minder interessant. We zullen in de rest van deze lessenreeks proberen een functie of reeks te vinden waarvan de coëfficiënten voor  $x^k$  het aantal 2-dimensionale of 3-dimensionale partities telt die bestaan uit  $k$  hokjes of blokjes.

Om te onderstrepen dat we tellen in plaats van dat we met een functie in  $x$  te maken hebben zullen we in plaats van  $x$  voortaan de letter **q** gebruiken als variabele.

**7.3 Producten met oplopende machten en combinatoriek**

Schrijf het volgende product eens uit:

$$(1 + q)(1 + q^2).$$

En dan

$$(1 + q)(1 + q^2)(1 + q^3).$$

Wat zie je? Hebben de coëfficiënten ook een combinatorische betekenis?

$$(1 + q)(1 + q^2)(1 + q^3)(1 + q^4) = 1 + q + q^2 + 2q^3 + 2q^4 + 2q^5 + 2q^6 + 2q^7 + q^8 + q^9 + q^{10}.$$

Hier zien we nog niet zoveel aan. Nu ook voor

$$(1 + q)(1 + q^2)(1 + q^3)(1 + q^4)(1 + q^5) = 1 + q + q^2 + 2q^3 + 2q^4 + 3q^5 + 3q^6 + 3q^7 + 3q^8 + 3q^9 + 3q^{10} + 2q^{11} + 2q^{12} + q^{13} + q^{14} + q^{15}.$$

Laten we eens opschrijven hoe deze machten tot stand komen, hierbij gebruiken we voor iedere macht uit de opgave een eigen kleur:

$$\begin{aligned}
& (1+q)(1+q^2)(1+q^3)(1+q^4)(1+q^5) \\
&= (1+q^{\textcolor{teal}{1}})(1+q^{\textcolor{violet}{2}})(1+q^{\textcolor{red}{3}})(1+q^{\textcolor{orange}{4}})(1+q^{\textcolor{blue}{5}}) \\
&= (1+q^{\textcolor{teal}{1}}+q^{\textcolor{violet}{2}}+q^{\textcolor{teal}{1}\textcolor{violet}{2}})(1+q^{\textcolor{red}{3}})(1+q^{\textcolor{orange}{4}})(1+q^{\textcolor{blue}{5}}) \\
&= (1+q^{\textcolor{teal}{1}}+q^{\textcolor{violet}{2}}+q^{\textcolor{teal}{1}\textcolor{violet}{2}}+q^{\textcolor{red}{3}}+q^{\textcolor{teal}{1}\textcolor{red}{3}}+q^{\textcolor{violet}{2}\textcolor{red}{3}}+q^{\textcolor{teal}{1}\textcolor{violet}{2}\textcolor{red}{3}})(1+q^{\textcolor{orange}{4}})(1+q^{\textcolor{blue}{5}}) \\
&= (1+q^{\textcolor{teal}{1}}+q^{\textcolor{violet}{2}}+q^{\textcolor{teal}{1}\textcolor{violet}{2}}+q^{\textcolor{red}{3}}+q^{\textcolor{teal}{1}\textcolor{red}{3}}+q^{\textcolor{violet}{2}\textcolor{red}{3}}+q^{\textcolor{teal}{1}\textcolor{violet}{2}\textcolor{red}{3}}+q^{\textcolor{orange}{4}}+q^{\textcolor{teal}{1}\textcolor{orange}{4}}+q^{\textcolor{violet}{2}\textcolor{orange}{4}}+ \\
&\quad +q^{\textcolor{teal}{1}\textcolor{violet}{2}\textcolor{orange}{4}}+q^{\textcolor{red}{3}\textcolor{orange}{4}}+q^{\textcolor{teal}{1}\textcolor{red}{3}\textcolor{orange}{4}}+q^{\textcolor{violet}{2}\textcolor{red}{3}\textcolor{orange}{4}}+q^{\textcolor{teal}{1}\textcolor{violet}{2}\textcolor{red}{3}\textcolor{orange}{4}})(1+q^{\textcolor{blue}{5}}) \\
&= (1+q^{\textcolor{teal}{1}}+q^{\textcolor{violet}{2}}+q^{\textcolor{teal}{1}\textcolor{violet}{2}}+q^{\textcolor{red}{3}}+q^{\textcolor{teal}{1}\textcolor{red}{3}}+q^{\textcolor{violet}{2}\textcolor{red}{3}}+q^{\textcolor{teal}{1}\textcolor{violet}{2}\textcolor{red}{3}}+q^{\textcolor{orange}{4}}+q^{\textcolor{teal}{1}\textcolor{orange}{4}}+q^{\textcolor{violet}{2}\textcolor{orange}{4}}+ \\
&\quad +q^{\textcolor{teal}{1}\textcolor{violet}{2}\textcolor{orange}{4}}+q^{\textcolor{red}{3}\textcolor{orange}{4}}+q^{\textcolor{teal}{1}\textcolor{red}{3}\textcolor{orange}{4}}+q^{\textcolor{violet}{2}\textcolor{red}{3}\textcolor{orange}{4}}+q^{\textcolor{teal}{1}\textcolor{violet}{2}\textcolor{red}{3}\textcolor{orange}{4}}+q^{\textcolor{blue}{5}}+q^{\textcolor{teal}{1}\textcolor{blue}{5}}+q^{\textcolor{violet}{2}\textcolor{blue}{5}}+ \\
&\quad +q^{\textcolor{teal}{1}\textcolor{violet}{2}\textcolor{blue}{5}}+q^{\textcolor{red}{3}\textcolor{blue}{5}}+q^{\textcolor{teal}{1}\textcolor{red}{3}\textcolor{blue}{5}}+q^{\textcolor{violet}{2}\textcolor{red}{3}\textcolor{blue}{5}}+q^{\textcolor{teal}{1}\textcolor{violet}{2}\textcolor{red}{3}\textcolor{blue}{5}}+q^{\textcolor{orange}{4}\textcolor{blue}{5}}+q^{\textcolor{teal}{1}\textcolor{orange}{4}\textcolor{blue}{5}}+q^{\textcolor{violet}{2}\textcolor{orange}{4}\textcolor{blue}{5}}+ \\
&\quad +q^{\textcolor{teal}{1}\textcolor{violet}{2}\textcolor{orange}{4}\textcolor{blue}{5}}+q^{\textcolor{red}{3}\textcolor{orange}{4}\textcolor{blue}{5}}+q^{\textcolor{teal}{1}\textcolor{red}{3}\textcolor{orange}{4}\textcolor{blue}{5}}+q^{\textcolor{violet}{2}\textcolor{red}{3}\textcolor{orange}{4}\textcolor{blue}{5}}+q^{\textcolor{teal}{1}\textcolor{violet}{2}\textcolor{red}{3}\textcolor{orange}{4}\textcolor{blue}{5}}) \\
&= 1+q^{\textcolor{teal}{1}}+q^{\textcolor{violet}{2}}+(q^{\textcolor{teal}{1}\textcolor{violet}{2}}+q^{\textcolor{red}{3}})+(q^{\textcolor{teal}{1}\textcolor{red}{3}}+q^{\textcolor{orange}{4}})+(q^{\textcolor{teal}{1}\textcolor{orange}{4}}+q^{\textcolor{violet}{2}\textcolor{red}{3}}+q^{\textcolor{blue}{5}})+(q^{\textcolor{teal}{1}\textcolor{blue}{5}}+q^{\textcolor{violet}{2}\textcolor{orange}{4}}+q^{\textcolor{teal}{1}\textcolor{violet}{2}\textcolor{red}{3}})+ \\
&\quad + (q^{\textcolor{violet}{2}\textcolor{blue}{5}}+q^{\textcolor{red}{3}\textcolor{orange}{4}}+q^{\textcolor{teal}{1}\textcolor{violet}{2}\textcolor{orange}{4}})+(q^{\textcolor{teal}{1}\textcolor{violet}{2}\textcolor{blue}{5}}+q^{\textcolor{teal}{1}\textcolor{red}{3}\textcolor{orange}{4}}+q^{\textcolor{red}{3}\textcolor{blue}{5}})+(q^{\textcolor{teal}{1}\textcolor{red}{3}\textcolor{blue}{5}}+q^{\textcolor{violet}{2}\textcolor{red}{3}\textcolor{orange}{4}}+q^{\textcolor{orange}{4}\textcolor{blue}{5}})+ \\
&\quad + (q^{\textcolor{teal}{1}\textcolor{violet}{2}\textcolor{red}{3}\textcolor{orange}{4}}+q^{\textcolor{teal}{1}\textcolor{orange}{4}\textcolor{blue}{5}}+q^{\textcolor{violet}{2}\textcolor{red}{3}\textcolor{blue}{5}})+(q^{\textcolor{teal}{1}\textcolor{violet}{2}\textcolor{red}{3}\textcolor{blue}{5}}+q^{\textcolor{violet}{2}\textcolor{orange}{4}\textcolor{blue}{5}})+(q^{\textcolor{teal}{1}\textcolor{violet}{2}\textcolor{orange}{4}\textcolor{blue}{5}}+q^{\textcolor{red}{3}\textcolor{orange}{4}\textcolor{blue}{5}})+ \\
&\quad + q^{\textcolor{teal}{1}\textcolor{red}{3}\textcolor{orange}{4}\textcolor{blue}{5}}+q^{\textcolor{violet}{2}\textcolor{red}{3}\textcolor{orange}{4}\textcolor{blue}{5}}+q^{\textcolor{teal}{1}\textcolor{violet}{2}\textcolor{red}{3}\textcolor{orange}{4}\textcolor{blue}{5}} \\
&= 1+q^{\textcolor{teal}{1}}+q^{\textcolor{violet}{2}}+(q^{\textcolor{teal}{1}+2}+q^{\textcolor{red}{3}})+(q^{\textcolor{teal}{1}+3}+q^{\textcolor{orange}{4}})+(q^{\textcolor{teal}{1}+4}+q^{\textcolor{violet}{2}+3}+q^{\textcolor{blue}{5}})+(q^{\textcolor{teal}{1}+5}+q^{\textcolor{violet}{2}+4}+q^{\textcolor{teal}{1}+2+3})+ \\
&\quad + (q^{\textcolor{violet}{2}+5}+q^{\textcolor{red}{3}+4}+q^{\textcolor{teal}{1}+2+4})+(q^{\textcolor{teal}{1}+2+5}+q^{\textcolor{teal}{1}+3+4}+q^{\textcolor{red}{3}+5})+(q^{\textcolor{teal}{1}+3+5}+q^{\textcolor{violet}{2}+3+4}+q^{\textcolor{orange}{4}+5})+ \\
&\quad + (q^{\textcolor{teal}{1}+2+3+4}+q^{\textcolor{teal}{1}+4+5}+q^{\textcolor{violet}{2}+3+5})+(q^{\textcolor{teal}{1}+2+3+5}+q^{\textcolor{violet}{2}+4+5})+(q^{\textcolor{teal}{1}+2+4+5}+q^{\textcolor{red}{3}+4+5})+ \\
&\quad + q^{\textcolor{teal}{1}+3+4+5}+q^{\textcolor{violet}{2}+3+4+5}+q^{\textcolor{teal}{1}+2+3+4+5}.
\end{aligned}$$

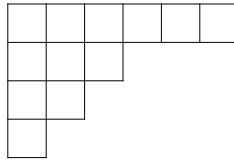
Merk op dat alle kleurencombinaties voorkomen. Met andere woorden: alle mogelijkheden, om met vijf kleuren een combinatie te maken waarin we elke kleur maximaal één keer gebruiken, komen voor. Alleen is het nu zo dat we de kleuren voor een macht gebruiken en in het uiteindelijke antwoord de machten optellen.

We hebben dus  $(1+q)(1+q^2)(1+q^3)(1+q^4)(1+q^5)$  geschreven als  $\sum_{k=0}^{15} d_k q^k$ . Heb je nu enig idee wat deze coëfficiënten  $d_k$  voorstellen? Ze lijken op het aantal 2-dimensionale partities, maar zijn het toch net niet. Het antwoord is  $d_k$  is het aantal mogelijkheden dat een getal  $k$  te schrijven is als combinatie van de getallen 1, 2, 3, 4, 5, waarbij elk getal maar hoogstens 1 keer voor mag komen. Dit noemen we een strikte partitie. Alle gebruikte getallen in de partitie zijn verschillend en komen slechts één keer voor.

### Definitie 7.1. Strikte partitie

Een (2-dimensionale) strikte partitie  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$  is een partitie waarbij

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_r > 0.$$



Figuur 45: Voorbeeld van een strikte partitie

**Opgave 7.10. Het tellen van strikte partities**

**7.10 a.** Maak een lijst van alle strikte partities die bestaan uit maximaal 10 hokjes.

**7.10 b.** Hoeveel verschillende strikte partities bestaan er voor  $n = 0, 1, 2, \dots, 10$ .

We gaan nu gebruik maken van de Griekse hoofdletter pi,  $\prod$ . In de wiskunde staat deze voor een reeks vermenigvuldigingen (product). Zie ook definitie 4.3 van  $\sum$  op pagina 17:

**Definitie 7.2.**  $\prod$ 

De uitdrukking  $\prod_{i=1}^r \lambda_i$  betekent het vermenigvuldigen van de uitdrukkingen  $\lambda_i$  voor alle waarden van  $i$  van 1 tot en met  $r$ . Met andere woorden

$$\prod_{i=1}^r \lambda_i = \lambda_1 \times \lambda_2 \times \dots \times \lambda_r.$$

De laatste vraag van opgave 7.10 zouden we natuurlijk eigenlijk willen berekenen in plaats van tellen. Is dit mogelijk? Laten we eens kijken naar de volgende formule:

$$\prod_{k=1}^{10} (1 + q^k) = (1 + q)(1 + q^2) \cdots (1 + q^{10}).$$

Merk op dat je de 10 ook mag vervangen door een groter getal, maar geen kleiner.

Om alle strikte partities te berekenen die bestaan uit maximaal  $n$  hokjes moeten we dus het volgende product berekenen

$$\prod_{k=1}^n (1 + q^k). \quad (15)$$

We hoeven hiervan alleen maar de coëfficiënten te berekenen die staan voor  $q^\ell$  met  $\ell \leq n$ .

**Opgave 7.11. Het tellen van strikte partities, vervolg**

Werk formule (15) uit voor  $n = 5$ . Vergelijk dit met wat je bij opgave 7.10 hebt gevonden. Beschrijf de verschillen of overeenkomsten en leg ze uit.

**Opgave 7.12. Partities met elk getal maximaal twee keer**

Kun je een formule opstellen waarmee je het aantal partities kunt berekenen waarbij elk getal maar maximaal 2 keer voor mag komen?

**7.4 Producten met meerdere termen**

In plaats van

$$(1 + q)(1 + q^2)(1 + q^3)$$

bekijken we nu het product

$$\begin{aligned}
 & (1 + q + q^2)(1 + q^2 + q^4)(1 + q^3 + q^6) = \\
 & (1 + q^{\textcolor{teal}{1}} + q^{\textcolor{teal}{1}+\textcolor{teal}{1}})(1 + q^{\textcolor{violet}{2}} + q^{\textcolor{violet}{2}+\textcolor{violet}{2}})(1 + q^{\textcolor{red}{3}} + q^{\textcolor{red}{3}+\textcolor{red}{3}}) = \\
 & 1 + q^{\textcolor{teal}{1}} + (q^{\textcolor{teal}{1}+\textcolor{teal}{1}} + q^{\textcolor{violet}{2}}) + (q^{\textcolor{teal}{1}+\textcolor{violet}{2}} + q^{\textcolor{red}{3}} + q^{\textcolor{teal}{1}+\textcolor{violet}{2}+\textcolor{violet}{2}} + q^{\textcolor{red}{3}} + q^{\textcolor{teal}{1}+\textcolor{violet}{2}+\textcolor{violet}{2}} + q^{\textcolor{red}{3}+\textcolor{red}{3}}) + \\
 & + (q^{\textcolor{teal}{1}+\textcolor{violet}{2}+\textcolor{violet}{2}} + q^{\textcolor{teal}{1}+\textcolor{violet}{2}+\textcolor{red}{3}} + q^{\textcolor{red}{3}+\textcolor{red}{3}}) + (q^{\textcolor{teal}{1}+\textcolor{violet}{2}+\textcolor{red}{3}} + q^{\textcolor{teal}{1}+\textcolor{violet}{2}+\textcolor{red}{3}} + q^{\textcolor{red}{3}+\textcolor{red}{3}}) + \\
 & + (q^{\textcolor{teal}{1}+\textcolor{violet}{2}+\textcolor{red}{3}+\textcolor{red}{3}} + q^{\textcolor{teal}{1}+\textcolor{violet}{2}+\textcolor{red}{3}+\textcolor{red}{3}} + q^{\textcolor{red}{3}+\textcolor{red}{3}+\textcolor{red}{3}}) + (q^{\textcolor{teal}{1}+\textcolor{violet}{2}+\textcolor{red}{3}+\textcolor{red}{3}} + q^{\textcolor{teal}{1}+\textcolor{violet}{2}+\textcolor{red}{3}+\textcolor{red}{3}}) + (q^{\textcolor{teal}{1}+\textcolor{violet}{2}+\textcolor{red}{3}+\textcolor{red}{3}} + q^{\textcolor{red}{3}+\textcolor{red}{3}+\textcolor{red}{3}}) + \\
 & + q^{\textcolor{teal}{1}+\textcolor{violet}{2}+\textcolor{red}{3}+\textcolor{red}{3}+\textcolor{red}{3}} + q^{\textcolor{teal}{1}+\textcolor{violet}{2}+\textcolor{red}{3}+\textcolor{red}{3}+\textcolor{red}{3}} = \\
 & 1 + q + 2q^2 + 2q^3 + 3q^4 + 3q^5 + 3q^6 + 3q^7 + 3q^8 + 2q^9 + 2q^{10} + q^{11} + q^{12}.
 \end{aligned}$$

Uit de wijze waarop dit is opgebouwd valt het volgende op:

De coëfficiënt voor  $q^k$  is gelijk aan het aantal partities van  $k$  waarbij de getallen die voor mogen komen alleen maar 1, 2 en 3 zijn. En elk getal mag ten hoogste 2 keer voorkomen.

Hoe kunnen we nu het aantal verschillende partities van  $n$  berekenen, waarbij elk getal ten hoogste 2 maal voor mag komen?

Dit vinden we in de coëfficiënt van  $q^n$  in

$$\prod_{k=1}^n (1 + q^k + q^{2k}).$$

**Opgave 7.13. Enkele voorbeelden met elk getal maximaal twee keer**

**7.13 a.** Hoeveel partities bestaan er van 6 waarbij we elk getal maximaal 2 keer mogen gebruiken?

**7.13 b.** Hoeveel partities bestaan er van 9 waarbij we elk getal maximaal 2 keer mogen gebruiken?

Hoe kunnen we dan het aantal verschillende partities van  $n$  berekenen, waarbij elk getal ten hoogste 3 maal voor mag komen?

Dit vinden we in de coëfficiënt van  $q^n$  in

$$\prod_{k=1}^n (1 + q^k + q^{2k} + q^{3k}).$$

**Opgave 7.14. Enkele voorbeelden met elk getal maximaal drie keer**

**7.14 a.** Hoeveel partities bestaan er van 7 waarbij we elk getal maximaal 3 keer mogen gebruiken?

**7.14 b.** Hoeveel partities bestaan er van 10 waarbij we elk getal maximaal 3 keer mogen gebruiken?

En hoe kunnen we dan het aantal verschillende partities van  $n$  berekenen, waarbij elk getal ten hoogste  $m$  maal voor mag komen?

Dit vinden we in de coëfficiënt van  $q^n$  in

$$\prod_{k=1}^n (1 + q^k + q^{2k} + q^{3k} + \cdots + q^{mk}). \quad (16)$$

En tot slot: Hoe kunnen we het aantal verschillende partities van  $n$  berekenen?

Dit vinden we in de coëfficiënt van  $q^n$  in

$$\prod_{k=1}^n (1 + q^k + q^{2k} + q^{3k} + \cdots + q^{nk}). \quad (17)$$

Merk op dat we in deze formule alleen maar tot en met  $q^{nk}$  hoeven te gaan. We zijn tenslotte op zoek naar partities van  $n$  en  $nk \geq n$ , dus een grotere macht van  $q$  hoeven we zeker niet te onderzoeken.

**Opgave 7.15. Enkele voorbeelden met (varianties op) formule (17)**

**7.15 a.** Bereken op hoeveel manieren je het getal 21 kunt maken als je de getallen 1 tot en met 5 elk maximaal 3 keer mag gebruiken.

**7.15 b.** Bereken op hoeveel manieren je het getal 21 kunt maken als je de getallen 1, 2 en 3 elk maximaal 4 keer mag gebruiken.

**7.15 c.** Bereken hoeveel strikte partities van 7 er bestaan.

**7.15 d.** Bereken hoeveel partities van 7 er bestaan.

**Opgave 7.16. Formule (17) nader onderzocht**

**7.16 a.** Als je formule (17) uitwerkt en je onderzoekt de coëfficiënt voor  $q^m$ . Zegt dit iets over het aantal partities van  $m$  als  $m \leq n$ ? Leg uit waarom wel of niet.

**7.16 b.** En hoe zit dit dan als  $m > n$  en waarom?

**Opgave 7.17. Samenvatting**

Geef in je eigen woorden een samenvatting van hoofdstuk 7: Producten en combinatoriek.

Wat heb je er van geleerd?

Wat heeft je verbaasd?

**Samenvatting hoofdstuk 7: Producten en combinatoriek**

In dit hoofdstuk hebben we een begin gemaakt met het opzetten van telfuncties. Aan de hand van het analyseren van enkele voorbeelden van  $(1+x)^n$  hebben we gezien dat de coëfficiënt van  $x^k$  het aantal mogelijkheden telt om uit  $n$  verschillend gekleurde ballen er  $k$  te kiezen.

We hebben kennis gemaakt met de driehoek van Pascal en het binomium van Newton. Op deze wijze zijn we uitgekomen bij wat in essentie een telfunctie is. Om deze overgang te markeren en helder onderscheid te maken tussen reguliere functies en telfuncties zijn we voor de variabele overgestapt van de  $x$  naar de  $q$ .

Voor enkele concrete eenvoudige situaties hebben we inmiddels al formules kunnen opstellen die ons vertellen op hoeveel verschillende manieren er partities mogelijk zijn. Hierbij hebben we onder andere ook kennis gemaakt met het begrip strikte partitie.

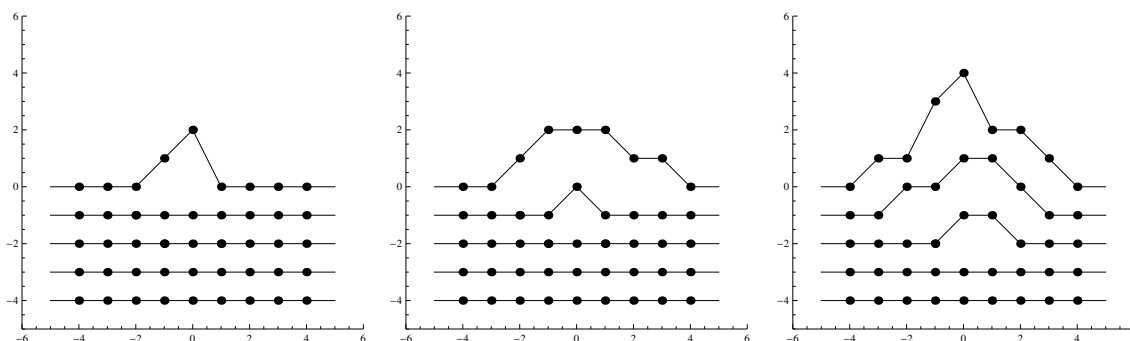
## 8 3-d partities en andere afbeeldingen

In deze paragraaf gaan we enkele verschillende figuren en objecten onderzoeken. Deze kunnen we namelijk relateren aan 3-d partities. De objecten uit deze paragraaf hebben echter zo hun eigen kenmerken en wetmatigheden. Als het ons lukt deze objecten exact te koppelen aan 3-d partities, kan dit ons dus ook weer meer vertellen over eigenschappen van 3-d partities en andersom. Dus ook hier weer gaan we met nieuwe brillen naar iets bekends kijken om er meer over te weten te komen.

### 8.1 3-d partities en niet snijdende paden

In deze paragraaf gaan we aan de slag met een nieuw begrip: *niet snijdende paden*. Uiteindelijk zullen we ontdekken dat dit begrip een relatie heeft met de eerder onderzochte 3-d partities.

In figuur 46 zie je enkele voorbeelden van niet snijdende paden. De paden zijn horizontale lijnen, die links en rechts tot in het oneindige doorgaan. De paden gaan door rasterpunten met gehele getallen als  $x$ - en  $y$ -coördinaat. Voor ieder pad is er voor elk geheel getal als  $x$ -coördinaat een punt met een geheel getal als  $y$ -coördinaat waar het pad door heen gaat.



Figuur 46: Enkele voorbeelden van configuraties van niet snijdende paden

Rondom het midden (bij  $x$ -coördinaat 0) kunnen de paden omhoog gaan. Vanaf een zekere grens buiten het midden liggen de paden, beide kanten op verder naar buiten, volstrekt horizontaal. Het niveau dat het pad daar heeft wordt de *standaardhoogte* van het pad genoemd.

Niet snijdende paden kun je zien als een stapel lakens met in het midden een plek waar de bovenste lakens iets omhoog komen.

Het is, zeg maar, net alsof het lang goed gaat om de lakens strak op elkaar te leggen, totdat er in het midden een kreukeltje komt. Hierdoor is dat laken daar een klein beetje omhoog. Ieder volgend laken zal daar ook weer minstens de hoogte van dat kreukeltje omhoog staan, maar misschien nog meer. Want tsja, als het eenmaal niet meer recht ligt, dan wordt het steeds lastiger.

Bijzonder aan deze stapeling is dat er maar exact één punt is waar het mis kan gaan, namelijk in het midden.

Kunnen we dit wiskundig beschrijven? Lakens stapelen klinkt als een drie dimensionale activiteit, maar we beperken ons tot een twee dimensionale situatie.

De lakens zijn oneindig lange paden, langs punten op een raster. Hierbij is er voor elk pad, voor elke  $x$ -coördinaat een roosterpunt dat onderdeel is van het pad. De stapel lakens gaat oneindig ver naar beneden door en de standaardhoogte van het bovenste laken noemen we het “nul” pad.

Elk roosterpunt heeft een geheel getal als  $x$ -coördinaat en een geheel getal als  $y$ -coördinaat. We noteren punten als  $(m, n)$ . Een laken, of eigenlijk dus een pad, is een oneindige rij roosterpunten

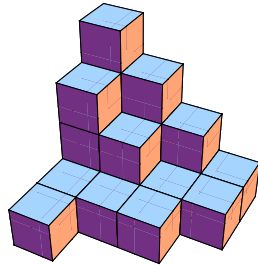
$$\cdots, (-3, n_{-3}), (-2, n_{-2}), (-1, n_{-1}), (0, n_0), (1, n_1), (2, n_2), (3, n_3), (4, n_4), \cdots$$

Omdat we voor elk pad de standaardhoogte weten, kunnen we het pad identificeren met deze standaardhoogte. Een

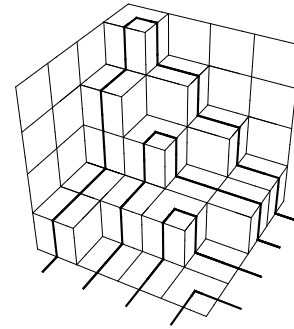


$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \\ 1 & & & \end{pmatrix}, \quad (18)$$

die correspondeert met de stapeling van figuur 48.



Figuur 48: 3-d partitie



Figuur 49: 3-d partitie met paden

Heb je enig idee wat de connectie is?

Om dit in te zien doen we het volgende. Voor het bovenste pad leggen we een touw over de kubussen die het dichtst bij de wanden liggen. Vervolgens leggen we, om het tweede pad te maken, een tweede touw over die kubussen die afstand 1 tot de wanden hebben. Het derde pad krijgen we met een touw over de kubussen die afstand 2 (tot de wanden) hebben, enz. enz.. Zo krijgen we tenslotte figuur 49.

Het eerste pad correspondeert dus met de volgende getallen in de 3-d partitie (18)

$$\begin{pmatrix} \underline{4} & \underline{3} & \underline{2} & \underline{1} \\ \underline{3} & 2 & 1 & 1 \\ \underline{1} & 1 & 1 & \\ \underline{1} & & & \end{pmatrix},$$

het tweede, derde en vierde pad met achtereenvolgens

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & \underline{2} & \underline{1} & \underline{1} \\ 1 & \underline{1} & 1 & \\ 1 & & & \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \underline{1} & \\ 1 & & & \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \\ 1 & & & \end{pmatrix}.$$

De overige paden lopen horizontaal.

### Opgave 8.2. Enkele vertaal voorbeelden

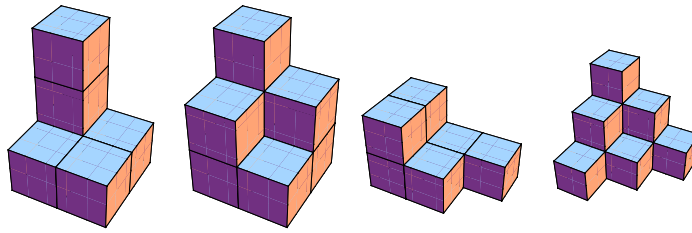
We maken nu enkele voorbeelden waarin we 3-d partities vertalen naar configuraties van Niet Snijdende Paden.

**8.2 a.** Geef aan hoe je uit de bovenstaande getallen de roosterpunten van de eerste 5 paden kunt construeren.

**8.2 b.** Geef de roosterpunten van de eerste 5 paden van

$$(1) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & \end{pmatrix}, \quad (2) \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & \\ 1 & & \end{pmatrix}, \quad (3) \begin{pmatrix} 7 & 5 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 1 & \\ 3 & 2 & 1 & \end{pmatrix}, \quad (4) \begin{pmatrix} 6 & 5 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & & \\ 1 & 1 & & \end{pmatrix}.$$

**8.2 c.** Geef de roosterpunten van de eerste 4 paden van de 3-d partities in figuur 50.



Figuur 50: enkele 3-d partities

**Opgave 8.3. Een algemene vertaling**

We onderzoeken nu een algemene formule voor de vertaling van een 3-d partitie naar een configuratie van Niet Snijdende Paden.

**8.3 a.** Leid een formule af voor de roosterpunten van de eerste  $n + 1$  paden, die horen bij de 3-d partitie

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

**8.3 b.** Beschrijf waarom en hoe elke 3-d partitie een unieke configuratie van niet snijdende paden definiëert.

**8.3 c.** Vertaal de 3-d partitie van figuur 48 naar de 2-d deelpartities evenwijdig aan de diagonaal (zoals we ook gedaan hebben in paragraaf 6.1. Maak vervolgens hiervan een vertaling naar de hierbij horende configuratie van Niet Snijdende Paden.

**8.3 d.** Doe vervolgens deze vertaalslag via 2-d deelpartities met de 3-d partitie van opgave 8.3 a.

**Opgave 8.4. Grenzen aan de vertaalmogelijkheden**

Voor de vertaling terug van configuraties van Niet Snijdende Paden naar 3-d partities open we tegen grenzen op. Er zijn configuraties van Niet Snijdende Paden, die blijken geen echte 3-d partitie te kunnen vertegenwoordigen.

**8.4 a.** Geef een voorbeeld van een configuratie van Niet Snijdende Paden die op deze manier niet afkomstig kan zijn van een 3-d partitie.

**8.4 b (\*).** Formuleer extra eisen aan een configuratie van Niet Snijdende Paden om het altijd afkomstig te kunnen laten zijn van een 3-d partitie.

**8.2 3-d partities en ruitbetegelingen**

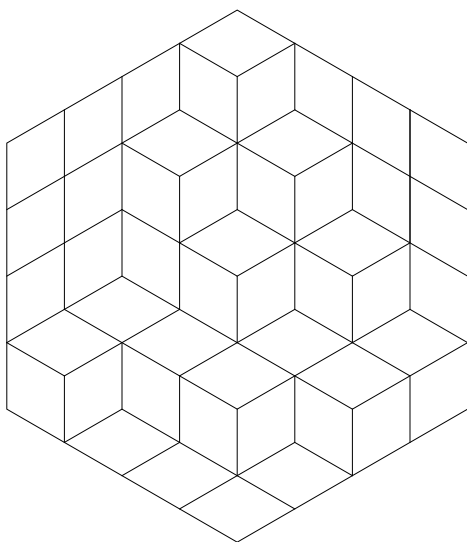
Als we de 3-d partitie uit figuur 48 nemen en een deel van de zijwanden erbij nemen krijgen we een ruitbetegeling van een hexagon, een regelmatige zeshoek (zie figuur 51). Bij deze ruitbetegeling is de volledige zeshoek gevuld met precies dezelfde vierhoeken, een ruit, in een drietal verschillende richtingen neergelegd.

Natuurlijk kun je de wanden groter maken. Dan wordt ook het hexagon groter. Echter we spreken af dat we altijd het kleinste hexagon nemen waarin een 3-d partitie past. Dit noemen we de *grootte* van het hexagon. Het hexagon van figuur 51 heeft grootte 4.

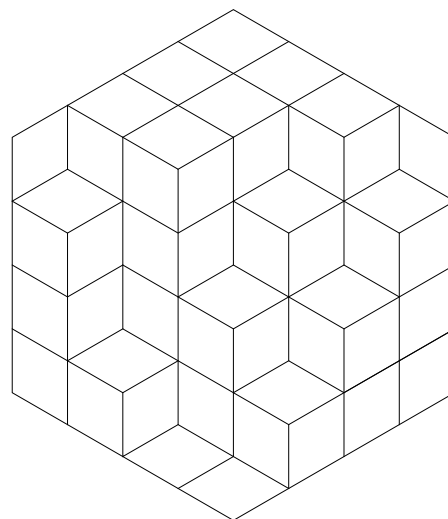
**Opgave 8.5. Ruitbetegelingen**

We gaan nu enkele kenmerken van deze vertaling van een 3-d partitie naar een ruitbetegeling onderzoeken. Op pagina 116 staat een sjabloon om zeshoeken in te tekenen.

**8.5 a.** Leg uit dat bij elke 3-d partitie een unieke ruitbetegeling van een hexagon bestaat.



Figuur 51: **ruitbetegeling**



Figuur 52: **figuur 51 gedraaid over 60 graden**

**8.5 b.** *Vertaal de 3-d partities van figuur 50 naar ruitbetegelingen.*

**8.5 c.** *Hoe kun je uit de getallen van de 3-d partitie*

$$\pi = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & \\ 2 & 1 & & \end{pmatrix} \quad (19)$$

*de (minimale) grootte van het hexagon bepalen? Geef het antwoord in dit concrete geval en beschrijf met welke methode je er toe gekomen bent.*

**8.5 d.** *Maak de ruitbetegeling die hoort bij de 3-d partitie gegeven door de matrix in formule (19)*

We kunnen nu het hexagon roteren over een hoek van 60 graden.

### Opgave 8.6. **Ruitbetegelingen roteren**

*In deze opgave onderzoeken we diverse mogelijkheden van het roteren van ruitbetegelingen.*

**8.6 a.** *In figuur 52 zie je figuur 51 gedraaid over 60 graden. Beschrijf welke 3-d partitie je zo krijgt.*

**8.6 b.** *Herhaal dit proces van draaien over 60 graden tot je weer terug bent in de uitgangspositie. Welke 3-d partities krijg je zo?*

**8.6 c.** *Doe hetzelfde voor de 3-d partities van opgave 8.2 b.*

### Opgave 8.7. **Ruitbetegelingen spiegelen**

*In deze opgave onderzoeken we diverse mogelijkheden van het spiegelen van ruitbetegelingen.*

**8.7 a.** *In plaats van roteren kunnen we ook spiegelen in een aantal assen die door het midden van het hexagon gaan. Beschrijf welke spiegelingen zo mogelijk zijn.*

**8.7 b.** *Beschrijf welke 3-d partities je zo krijgt als je dit doet voor de partitie van figuur 51.*

**8.7 c.** Doe hetzelfde voor de 3-d partities van opgave 8.2 b.

**Opgave 8.8. Afbeeldingen van zeshoeken naar zeshoeken**

In deze opgave gaan we de diverse afbeeldingen onderzoeken, die een zeshoek met een ruitbetegeling afbeeldt op een (mogelijk andere) zeshoek met een ruitbetegeling.

**8.8 a.** Leg uit dat je door te roteren en te spiegelen in de assen door het midden van het hexagon alle mogelijke afbeeldingen krijgt die een hexagon in een hexagon overvoeren.

**8.8 b.** Hoeveel van dit soort afbeeldingen zijn er?

**8.8 c.** Het is eenvoudig in te zien dat je met 1 blokje geen 3-d partitie kunt maken die niet verandert als je het hexagon roteert of spiegelt. Teken de ruitbetegeling die hoort bij de 3-d partitie met één blokje en teken een ruitbetegeling die hieruit kan ontstaan na één van de rotaties of spiegelingen, maar die wel anders is dan de oorspronkelijke. Beschrijf welke afbeelding je gebruikt hebt en bij welke 3-d partitie de tweede ruitbetegeling hoort.

**8.8 d.** Hoeveel blokjes heb je minimaal nodig om wel zo'n 3-d partitie te maken, die niet verandert als je het hexagon roteert of spiegelt?

**Definitie 8.2. Totaal symmetrische zelf-complementaire 3-d partitie**

Een 3-d partitie die niet verandert door de bijbehorende ruitbetegeling van het hexagon te roteren of te spiegelen noemen we een totaal symmetrische zelf-complementaire 3-d partitie.

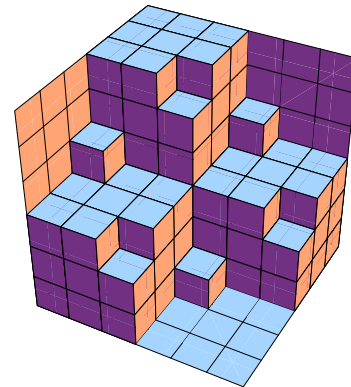
In figuur 53 zie je een voorbeeld van zo'n totaal symmetrische zelf-complementaire 3-d partitie.

D.P. Robbins (1942 - 2003) stelde een vermoeden op over het aantal verschillende totaal symmetrische zelf-complementaire 3-d partities. George Andrews bewees in 1992 dat het vermoeden van Robbins juist is. Dus inmiddels mogen we het een stelling noemen.

**Stelling 8.1. Telfunctie voor totaal symmetrische zelf-complementaire 3-d partities**

De telfunctie voor het aantal totaal symmetrische zelf-complementaire 3-d partities die horen bij een hexagon van grootte  $2n$  is gelijk aan

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)q^n \quad \text{met} \quad p(n) = \prod_{j=0}^{n-1} \frac{(3j+1)!}{(n+j)!}. \quad (20)$$



Figuur 53: Totaal symmetrische zelf-complementaire 3-d partitie

**Opgave 8.9. Totaal symmetrische zelf-complementaire 3-d partities**

Het nieuwe begrip totaal symmetrische zelf-complementaire 3-d partities gaan we in deze opgave eens beter bekijken.



Figuur 54: David Robbins (1942 - 2003)



Figuur 55: George Andrews (1938 - )

**8.9 a.** Geef een verklaring voor de naam van deze 3-d partities?

**8.9 b.** Bereken met bovenstaande formule het aantal totaal symmetrische zelf-complementaire 3-d partities die horen bij een hexagon van grootte  $2n = 4$ .

**8.9 c.** Beschrijf of teken ze allemaal.

**8.9 d.** Doe hetzelfde voor een hexagon van grootte  $2n = 6$ .

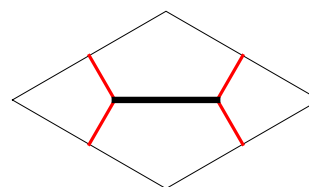
**8.9 e.** In stelling 8.1 wordt slechts een formule gegeven voor een hexagon met een grootte van een even getal. Onderzoek of je een totaal symmetrische zelf-complementaire 3-d partitie kunt maken die hoort bij een hexagon ter grootte 3. Als dit lukt, geef dan een voorbeeld. Als dit niet lukt, probeer dan te verklaren waarom niet.

### 8.3 3-d partities en honingraatbetegeling

In paragraaf 8.2 hebben we gezien dat er een directe relatie bestaat tussen 3-d partities en ruitbetegelingen. In deze paragraaf willen we hier nog een ander soort figuur aan toevoegen. We zien deze als we elke ruit in figuur 51 door een andere ruit vervangen: namelijk die uit figuur 56.

Als we dit doen krijgen we figuur 57 van een honingraatbetegeling of hexagon-betegeling te zien. Hierbij ontstaan zeshoeken, waarbij de zijden die midden in een ruit lagen dik (of zwart) zijn, terwijl de zijden van de zeshoek die een zijde van een ruit sneed, dun (of rood) zijn.

Als we vervolgens de ruit-randen weghalen houden we een echte honingraatbetegeling (figuur 58) over.



Figuur 56: Nieuwe ruittegel

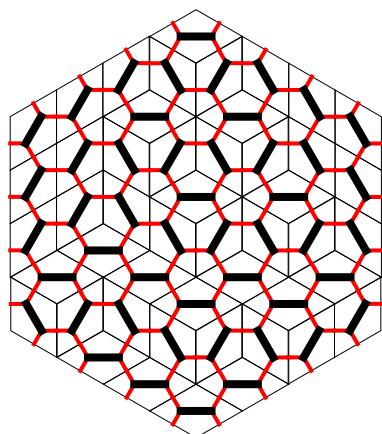
#### Opgave 8.10. Honingraatbetegelingen

Aan de hand van de nieuwe ruittegel gaan we onderzoeken welke kenmerken zo'n honingraatbetegeling heeft.

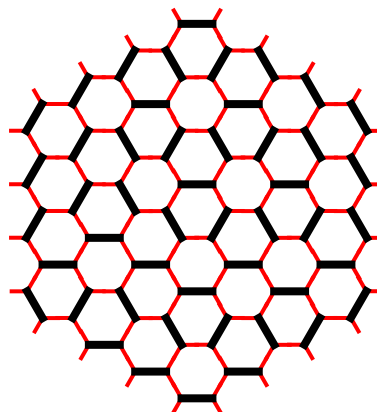
**8.10 a.** Kan een dik of zwart lijnstuk over de grens van een ruittegel lopen?

**8.10 b.** Welke dikte of kleur lijnstukken tref je aan het eindpunt van een dik of zwart lijnstuk? En aan het eindpunt van een dun of rood lijnstuk?

**8.10 c.** Beschrijf welke honingraten (hexagons) je kunt krijgen. Beschrijf hierbij de mogelijke ligging van de dunne en dikke lijnen.



Figuur 57: Van ruitbetegeling naar honingraatbetegeling



Figuur 58: Honingraatbetegeling

**8.10 d.** Beschrijf hoe je vanuit een honingraatbetegeling de ruitbetegeling terugkrijgt.

**Opgave 8.11. Enkele voorbeelden van honingraatbetegelingen**

**8.11 a.** Maak voor alle 3-d partities, die horen bij een ruitbetegeling van een hexagon van grootte 1, 2 of 3, de bijbehorende honingraatbetegeling.

**8.11 b.** Welke van deze honingraatbetegelingen horen bij een totaal symmetrische zelf-complementaire 3-d partitie?

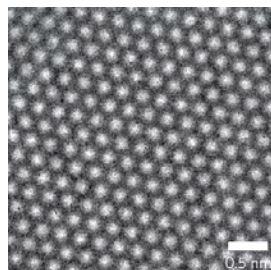
**8.11 c.** In paragraaf 8.2 heb je totaal symmetrische zelf-complementaire 3-d partities bepaald, die horen bij een hexagon van grootte 2 en 4. Teken de bijbehorende honingraatbetegelingen.

**8.11 d.** Teken van ongeveer de helft van de totaal symmetrische zelf-complementaire 3-d partities, die horen bij een hexagon van grootte 6, de bijbehorende honingraatbetegelingen.

**8.11 e.** Teken voor de overgebleven partities uit de vorige opgave de honingraat betegelingen met in de ruittegel alleen de dunne rode lijnstukken.

De honingraatbetegelingen zoals je ze hierboven ziet vormen een model voor grafeen, een vorm van grafiet. Het is een halfgeleider die in de toekomst mogelijke kan dienen als vervanger voor silicium. Grafeen is een uitgestrekt plat molecuul dat uit aaneengeschaalde koolstofringen bestaat. De koolstofringen bestaan uit 6 koolstofatomen die elk vier bindingen hebben en onderling verbonden zijn met 1 of 2 bindingen. Dit noemt men de Kékule structuur van grafeen. De dikke zwarte zijden in de honingraatbetegeling stellen de dubbele koolstofverbindingen voor, de dunne rode zijden de enkele bindingen.

In 2010 is de Nobelprijs voor de natuurkunde uitgereikt aan Andre Geim en Konstantin Novoselov voor hun baanbrekende onderzoek naar Grafeen.



Figuur 59: Een voorbeeld van Grafeen

**Opgave 8.12. Samenvatting**

Geef in je eigen woorden een samenvatting van hoofdstuk 8: 3-d partities en andere afbeeldingen.

Wat heb je er van geleerd?

Wat heeft je verbaasd?



Figuur 60: Andre Geim (1958 - )

### Andre Konstantinovitsj Geim

Andre Konstantinovitsj Geim (Sotsji (Rusland), 1 oktober 1958) is onder andere bekend door een zwevende kikker, Gecko Tape en de ontdekking van grafeen. Geim studeerde in 1982 af aan het Instituut voor Natuurkunde en Techniek in Moskou. Hij promoveerde in 1987 aan het Instituut voor Vaste-stof-fysica in Chernogolovka waar hij aansluitend tot 1989 werkzaam was. Hierna was hij werkzaam aan onderzoeksinstituten van Nottingham, Kopenhagen en Bath. Van 1994 tot 2000 was hij universitair hoofddocent aan de Katholieke Universiteit Nijmegen. In 2001 wordt hij hoogleraar aan de Universiteit van Manchester. Hij is sinds februari 2010 als bijzonder hoogleraar verbonden aan de Radboud Universiteit in Nijmegen. Sinds 2007 maakt hij deel uit van de Britse Royal Society. In 2009 ontving hij eredoctoraten van de TU Delft en de ETH Zürich. In 2010 kreeg hij samen met zijn promovendus Konstantin Novoselov de Nobelprijs voor de Natuurkunde vanwege hun onderzoek naar de eigenschappen van grafeen.

*Bron (17).*

### Samenvatting hoofdstuk 8: 3-d partities en andere afbeeldingen

In hoofdstuk 8 hebben we enkele figuren geïntroduceerd, die we kunnen vertalen naar 3-d partities.

We hebben gewerkt met configuraties van niet snijdende paden, ruitbetegelingen, honingraatbetegelingen en we hebben diverse vertalingen onderling onderzocht.

Dankzij de ruitbetegelingen zijn we op het spoor gekomen van totaal symmetrische zelf-complementaire 3-d partities. Via de honingraat betegelingen hebben we kennis gemaakt met grafeen. Hiervoor is in 2010 de Nobelprijs voor de natuurkunde uitgereikt.

## 9 Berekeningen met behulp van de computer

Voor het verder rekenen aan telfuncties gaan we de hulp inschakelen van de computer. We gaan hiervoor twee hulpmiddelen behandelen. Op de computers tijdens de les is een programma beschikbaar dat *Mathematica* heet, een erg krachtig hulpmiddel. Mocht je op een andere locatie verder willen werken aan de sommen kun je ook gebruik maken van een hulpmiddel dat op internet beschikbaar is, dit heet *Wolfram Alpha*.

### 9.1 Mathematica

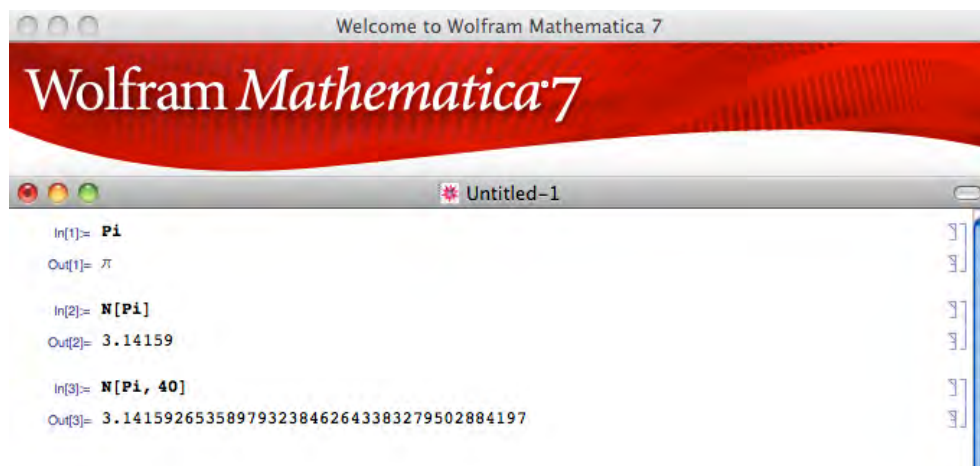
We gaan nu berekeningen uitvoeren met software die *Mathematica* heet.

Als je Mathematica start, krijg je een blanco pagina waarin je wiskundige berekeningen kunt formuleren en laten uitvoeren.

Nadat je een berekening hebt ingevoerd, kun je de berekening laten uitvoeren door de toetsen Shift-Return in te drukken, of indien beschikbaar de Enter toets helemaal rechts op het numerieke toetsenbord.

De gebruikelijke wiskundige operaties zoals  $+$ ,  $-$ ,  $*$ ,  $/$  en  $^$  voor optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, delen en machtsverheffen zijn ook in deze omgeving toepasbaar. Argumenten die je mee wilt geven aan een opdracht kun je doorgaans scheiden door een komma en omgeven door rechte haken. Soms bestaat een argument uit meerdere argumenten. In dat geval kun je argumenten groeperen tot één argument middels accolades. Een *argument*, in dit kader, is datgene waar je wilt dat de opdracht mee aan de slag gaat. Bijvoorbeeld bij de uitdrukking  $\sin(2x)$  is  $2x$  het argument van de opdracht  $\sin$ . In Mathematica wordt dat dan `Sin[2x]`.

Soms krijg je een uitdrukking niet direct terug als een getal, maar als een nog niet volledig uitgewerkte berekening. Dit kan zo zijn omdat het verder uitwerken eigenlijk neerkomt op het numeriek benaderen. Zo zal je bij de opdracht `Pi` als antwoord  $\pi$  krijgen. Wil je nu toch ongeveer weten wat hier uitkomt kun je het numeriek benaderen met de opdracht `N`, dus in dit geval met de opdracht `N[Pi]`. Als tweede argument kun je hieraan meegeven hoeveel decimalen je gespecificeerd wilt krijgen. Dus met `N[Pi, 40]` zal je als antwoord iets krijgen als 3.141592653589793238462643383279502884197, zie figuur 61.



Figuur 61: Het uitvoeren van `N[Pi]`

Voor het uitvoeren van een reeks optellingen, volgens definitie 4.3, is de opdracht `Sum` beschikbaar.

```
Sum[uitdrukking, {variabele, van, tot en met}]
```

komt op hetzelfde neer als  $\sum_{\text{variabele} = \text{van}}^{\text{tot en met}} \text{uitdrukking}.$

Wil je bijvoorbeeld  $1 + 3 + 9 + 27 + 81 + 243$  uitrekenen, dan is dat  $\sum_{i=0}^5 3^i$  dus bereken je dat met de opdracht `Sum[3^i, {i, 0, 5}]`. En dan krijg je hier inderdaad 364 uit.

Wil je bijvoorbeeld  $1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + q^5$  uitrekenen, dan is dat  $\sum_{i=0}^5 q^i$  en kun je dit dus berekenen met de opdracht `Sum[q^i, {i, 0, 5}]`. Omdat  $q$  op dit moment een onbekende is levert dit als antwoord  $1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + q^5$  op. Zie ook afbeelding 62.



Figuur 62: Het uitvoeren van `Sum`

### Opgave 9.1. Optellen met *Mathematica*

**9.1 a.** Bereken met *Mathematica* de som van de getallen 1 tot en met 100.

**9.1 b.** Bereken met behulp van *Mathematica* een numerieke benadering voor  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{512}$

Voor het uitvoeren van een reeks vermenigvuldigingen, volgens definitie 7.2, is de opdracht `Product` beschikbaar.

```
Product[uitdrukking, {variabele, van, tot en met}]
```

komt op hetzelfde neer als  $\prod_{\text{variabele} = \text{van}}^{\text{tot en met}} \text{uitdrukking}.$

Wil je bijvoorbeeld  $(1 + q) * (1 + q^2) * (1 + q^3) * (1 + q^4) * (1 + q^5)$  uitrekenen dan zou je dat kunnen zien als  $\prod_{i=1}^5 (1 + q^i)$  en kun je dit dus berekenen met de opdracht `Product[(1 + q^i), {i, 1, 5}]`. Dit levert als antwoord  $(1 + q)(1 + q^2)(1 + q^3)(1 + q^4)(1 + q^5)$ .

Voor het vereenvoudigen of uitwerken van een opdracht zoals de vorige bestaat de opdracht `Expand`.

```
Expand[uitdrukking]
```

Wil je bijvoorbeeld van de vorige vermenigvuldiging weten wat er uitkomt als het helemaal is uitgewerkt kun je dat doen door er de opdracht `Expand` omheen te zetten: `Expand[Product[(1 + q^i), {i, 1, 5}]]`. Dit

levert als antwoord op:

$$1 + q + q^2 + 2q^3 + 2q^4 + 3q^5 + 3q^6 + 3q^7 + 3q^8 + 3q^9 + 3q^{10} + 2q^{11} + 2q^{12} + q^{13} + q^{14} + q^{15}$$

### Opgave 9.2. Vermenigvuldigen met Mathematica

**9.2 a.** Gebruik nu Mathematica om uit te rekenen wat er uit  $(1 + q)^7$  komt. Vergelijk dit met wat er uit komt als je het zelf uitrekenet met behulp van het Binomium van Newton (zie formule (14) op pagina 35).

**9.2 b.** Bereken met behulp van Mathematica  $\prod_{n=1}^4 (1 + q^n + q^{2n})$ .

Om van een uitdrukking te weten wat de coëfficiënt is van een bepaalde macht van een variabele is de opdracht `Coefficient` beschikbaar.

```
Coefficient[uitdrukking, variabele, macht]
```

komt neer op het bepalen van de coëfficiënt van variabele<sup>macht</sup> in de opgegeven uitdrukking. Naar keuze kan je ook volstaan met een variabele tot een macht als één argument in plaats van twee.

Dus `Coefficient[uitdrukking, variabele, macht]`

komt op het zelfde neer als `Coefficient[uitdrukking, variabele^macht]`.

Wil je nu bijvoorbeeld de coëfficiënt weten van  $q^3$  in de uitdrukking  $(1 + q)^5$  dan kan dat met de opdracht `Coefficient[(1 + q)^5, q, 3]` of eventueel ook met `Coefficient[(1 + q)^5, q^3]`. Dit levert als antwoord 10, wat we natuurlijk ook al wisten door  $\binom{5}{3}$  uit te rekenen.

### Opgave 9.3. Coëfficiënten bepalen met Mathematica

**9.3 a.** Gebruik nu Mathematica om uit te rekenen wat de coëfficiënt is van  $q^7$  in  $(1 + q)^{10}$ .

**9.3 b.** Bereken met behulp van Mathematica de coëfficiënt van  $q^{13}$  in  $\prod_{n=1}^5 (1 + q^n + q^{2n} + q^{3n})$ .

Zolang de gezochte coëfficiënt gezocht wordt in een som en of product van machten is het voorgaande nog wel goed te doen. Maar bij een uitdrukking van de vorm  $\prod_{i=1}^{10} \frac{1}{1-q^i}$  wordt het al een stuk lastiger. Hier zetten we dan een hulpmiddel in dat de uitdrukking waar we de coëfficiënt van zoeken op zeer nauwkeurige wijze benadert met een reeks machten. De methode staat bekend onder de naam *Taylorreeks*. De benadering die we hier mee krijgen moet altijd gezocht worden in de buurt van een waarde van de variabele, bijvoorbeeld in de buurt van  $q = 5$ . Een Taylorreeks die gezocht wordt in de buurt van  $q = 0$  heet ook wel een *Maclaurinreeks*. Hoe meer machten we erbij nemen hoe nauwkeuriger de benadering. In het kader van deze cursus zullen we steeds gebruik maken van de Maclaurinreeks, met andere woorden in de buurt van  $q = 0$

Met de opdracht `Series` kun je zo'n Taylorreeks maken.

```
Series[uitdrukking, {variabele, 0, macht}]
```

zal een Taylorreeks maken voor de uitdrukking in de buurt van 0 voor de opgegeven variabele tot en met de opgegeven macht. Onderzoeken we bijvoorbeeld bovengenoemd voorbeeld  $\prod_{i=1}^{10} \frac{1}{1-q^i}$  dan levert de opdracht

```
Series[Product[1/(1-q^i), {i, 1, 10}], {q, 0, 10}]
```

als antwoord op  $1 + q + 2q^2 + 3q^3 + 5q^4 + 7q^5 + 11q^6 + 15q^7 + 22q^8 + 30q^9 + 42q^{10} + O[q]^{11}$ .

Deze laatste term  $O[q]^{11}$  vertelt dat er nog wel meer termen na komen, maar dat deze termen de orde van grote hebben van  $q^{11}$  of een hogere macht. Omdat we de reeks ontwikkelen in de buurt van  $q = 0$  zal deze restterm dus bij een grotere macht steeds kleiner worden.

Willen we nu van zo'n reeks alleen maar van één macht de coëfficiënt weten dan kunnen we gebruik maken van de opdracht `SeriesCoefficient`.

```
SeriesCoefficient[uitdrukking, {variabele, 0, macht}]
```

zal op dezelfde wijze als bij de opdracht `Series` de Taylorreeks maken, maar zal alleen de coëfficiënt van de opgegeven macht laten zien. Nemen we dezelfde argumenten als bij de vorige opdracht dan krijgen we bij `SeriesCoefficient[Product[1/(1-q^i), {i, 1, 10}], {q, 0, 10}]` niet geheel onverwacht als antwoord het getal 42.

#### Opgave 9.4. Coëfficiënten van een Taylorreeks bepalen met Mathematica

**9.4 a.** Gebruik nu Mathematica om uit te rekenen wat de coëfficiënt is van  $q^7$  in  $\frac{1}{(1+q)^{10}}$ .

**9.4 b.** Bereken met behulp van Mathematica de coëfficiënt van  $q^{13}$  in  $\prod_{n=1}^5 \frac{1}{(1+q^n+q^{2n}+q^{3n})}$ .

## 9.2 Wolfram Alpha

We gaan nu berekeningen uitvoeren met een stukje software dat op internet beschikbaar is om (onder andere) wiskundige berekeningen uit te voeren. Deze software heet *Wolfram Alpha*, en deze is te vinden op het volgende adres:

<http://www.wolframalpha.com>

Deze software is gemaakt door hetzelfde bedrijf als Mathematica. Bijna alle opdrachten die je in Mathematica kunt geven kun je ook in Wolfram Alpha geven.



Figuur 63: Het startscherm van Wolfram Alpha

Als je Wolfram Alpha start, krijg je een gele pagina met in het midden een vakje waarin je wiskundige berekeningen kunt formuleren en laten uitvoeren. Zie ook afbeelding 63

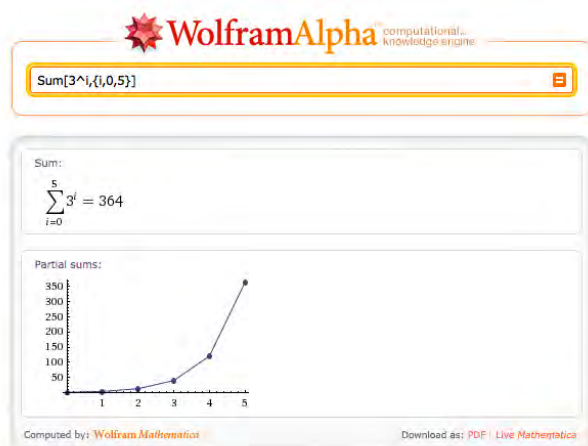
Nadat je een berekening hebt ingevoerd, kun je de berekening laten uitvoeren door de toets `Return` in te drukken, of indien beschikbaar de `Enter` toets helemaal rechts op het numerieke toetsenbord. Ook kun je de opdracht laten uitvoeren door op het rode vierkantje met de `=` (aan de rechter kant van de opdracht regel) te klikken. Eerder ingevoerde opdrachten blijven beschikbaar in je Browser geschiedenis.

De gebruikelijke wiskundige operaties zoals  $+$ ,  $-$ ,  $*$ ,  $/$  en  $^$  voor optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, delen en machtsverheffen zijn ook in deze omgeving toepasbaar. Argumenten die je mee wilt geven aan een opdracht kun je doorgaans scheiden door een komma en omgeven door rechte haken. Soms bestaat een argument uit meerdere argumenten. In dat geval kun je argumenten groeperen tot één argument middels accolades. Een *argument*, in dit kader, is datgene waar je wilt dat de opdracht mee aan de slag gaat. Bijvoorbeeld bij de uitdrukking  $\sin(2x)$  is  $2x$  het argument van de opdracht  $\sin$ . In Wolfram Alpha wordt dat dan `Sin[2x]`.

Soms krijg je een uitdrukking niet direct terug als een getal, maar als een nog niet volledig uitgewerkte berekening. Dit kan zo zijn omdat het verder uitwerken eigenlijk neerkomt op het numeriek benaderen. Zo zal je bij de opdracht `Pi` als eerste antwoord  $\pi$  krijgen. Wil je nu toch ongeveer weten wat hier uitkomt kun je het numeriek benaderen met de opdracht `N`, dus in dit geval met de opdracht `N[P]`. Als tweede argument kun je hieraan meegeven hoeveel decimalen je gespecificeerd wilt krijgen. Dus met `N[P, 40]` zal je als antwoord iets krijgen als 3.141592653589793238462643383279502884197. Wolfram Alpha geeft wel ook direct enkele alternatieve vormen na bijvoorbeeld het opvragen van `Pi`. Maar als je bijvoorbeeld invloed wilt hebben op het aantal decimalen kan de opdracht `N` nuttig zijn.



Figuur 64: Het uitvoeren Pi



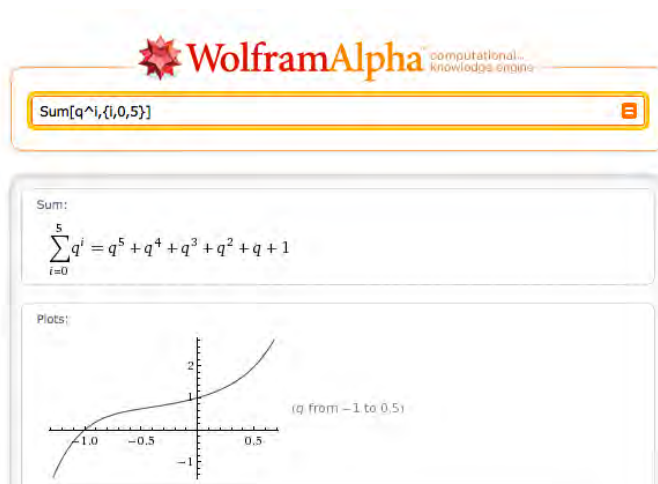
Figuur 65: Het uitvoeren van Sum met 3

Voor het uitvoeren van een reeks optellingen, volgens definitie 4.3, is de opdracht `Sum` beschikbaar.

`Sum[uitdrukking, {variabele, van, tot en met}]`

komt op hetzelfde neer als  $\sum_{\text{variabele} = \text{van}}^{\text{tot en met}} \text{uitdrukking}.$

Wil je bijvoorbeeld  $1 + 3 + 9 + 27 + 81 + 243$  uitrekenen, dan is dat  $\sum_{i=0}^5 3^i$  dus bereken je dat met de opdracht `Sum[3^i, {i, 0, 5}]`. En dan krijg je hier inderdaad 364 uit. Zie ook afbeelding 65.



Figuur 66: Het uitvoeren van Sum met  $q$

Wil je bijvoorbeeld  $1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + q^5$  uitrekenen, dan is dat  $\sum_{i=0}^5 q^i$  en kun je dit dus berekenen met de opdracht `Sum[q^i, {i, 0, 5}]`. Omdat  $q$  op dit moment een onbekende is levert dit als antwoord  $1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + q^5$  op. Zie ook afbeelding 66.

### Opgave 9.5. Optellen met Wolfram Alpha

**9.5 a.** Bereken met Wolfram Alpha de som van de getallen 1 tot en met 100.

**9.5 b.** Bereken met behulp van Wolfram Alpha een numerieke benadering voor  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{512}$

Voor het uitvoeren van een reeks vermenigvuldigingen, volgens definitie 7.2, is de opdracht `Product` beschikbaar.

```
Product[uitdrukking, {variabele, van, tot en met}]
```

komt op hetzelfde neer als  $\prod_{\text{variabele} = \text{van}}^{\text{tot en met}} \text{uitdrukking}$ .

Wil je bijvoorbeeld  $(1 + q) * (1 + q^2) * (1 + q^3) * (1 + q^4) * (1 + q^5)$  uitrekenen dan zou je dat kunnen zien als  $\prod_{i=1}^5 (1 + q^i)$  en kun je dit dus berekenen met de opdracht `Product[(1 + q^i), {i, 1, 5}]`. Dit levert als antwoord  $(1 + q)(1 + q^2)(1 + q^3)(1 + q^4)(1 + q^5)$ .

Voor het vereenvoudigen of uitwerken van een opdracht zoals de vorige bestaat de opdracht `Expand`.

```
Expand[uitdrukking]
```

Wil je bijvoorbeeld van de vorige vermenigvuldiging weten wat er uitkomt als het helemaal is uitgewerkt kun je dat doen door er de opdracht `Expand` omheen te zetten: `Expand[Product[(1 + q^i), {i, 1, 5}]]`. Dit levert als antwoord op:

$$q^{15} + q^{14} + q^{13} + 2q^{12} + 2q^{11} + 3q^{10} + 3q^9 + 3q^8 + 3q^7 + 3q^6 + 3q^5 + 2q^4 + 2q^3 + q^2 + q + 1$$

Overigens geldt ook hiervoor dat het antwoord dat je met de `Expand` krijgt, vaak ook al voorkomt bij de alternatieve vormen die je krijgt als je de opdracht geeft zonder de `Expand`.

### Opgave 9.6. Vermenigvuldigen met Wolfram Alpha

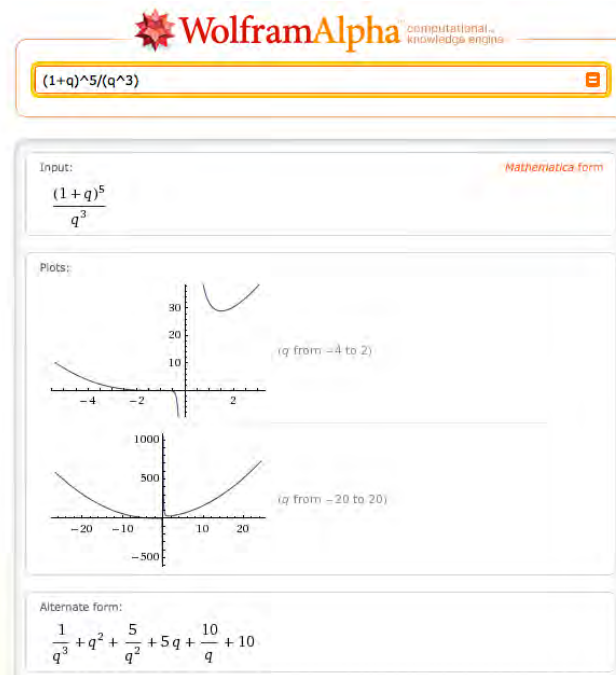
**9.6 a.** Gebruik nu Wolfram Alpha om uit te rekenen wat er uit  $(1 + q)^7$  komt. Vergelijk dit met wat er uit komt als je het zelf uitrekent met behulp van het Binomium van Newton (zie formule (14) op pagina 35).

**9.6 b.** Bereken met behulp van Wolfram Alpha  $\prod_{n=1}^4 (1 + q^n + q^{2n})$ .

Helaas is het niet mogelijk om met behulp van één opdracht in Wolfram Alpha direct de coëfficiënt van een bepaalde macht te bepalen. Je zou de betreffende macht kunnen opzoeken in de volledige uitwerking.

Ook zou je de uitwerking kunnen delen door de gezochte macht om je dan te richten op de termen zonder de variabele.

Wil je nu bijvoorbeeld de coëfficiënt weten van  $q^3$  in de uitdrukking  $(1+q)^5$  dan zie je met de opdracht  $(1 + q)^5 / q^3$  ook de uitgewerkte vorm, waarin onder andere ook  $10q^3$  voorkomt. Mocht je de uitdrukking direct delen door  $q^3$ , dan herken je de 10 als enige term zonder  $q$ . Zie ook afbeelding 67.



Figuur 67: Op zoek naar de coëfficiënt van  $q^3$

### Opgave 9.7. Coëfficiënten bepalen met Wolfram Alpha

**9.7 a.** Gebruik nu Wolfram Alpha om uit te rekenen wat de coëfficiënt is van  $q^7$  in  $(1 + q)^{10}$ .

**9.7 b.** Bereken met behulp van Wolfram Alpha de coëfficiënt van  $q^{13}$  in  $\prod_{n=1}^5 (1 + q^n + q^{2n} + q^{3n})$ .

Zolang de gezochte coëfficiënt gezocht wordt in een som en of product van machten is het voorgaande nog wel goed te doen. Maar bij een uitdrukking van de vorm  $\prod_{i=1}^{10} \frac{1}{1-q^i}$  wordt het al een stuk lastiger. Hier zetten we dan een hulpmiddel in dat de uitdrukking waar we de coëfficiënt van zoeken op zeer nauwkeurige wijze benadert met een reeks machten. De methode staat bekend onder de naam *Taylorreeks*. De benadering die we hier mee krijgen moet altijd gezocht worden in de buurt van een waarde van de variabele, bijvoorbeeld in de buurt van  $q = 5$ . Een Taylorreeks die gezocht wordt in de buurt van  $q = 0$  heet ook wel een *Maclaurinreeks*. Hoe meer machten we erbij nemen hoe nauwkeuriger de benadering. In het kader van deze cursus zullen we steeds gebruik maken van de Maclaurinreeks, met andere woorden in de buurt van  $q = 0$

Met de opdracht `Series` kun je zo'n Taylorreeks maken.

```
Series[uitdrukking, {variabele, 0, macht}]
```

zal een Taylorreeks maken voor de uitdrukking in de buurt van 0 voor de opgegeven variabele tot en met de opgegeven macht. Onderzoeken we bijvoorbeeld bovengenoemd voorbeeld  $\prod_{i=1}^{10} \frac{1}{1-q^i}$  dan levert de opdracht

```
Series[Product[ 1/(1-q^i), {i, 1, 10}], {q, 0, 10}]
```

als antwoord op  $1 + q + 2q^2 + 3q^3 + 5q^4 + 7q^5 + 11q^6 + 15q^7 + 22q^8 + 30q^9 + 42q^{10} + O[q]^{11}$ .

Deze laatste term  $O[q]^{11}$  vertelt dat er nog wel meer termen na komen, maar dat deze termen de orde van grote hebben van  $q^{11}$  of een hogere macht. Omdat we de reeks ontwikkelen in de buurt van  $q = 0$  zal deze restterm dus bij een grotere macht steeds kleiner worden.

Willen we nu van zo'n reeks alleen maar van één macht de coëfficiënt weten dan zijn we helaas veroordeeld tot de eerder genoemde methoden. Het blijkt echter bij omvangrijke Taylorreeksen zeer lastig om hier nog een keer een delen door opdracht aan mee te geven. Opzoeken en goed opletten blijkt het winnende antwoord.

### Opgave 9.8. Coëfficiënten van een Taylorreeks bepalen met Wolfram Alpha

**9.8 a.** Gebruik nu Wolfram Alpha om uit te zoeken naar wat de coëfficiënt is van  $q^7$  in  $\frac{1}{(1+q)^{10}}$ .

**9.8 b.** Bepaal met behulp van Wolfram Alpha de coëfficiënt van  $q^{13}$  in  $\prod_{n=1}^5 \frac{1}{(1+q^n+q^{2n}+q^{3n})}$ .

### Opgave 9.9. Samenvatting

Geef in je eigen woorden een samenvatting van hoofdstuk 9: Berekeningen met behulp van de computer.

Wat heb je er van geleerd?

Wat heeft je verbaasd?

### Samenvatting hoofdstuk 9: Berekeningen met behulp van de computer

In dit hoofdstuk heb je kennis gemaakt met twee hulpmiddelen voor het uitvoeren van berekeningen op de computer: Mathematica en Wolfram Alpha. De eerste is software die op de computer geïnstalleerd moet zijn. De tweede is een algemeen toegankelijke webapplicatie.

Van deze twee hulpmiddelen hebben we de werkwijze behandeld om sommaties of producten te definiëren en hoe een Taylorreeks te bepalen. Ook hebben we manieren besproken om van een uitdrukking de coëfficiënt te bepalen van een concrete macht.

## 10 Op zoek naar een telfunctie voor 2 dimensionale partities

In hoofdstuk 7 zagen we dat het aantal mogelijke partities van  $n$  (volgens bepaalde voorwaarden) precies de coëfficiënt in een uitdrukking is van  $q^n$ .

We gaan nu telfuncties maken. Dat zijn uitdrukkingen van de vorm  $p(0) + p(1)q + p(2)q^2 + p(3)q^3 + p(4)q^4 + \dots$ . Hierbij vertellen de waarden van  $p(n)$  ons hoeveel partities van  $n$  er zijn (gegeven zekere voorwaarden).

We onderzoeken eerst de som van machten.

### 10.1 Een formule voor $1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^{m-1} + q^m$

We willen nu, zoals de titel al zegt, een korte formule vinden voor

$$1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^{m-1} + q^m.$$

Noem deze som  $S$ . We vermenigvuldigen deze som eerst met  $q$ , dan krijgen we:

$$qS = q(1 + q + q^2 + \dots + q^m) = q + q^2 + \dots + q^{m+1}. \quad (21)$$

Deze laatste uitdrukking (21) trekken we nu weer af van de oorspronkelijke som. We krijgen zo:

$$\begin{aligned} S - qS &= (1 - q)S = (1 - q)(1 + q + q^2 + \dots + q^m) = 1 + q + q^2 + \dots + q^m \\ &\quad - (q + q^2 + \dots + q^m + q^{m+1}) \\ &= 1 - q^{m+1}. \end{aligned}$$

Dus  $(1 - q)S = 1 - q^{m+1}$ . Met andere woorden

$$S = \frac{1 - q^{m+1}}{(1 - q)}.$$

En aangezien we net gesteld hebben dat  $S = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^{m-1} + q^m$ , geldt

$$1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^{m-1} + q^m = \frac{1 - q^{m+1}}{1 - q} \quad (22)$$

en ook

$$1 + q^k + q^{2k} + q^{3k} + \dots + q^{(m-1)k} + q^{mk} = \frac{1 - q^{(m+1)k}}{1 - q^k}. \quad (23)$$

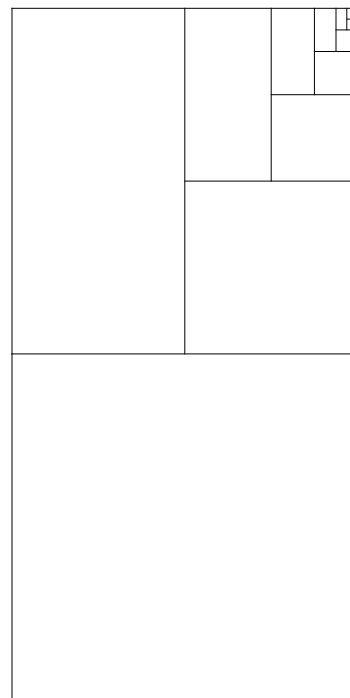
#### Opgave 10.1. Optellingen met deze nieuwe formules

Deze nieuw gevonden formules bieden sneller te berekenen antwoorden voor zeer lange optellingen. Laten we er eens enkele uitrekenen.

**10.1 a.** Bereken met behulp van de net geïntroduceerde formules  $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \dots + 256$  en  $1 + 3 + 9 + 27 + \dots + 729$ .

**10.1 b.** Bereken met behulp van de net geïntroduceerde formules  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{256}$ . Zie ook afbeelding 68. Waar zou deze som naar toe gaan als je nog meer machten toevoegt?

**10.1 c.** Toon aan dat formule (23) klopt.



Figuur 68: Een verbeelding van  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$

Hiermee wordt het product in (16), dat we gebruikt hebben om partities te berekenen waarbij elk getal ten hoogste  $m$  keer voor mag komen, gelijk aan

$$\prod_{k=1}^n (1 + q^k + q^{2 \cdot k} + \cdots + q^{m \cdot k}) = \prod_{k=1}^n \frac{1 - q^{(m+1)k}}{1 - q^k}. \quad (24)$$

en de formule (17), die we gebruikten om partities zonder restrictie te berekenen, gelijk aan

$$\prod_{k=1}^n (1 + q^k + q^{2 \cdot k} + \cdots + q^{n \cdot k}) = \prod_{k=1}^n \frac{1 - q^{(n+1)k}}{1 - q^k}. \quad (25)$$

Als we nu niet alleen de eerste  $n$  getallen willen toelaten maar alle positieve getallen, dan moeten we  $n$  oneindig groot laten worden. Voor *oneindig* gebruiken we het symbool:  $\infty$ . Soms bestaat de limiet voor  $n$  gaat naar oneindig van  $\sum_{k=0}^n q^k$ . We noteren dit dan als  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n q^k$ . In dit geval kun je dit ook opschrijven als  $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ . Met de limiet  $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$  bedoelen we dus dat we tot in het oneindige doorgaan met waarden voor  $q^k$  er bij optellen.

**Stelling 10.1. Telfunctie voor partities met elk getal maximaal  $m$  keer**

De telfunctie voor alle partities van  $n$  waarbij we elk getal maar maximaal  $m$  maal mogen gebruiken is gelijk aan:

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1 - q^{(m+1)k}}{1 - q^k}. \quad (26)$$

**Stelling 10.2. Telfunctie voor strikte partities**

De telfunctie voor strikte partities van  $n$  is gelijk aan:

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1 + q^k). \quad (27)$$

**Opgave 10.2. Twee stellingen voor telfuncties**

We hebben nu twee stellingen gekregen die ons telfuncties leveren. Maar ze moeten nog wel aangetoond worden.

**10.2 a.** Laat zien dat stelling 10.1 klopt.

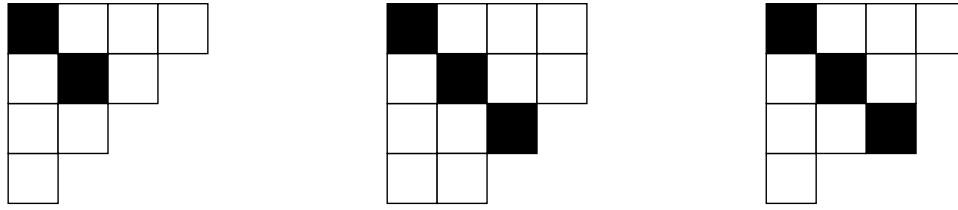
**10.2 b.** Weet je nog wat strikte partities zijn? Hierbij mogen we elk getal maar maximaal 1 keer gebruiken. Laat zien dat stelling 10.2 klopt. Met andere woorden, laat zien dat formule (26) voor  $m = 1$  gelijk is aan formule (27).

Om alle gewone partities te beschrijven, willen we de voorwaarde, dat elk getal maar  $m$  keer voor mag komen, laten vervallen. We willen dan  $m$  in formule (26) naar oneindig laten gaan. Om dit te bewerkstelligen moeten we nog wat vertellen over de meetkundige reeks. Hierover spoedig meer. Eerst zullen we in de volgende paragraaf de telfunctie voor zelfgeconjugeerde partities onderzoeken.

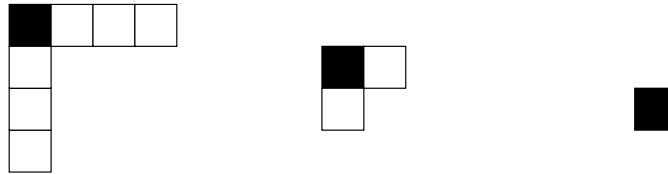
## 10.2 Een zelf-geconjugeerde Frobenius partitie uitvouwen

Een partitie die gelijk is aan zijn geconjugeerde heet *zelf-geconjugeerde*. Zo'n partitie is het snelst te herkennen in de Frobenius notatie, want in dat geval staat er voor en na de verticale streep exact hetzelfde:  $(a_1, a_2, \dots, a_n | a_1, a_2, \dots, a_n)$ .

In figuur 69 zie je drie zelf-geconjugeerde partities in een Ferrersdiagram, waarbij de vierkanten op de diagonaal alvast zwart zijn gemaakt, zoals dat hoort bij de voorbereidingen voor een Frobenius notatie.



Figuur 69: Drie zelf-geconjugeerde partities

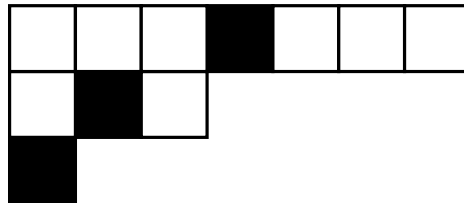


Figuur 70: De zelf-geconjugeerde partitie van 11 bekeken per laag

We werken nu verder met de rechter partitie in figuur 69, de partitie van 11 gegeven door  $\lambda = (4, 3, 3, 1)$  en in Frobenius notatie  $(3, 1, 0|3, 1, 0)$ .

Als we de hokjes in de eerste rij en kolom tellen dan vinden we er  $2 \times 3 + 1 = 7$ . In de tweede rij en kolom tellen we  $2 \times 1 + 1 = 3$  hokjes. En in de derde rij en kolom tellen we  $2 \times 0 + 1 = 1$  hokjes. Elk hokje telt maar één keer mee. Bij de tweede en derde rij en kolom telt niet meer mee, wat bij het voorgaande al is meegeteld. Zie figuur 70.

Als we de “lagen” die we vinden in figuur 70 horizontaal uitvouwen en stapelen tot een nieuwe partitie krijgen we de partitie  $\lambda = (7, 3, 1)$  van 11 zoals afgebeeld in figuur 71. Hierbij is dus laag  $i$  wat we vinden in rij  $i$  (op en rechts van de diagonaal) en in kolom  $i$  (op en onder de diagonaal) samen.



Figuur 71: De partitie van 11 uitgevouwen per laag tot een nieuwe partitie

### Stelling 10.3. Telfunctie voor zelfgeconjugeerde partities

De telfunctie van alle zelf-geconjugeerde partities is gelijk aan:

$$\prod_{k=0}^{\infty} (1 + q^{2k+1}). \quad (28)$$

### Opgave 10.3. Het bewijzen van stelling 10.3

We verzamelen nu, in opdracht 10.3, materiaal om uiteindelijk stelling 10.3 te kunnen bewijzen.

**10.3 a.** Geef van de andere twee zelf-geconjugeerde partities in figuur 69 zowel de  $\lambda$  als de Frobenius notatie.

**10.3 b.** Laat zien dat de linker partitie in figuur 69 middels de hier geïntroduceerde “uitvouwconstructie” correspondeert met de partitie  $\lambda = (7, 3)$ .

**10.3 c.** Welke partitie hoort met deze “uitvouwconstructie” bij de middelste partitie uit figuur 69?

**10.3 d.** Toon aan dat elke zelf-geconjugeerde partitie in Frobenius notatie gegeven door  $(a_1, a_2, \dots, a_n | a_1, a_2, \dots, a_n)$  middels de “uitvouwconstructie” correspondeert met de partitie  $\lambda = (2a_1 + 1, 2a_2 + 1, \dots, 2a_n + 1)$  in de standaard notatie.

**10.3 e.** Bewijs dat uit formule (4) op pagina 18 volgt dat in de Frobenius notatie  $(a_1, a_2, \dots, a_n | b_1, b_2, \dots, b_n)$  alle  $a_i$  verschillend zijn en dat ook alle  $b_i$  verschillend zijn.

**10.3 f.** Beschrijf hoe je met deze “uitvouwconstructie” altijd een strikte partitie krijgt die bestaat uit oneven getallen van de vorm  $2a_i + 1$ .

**10.3 g.** Leg uit hoe elke strikte partitie in oneven getallen  $\lambda = (2a_1 + 1, 2a_2 + 1, \dots, 2a_n + 1)$  via de omgekeerde route altijd correspondeert met een zelf-geconjugeerde partitie  $(a_1, a_2, \dots, a_n | a_1, a_2, \dots, a_n)$  in Frobenius notatie.

**10.3 h.** Beredeneer dat stelling 10.3 klopt.

### 10.3 De meetkundige reeks $1 + q + q^2 + q^3 + \dots$

Om nu de formule voor de telfunctie van de gewone 2-dimensionale partities te krijgen willen we in feite formule (16) gebruiken en daarin  $m$  oneindig groot laten worden. We krijgen dan  $1 + q + q^2 + q^3 + \dots$ . Zo’n oneindige sommatie van oplopende machten noemen we een *meetkundige reeks*. We beginnen eenvoudiger, namelijk met de formule (22):

$$1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^{m-1} + q^m = \frac{1 - q^{m+1}}{1 - q}.$$

We laten nu  $m$  oneindig groot worden. Met andere woorden we willen het volgende doen:

$$\begin{aligned} 1 + q + q^2 + \dots &= \lim_{m \rightarrow \infty} 1 + q + q^2 + \dots + q^{m-1} + q^m \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1 - q^{m+1}}{1 - q}. \end{aligned} \quad (29)$$

Aan de linker kant staat de meetkundige reeks. De limiet aan de rechterkant heeft alleen maar betekenis als  $\lim_{m \rightarrow \infty} q^{m+1}$  betekenis heeft.

#### Opgave 10.4. Op zoek naar een geschikte waarde voor $q$

**10.4 a.** Als  $q$  te groot of erg negatief is dan explodeert de waarde van deze limiet. Voor welke waarden van  $q$  heeft de limiet  $\lim_{m \rightarrow \infty} q^{m+1}$  wel een werkbare uitkomst? En wat komt hier dan uit?

Zo krijgen we:

$$1 + q + q^2 + \dots = \frac{1}{1 - q}, \quad \text{voor in opdracht 10.4 a gevonden geschikte waarde van } q. \quad (30)$$

**10.4 b.** Als we nu in formule (29)  $q$  vervangen door  $q^k$  moeten we bewaken dat  $\lim_{m \rightarrow \infty} (q^k)^{m+1}$  betekenis heeft. Voor welke waarden van  $q$  heeft de limiet  $\lim_{m \rightarrow \infty} (q^k)^{m+1}$  wel een werkbare uitkomst? En wat komt hier dan uit?

Met de waarden voor  $q$  uit opdracht 10.4 b geldt ook:

$$1 + q^k + q^{2k} + \dots = \frac{1}{1 - q^k}, \quad \text{voor in opdracht 10.4 b gevonden geschikte waarde van } q.$$

**Opgave 10.5. Berekeningen met de net gevonden formules**

De net gevonden formules maken erg nieuwsgierig. Alle aanleiding ze eens in concrete gevallen toe te passen.

**10.5 a.** Gebruik nu formule (30) om antwoord te geven op de laatste vraag van opdracht 10.1 b. Klopte je vermoeden?

**10.5 b.** Bereken  $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \dots$ .

**10.5 c.** Bereken  $\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \dots$ .

**10.5 d.** Bereken  $\frac{1}{25} + \frac{1}{125} + \frac{1}{625} + \frac{1}{3125} + \dots$ .

**Opgave 10.6. Een variant op formule (30)**

Zoals ook al bleek in de vorige opgave kun je met slim schuiven of extra optellen en aftrekken formule (30) ook toepassen in situaties waar hij niet letterlijk voor geformuleerd lijkt.

Laat zien dat  $q^k + q^{k+1} + q^{k+2} + \dots = \frac{q^k}{(1-q)}$ .

**10.4 De telfunctie van gewone partities**

Opnieuw definiëren we de telfunctie. Laat  $p(n)$  het aantal verschillende partities zijn van het getal  $n$ , de tel- of partitiefunctie is de reeks

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)q^n = p(0) + p(1)q + p(2)q^2 + p(3)q^3 + \dots, \quad (31)$$

waarbij de coëfficiënt van  $q^n$  het aantal (2-dimensionale partities) is van  $n$ .

We maken hier gebruik van de kleine letter  $p$ . De hoofdletter  $P$  zullen we voor de 3-dimensionale partities gebruiken, de kleine letter  $p$  voor de gewone of 2-dimensionale partities.

**Opgave 10.7. Een eerste verkenning van de telfunctie**

Schrijf de eerste 7 termen van deze reeks op.

Om nu de formule voor de telfunctie van de gewone 2-dimensionale partities te krijgen willen we in feite formule (24) gebruiken en daarin  $m$  oneindig groot maken. We gebruiken de resultaten van paragraaf 10.3. Dit alles combinérend krijgen we de volgende stelling.

**Stelling 10.4. telfunctie voor gewone partities**

De telfunctie voor gewone 2-dimensionale partities is:

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)q^n = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^k}. \quad (32)$$

Hierbij nemen we aan dat  $|q| < 1$ , vanaf nu zullen we dit blijven doen.

We hebben ook gezien hoe we partities op kunnen bouwen, als er grenzen gelden voor hoe vaak je een getal  $k$  mag gebruiken. Welke termen in het product voor moeten komen als een getal  $k$  maximaal  $m$  keer mag voorkomen is

$$\frac{1 - q^{(m+1)k}}{1 - q^k},$$

voor  $m = 1$  geeft dit

$$1 + q^k$$

en wanneer dit zelfs onbegrensd vaak mag zijn, dan hebben we

$$\frac{1}{1 - q^k}.$$

In paragraaf 10.3 hebben we gezien dat met de extra voorwaarde  $|q| < 1$  de formules, zoals bij formule (30), aangenaam eenvoudiger konden worden. In stelling 10.4 nemen we gewoon aan dat  $q$  hier aan voldoet. Dat dit zomaar kan komt door de rol die  $q$  hier vervult. We zijn hier niet bezig met een breed toepasbare functie, waar uiteenlopende waarden voor  $q$  ingevuld mogen worden en we nieuwsgierig zijn wat de totale functie dan als uitkomst heeft. We zijn nu bezig met telfuncties. Dus wat ons echt interesseert zijn de concrete coëfficiënten van zekere machten van  $q$ . Als het dan behulpzaam kan zijn aan te nemen, dat  $q$  aan extra voorwaarden voldoet, kunnen we dat ook inderdaad doen, zonder verlies van algemeenheid of informatie.

### Opgave 10.8. Aan de slag met stelling 10.4

**10.8 a.** Bereken, volgend op je berekeningen in opgave 10.7, de volgende 8 termen van de telfunctie met behulp van één van de hulpmiddelen uit paragraaf 9.

**10.8 b.** Hoeveel partities zijn er van 37? En hoeveel van 100?

### Opgave 10.9. Strikte partities en partities in oneven getallen

**10.9 a.** Maak de telfunctie en bereken met behulp van één van de hulpmiddelen uit paragraaf 9 de eerste 16 termen (dus tot en met  $q^{15}$ ) van de telfunctie van strikte partities.

**10.9 b.** Maak de telfunctie en bereken met behulp van één van de hulpmiddelen uit paragraaf 9 de eerste 16 termen van de telfunctie van partities in alleen oneven getallen. We hebben dus geen grens hoe vaak elk oneven getal voor mag komen.

**10.9 c.** Vergelijk opgave 10.9 a met opgave 10.9 b. Stel een vermoeden op en probeer dat te bewijzen.

## 10.5 Telfuncties voor muntstukken

In deze paragraaf, maar ook al in paragraaf 7, hebben we technieken ontwikkeld om tot telfuncties te komen in concrete situaties. Dit kunnen we ook gaan inzetten in een situatie die hier niet direct verband mee lijkt te houden. Stel we hebben van enkele muntsoorten een gegeven aantal exemplaren. Dan kunnen we ons afvragen welke bedragen we gepast kunnen betalen en op hoeveel verschillende manieren.

Met twee munten van 5 cent en twee munten van 10 cent kunnen we de bedragen €0,05; €0,10; €0,15; €0,20; €0,25 en €0,30 betalen. Met de methode uit paragraaf 7.4 kunnen we een telfunctie gaan opzetten voor deze situatie. We hebben slechts de getallen 5 en 10 en elk mag maximaal twee maal voorkomen. Dus komen we op de formule:  $(1 + q^5 + q^{2 \cdot 5})(1 + q^{10} + q^{2 \cdot 10})$ . En werken we dit uit dan komen we inderdaad op

$$\begin{aligned} & 1 + q^5 + q^{2 \cdot 5} + q^{10} + q^{5+10} + q^{2 \cdot 5+10} + q^{2 \cdot 10} + q^{5+2 \cdot 10} + q^{2 \cdot 5+2 \cdot 10} \\ &= 1 + q^5 + q^{10} + q^{10} + q^{15} + q^{20} + q^{20} + q^{25} + q^{30} \\ &= 1 + q^5 + 2q^{10} + q^{15} + 2q^{20} + q^{25} + q^{30}. \end{aligned}$$

### Opgave 10.10. Hoeveel manieren voor €3,15

In deze opdracht vragen we ons af welke bedragen je kunt betalen en op hoeveel verschillende manieren, gegeven de muntstukken die je bij je hebt. Stel je hebt in je broekzak 10 muntjes van 5 cent, 12 muntjes van 10 cent, 7 van 20 en 14 van 50. Stel eerst een formule op waarmee je deze vraag kunt berekenen. Bereken (met behulp van één van de hulpmiddelen uit paragraaf 9) op hoeveel manieren je €3,15 kunt betalen?

Soms wil je meer weten dan alleen welke bedragen je kunt maken en op hoeveel verschillende manieren. Soms wil je ook weten hoeveel muntstukjes je er voor nodig hebt. Stel dat je wilt weten op hoeveel manieren je €3,15 kunt betalen met muntjes van 5, 10, 20 en 50 cent, waarbij je precies 22 muntjes wilt gebruiken, of nog anders niet meer dan 22 muntjes. Je kunt dit doen door in de telfunctie een extra variabele in te bouwen die het aantal munten telt. Hiervoor zullen we de variabele  $t$  gebruiken. Neem het volgende voorbeeld.

$$(1 + tq^5 + t^2q^{2 \cdot 5} + t^3q^{3 \cdot 5})(1 + tq^{10} + t^2q^{2 \cdot 10} + t^3q^{3 \cdot 10} + t^4q^{4 \cdot 10}). \quad (33)$$

**Opgave 10.11. Telfunctie voorbeeld dat ook het aantal muntstukken bewaken**

**10.11 a.** Werk in voorbeeld (33) de haakjes weg en bereken de coëfficiënt van  $t^3 q^{25}$ .

**10.11 b.** Leg uit dat dit het aantal manieren voorstelt waarop je 25 cent kunt betalen met 3 muntjes van 5 of 10 cent.

**10.11 c.** Beschrijf welke uitgangssituatie in de portemonnaie beschreven wordt met deze voorbeeld formule (33).

**Opgave 10.12. Hoeveel manieren voor €3,15 met exact 22 muntstukken**

**10.12 a.** Stel een formule op waarmee je bovenstaande probleem kunt oplossen. Dat wil zeggen bepalen op op hoeveel manieren je €3,15 kunt betalen met muntjes van 5, 10, 20 en 50 cent, waarbij je precies 22 muntjes wilt gebruiken.

**10.12 b.** Bereken met behulp van één van de hulpmiddelen uit paragraaf 9 wat het antwoord is op deze vraag met je formule.

**Opgave 10.13. Welke manieren voor €3,15 met exact 22 muntstukken**

Naast de ene extra variabele  $t$  voor het aantal muntstukken kun je ook voor elk munttype een aparte variabele introduceren die telt hoe vaak dat munttype gebruikt wordt in een concrete mogelijke manier om €3,15 te betalen. Dit maakt het in het uiteindelijke antwoord lastiger om direct te zien hoeveel mogelijkheden er zijn. Maar het geeft je wel direct antwoord op de vraag op welke manieren je €3,15 kunt betalen met exact 22 muntstukken.

**10.13 a.** Stel een formule op waarmee je deze vraag kunt beantwoorden.

**10.13 b.** Bereken met behulp van één van de hulpmiddelen uit paragraaf 9 wat het antwoord is op deze vraag met je formule.

**10.6 Een observatie van Schur (\*)**

Issai Schur (1875 - 1941), een Duits wiskundige, en leerling van Frobenius, maakte bij de bestudering van partities de volgende observatie.

*Het aantal partities van  $n$  in getallen van de vorm  $6k \pm 1$  is gelijk aan het aantal strikte partities van  $n$  in getallen van de vorm  $3k \pm 1$ .*

We zullen dit nu aantonen door te gooichelen met oneindige producten. De telfunctie die het aantal partities van  $n$  beschrijft in de getallen  $6k \pm 1$  is gelijk aan:

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1 - q^{6k-1})(1 - q^{6k-5})}, \quad (34)$$

de telfunctie van het aantal strikte partities in de getallen  $3k \pm 1$  is gelijk aan:

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1 + q^{3k-1})(1 + q^{3k-2}). \quad (35)$$



Figuur 72: Issai Schur (1875 - 1941)

### Issai Schur

Issai Schur (Mogilev, 10 januari 1875 - Tel Aviv, 10 januari 1941) was een wiskundige, die het grootste deel van zijn leven in Duitsland werkte. Hij studeerde aan de Universiteit van Berlijn. Na een verblijf aan de Universiteit van Bonn werd hij 1919 tot hoogleraar aan de Universiteit van Berlijn benoemd.

Hij beschouwde zichzelf eerder als Duits dan joods. Om deze reden sloeg hij in 1934 uitnodigingen af om Duitsland te verlaten en zich in de Verenigde Staten of Groot-Brittannië te vestigen. Toch werd hij in 1938 gedwongen om ontslag te nemen uit de Pruisische Academie van Wetenschappen en emigreerde Issai Schur naar Palestina.

Als student van Frobenius werkte hij aan groepsrepresentaties (het onderwerp, waarmee zijn naam het nauwst wordt geassocieerd), maar ook aan de combinatoriek en zelfs was hij actief op het gebied van de theoretische natuurkunde. Hij is vandaag de dag misschien het best bekend voor zijn resultaat over het bestaan van de Schur-decompositie en voor zijn werk over groepsrepresentaties (het lemma van Schur).

Bron (17).

#### Opgave 10.14. De observatie van Schur onderzocht

**10.14 a.** Verifiëer de observatie van Schur voor de getallen  $n = 1, 2, \dots, 15$ .

**10.14 b.** Leg uit hoe we aan de formules (34) en (35) zijn gekomen.

Deze twee uitdrukkingen moeten dus hetzelfde zijn. We herschrijven (35):

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{\infty} (1 + q^{3k-1})(1 + q^{3k-2}) &= \prod_{k=1}^{\infty} (1 + q^{3k-1})(1 + q^{3k-2}) \frac{(1 - q^{3k-1})(1 - q^{3k-2})}{(1 - q^{3k-1})(1 - q^{3k-2})} \\ &= \prod_{k=1}^{\infty} \frac{(1 - q^{6k-2})(1 - q^{6k-4})}{(1 - q^{3k-1})(1 - q^{3k-2})} \\ &= \prod_{k=1}^{\infty} \frac{(1 - q^{6k-2})(1 - q^{6k-4})}{(1 - q^{6k-4})(1 - q^{6k-1})(1 - q^{6k-5})(1 - q^{6k-2})} \\ &= \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1 - q^{6k-1})(1 - q^{6k-5})}, \end{aligned}$$

en dit is formule (34).

#### Opgave 10.15. De berekeningen voor de observatie van Schur

Met de bovenstaande berekeningen hebben we de observatie van Schur aangetoond. In deze opgave gaan we iets dieper in op enkele stappen in die berekening.

**10.15 a.** Leg uit waarom geldt dat

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1 + q^{3k-1})(1 + q^{3k-2}) \frac{(1 - q^{3k-1})(1 - q^{3k-2})}{(1 - q^{3k-1})(1 - q^{3k-2})} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{(1 - q^{6k-2})(1 - q^{6k-4})}{(1 - q^{3k-1})(1 - q^{3k-2})}.$$

**10.15 b.** Leg uit waarom geldt dat

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{(1 - q^{6k-2})(1 - q^{6k-4})}{(1 - q^{3k-1})(1 - q^{3k-2})} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{(1 - q^{6k-2})(1 - q^{6k-4})}{(1 - q^{6k-4})(1 - q^{6k-1})(1 - q^{6k-5})(1 - q^{6k-2})}.$$

**10.15 c.** Leg uit waarom dat niet werkt voor bijvoorbeeld een bovengrens van 15:

$$\prod_{k=1}^{15} \frac{(1 - q^{6k-2})(1 - q^{6k-4})}{(1 - q^{3k-1})(1 - q^{3k-2})} \neq \prod_{k=1}^{15} \frac{(1 - q^{6k-2})(1 - q^{6k-4})}{(1 - q^{6k-4})(1 - q^{6k-1})(1 - q^{6k-5})(1 - q^{6k-2})}.$$

### Opgave 10.16. **Samenvatting**

Geef in je eigen woorden een samenvatting van hoofdstuk 10: Op zoek naar een telfunctie voor 2 dimensionale partities.

Wat heb je er van geleerd?

Wat heeft je verbaasd?

#### **Samenvatting hoofdstuk 10: Op zoek naar een telfunctie voor 2 dimensionale partities**

In dit hoofdstuk hebben we een formule ontwikkeld voor een meetkundige reeks. Samen met wat we in hoofdstuk 7 hebben afgeleid zijn we zo uitgekomen op de telfunctie voor 2-d partities.

Onderweg hebben we kennis gemaakt met begrippen als oneindig en limiet. We hebben het begrip zelfgeconjugerd geïntroduceerd en we hebben telfuncties gemaakt voor het gepast betalen bij de parkeer automaat. Tot slot hebben we twee complexe telfuncties voor zeer specifieke partities aan elkaar kunnen relateren.

## 11 Een recursieve formule voor $p(n)$

We zullen nu een recursieve formule afleiden om  $p(n)$  snel mee te bepalen.

Een *recursieve formule* is een formule waarmee we de waarde van een volgengetal in een rij kunnen bepalen op basis van de voorgaande getallen.

Neem de formule (32) en vermenigvuldig zowel de linker- als de rechterkant met  $1 - q$ , we krijgen zo:

$$(1 - q) \sum_{n=0}^{\infty} p(n)q^n = \prod_{j=2}^{\infty} \frac{1}{1 - q^j}. \quad (36)$$

Uit de rechterkant wordt duidelijk dat de coëfficiënt van  $q$  niet voorkomt.

### Opgave 11.1. Formule (36) nader bekeken

**11.1 a.** Leg uit waarom uit de rechterkant volgt, dat de coëfficiënt van  $q$  niet voor komt.

**11.1 b.** Laat zien dat de coëfficiënt van  $q$  aan de linkerkant gelijk is aan  $p(1) - p(0)$ .

Met andere woorden

$$p(1) - p(0) = 0. \quad (37)$$

Vermenigvuldig nu (36) met  $1 - q^2$ , dit geeft:

$$(1 - q)(1 - q^2) \sum_{n=0}^{\infty} p(n)q^n = \prod_{j=3}^{\infty} \frac{1}{1 - q^j}. \quad (38)$$

Opnieuw komt rechts  $q$  niet voor, maar ook niet  $q^2$ .

### Opgave 11.2. Formule (38) nader bekeken

**11.2 a.** Laat zien dat de coëfficiënt van  $q^2$  aan de linkerkant leidt tot

$$p(2) - p(1) - p(0) = 0. \quad (39)$$

**11.2 b.** Vermenigvuldig (38) met  $1 - q^3$  en laat zien dat dit leidt tot

$$p(3) - p(2) - p(1) = 0. \quad (40)$$

We willen in feite (32) met

$$\prod_{j=1}^m (1 - q^j) \quad (41)$$

vermenigvuldigen. Rechts komt dan de coëfficiënt van  $q^m$  niet voor, d.w.z. dat de coëfficiënt links gelijk moet zijn aan 0. We kunnen zo  $p(m)$  uitdrukken in  $p(0)$ ,  $p(1)$ , ..., tot en met  $p(m - 1)$ . Dit idee komt van de alround wiskundige Leonhard Euler. Hij werkte de haakjes in (41) voor grote  $m$  uit en zag dat dit gelijk is aan

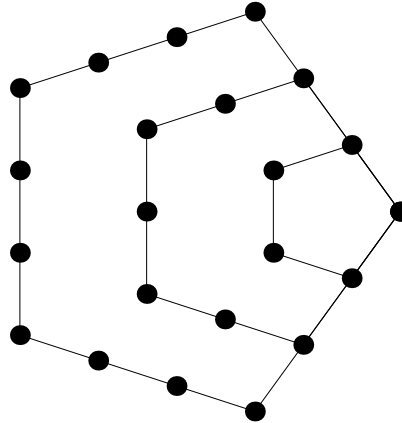
$$1 - q - q^2 + q^5 + q^7 - q^{12} - q^{15} + q^{22} + q^{26} - q^{35} - q^{40} + \dots$$

De machten die voorkomen zijn de *pentagonale getallen*, d.w.z. getallen van de vorm

$$\frac{3\ell^2 \pm \ell}{2},$$

de coëfficiënten voor deze machten zijn gelijk aan  $(-1)^\ell$ . Euler kwam tot het vermoeden dat

$$\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} (-1)^\ell q^{\frac{3\ell^2 - \ell}{2}} = \prod_{j=1}^{\infty} (1 - q^j). \quad (42)$$



Figuur 73: **pentagonale getallen 1, 5, 12, 22**

Hij deed er meer dan 10 jaar over om te bewijzen dat dit inderdaad klopt. De pentagonale getallen hebben te maken met het opvullen van een pentagon. Voor  $\ell = 1, 2, 3$  en 4 in formule (42) krijgen we 1, 5, 12 en 22. dit correspondeert met figuur 73.

Als we de formule (42) omschrijven en gebruikmaken van (32) dan krijgen we

$$(1 - q - q^2 + q^5 + q^7 - q^{12} - q^{15} + q^{22} + q^{26} - q^{35} - q^{40} + \dots) \sum_{n=0}^{\infty} p(n)q^n = 1.$$

Ofwel

$$\begin{aligned} 1 = & p(0) + p(1)q + p(2)q^2 + p(3)q^3 + p(4)q^4 + p(5)q^5 + p(6)q^6 + p(7)q^7 + p(8)q^8 + p(9)q^9 + \dots \\ & - p(0)q - p(1)q^2 - p(2)q^3 - p(3)q^4 - p(4)q^5 - p(5)q^6 - p(6)q^7 - p(7)q^8 - p(8)q^9 - \dots \\ & - p(0)q^2 - p(1)q^3 - p(2)q^4 - p(3)q^5 - p(4)q^6 - p(5)q^7 - p(6)q^8 - p(7)q^9 - \dots \\ & + p(0)q^5 + p(1)q^6 + p(2)q^7 + p(3)q^8 + p(4)q^9 + \dots \\ & + p(0)q^7 + p(1)q^8 + p(2)q^9 + \dots \end{aligned}$$

We krijgen zo naast de formules (37), (39) en (40) de formule  $p(0) = 1$  en:

$$\begin{aligned} p(2) + p(3) - p(4) &= 0, \\ p(0) - p(3) - p(4) + p(5) &= 0, \\ p(0) + p(2) - p(5) - p(6) + p(7) &= 0, \\ p(1) + p(3) - p(6) - p(7) + p(8) &= 0, \\ p(2) + p(4) - p(7) - p(8) + p(9) &= 0. \end{aligned}$$

### Opgave 11.3. *Recursieve formules voor $p(10)$ en $p(11)$*

*Laat zien dat ook geldt:*

$$\begin{aligned} p(3) + p(5) - p(8) - p(9) + p(10) &= 0, \\ p(4) + p(6) - p(9) - p(10) + p(11) &= 0. \end{aligned}$$

Algemeen leidt men zo de *formule van Euler* af.



Figuur 74: **Leonhard Euler (1707 - 1783)**

### Leonhard Euler

Leonhard Euler (Bazel, 15 april 1707 - Sint-Petersburg, 18 september 1783) was een Zwitserse wiskundige en natuurkundige die het grootste deel van zijn leven doorbracht in Rusland en Duitsland. Hij wordt algemeen beschouwd als de belangrijkste wiskundige van de 18e eeuw en als een van de belangrijkste aller tijden. Bovendien was hij de meest productieve wiskundige ooit: zijn verzameld werk bestaat zo'n zeventig delen.

Euler ontwikkelde veel nieuwe concepten en heeft zeer veel bijgedragen aan de moderne wiskundige notatie; de symbolen  $i$ ,  $e$  en  $\pi$  voor respectievelijk de imaginaire eenheid, het grondtal van de natuurlijke logaritme en de verhouding tussen omtrek en middellijn van de cirkel, zijn door hem bedacht. Ook de huidige namen van bijvoorbeeld de goniometrische functies  $\sin$ ,  $\cos$  en  $\tan$  zijn van hem.

Bron (17).

**Stelling 11.1.** Voor  $n > 0$  geldt:

$$p(n) - p(n-1) - p(n-2) + p(n-5) + p(n-7) - \dots + (-1)^\ell \left( p\left(n - \frac{3\ell^2 - \ell}{2}\right) + p\left(n - \frac{3\ell^2 + \ell}{2}\right) \right) + \dots = 0. \quad (43)$$

#### Opgave 11.4. Rekenen met de formule van Euler

Bereken met behulp van de formule van Euler de eerste 15  $p(n)$ -en.

#### Opgave 11.5. Pentagonale getallen

De naam pentagonale getallen komt van het woord pentagon, dat vijfhoek betekent. In figuur 73 zie je een constructie van enkele pentagonale getallen. Laten we ze benoemen met  $a_i$ :  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 5$ ,  $a_3 = 12$  en  $a_4 = 22$ . We gaan nu proberen de  $a_i$  recursief te definiëren. We kijken naar de constructie in figuur 73. Bij ieder volgend pentagonaal getal komt er een gedeelte van een vijfhoek bij.

**11.5 a.** Als we  $a_{i+1}$  willen uitdrukken in termen van  $a_i$ , hoeveel hoekpunten komen er dan bij?

**11.5 b.** Als we  $a_{i+1}$  willen uitdrukken in termen van  $a_i$ , hoeveel punten midden op een zijde (dus exclusief hoekpunten) komen er dan bij?

**11.5 c.** Geef een recursieve formule voor pentagonale getallen  $a_{i+1}$  uitgedrukt in  $a_i$  en  $i$ .

**11.5 d.** Laat zien dat je formule voldoet aan de eerder gevonden formule voor positieve  $\ell$ :

$$a_\ell = \frac{3\ell^2 - \ell}{2}.$$

**Opgave 11.6. Samenvatting**

*Geef in je eigen woorden een samenvatting van hoofdstuk 11: Een recursieve formule voor  $p(n)$ .*

*Wat heb je er van geleerd?*

*Wat heeft je verbaasd?*

**Samenvatting hoofdstuk 11: Een recursieve formule voor  $p(n)$** 

In dit hoofdstuk hebben we, op basis van de telfunctie voor 2-d partities, gevonden in hoofdstuk 10, gewerkt aan een recursieve formule voor de coëfficiënten van deze telfunctie. Hierbij hebben we de route gevolgd die Leonhard Euler heeft ontdekt.

Bij deze berekening hebben we ook kennis gemaakt met het begrip pentagonale getallen.

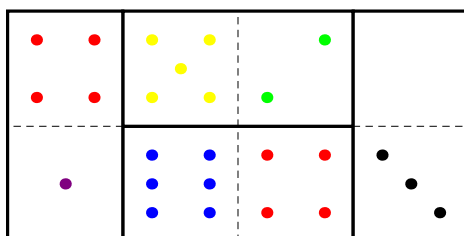
## 12 Dominostenen, Fibonacci en genererende functies

In deze paragraaf gaan we een telprobleem met dominostenen onderzoeken. Het telprobleem zal gerelateerd blijken aan een beroemde rij getallen. We zullen het telprobleem gebruiken als bron voor een belangrijk fenomeen in de combinatoriek, namelijk genererende functies.

### 12.1 Dominostenen

Een dominosteen bestaat uit twee vierkantjes tegen elkaar aan. Elk vierkantje kent 0 tot 6 gekleurde stipjes. Voor het telprobleem waar we nu mee aan de slag gaan zijn we niet geïnteresseerd in het aantal stipjes. Ook maakt het niet uit of een dominosteen met de stippen omhoog of omlaag ligt.

De dominostenen hebben een formaat van 1 bij 2. We hebben een strook voor dominostenen van 2 bij  $n$ . Hierop passen dus  $n$  dominostenen. Dominostenen kunnen op deze strook verticaal of horizontaal liggen.



Figuur 75: Voorbeeld van een strook voor  $n = 4$

In figuur 75 is een strook afgebeeld voor  $n = 4$ , met daarin dus ook 4 dominostenen.

#### Opgave 12.1. Aantal mogelijkheden voor een dominostrook

We letten nu niet op welke stippen of getallen er op de dominostenen staan en ook letten we niet op of de dominosteen de stippen naar boven of naar beneden heeft gekeerd. Dan kunnen we ons de vraag stellen op hoeveel manieren een strook met een zekere lengte gevuld kan worden met dominostenen.

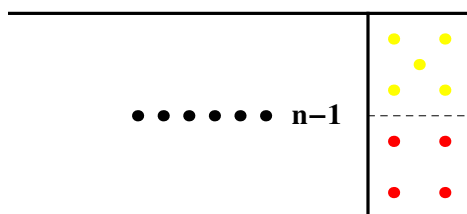
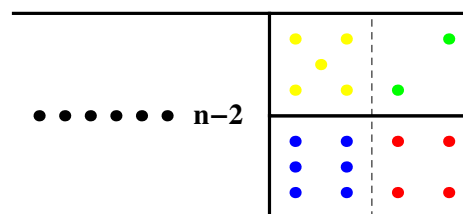
**12.1 a.** Op hoeveel verschillende manieren kunnen we een strook van lengte  $n = 0$  tot en met  $n = 4$  vullen?

**12.1 b.** Als ik weet op hoeveel verschillende manieren de stroken met lengtes tot en met  $n - 1$  gevuld kunnen worden, op hoeveel verschillende manieren kan het dan voor een strook met lengte  $n$ ?

Voor deze laatste vraag loont het de moeite eens goed te kijken naar het aantal verschillende mogelijkheden om aan een strook voor  $n - 1$  exact één steen toe te voegen. In figuur 76 is precies de enige manier waarop dit kan verbeeld.

Aan een strook ter lengte  $n - 2$  kunnen op twee manieren twee stenen toegevoegd worden, namelijk beiden verticaal of beiden horizontaal. In figuur 77 is verbeeld hoe de twee stenen horizontaal kunnen worden toegevoegd. Als we de twee stenen verticaal toevoegen, komt dat eigenlijk neer op het hebben van een strook ter lengte  $n - 1$  die eindigt op een verticale steen, waar we vervolgens één steen aan toevoegen op de manier die is verbeeld in figuur 76. Kortom, die mogelijkheid is al vervat in de mogelijkheden een strook ter lengte  $n - 1$  uit te breiden met één steen.

Met andere woorden, de figuren 76 en 77 geven precies alle mogelijkheden om, uitgaande van kortere stroken, te komen tot een strook ter lengte  $n$ . Dus het aantal mogelijkheden om een strook ter lengte  $n$  te maken is gelijk aan het aantal mogelijkheden om een strook ter lengte  $n - 1$  te maken plus het aantal mogelijkheden om een strook ter lengte  $n - 2$  te maken.

Figuur 76: Een strook voor  $n - 1$  plus één laatste steenFiguur 77: Een strook voor  $n - 2$  plus twee laatste stenen

Dus als  $p(n)$  het aantal verschillende mogelijkheden is voor een strook dominostenen ter lengte  $n$ , dan weten we:

- $p(0) = 1$
- $p(1) = 1$
- als  $n > 1$  dan geldt  $p(n) = p(n - 1) + p(n - 2)$

## 12.2 Fibonacci



Figuur 78: Leonardo van Pisa (Fibonacci) (ca. 1170 - 1250)

### Leonardo van Pisa (Fibonacci)

Leonardo van Pisa (middeleeuws Latijn: Pisano, modern Italiaans: da Pisa), beter bekend als Fibonacci (ca. 1170 - 1250) was een Italiaanse wiskundige.

Fibonacci is geboren in Italië, maar genoot zijn opleiding in Noord-Afrika. Hij publiceerde in 1202 "Liber Abaci" (Het boek van de abacus) over algebra en de Arabische cijfers inclusief het cijfer nul. Hij introduceerde dit cijferstelsel hiermee in Europa.

Hij wordt vaak beschouwd als de eerste westerse wiskundige die origineel werk publiceerde sinds de Griekse oudheid. Fibonacci is vooral bekend geworden door zijn rij van Fibonacci.

De naam "Fibonacci" komt van Figlio di Bonaccio, "zoon van Bonaccio". Bonaccio, "goedzak", was de bijnaam van Fibonacci's vader.

*Bron (17).*

De getallen  $p(n)$  die we aan het einde van de vorige paragraaf hebben gevonden voor het aantal verschillende mogelijkheden is voor een strook dominostenen ter lengte  $n$  vormen een beroemde rij.

$p(0) = 1$ ;  $p(1) = 1$  en als  $n > 1$  dan geldt  $p(n) = p(n - 1) + p(n - 2)$ .

Dit levert de volgende rij getallen op:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, ...

Elk getal in deze rij, na de eerste twee enen, is de som van de twee voorgaande getallen. Deze rij is uitgebreid beschreven door en vernoemd naar de wiskundige Fibonacci.

### 12.3 Genererende functie

We hebben nu een recursieve bepaling gevonden voor de waarden van  $p(n)$ . Maar we willen eigenlijk een telfunctie die hoort bij de uitdrukking  $\sum_{n=0}^{\infty} p(n)q^n$  zodat we weten dat de coëfficiënt die hoort bij  $q^n$  precies de  $p(n)$  is die ons vertelt op hoeveel verschillende manieren we de strook ter lengte  $n$  kunnen vullen met domino stenen, of anders geformuleerd, die ons vertelt wat het  $n^e$  getal van de rij van Fibonacci is. Laten we deze telfunctie  $f(q)$  noemen.

$$f(q) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n)q^n.$$

We weten dat  $p(0) = p(1) = 1$ .

$$f(q) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n)q^n = q^0 + q^1 + \sum_{n=2}^{\infty} p(n)q^n.$$

Voor  $n > 1$  geldt  $p(n) = p(n-1) + p(n-2)$ .

$$\begin{aligned} f(q) &= 1 + q + \sum_{n=2}^{\infty} (p(n-1) + p(n-2)) q^n = \\ &= 1 + q + \sum_{n=2}^{\infty} p(n-1)q^n + \sum_{n=2}^{\infty} p(n-2)q^n = \\ &= 1 + q + q \cdot \sum_{n=2}^{\infty} p(n-1)q^{n-1} + q^2 \cdot \sum_{n=2}^{\infty} p(n-2)q^{n-2}. \end{aligned}$$

Kies  $k = n-1$  en  $m = n-2$ . Dan kunnen we dit vertalen naar

$$f(q) = 1 + q + q \cdot \sum_{k=1}^{\infty} p(k)q^k + q^2 \cdot \sum_{m=0}^{\infty} p(m)q^m.$$

$p(0) = 1$  en  $q^0 = 1$ . Dus  $p(0) \cdot q^0 = 1$  en dus  $q = q \cdot 1 = q \cdot (p(0) \cdot q^0)$ .

$$\begin{aligned} f(q) &= 1 + q \cdot (p(0)q^0) + q \cdot \sum_{k=1}^{\infty} p(k)q^k + q^2 \cdot \sum_{m=0}^{\infty} p(m)q^m = \\ &= 1 + q \cdot \sum_{k=0}^{\infty} p(k)q^k + q^2 \cdot \sum_{m=0}^{\infty} p(m)q^m. \end{aligned}$$

We hadden gesteld dat  $f(q) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n)q^n$ . Maar welke variabele we nemen voor de optelling maakt natuurlijk

helemaal niets uit. Dus er geldt ook  $f(q) = \sum_{k=0}^{\infty} p(k)q^k = \sum_{m=0}^{\infty} p(m)q^m$ . En zo komen we op

$$\begin{aligned} f(q) &= 1 + q \cdot f(q) + q^2 \cdot f(q), \\ f(q) - q \cdot f(q) - q^2 \cdot f(q) &= 1, \\ f(q) \cdot (1 - q - q^2) &= 1, \\ f(q) &= \frac{1}{1 - q - q^2}. \end{aligned}$$

En zo zijn we uitgekomen op de telfunctie voor de dominostroken. Deze functie levert echter ook de elementen van de rij getallen van Fibonacci. Een functie die zo'n rij getallen levert wordt ook wel een *genererende functie* genoemd.

**Opgave 12.2. Rekenen met de genererende functie voor de rij van Fibonacci**

In opgave 12.1 a heb je handmatig het aantal mogelijkheden voor een strook dominostenen ter lengte  $n$  bepaald voor de waarden  $n = 0$  tot en met  $n = 4$ . En daarmee dus de eerste vijf getallen van de rij van Fibonacci.

Gebruik nu de zojuist afgeleide genererende functie en één van de hulpmiddelen uit paragraaf 9 om de eerste 25 getallen van de rij van Fibonacci te bepalen. In de zojuist afgeleide functie is de vorm  $\sum_{n=0}^{\infty} p(n)q^n$  nog niet direct herkenbaar. Met functies als `Series` of zelfs `SeriesCoefficient` zijn wel concrete coëfficiënten te berekenen.

**Opgave 12.3. Het vinden van een genererende functie**

In de afleiding hierboven is de hele route om te komen tot een genererende functie voorgedaan. We gaan het nu voor een andere rij doen. Stel we hebben een rij die begint met drie keer een 1 en daarna is ieder volgend getal de som van de drie er aan voorafgaande. Met andere woorden:  $p(0) = p(1) = p(2) = 1$  en voor  $n > 2$  geldt  $p(n) = p(n-1) + p(n-2) + p(n-3)$ .

**12.3 a.** Bereken handmatig de eerste zes getallen volgend op de drie enen aan het begin.

**12.3 b.** Leidt, analoog aan de afleiding hierboven, de genererende functie af voor deze nieuwe rij.

**12.3 c.** Gebruik nu de bij opgave 12.3 b afgeleide genererende functie en één van de hulpmiddelen uit paragraaf 9 om (met functies als `Series` of `SeriesCoefficient`) de eerste 25 getallen van deze nieuwe rij te bepalen.

**Opgave 12.4. Het toegankelijker maken van een genererende functie**

In opgave 12.2 hebben we al opgemerkt dat de genererende functie nog niet direct het standaard uiterlijk heeft dat we hiervoor willen gebruiken. Eigenlijk moeten we nog verder rekenen aan de gevonden functie  $f(q) = \frac{1}{1-q-q^2}$  om er iets van te kunnen maken van de vorm  $\sum_{n=0}^{\infty} p(n)q^n$ .

**12.4 a.** Herschrijf de functie

$$f(q) = \frac{1}{1-q-q^2} \text{ tot } f(q) = \frac{-1}{q^2+q-1}$$

en vind de waarden van  $a$  en  $b$  om  $q^2 + q - 1$  in factoren te kunnen ontbinden tot een uitdrukking van de vorm  $(q-a)(q-b)$ .

**12.4 b.** Met deze ontbinding kunnen we een truc uithalen die lijkt op het omgekeerde van gelijknamig maken. Hiertoe beginnen we met de uitdrukking

$$\frac{A}{(q-a)} + \frac{B}{(q-b)}.$$

Als we deze optelling zouden willen uitvoeren moeten we de breuken gelijknamig maken. Dus de eerste breuk vermenigvuldigen we met  $\frac{(q-b)}{(q-b)}$  en de tweede met  $\frac{(q-a)}{(q-a)}$ . Zo krijgen we een uitdrukking van de vorm

$$\frac{A \cdot (q-b) + B \cdot (q-a)}{q^2 + q - 1}.$$

Maar deze uitdrukking willen we nu gelijk hebben aan

$$f(q) = \frac{-1}{q^2 + q - 1}.$$

Bepaal, gegeven de  $a$  en  $b$ , die je in de vorige opgave hebt gevonden, de waarden voor  $A$  en  $B$  die hiervoor nodig zijn.

**12.4 c.** En zo zijn we dan uitgekomen op de uitdrukking

$$f(q) = \frac{A}{(q-a)} + \frac{B}{(q-b)}.$$

Laat zien dat deze herschreven kan worden tot

$$f(q) = \frac{-A}{a} \cdot \frac{1}{(1-\frac{q}{a})} + \frac{-B}{b} \cdot \frac{1}{(1-\frac{q}{b})}.$$

**12.4 d.** In paragraaf 10.3 hebben we formule (30) afgeleid. Deze formule kunnen we twee kanten op gebruiken. Dus nu kunnen we hem gebruiken om een uitdrukking te vinden voor

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_A(n)q^n = \frac{-A}{a} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{q}{a}\right)}$$

en

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_B(n)q^n = \frac{-B}{b} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{q}{b}\right)}.$$

Bepaal de uitdrukkingen voor  $p_A(n)$  en  $p_B(n)$ , zonder nog de eerder gevonden waarden voor  $A$ ,  $B$ ,  $a$  en  $b$  in te vullen.

**12.4 e.** Laat zien dat we dus nu hebben berekend dat

$$f(q) = \sum_{n=0}^{\infty} (p_A(n) + p_B(n)) \cdot q^n$$

en dus dat het  $n^e$  getal uit de rij van Fibonacci gegeven wordt door  $p_A(n) + p_B(n)$ .

Werk deze uitdrukking uit met de gevonden waarden voor  $A$ ,  $B$ ,  $a$  en  $b$  en bepaal hiermee enkele van de getallen uit de rij van Fibonacci gevonden bij vraag 12.2.

In deze paragraaf bewandelen we eigenlijk de tegenovergestelde route als in hoofdstuk 11. Daar hebben we van een telfunctie een recursieve formule gemaakt. Hier hebben we van een recursieve formule een telfunctie of genererende functie gemaakt.

### Opgave 12.5. Samenvatting

Geef in je eigen woorden een samenvatting van hoofdstuk 12: Dominostenen, Fibonacci en genererende functies.

Wat heb je er van geleerd?

Wat heeft je verbaasd?

### Samenvatting hoofdstuk 12: Dominostenen, Fibonacci en genererende functies

In dit hoofdstuk hebben we een strook gevuld met domino stenen en onderzocht op hoeveel verschillende manieren dit kan onder bepaalde voorwaarden. Dit onderzoek bracht ons op een beroemde recursieve formule, namelijk die, die hoort bij de rij van Fibonacci.

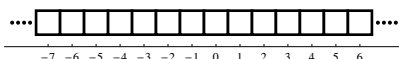
Omgekeerd aan hoofdstuk 11 hebben we nu van de recursieve formule de telfunctie of in dit geval genererende functie opgebouwd. Hierbij is het gelukt om een expliciete formule te vinden voor de coëfficiënten van deze functie.

## 13 Van partities naar Mayadiagrammen

We gaan nu iets heel anders bekijken, namelijk de zogenaamde *Mayadiagrammen*, en onderzoeken hoe het samenhangt met partities.

### 13.1 Mayadiagrammen

Om een Mayadiagram te maken beginnen we met een oneindige rij van aaneengeschaalde dozen. Elke doos heeft een geheel getal als nummer. Stel het nummer van een doos is  $n$  dan heeft de doos links van deze doos nummer  $n - 1$  en rechts van deze doos nummer  $n + 1$ . Zie figuur 79.



Figuur 79: Oneindige rij dozen

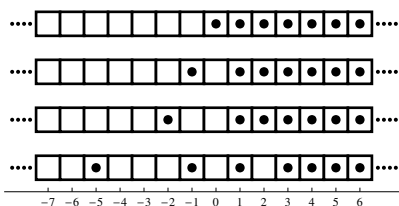
Een Mayadiagram bestaat uit deze rij dozen waarin we ballen plaatsen. Echter niet zomaar, maar op de volgende manier.

#### Definitie 13.1. *Mayadiagram*

*Een Mayadiagram bestaat uit een oneindige rij van aaneengeschaalde dozen. Elke doos heeft een geheel getal als nummer. In een doos kan een bal geplaatst zijn. Het wel of niet aanwezig zijn van een bal in een doos is volgens de volgende voorwaarden.*

1. *Elke doos is of leeg of bevat slechts één bal;*
2. *Er zijn maar eindig veel dozen, laten we zeggen  $p$ , met een nummer groter dan of gelijk aan 0 die geen bal bevatten;*
3. *Er zijn ook precies  $p$  dozen met een nummer kleiner dan nul die een bal bevatten, alle andere negatief-genummerde dozen zijn leeg.*

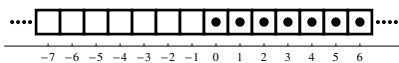
In figuur 80 geven we enkele voorbeelden van Mayadiagrammen.



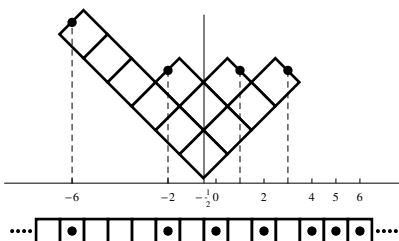
Figuur 80: Enkele voorbeelden van Mayadiagrammen

Bij elke partitie behoort een uniek Mayadiagram. Voor het beschrijven van de relatie gebruiken we het woord *bijjectie*. Een bijjectie is een relatie tussen twee verzamelingen objecten. Voor ieder object in de ene verzameling is exact één corresponderend object in de andere verzameling, en ook andersom. De bijjectie wordt gegeven als volgt.

We doen dit voor de partitie  $\lambda = (6, 3, 2, 1)$ , van figuur 16 op pagina 16. Draai de partitie tegen de klok in over 135 graden en plaats de partitie met zijn punt op de plaats  $-\frac{1}{2}$  op de getallenlijn. Zie figuur 82.



Figuur 81: Mayadiagram dat hoort bij de lege partitie



Figuur 82: Van partitie naar Mayadiagram

Uitgaande van het Mayadiagram in figuur 81 gaan we als volgt te werk. Van de uiteinden van de *rijen* die *links* van de diagonaal uitsteken gaan we recht naar beneden en daar plaatsen we een bal. Van de uiteinden van de *kolommen* die *rechts* van de diagonaal uitsteken gaan we recht naar beneden en daar halen we een bal weg.

Zo krijgen we ballen in de vakken  $-6, -2, 0, 2, 4, 5, 6, \dots$ . Merk op dat als we dit doen voor de lege partitie, de partitie die geen vierkant bevat, dan krijgen we het Mayadiagram van figuur 81.

Op het schoolbord in de achtergrond bij de foto van Andrei Okounkov (figuur 3 op pagina 5) zie je een partitie op deze wijze gedraaid over 135 graden.

### Opgave 13.1. Mayadiagrammen en Partities

Met behulp van definitie 13.1 en de hierboven gegeven constructie tussen Mayadiagrammen en partities gaan we deze relatie met enkele opgaven onderzoeken.

**13.1 a.** Geef van de Mayadiagrammen in figuur 80 de bijbehorende partities.

**13.1 b.** Leg uit dat de bovenstaande constructie een bijjectie geeft tussen de 2-d partities en de Mayadiagrammen.

**13.1 c.** Geef een beschrijving van hoe de constructie werkt die is afgebeeld in figuur 83. Leg uit waar je begint en hoe, hoe de verschillende kleuren tot stand komen en hoe je hiermee bepaalt welke dozen vol of leeg zijn.

**13.1 d.** Bepaal de Mayadiagrammen voor enkele voorbeelden uit paragraaf 4.3:  $\lambda = (11, 7, 7, 3, 3, 1, 1)$ ,  $\lambda = (8, 5, 4, 2)$ ,  $\lambda = (4, 3, 2, 1)$  en  $\lambda = (4, 3, 3, 1)$ ; en de partities met Frobenius notatie  $(6, 4, 0|5, 2, 0)$ ,  $(9, 8, 6, 4|6, 4, 1, 0)$  en  $(3, 1, 0|5, 4, 2)$ .

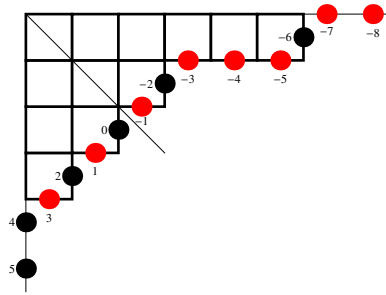
Doe dit voor enkele voorbeelden met de constructie van draaien over een hoek van  $135^\circ$  uit figuur 82 en voor enkele voorbeelden met de constructie uit figuur 83.

### Opgave 13.2. Mayadiagrammen en de Frobenius-notatie

In paragraaf 4.3 hebben we aangekondigd dat we terug zouden komen op de Frobenius notatie.

Er bestaat een relatie tussen het Mayadiagram en de Frobenius notatie van een partitie. Voor de partitie  $\lambda = (6, 3, 2, 1)$  met Frobenius notatie  $\lambda = (5, 1|3, 1)$  krijgen we het Mayadiagram van figuur 82 met ballen in de negatief genummerde dozen  $-6$  en  $-2$  en geen ballen in de positief genummerde dozen  $1$  en  $3$ .

**13.2 a.** Beschrijf de relatie tussen deze Frobenius notatie  $\lambda = (5, 1|3, 1)$  en het Mayadiagram van figuur 82. Onderzoek of deze relatie ook klopt voor de partities  $\lambda = (8, 5, 4, 2)$ ,  $\lambda = (4, 3, 2, 1)$  en  $\lambda = (3, 3, 3)$ .



Figuur 83: De partitie (6,3,2,1)

**13.2 b.** We hebben een partitie gegeven door een Frobenius notatie  $(a_1, a_2, \dots, a_n | b_1, b_2, \dots, b_n)$  en een hiermee corresponderend Mayadiagram. Geef een beschrijving welke dozen van het Mayadiagram met een nummer groter dan of gelijk aan 0 leeg zijn en welke dozen van het Mayadiagram met een nummer kleiner dan 0 gevuld zijn.

**13.2 c.** We hebben een Mayadiagram met de dozen  $(c_1, c_2, \dots, c_p)$  met een nummer groter dan of gelijk aan 0 die leeg zijn en met de dozen  $(d_1, d_2, \dots, d_p)$  met een nummer kleiner dan 0 die gevuld zijn. Beschrijf de Frobenius notatie van de partitie die correspondeert met dit Mayadiagram.

Als we beginnen met een partitie van  $n$ , dat wil zeggen we hebben  $n$  vierkanten in het Ferrersdiagram. Hoe vinden we dan die  $n$  terug in het Mayadiagram. Wat duidelijk is, is dat het Mayadiagram van figuur 81 overeen moet komen met  $n = 0$ , immers dit diagram krijgen we uit de lege partitie. Hoe zien we  $n$  nu in de andere Mayadiagrammen? Om dit uit te leggen stellen we het volgende voor. In de dozen zitten geen ballen, maar zware stenen. Als we een steen uit een doos optillen en die naar links verplaatsen kost dat *Energie*. We gaan uit van het Mayadiagram van figuur 81 en geven dit diagram *Energie* 0. Immers we hoeven geen stenen te verplaatsen. Vervolgens verplaatsen we alleen maar stenen naar links. Als we een steen 1 doos naar links verplaatsen kost dat energie 1, als we hem twee dozen naar links verplaatsen energie 2, 3 dozen naar links energie 3, enz. enz.. We zeggen nu dat een ander Mayadiagram *Energie*  $n$  heeft als het *Energie*  $n$  kost om de stenen vanuit figuur 81 naar dit nieuwe Mayadiagram te verplaatsen. Kijk nu naar figuur 82 en bereken in het Mayadiagram de energie. Je zult zien dat dat precies gelijk is aan het aantal vierkanten in de bijbehorende partitie. Merk ook op dat het niet uitmaakt in welke volgorde en welke stenen je verplaatst. Maar let wel op: je mag alleen maar stenen naar links verplaatsen. En uiteindelijk mag een doos maar maximaal één steen bevatten. We concluderen dat het aantal vierkanten in een Ferrersdiagram overeenkomt met de *Energie* van het Mayadiagram. Merk op dat de *Energie* van een Mayadiagram dus gelijk is aan

$$Energie = \left( \sum_{i \geq 0, \text{ doos } i \text{ is leeg}} i \right) - \left( \sum_{j < 0, \text{ doos } j \text{ is bezet}} j \right). \quad (44)$$

Aangezien er een bijectie is tussen de 2-d partities en de Mayadiagrammen geeft de waarde  $p(n)$  van de partitiefunctie in  $n$  dus het aantal verschillende Mayadiagrammen met *Energie*  $n$  weer.

### Opgave 13.3. Rekenen met de energie van Mayadiagrammen

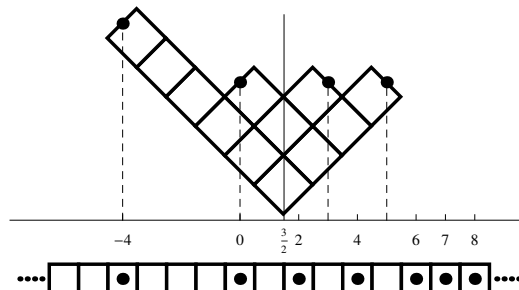
**13.3 a.** Onderzoek op hoeveel verschillende manieren en hoe je een Mayadiagram kunt maken met energie  $n$  voor  $n = 1, 2, 3$  en 4. Overtuig jezelf ervan dat dit precies correspondeert met alle partities van  $n$ .

**13.3 b.** Bereken met behulp van formule (44) de energie van de Mayadiagrammen die je gemaakt hebt in opdracht 13.1 d.

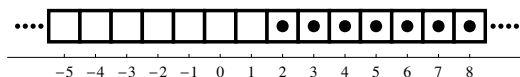
**13.3 c.** Als je goed kijkt naar formule (44) lijkt het in energie geen verschil te maken of doos 0 nu vol of leeg is. Kijk nog eens goed naar de constructie van figuur 82 en beschrijf de mogelijke situaties waarin doos 0 leeg kan zijn. Probeer te verklaren waarom het klopt dat dit niet meetelt in de energie van het Mayadiagram, en dus niet meetelt in het bepalen van het getal  $n$  van de oorspronkelijke partitie.

### 13.2 Mayadiagrammen van gewicht $m$

In de vorige paragraaf hebben we gekeken naar een speciale variant van Mayadiagrammen, namelijk Mayadiagrammen met gewicht 0. Dit gewicht 0 vind je terug in de grens in de voorwaarden waarboven slechts eindig veel dozen leeg zijn en waaronder slechts eindig veel dozen gevuld zijn. We hebben daar gezien hoe we een Mayadiagram kunnen krijgen door een 2-d partitie te roteren en met zijn punt te plaatsen op  $-\frac{1}{2}$  van de reële getallenlijn. We kunnen natuurlijk ook de partitie plaatsen op een ander punt. In plaats van het diagram op  $-\frac{1}{2}$  kunnen we het bijvoorbeeld ook plaatsen op  $\frac{1}{2}$ , of  $\frac{3}{2}$  of  $-\frac{5}{2}$  en het zelfde proces uitvoeren als we gedaan hebben in figuur 82. In figuur 84 zie je de punt van de partitie  $\lambda = (6, 3, 2, 1)$  geplaatst op  $\frac{3}{2}$ . In figuur 85 zie je het Mayadiagram van gewicht 2 dat hoort bij de lege partitie. We krijgen dan een zelfde soort Mayadiagrammen maar we hebben de index verschoven. Bijvoorbeeld het lege diagram plaatsen op plaats  $m - \frac{1}{2}$  geeft een Mayadiagram waarbij alle dozen met index groter of gelijk aan  $m$  allen volzitten. We noemen dit een Mayadiagram van gewicht  $m$ .



Figuur 84: Mayadiagram van gewicht 2 bij de partitie  $\lambda = (6, 3, 2, 1)$

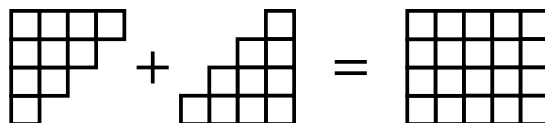


Figuur 85: Mayadiagram van gewicht 2 dat hoort bij de lege partitie

We kunnen nu ook met behulp van formule (44) de energie berekenen. Merk op dat we dan zien dat we de energie van een Mayadiagram van gewicht  $m$ , dat hoort bij de lege partitie, kunnen berekenen met:

$$Energie = \begin{cases} 0 + 1 + 2 + 3 + \cdots + (m-1) & \text{als } m > 0; \text{ of} \\ -((-1) + (-2) + (-3) + \cdots + m) & \text{als } m < 0. \end{cases} \quad (45)$$

Als we de getallen 1, 2, 3, ...,  $k$  allemaal optellen dan zien we met behulp van figuur 86 eenvoudig in dat



Figuur 86:  $1 + 2 + 3 + 4 = \frac{4 \cdot 5}{2}$

$$1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{1}{2}k(k+1).$$

Dus het Mayadiagram van gewicht  $m$  dat hoort bij de lege partitie heeft energie

$$Energie = \frac{1}{2}m(m-1). \quad (46)$$

**Opgave 13.4. Rekenen met het gewicht van Mayadiagrammen**

**13.4 a.** Laat zien dat de formule (46) klopt voor beide gevallen die beschreven worden door formule (45).

**13.4 b.** Geef twee voorbeelden (van verschillende gewichten) van een Mayadiagram met energie 13 dat hoort bij een partitie van 7. Welke twee gewichten heb je gebruikt?

**13.4 c.** Geef twee voorbeelden (van verschillende gewichten) van een Mayadiagram met energie 14 dat hoort bij een partitie van 4. Welke twee gewichten heb je gebruikt?

**13.3 Electronen en de Dirac-zee**

De ruimte van Mayadiagrammen kunnen we ook anders beschrijven. Namelijk als configuratie van electronentoestanden. Deze beschrijving is gegeven door Paul Dirac in zijn boek *The principles of Quantum Mechanics*. We vertalen het hier naar een beschrijving in Mayadiagrammen.

We willen een systeem beschrijven van elementaire deeltjes, in dit geval van electronen. We beginnen met de bestudering van alle mogelijke toestanden die op kunnen treden. Omdat we hier te maken hebben met zogenaamde fermionen voldoen deze deeltjes aan Pauli's uitsluitingsprincipe. Dat wil zeggen dat twee identieke deeltjes, in dit geval electronen, niet dezelfde kwantumtoestand mogen bezetten.



Figuur 87: **Paul Dirac (1902 - 1984)**

**Paul Adrien Maurice Dirac**

Paul Adrien Maurice Dirac (Bristol, 8 augustus 1902 - Tallahassee, 20 oktober 1984) was een Brits theoretisch natuurkundige en een van de pioniers van de kwantummechanica.

In 1926 ontwikkelde hij een versie van de kwantummechanica die het werk van Werner Heisenberg over de matrixmechanica en dat van Erwin Schrödinger over de golfmechanica met elkaar verenigde in een enkel mathematisch formalisme.

Diracs *Principles of Quantum Mechanics* (gepubliceerd in 1930) werd een van de standaard handboeken en wordt nog steeds gebruikt.

In 1931 bewees Dirac dat het bestaan van een enkele magnetische monopool in het universum zou volstaan om de kwantisatie van de elektrische lading te verklaren. Dit voorstel kreeg veel aandacht maar tot nu toe is er geen enkel bewijs voor het bestaan van magnetische monopolen.

Paul Dirac deelde een Nobelprijs natuurkunde in 1933 met Erwin Schrödinger "voor de ontdekking van een nieuwe productieve vorm van atoomtheorie". Dirac was Professor in wiskunde van Cambridge van 1932 tot 1969.

Bron (17).

We stellen nu de toestand in de toestandsruimte van electronen voor als mayadiagram. De dozen vormen de kwantumtoestanden van de electronen. De ballen zijn de electronen. Dus een toestand is een Mayadiagram dat bestaat uit een geördende verzameling van kwantumtoestanden. Een electron in kwantumtoestand is een bal in een doos.

Omdat we hier te maken hebben met electronen, waarvoor Pauli's uitsluitingsprincipe geldt, past er maximaal één bal in elke doos, met andere woorden maximaal één electron in een kwantumtoestand.

We hebben hier een probleem er zijn oneindig veel dozen en we willen geen oneindige waarden krijgen voor energie of lading. Daarom volgen we Paul Dirac en definiëren een referentietoestand namelijk het Mayadiagram van figuur 81, d.w.z. het Mayadiagram van *gewicht* 0 en *Energie* 0. Deze toestand noemen we het vacuum. We willen nu ook het begrip *lading* toekennen. Omdat een electron negatief geladen is neemt de lading van het Mayadiagram toe als we een bal verwijderen. Dit suggereert om als lading van het diagram het gewicht van het Mayadiagram te kiezen. Dit doen we dan ook, *lading*=gewicht. We krijgen nu alle mogelijke toestandconfiguraties van electronen door eindig veel ballen in negatieve dozen te plaatsen en eindig veel ballen weg te halen uit dozen met index  $j \geq 0$ . Dit wordt in de literatuur de *Dirac-zee* genoemd.

Een bal plaatsen in een doos met index  $-j < 0$  verlaagt de *lading* met 1 en verhoogt de *Energie* met  $j$ . Een bal weghalen uit doos  $i$  met  $i \geq 0$  verhoogt de *lading* met 1 en verhoogt de *Energie* met  $i$ . Het wel of niet aanwezig zijn van een electron in doos  $i \geq 0$  interpreteren we als volgt.

(1) Als er een electron in doos  $i$  zit komt dat overeen met die doos bij het vacuum. Dan verhoogt deze doos de *lading* en *Energie* van deze toestand ten opzichte van het vacuum niet.

(2) Als we een electron uit doos  $i$  verwijderen, dan neemt de *lading* met 1 toe en de *Energie* met  $i$  (ten opzichte van het vacuum).

De telfunctie van alle Mayadiagrammen en electronentoestanden zijn op deze manier dus gelijk.

### Opgave 13.5. *Samenvatting*

Geef in je eigen woorden een samenvatting van hoofdstuk 13: Van partities naar Mayadiagrammen.

Wat heb je er van geleerd?

Wat heeft je verbaasd?

### Samenvatting hoofdstuk 13: Van partities naar Mayadiagrammen

In dit hoofdstuk hebben we Mayadiagrammen geïntroduceerd. Deze Mayadiagrammen hebben we vertaald naar 2-d partities en terug. Hierbij hebben we nuttig gebruik kunnen maken van de Frobenius-notatie.

Van Mayadiagrammen hebben we de energie bepaald en we hebben Mayadiagrammen van verschillende gewichten bekeken.

Dankzij de Mayadiagrammen hebben we kennis gemaakt met kwantumtoestanden van electronen.

## 14 Matrices van afwisselend teken en hun telfunctie

We introduceren nu een nieuw begrip dat ons in staat zal stellen twee eerdere paragrafen op verrassende wijze met elkaar te verbinden.

### 14.1 Matrices van afwisselend teken

Een *matrix van afwisselend teken* is een matrix met alleen maar de getallen  $-1$ ,  $0$  of  $1$ . Deze getallen mogen we niet zomaar plaatsen, ze moeten nog aan enkele extra voorwaarden voldoen.

**Definitie 14.1. Matrix van afwisselend teken**

Een matrix van afwisselend teken is een matrix met alleen maar de getallen  $-1$ ,  $0$  of  $1$ , die voldoet aan de volgende voorwaarden:

1. De cellen in de matrix bevatten alleen maar de getallen  $-1$ ,  $0$  of  $1$ ;
2. In elke rij is de som van alle getallen gelijk aan  $1$ ;
3. In elke kolom is de som van alle getallen gelijk aan  $1$ ;
4. Kijkend naar alleen de getallen  $-1$  en  $1$  geldt dat in elke rij en kolom deze getallen elkaar afwisselen.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Figuur 88: Een voorbeeld van een matrix van afwisselend teken

**Opgave 14.1. Definitie 14.1 onderzoeken**

Dankzij definitie 14.1 maken we kennis met het fenomeen matrix van afwisselend teken. Laten we dit begrip eens goed gaan bekijken.

**14.1 a.** Geef alle mogelijke  $n \times n$  matrices van afwisselend teken die aan deze voorwaarden voldoen voor  $n = 2$  en  $n = 3$ .

**14.1 b.** Kijkend naar deze voorwaarden: wat kun je zeggen over het aantal “niet-nullen” (getallen ongelijk aan  $0$ ) per rij of per kolom?

**14.1 c.** Wat is in een rij of in een kolom het eerste getal ongelijk aan  $0$  dat je tegenkomt, als je vanaf de rand van de matrix naar binnen loopt?

**Opgave 14.2. Het terugvinden van de randen**

In deze opgave gaan we onderzoeken in welke mate het binnenste van een matrix van afwisselend teken afdwingt hoe de randen gevuld zijn.

**14.2 a.** Maak een  $6 \times 6$  matrix van afwisselend teken, waarin ook minstens één  $-1$  voorkomt. Haal hiervan de bovenste rij en de linker kolom weg. Onderzoek op hoeveel verschillende manieren je een rij boven en een kolom links kunt bij plaatsen om weer een kloppende  $6 \times 6$  matrix van afwisselend teken terug te krijgen.

**14.2 b.** Haal nu van je oorspronkelijke  $6 \times 6$  matrix van afwisselend teken zowel de bovenste en onderste rij als de linker en rechter kolom weg. We gaan nu onderzoeken op hoeveel verschillende manieren je er weer een kloppende  $6 \times 6$  matrix van afwisselend teken van kunt maken door op de plek waar je net kolommen en rijen hebt weg gehaald weer kolommen en rijen terug te plaatsen.

Er zijn situaties waarin je hetzelfde antwoord krijgt als bij de vorige vraag. Er zijn ook situaties waarbij je een ander antwoord krijgt. Beschrijf deze verschillende situaties.

## 14.2 Matrices van afwisselend teken en het ijsmodel met randvoorwaarden

In opdracht 3.3 op pagina 13 spreken we over het ijsmodel en de speciale rol die de watermoleculen Noord-Zuid en Oost-West hierin spelen.

### Opgave 14.3. Noord-Zuid en Oost-West een speciale rol?

*Maak opdracht 3.3 a tot en met 3.3 c opnieuw.*

We vertalen nu Noord-Zuid naar 1 en Oost-West naar  $-1$ . Alle overige watermoleculen vertalen we naar 0. In opdracht 3.3 b heb je aangetoond dat de ligging van de Noord-Zuid en de Oost-West moleculen de ijsconfiguratie uniek bepalen. In opdracht 3.3 c heb je beschreven dat de hier gegeven vertaling voor de watermoleculen naar  $-1$ , 0 en 1 er precies voor zorgt dat een ijsmodel, dat voldoet aan de voorwaarden op de randen zoals beschreven in paragraaf 3.2, direct correspondeert met een matrix van afwisselend teken.

In figuur 88 zie je precies de vertaling van het ijsmodel van figuur 12 en 13.

### Opgave 14.4. Matrices van afwisselend teken vertalen naar ijsmodellen

**14.4 a.** Vertaal je  $6 \times 6$  matrix uit opdracht 14.2 naar een ijsmodel.

**14.4 b.** Vergelijk de matrices uit opdracht 14.1 a met je antwoorden bij opdracht 3.2 en overtuig jezelf van de bijectie (zie ook pagina 76 voor een uitleg van het begrip bijectie).

### Opgave 14.5. De speciale rol van Noord-Zuid en Oost-West nader onderzocht

*Als Noord-Zuid en Oost-West dan een speciale rol vervullen, laten we dan eens kijken waarom.*

**14.5 a.** Leg uit waarom in het ijsmodel in iedere rij tenminste één Noord-Zuid molecuul voor moet komen.

**14.5 b.** Leg uit waarom in het ijsmodel in iedere rij voor elk Oost-West molecuul tevens een extra Noord-Zuid molecuul “ter compensatie” nodig is.

**14.5 c.** Waarom is in het ijsmodel in iedere rij tussen twee Oost-West moleculen in ieder geval ook een Noord-Zuid molecuul nodig en ook andersom.

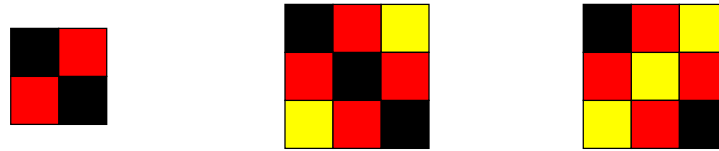
**14.5 d.** Beantwoord deze vragen ook voor de kolommen in het ijsmodel.

**14.5 e.** Vergelijk je antwoorden hier met je antwoord op vraag 3.3 d.

## 14.3 Drie kleuren schaakborden en matrices van afwisselend teken

Schaakborden worden traditioneel met twee kleuren beschilderd volgens een zeer duidelijk patroon. Er zijn ook wiskundigen bezig geweest met kijken naar hoe je een schaakbord zou kunnen beschilderen met drie kleuren en op welke wijze bepaalde voorwaarden aan het toegepaste patroon effect hebben op het aantal mogelijke verschillende kleuringen.

Een beroemd voorbeeld is het volgende voorbeeld van drie kleuren schaakborden met specifieke randvoorwaarden.



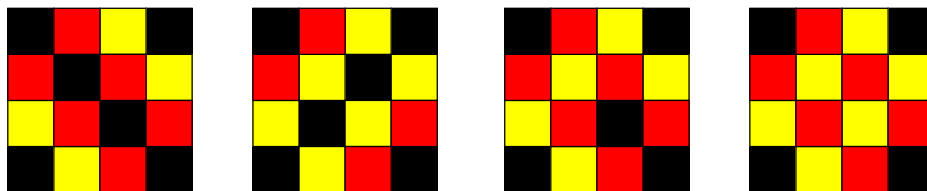
Figuur 89: De enige mogelijkheid voor  $n = 1$  en de twee verschillende mogelijkheden voor  $n = 2$  voor drie kleuren schaakborden met randvoorwaarden van  $(n + 1) \times (n + 1)$  vakjes

**Definitie 14.2. Drie kleuren schaakbord met randvoorwaarden**

Een drie kleuren schaakbord met randvoorwaarden is een schaakbord dat voldoet aan de volgende voorwaarden:

1. Het schaakbord heeft een grootte van  $(n + 1) \times (n + 1)$  vakjes;
2. De vakjes van het schaakbord worden elk met één van de drie kleuren zwart, rood of geel gekleurd;
3. Twee vakjes die naast elkaar liggen (één zijde gemeen hebben) zijn verschillend van kleur;
4. De linker bovenhoek en de rechter onderhoek worden zwart gekleurd;
5. Langs de randen worden de vakjes, per rand, vanaf de linker bovenhoek en vanaf de rechter onderhoek gekleurd in de volgorde zwart  $\rightarrow$  rood  $\rightarrow$  geel  $\rightarrow$  zwart  $\rightarrow \dots$  enzovoorts, totdat het volgende hoekpunt wordt bereikt.

In figuur 89 zijn de één respectievelijk twee mogelijkheden geschetst voor  $n = 1$  en  $n = 2$ . In figuur 90 zijn enkele mogelijkheden geschetst voor  $n = 3$ .



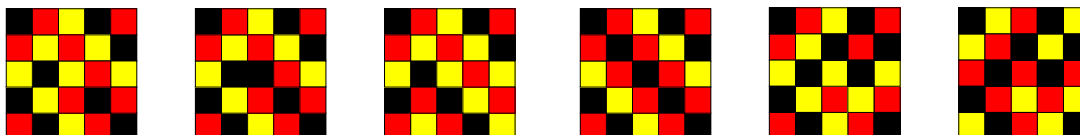
Figuur 90: Enkele verschillende mogelijkheden voor  $n = 3$  voor een drie kleuren schaakbord met randvoorwaarden

**Opgave 14.6. Definitie 14.2 onderzoeken**

Dankzij definitie 14.2 maken we kennis met het fenomeen drie kleuren schaakbord met randvoorwaarden. Laten we dit begrip eens goed gaan bekijken.

**14.6 a.** In figuur 90 zijn nog niet alle mogelijkheden voor  $n = 3$  gegeven voor een drie kleuren schaakbord met de gegeven randvoorwaarden aan het begin van deze paragraaf. Geef de ontbrekende mogelijkheden. Beargumenteer hoeveel verschillende mogelijkheden er zijn.

**14.6 b.** In figuur 91 staan enkele drie kleuren schaakborden afgebeeld voor  $n = 4$ . Sommigen kloppen wel, andere kloppen niet. Welke kloppen wel, welke niet en waarom?



Figuur 91: Enkele mogelijke en enkele verkeerde drie kleuren schaakborden met randvoorwaarden voor  $n = 4$

**14.6 c.** Geef enkele (andere) voorbeelden van drie kleuren schaakborden met deze voorwaarden voor  $n = 4$  en  $n = 5$ .

Er blijkt een rechtstreekse vertaling mogelijk van deze drie kleuren schaakborden naar matrices van afwisselend teken. Hiertoe vertalen we de kleuren naar de cijfers 0, 1 en 2: zwart is 0, rood is 1 en geel is 2. Zo krijgen we een vierkant patroon met de cijfers 0, 1 en 2.

Van dit vierkant nemen we van ieder kruispunt (dat niet op de buitenrand ligt) een 2 bij 2 matrix van de cellen die aan het kruispunt grenzen. Hierbij staan we onszelf toe om bij de getallen in de 2 bij 2 matrix eventueel 3 op te tellen om er voor te zorgen dat twee aangrenzende cijfers altijd 1 verschillen.

Dus bijvoorbeeld  $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$  vertalen we naar  $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ .

Van elke 2 bij 2 matrix van de vorm  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  berekenen we het getal  $(b + c - a - d)/2$ . Deze getallen plaatsen we in een  $n \times n$  matrix, waarbij het kruispunt waar de 2 bij 2 matrix vandaan komt bepalend is voor de positie in deze  $n \times n$  matrix die zo ontstaat.

Deze matrix is een matrix van afwisselend teken. En zoals we in de vorige paragraaf hebben gezien kunnen we deze vertalen naar een ijsmodel met randvoorwaarden. Het volledige traject is voor één van de voorbeelden uit figuur 90 uitgewerkt in figuur 92. Hierin is het rechter boven vierkant van  $2 \times 2$  uit het drie kleuren schaakbord met een paarse rand omgeven. In die kleur paars is dat stukje door het hele traject te volgen.

#### Opgave 14.7. De vertaling van een drie kleuren schaakbord naar een matrix van afwisselend teken

Deze vertaling klinkt bijna als afkomstig uit een hoge hoed. Laten we eens enkele stappen analyseren om te kijken of het aannemelijk is dat hier inderdaad een matrix van afwisselend teken uit komt.

**14.7 a.** Onderzoek of het mogelijk is om een 2 bij 2 matrix uit het vierkant te halen waarbij voor beide diagonalen geldt dat ze verschillende getallen bevatten. Dus dat  $a \neq d$  en  $b \neq c$ .

**14.7 b.** Beargumenteer waarom er uit het vierkant altijd op deze wijze 2 bij 2 matrices gemaakt kunnen worden. Waarbij dus altijd aangrenzende cellen exact 1 verschillen.

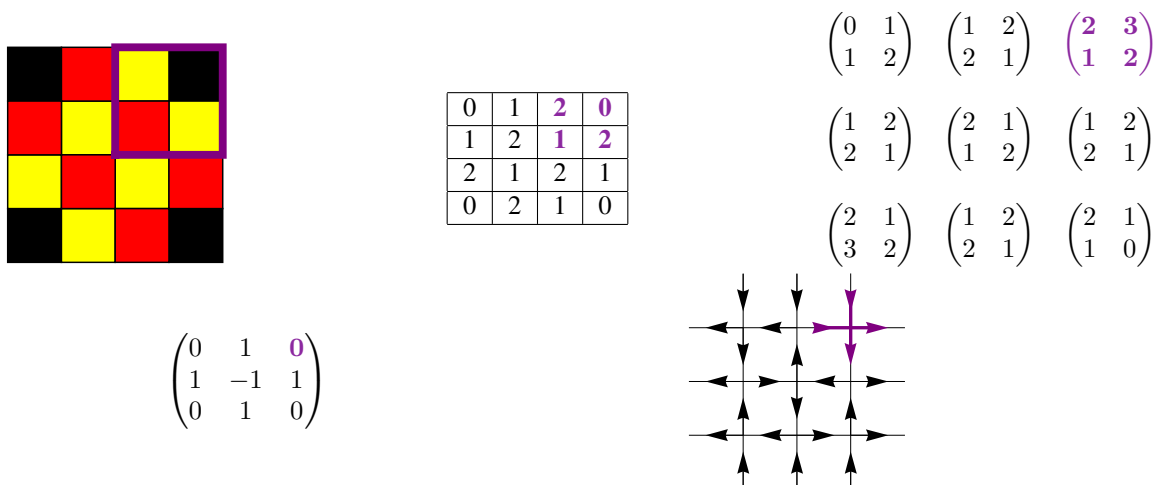
**14.7 c.** Onderzoek welke kleurencombinaties, en dus welke getallen kunnen voorkomen in de 2 bij 2 matrices die op de hiervoor beschreven wijze afkomstig zijn uit het vierkant.

**14.7 d.** Welke mogelijkheden komen bij de in de vorige opdracht gevonden 2 bij 2 matrices uit de berekening  $(b + c - a - d)/2$ ?

**14.7 e.** Beargumenteer waarom het aannemelijk is dat er altijd een matrix van afwisselend teken uit komt.

#### Opgave 14.8. De vertaling toegepast

Nu we aannemelijk hebben gemaakt dat deze vertaling hout snijdt, moesten we hem maar eens in enkele concrete situaties gaan toepassen.



Figuur 92: Ontwikkeling van het laatste driekleuren schaakbord voor  $n = 3$  uit figuur 90 via een matrix van afwisselend teken naar een ijsmodel met randvoorwaarden van  $3 \times 3$

**14.8 a.** Geef de matrices van afwisselend teken die horen bij de andere drie voorbeelden uit figuur 90 en de voorbeelden uit figuur 89.

**14.8 b.** De hier geschetste route gaat van een drie kleuren schaakbord met randvoorwaarden naar een matrix van afwisselend teken. Beschrijf hoe je van een matrix met afwisselend teken kunt komen tot een drie kleuren schaakbord.

**14.8 c.** Geef het drie kleuren schaakbord dat op deze wijze hoort bij de matrix van afwisselend teken uit figuur 88 en het drie kleuren schaakbord dat hoort bij je  $6 \times 6$  matrix uit opgave 14.2.

## 14.4 Determinanten van matrices uitrekenen en matrices van afwisselend teken

Matrices komen in de wiskunde heel erg veel voor. Ze blijken in bijzonder veel uiteenlopende gebieden in de wiskunde handig toe te passen. In veel van deze toepassingen is het nodig om het gedrag van de matrices te classificeren met een getal. Dit getal heet de *determinant*. Bij kleine matrices is het berekenen nog wel enigszins te overzien. Maar bij grote matrices wordt het berekenen al snel een omvangrijke klus, omdat het berekenen van de determinant gebeurt met permutaties van kolommen of rijen. Een *permutatie* van een rij getallen is het in een bepaalde volgorde zetten van die getallen. Twee getallen kun je op twee manieren in een volgorde zetten, drie getallen op zes manieren en vier getallen op 24 manieren. Kortom, dat groeit snel.

De determinant van een 2 bij 2 matrix  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  is  $ad - bc$ . De determinant van een 3 bij 3 matrix  $\begin{pmatrix} p & q & r \\ s & t & u \\ v & w & x \end{pmatrix}$  is  $ptx + quv + rsw - puw - qsx - rtv$ .

Veel wiskundigen zijn bezig geweest met het vereenvoudigen van het reken proces van determinanten, en dan vooral het opbreken in berekeningen met kleinere matrices. Een originele benadering in dit kader is geïntroduceerd door de Britse wiskundige Charles Dodgson in een boek uit 1867.

De methode voor het berekenen van de determinant, die Dodgson beschreef, bestaat ook uit het vertalen van een matrix in een kleinere matrix. Op deze kleinere matrix wordt, met bepaalde berekeningen, dezelfde procedure toegepast, en zo verder totdat je op een getal uitkomt. Het exacte proces komt zo aan de orde in opdracht 14.9. We bekijken hier nu wat er uit komt bij de eerder gegeven 3 bij 3 matrix:  $(1)ptx + (1)quv + (1)rsw + (0)qsuwt^{-1} + (-1)puw + (-1)qsx + (-1)rtv$ . De uiteindelijke uitkomst is dus hetzelfde, alleen staat er een extra term bij met coëfficiënt 0. In deze extra term worden  $q$ ,  $s$ ,  $u$  en  $w$  met elkaar vermenigvuldigd en vervolgens gedeeld door  $t$ .



Figuur 93: **Charles Dodgson (1832 - 1898)**

### Charles Lutwidge Dodgson

Charles Lutwidge Dodgson (Daresbury, 27 januari 1832 Guildford, 14 januari 1898) was een Engelse deken in de Anglicaanse Kerk, wiskundige en logicus maar hij is vooral bekend geworden door zijn kinderboeken, geschreven onder het pseudoniem Lewis Carroll: *De avonturen van Alice in Wonderland* en *Achter de Spiegel en wat Alice daar aantrof*.

Hij was het derde kind en de oudste zoon in een gezin van elf kinderen. In januari 1851 vertrok hij naar Oxford waar hij in 1854 cum laude in de wiskunde afstudeerde aan het Christ Church College. Later werd hij daar ook lector, tot 1881. Hij stierf op 14 januari 1898 aan de gevolgen van een longontsteking in Guildford waar hij ook begraven werd.

Beroemd, en nooit officieel bevestigd, is de anekdote dat koningin Victoria zo gecharmeerd was van de boeken, die hij onder het pseudoniem Lewis Carroll schreef, dat ze opdracht gaf een exemplaar van het volgende boek van dezelfde auteur te bestellen. Ze was buitengewoon verbaasd met de wiskundige verhandelingen die ze kreeg.

*Bron (6) en (17).*

De methode van Dodgson is ruim een eeuw nauwelijks gebruikt, totdat onderzoekers het idee konden koppelen aan matrices van afwisselend teken. Als we in de berekening nu niet op de coëfficiënten letten, maar op de termen, waar de berekening uit bestaat. Per term kijken we welke cellen hierin voorkomen en op deze plekken zetten we een 1, tenzij er door die cel gedeeld wordt, dan zetten we er een  $-1$ . In de cellen die niet voorkomen zetten we een 0. Dan blijken we in deze berekening de 7 termen te hebben die zijn afgebeeld in figuur 94. En dit zijn weer precies de zeven mogelijke matrices van afwisselend teken van grootte 3.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Figuur 94: **De 7 termen in de berekening van Dodgson**

#### Opgave 14.9. *De methode van Dodgson voor het berekenen van een determinant*

*De methode van Dodgson is vergelijkbaar met het vertalen van het vierkant uit paragraaf 14.3 naar 2 bij 2 matrices per kruispunt. Ook hier vervangt hij de  $(n+1) \times (n+1)$  matrix door een  $n \times n$  matrix. In iedere cel van de nieuwe, kleinere matrix plaatst hij de determinant van de  $2 \times 2$  matrix die op het kruispunt van die positie in de oorspronkelijke matrix ligt. Het berekenen van de determinant van een  $2 \times 2$  matrix gaat met de eerder gegeven formule  $ad - bc$ . Bij iedere vervolgstap moet je in dat geval delen door de centrale cel van de  $3 \times 3$  matrix uit de stap ervoor waar de  $2 \times 2$*

matrix uit ontstaan is, waarvan je nu de determinant wilt berekenen. In het voorbeeld van figuur 95 zie je dus dat je

$$\begin{pmatrix} 9 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 7 \\ 6 & 1 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 9 \cdot 2 - 3 \cdot 4 & 3 \cdot 7 - 5 \cdot 2 \\ 4 \cdot 1 - 2 \cdot 6 & 2 \cdot 8 - 7 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 11 \\ -8 & 9 \end{pmatrix} \rightarrow (6 \cdot 9 - 11 \cdot (-8))/2 = 71.$$

Figuur 95: Een voorbeeld van de methode van Dodgson

in de eerste stap nog nergens door hoeft te delen, maar in de tweede stap moet delen door de 2 in het midden van de eerste  $3 \times 3$  matrix.

**14.9 a.** Laat zien dat deze methode inderdaad de eerder gegeven formule  $(1)ptx + (1)quv + (1)rsu + (0)qsuwt^{-1} + (-1)puw + (-1)qsx + (-1)rtv$  oplevert. Leg hierbij ook uit waarom de term met coëfficiënt 0 er bij staat.

**14.9 b.** Bereken met deze methode de determinant van de matrix in formule (18) op pagina 43.

**14.9 c.** Gegeven een algemene  $4 \times 4$  matrix:

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{pmatrix}.$$

Beschrijf voor het toepassen van deze methode van Dodgson op deze algemene  $4 \times 4$  matrix de eerste stap naar een  $3 \times 3$  matrix, en voer deze uit. Beschrijf tevens voor de volgende stap bij welke berekeningen je door welke cellen uit de oorspronkelijke  $4 \times 4$  matrix moet delen.

## 14.5 Het ijsmodel met randvoorwaarden en monotone driehoeken

In deze paragraaf gaan we proberen om een strategie te vinden om te tellen hoeveel ijsmodellen met randvoorwaarden er mogelijk zijn op een raster van  $n \times n$ . We volgen hierbij een methode, die is uitgewerkt door David Bressoud onder andere in [3].



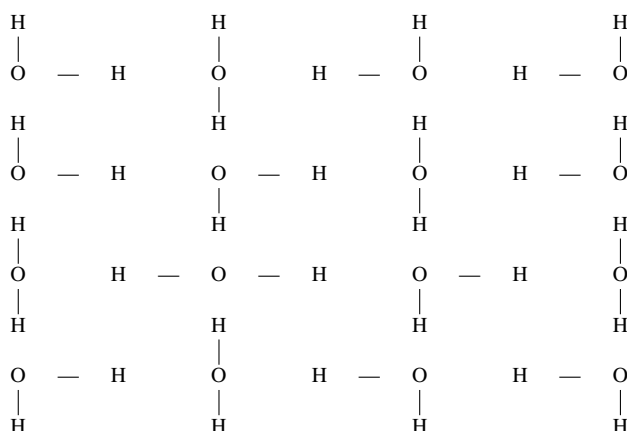
Figuur 96: David Bressoud (1950 - )

### David Marius Bressoud

David Marius Bressoud (27 maart 1950, Bethlehem, Pennsylvania) is een Amerikaans wiskundige actief in getal theorie, combinatoriek en speciale functies. Sinds 2009 is hij DeWitt Wallace Professor in Wiskunde op Macalester College. Hij is sinds 2007 voorzitter van de Mathematical Association of America. Na vele jaren met een focus op wiskundig onderzoek heeft hij begin jaren negentig zijn aandacht verlegd naar wiskunde onderwijs.

Bron (17).

We herhalen nog een keer figuur 12.



Figuur 97: Voorbeeld van een ijsmodel van 4 bij 4 met randvoorwaarden van figuur 12

In figuur 97 zien we dat in de eerste rij er exact één kolom is met een waterstofatoom aan de onderkant. In de tweede rij zijn dit er twee, in de derde drie en in de laatste vier.

**Opgave 14.10. Hoeveel zuurstofatomen met een waterstofatoom aan de onderkant**

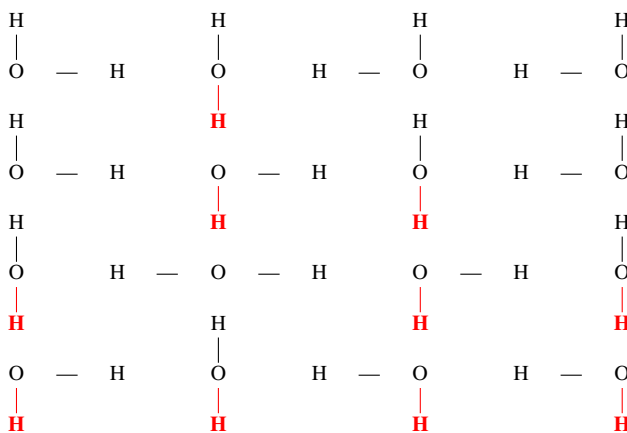
In een ijsmodel met randvoorwaarden blijkt een patroon aanwezig hoeveel zuurstofatomen een waterstofatoom aan de onderkant hebben afhankelijk van in welke rij we kijken.

**14.10 a.** Leg uit waarom er in de bovenste rij altijd exact één zuurstofatoom moet zijn met één waterstofatoom aan de onderkant.

**14.10 b.** Leg uit waarom de onderste rij van een  $n \times n$  ijsmodel met randvoorwaarden altijd exact  $n$  zuurstofatomen moet hebben met elk één waterstofatoom aan de onderkant.

**14.10 c.** Leg uit waarom het aantal zuurstofatomen met één waterstofatoom aan de onderkant, van boven naar beneden wandelend, bij iedere volgende rij naar beneden met exact één toeneemt.

We markeren de waterstofatomen die aan de onderkant van een zuurstofatoom vast zitten met rood.

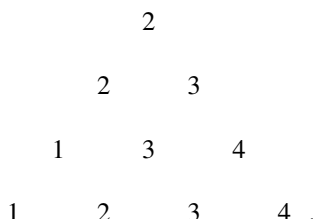


Figuur 98: Het ijsmodel van figuur 12 met de waterstofatomen aan de onderkant gemarkeerd

**Opgave 14.11. Het aantal rode waterstofatomen**

Het valt op dat rechts van ieder rood waterstofatoom evenveel of één minder rode waterstofatomen zitten, als in het zelfde stuk van de rij er onder. Dit zelfde geldt ook als je links van een rood waterstofatoom kijkt in plaats van rechts. Probeer deze observatie te verklaren.

Als we nu per rij de kolomnummers met een rood waterstofatoom noteren krijgen we de volgende driehoek:



Figuur 99: Kolomnummers per rij van de waterstofatomen aan de onderkant

De observatie uit opgave 14.11 is samen te vatten door te kijken naar een willekeurig tot een driehoek gegroepeerde drietal getallen in de vorm:

$$\begin{array}{c} a \\ b \quad c \end{array}$$

Hiervoor geldt altijd  $b \leq a \leq c$  en  $b < c$ .

**Opgave 14.12. Noord-Zuid en Oost-West moleculen afleiden uit de rode waterstofatomen**

Een getal dat in een rij voorkomt, maar niet in de rij erboven hoort bij een zuurstofatoom met aan de bovenkant een waterstofatoom er aan vast. Want het bovenliggende waterstofatoom zit niet aan het daarboven liggende zuurstofatoom vast, want dan zou die kolom wel genoemd worden in de rij erboven. Omdat het zuurstofatoom in deze rij genoemd wordt, heeft dat zuurstofatoom ook een waterstofatoom aan de onderkant. Dit beschrijft dus uniek de Noord-Zuid moleculen.

Een getal dat niet in een rij voorkomt, maar wel in de rij erboven hoort bij een zuurstofatoom met aan de bovenkant geen waterstofatoom. Want het er boven liggende waterstofatoom zit aan het daarboven liggende zuurstofatoom vast, want in die rij wordt de kolom genoemd. Omdat het zuurstofatoom in deze rij niet genoemd wordt, heeft dit zuurstofatoom ook geen waterstofatoom aan de onderkant. Dit beschrijft dus uniek de Oost-West moleculen.

**14.12 a.** Kun je ook op een andere manier dan hier beschreven een Noord-Zuid of Oost-West molecuul in je ijsmodel met randvoorwaarden hebben?

**14.12 b.** Leg uit voor elk Noord-Zuid en Oost-West molecuul in figuur 98 dat deze beschrijving klopt.

**14.12 c.** Laat zien dat voor alle getallen uit figuur 99 deze beschrijving klopt.

Al eerder heb je aangetoond dat de ligging van Noord-Zuid en Oost-West moleculen het ijsmodel met randvoorwaarden uniek bepaalt. We hebben dus nu een vertaling van het ijsmodel van formaat  $n \times n$  naar een driehoek met zijde  $n$  van een speciaal type. De driehoek heeft als onderste rij getallen de getallen 1 tot en met  $n$ , en naar boven toe voldoen iedere drie getallen, zoals hiervoor beschreven, aan  $b \leq a \leq c$  en  $b < c$ . Laten we deze driehoek een *monotone driehoek* van grootte  $n$  noemen.

**Definitie 14.3. Monotone driehoek**

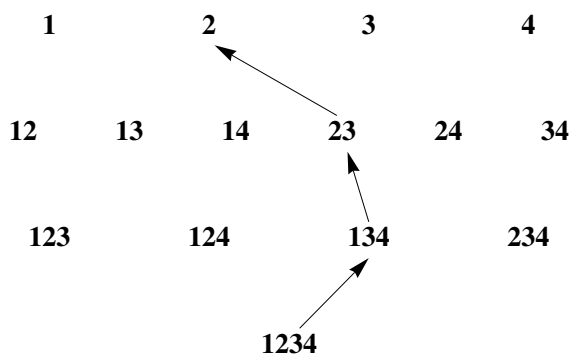
Een monotone driehoek van grootte  $n$  is een getallen driehoek die aan de volgende voorwaarden voldoet:

1. De driehoek bestaat uit  $n$  rijen;
2. De bovenste rij bevat één getal en iedere volgende rij bevat één getal meer dan de vorige rij;
3. De onderste rij bevat van links naar rechts de getallen 1 tot en met  $n$ ;
4. Voor elk drietal getallen  $a, b$  en  $c$  met  $b$  en  $c$  direct naast elkaar in één rij en  $a$  hier midden tussen in de rij er direct boven geldt  $b \leq a \leq c$  en  $b < c$ .

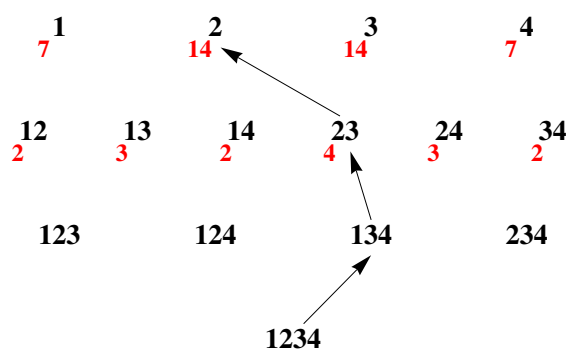
De vraag hoeveel ijsmodellen met randvoorwaarden er mogelijk zijn op een raster van  $n \times n$  komt dan dus overeen met de vraag hoeveel monotone driehoeken van grootte  $n$  er mogelijk zijn.

Laten we beginnen met voor elk aantal getallen dat een rij in de driehoek kan hebben de verschillende mogelijkheden opschrijven. In figuur 100 zijn ze opgeschreven. Op de eerste rij de verschillende mogelijkheden voor rijen met één getal, op de tweede rij de verschillende mogelijkheden voor rijen met twee getallen, enzovoorts. Daarnaast is met pijlen de route aangegeven van ons voorbeeld uit figuur 99. De route die loopt van 1234 naar 2.

Hoeveel van dergelijke paden zijn er mogelijk? Ieder pad moet van elk aantal getallen een mogelijkheid kiezen. Maar niet iedere keuze is toegestaan. Als ik van 1234 een stap zet naar 123, dan zijn de mogelijkheden 14, 24 en 34 geen optie meer. Deze voldoen niet meer aan de voorwaarde  $b \leq a \leq c$ .



Figuur 100: De verschillende mogelijkheden per rij in een monotone driehoek en het voorbeeld van figuur 99 uitgewerkt



Figuur 101: De verschillende mogelijkheden per rij in een monotone driehoek en het aantal manieren om ze te bereiken

Ieder voorbeeld van drie getallen kan op 1 manier bereikt worden, namelijk vanuit 1234. 12 kan bereikt worden vanuit 123 en vanuit 124, maar niet vanuit de andere. 12 kan dus op 2 manieren bereikt worden. 13 kan bereikt worden vanuit 123, vanuit 124 en vanuit 134, maar niet vanuit 234. 13 kan dus op 3 manieren bereikt worden. Op dezelfde wijze is te zien dat 14 op 2 manieren bereikt kan worden. 1 kan bereikt worden vanuit 12, vanuit 13 en vanuit 14. Deze groepen konden elk bereikt worden op 2, 3 en 2 manieren. Dus 1 kan bereikt worden op  $2 + 3 + 2 = 7$  manieren. In figuur 101 zijn op deze wijze voor alle mogelijkheden in het rood genoteerd op hoeveel manieren ze bereikt kunnen worden. Hieruit blijkt dus dat er totaal  $7 + 14 + 14 + 7 = 42$  verschillende paden mogelijk zijn. Dus zijn er 42 verschillende mogelijke monotone driehoeken van grootte 4. En dus zijn er 42 verschillende mogelijke ijsmodellen met randvoorwaarden op een raster van  $4 \times 4$ . En uiteindelijk zijn er dus 42 verschillende mogelijke  $4 \times 4$  matrices van afwisselend teken. Tot slot zijn er dus ook 42 verschillende  $5 \times 5$  drie kleuren schaakborden met randvoorwaarden mogelijk.

**Opgave 14.13. Het tellen van het aantal mogelijke monotone driehoeken**

**14.13 a.** Controleer de correctheid van de andere rode cijfers in figuur 101.

**14.13 b.** In figuur 101 staan de mogelijkheden en per mogelijkheid het aantal manieren om deze mogelijkheid te bereiken voor een monotone driehoek van grootte  $n = 4$ . Maak zo'n zelfde schema voor  $n = 3$  en voor  $n = 5$ .

**14.6 Op zoek naar een formule voor het aantal mogelijkheden voor het ijsmodel met randvoorwaarden(\*)**

Als we  $A_n$  gebruiken om het aantal mogelijke monotone driehoeken van grootte  $n$  mee aan te duiden dan zijn met stug rekenwerk met deze methode de volgende waarden te vinden:

$$\begin{array}{ll} A_1 &= 1, \\ A_2 &= 2, \\ A_3 &= 7, \\ A_4 &= 42, \quad (2 \cdot 3 \cdot 7), \\ A_5 &= 429, \quad (3 \cdot 11 \cdot 13), \\ A_6 &= 7436, \quad (2^2 \cdot 11 \cdot 13^2), \\ A_7 &= 218348, \quad (2^2 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 19), \\ A_8 &= 10850216, \quad (2^3 \cdot 13 \cdot 17^2 \cdot 19^2), \\ A_9 &= 911835460, \quad (2^2 \cdot 5 \cdot 17^2 \cdot 19^3 \cdot 23), \\ A_{10} &= 129534272700, \quad (2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 17 \cdot 19^3 \cdot 23^2). \end{array}$$

Deze getallen hebben kleine priemfactoren, dus dat biedt hoop op een mooie formule. Laten we verder zoeken.

We gaan nu kijken naar het aantal verschillende monotone driehoeken van grootte  $n$  met in de top getal  $k$ . We noteren dit met  $A_{n,k}$  met  $1 \leq k \leq n$ . We hebben net gezien dat  $A_{4,1} = 7$ ,  $A_{4,2} = 14$ ,  $A_{4,3} = 14$  en  $A_{4,4} = 7$ .

Als we nu een driehoek op gaan bouwen met de waarden van deze  $A_{n,k}$  met op regel  $n$  op de  $k^e$  positie de waarde van  $A_{n,k}$ , dan krijgen we de driehoek uit figuur 102.

|  |     |     |      |      |      |      |      |      |
|--|-----|-----|------|------|------|------|------|------|
|  |     |     |      | 1    |      |      |      |      |
|  |     |     |      | 1    |      | 1    |      |      |
|  |     |     | 2    |      | 3    |      | 2    |      |
|  |     | 7   |      | 14   |      | 14   |      | 7    |
|  | 42  |     | 105  |      | 135  |      | 105  | 42   |
|  | 429 |     | 1287 |      | 2002 |      | 2002 | 1287 |
|  |     | 429 |      | 1287 |      | 2002 |      | 1287 |
|  |     |     | 42   |      | 105  |      | 105  |      |
|  |     |     |      |      | 1    |      |      |      |
|  |     |     |      |      | 1    |      |      |      |
|  |     |     |      |      | 2    |      |      |      |
|  |     |     |      |      | 7    |      |      |      |
|  |     |     |      |      | 14   |      |      |      |
|  |     |     |      |      | 14   |      |      |      |
|  |     |     |      |      | 42   |      |      |      |
|  |     |     |      |      | 429  |      |      |      |
|  |     |     |      |      | 7436 |      |      |      |

Figuur 102: Het aantal manieren om een monotone driehoek te maken met een gegeven getal in de top

Het eerste getal in iedere rij is de som van de getallen in de rij er boven. Dat is verklaarbaar. Een monotone driehoek met een 1 in de top moet aan de linker kant overal een 1 hebben. De rest van de driehoek is vrij in te vullen, en komt dus neer op het aantal mogelijkheden om een monotone driehoek van één maatje kleiner te maken.

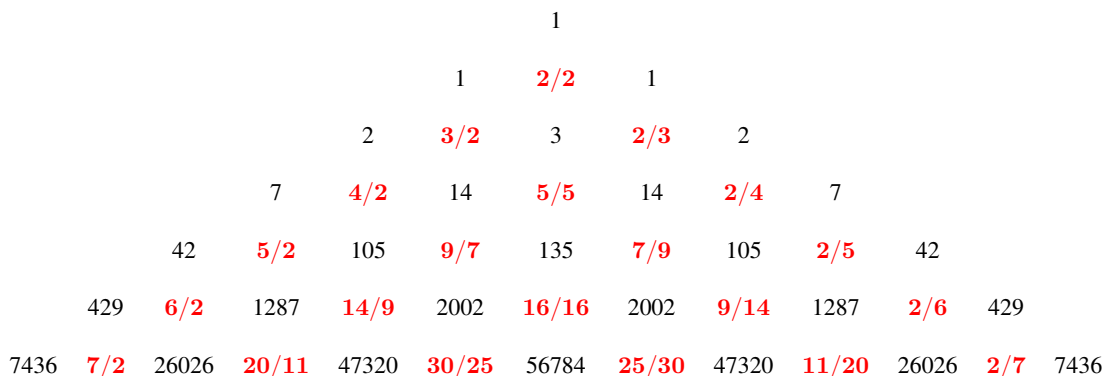
**Opgave 14.14. Speciale waarde voor  $A_{n,n}$**

Leg uit waarom ook het laatste getal in iedere rij gelijk is aan de som van de getallen in de rij er boven.

Samenvattend betekent dit dus:

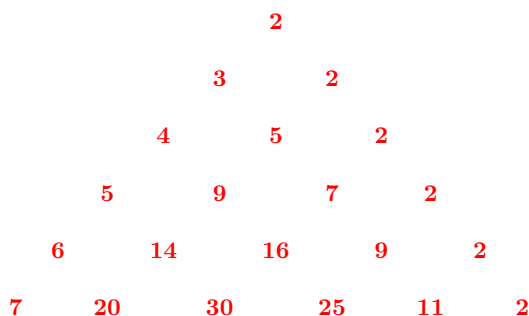
$$A_{n,1} = A_{n,n} = \sum_{k=1}^{n-1} A_{n-1,k} = A_{n-1}. \quad (47)$$

Maar we willen natuurlijk weten welke getallen er tussen deze uitersten staan. Laten we eens kijken met welke factoren de getallen vermenigvuldigd worden om bij de volgende in de regel te komen. De factoren schrijven we als breuk. Hiervoor zijn meerdere mogelijkheden, maar de keuzes in figuur 103 lijken veelbelovend.



**Figuur 103: De driehoek van figuur 102 uitgebreid met verenigvuldigingsfactoren**

Op deze manier is bij elke rij de tellers van de factoren van links naar rechts gelijk aan de noemers van de factoren van rechts naar links. Als we dan alleen de tellers uit deze driehoek opschrijven krijgen we de driehoek uit figuur 104.



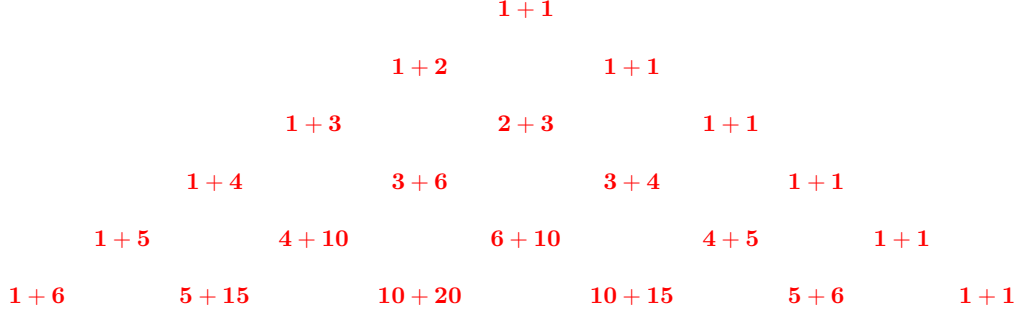
**Figuur 104: De tellers uit de factoren van de driehoek van figuur 103**

In deze driehoek is iedere teller de som van de twee schuin erboven liggende. Een fenomeen dat we eerder gezien hebben bij de driehoek van Pascal (zie ook pagina 32). Sterker nog we kunnen de tellers schrijven als de som van twee binomiaal-coëfficiënten. Zie ook figuur 105.

In formule vorm:

$$\frac{A_{n,k+1}}{A_{n,k}} = \frac{\binom{n-2}{n-k-1} + \binom{n-1}{n-k-1}}{\binom{n-2}{k-1} + \binom{n-1}{k-1}}. \quad (48)$$

14.6 Op zoek naar een formule voor het aantal mogelijkheden voor het ijsmodel met randvoorwaarden(\*)



Figuur 105: Nogmaals de tellers uit figuur 104

Formule (48) kunnen we enigszins vereenvoudigen:

$$\begin{aligned}
 \frac{A_{n,k+1}}{A_{n,k}} &= \frac{\binom{n-2}{n-k-1} + \binom{n-1}{n-k-1}}{\binom{n-2}{k-1} + \binom{n-1}{k-1}} \\
 &= \frac{\frac{(n-2)!}{(n-k-1)!(k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(n-k-1)!k!}}{\frac{(n-2)!}{(n-k-1)!(k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}} \\
 &= \frac{\frac{(n-2)!}{(n-k-1)!k!} (k+n-1)}{\frac{(n-2)!}{(n-k)!(k-1)!} (n-k+n-1)} \\
 &= \frac{(n-k)(n+k-1)}{k(2n-k-1)}. \tag{49}
 \end{aligned}$$

Als we enkele opeenvolgende van dergelijke breuken met elkaar vermenigvuldigen, vallen er enkele factoren uit. Daar kunnen we mee rekenen om bijvoorbeeld  $\frac{A_{n,q+1}}{A_{n,1}}$  uit te rekenen.

$$\begin{aligned}
 \frac{A_{n,q+1}}{A_{n,1}} &= \frac{A_{n,2}}{A_{n,1}} \cdot \frac{A_{n,3}}{A_{n,2}} \cdot \dots \cdot \frac{A_{n,q+1}}{A_{n,q}} \\
 &= \prod_{k=1}^q \frac{A_{n,k+1}}{A_{n,k}} \\
 &= \frac{(n-1)(n-2) \cdots (n-q) \cdot n(n+1) \cdots (n+q-1)}{1 \cdot 2 \cdots q \cdot (2n-2)(2n-3) \cdots (2n-q-1)} \\
 &= \frac{(n+q-1)!(2n-q-2)!}{q!(n-q-1)!(2n-2)!} \\
 &= \frac{(n-1)!^2}{(2n-2)!} \cdot \frac{(n+q-1)!}{q!(n-1)!} \cdot \frac{(2n-q-2)!}{(n-q-1)!(n-1)!} \\
 &= \frac{(n-1)!^2}{(2n-2)!} \cdot \binom{n+q-1}{n-1} \cdot \binom{2n-q-2}{n-1}. \tag{50}
 \end{aligned}$$

Bij de afleiding van formule (50) hebben we niet met de mogelijkheid rekening gehouden dat  $q = 0$ . Toch geldt

formule (50) ook voor  $q = 0$ , met andere woorden voor  $\frac{A_{n,1}}{A_{n,1}}$ .

$$\begin{aligned}
 \frac{A_{n,1}}{A_{n,1}} = \frac{A_{n,0+1}}{A_{n,1}} &= \frac{(n-1)!^2}{(2n-2)!} \cdot \binom{n+0-1}{n-1} \cdot \binom{2n-0-2}{n-1} \\
 &= \frac{(n-1)!^2}{(2n-2)!} \cdot \binom{n-1}{n-1} \cdot \binom{2n-2}{n-1} \\
 &= \frac{(n-1)!^2}{(2n-2)!} \cdot 1 \cdot \frac{(2n-2)!}{(n-1)!(2n-2-(n-1))!} \\
 &= \frac{(n-1)!^2}{(2n-2)!} \cdot \frac{(2n-2)!}{(n-1)!(2n-2-n+1)!} \\
 &= \frac{(n-1)!^2}{(2n-2)!} \cdot \frac{(2n-2)!}{(n-1)!(n-1)!} \\
 &= 1.
 \end{aligned} \tag{51}$$

Laten we nu eens de gezochte  $A_n$  uitdrukken in  $A_{n-1}$  en de eerder gevonden breuken, waarbij we ook gebruik maken van formule (47):

$$\begin{aligned}
 A_n &= A_{n,1} + A_{n,2} + A_{n,3} + \cdots + A_{n,n} \\
 &= A_{n,1} \left( \frac{A_{n,1}}{A_{n,1}} + \frac{A_{n,2}}{A_{n,1}} + \frac{A_{n,3}}{A_{n,1}} + \cdots + \frac{A_{n,n}}{A_{n,1}} \right) \\
 &= A_{n-1} \left( \frac{A_{n,1}}{A_{n,1}} + \frac{A_{n,2}}{A_{n,1}} + \frac{A_{n,3}}{A_{n,1}} + \cdots + \frac{A_{n,n}}{A_{n,1}} \right) \\
 &= A_{n-1} \left( \sum_{q=0}^{n-1} \frac{A_{n,q+1}}{A_{n,1}} \right).
 \end{aligned} \tag{52}$$

Voegen we nu de formules (50) en (52) samen, dan krijgen we:

$$\begin{aligned}
 A_n &= A_{n-1} \sum_{q=0}^{n-1} \frac{(n-1)!^2}{(2n-2)!} \cdot \binom{n+q-1}{n-1} \cdot \binom{2n-q-2}{n-1} \\
 &= A_{n-1} \frac{(n-1)!^2}{(2n-2)!} \sum_{q=0}^{n-1} \binom{n+q-1}{n-1} \cdot \binom{2n-q-2}{n-1}.
 \end{aligned} \tag{53}$$

We kunnen bewijzen (maar nemen het nu hier even aan) dat:

$$\sum_{q=0}^{n-1} \binom{n+q-1}{n-1} \cdot \binom{2n-q-2}{n-1} = \binom{3n-2}{2n-1}. \tag{54}$$

Dus hiermee kunnen we formule (53) verder uitwerken:

$$\begin{aligned}
 A_n &= A_{n-1} \frac{(n-1)!^2}{(2n-2)!} \binom{3n-2}{2n-1} \\
 &= A_{n-1} \frac{(n-1)!^2 (3n-2)!}{(2n-2)! (2n-1)! (n-1)!} \\
 &= A_{n-1} \frac{(n-1)! (3n-2)!}{(2n-2)! (2n-1)!}.
 \end{aligned} \tag{55}$$

Eerder hadden we al gezien dat  $A_1 = 1$ . Het loont dus de moeite om formule (55) in stukjes op te breken richting  $A_1$ .

$$\begin{aligned}
A_n &= A_{n-1} \cdot \frac{(n-1)!(3n-2)!}{(2n-2)!(2n-1)!} \\
&= A_{n-2} \cdot \frac{(n-2)!(3n-5)!}{(2n-4)!(2n-3)!} \cdot \frac{(n-1)!(3n-2)!}{(2n-2)!(2n-1)!} \\
&= A_2 \cdot \frac{2! \cdot 7!}{4! \cdot 5!} \cdot \frac{3! \cdot 10!}{6! \cdot 7!} \cdots \frac{(n-2)!(3n-5)!}{(2n-4)!(2n-3)!} \cdot \frac{(n-1)!(3n-2)!}{(2n-2)!(2n-1)!} \\
&= \frac{1! \cdot 4!}{2! \cdot 3!} \cdot \frac{2! \cdot 7!}{4! \cdot 5!} \cdot \frac{3! \cdot 10!}{6! \cdot 7!} \cdots \frac{(n-2)!(3n-5)!}{(2n-4)!(2n-3)!} \cdot \frac{(n-1)!(3n-2)!}{(2n-2)!(2n-1)!} \\
&= \frac{1! \cdot 2! \cdots (n-1)! \cdot 4! \cdot 7! \cdots (3n-2)!}{1! \cdot 2! \cdot 3! \cdots (2n-1)!} \\
&= \frac{4! \cdot 7! \cdots (3n-2)!}{n! \cdot (n+1)! \cdots (2n-1)!} \\
&= \prod_{j=0}^{n-1} \frac{(3j+1)!}{(n+j)!}.
\end{aligned} \tag{56}$$

## 14.7 Totaal symmetrische zelf complementaire 3-d partities en matrices van afwisselend teken?

Aan het einde van de vorige paragraaf zijn we, dankzij een globale schets over hoe je dit zou kunnen bewijzen, uitgekomen op formule (56). We zijn hiermee op een formule gekomen voor  $A_n$ .  $A_n$  staat voor het aantal mogelijke verschillende monotone driehoeken van grootte  $n$ . Maar wellicht nog belangrijker,  $A_n$  staat ook voor het aantal verschillende mogelijkheden voor een ijsmodel met randvoorwaarden op een  $n \times n$  raster. Samenvattend zijn we dus uitgekomen op de volgende stelling.

### Stelling 14.1. Telfunctie voor ijsmodel met randvoorwaarden

De telfunctie voor het aantal verschillende mogelijkheden voor een ijsmodel met randvoorwaarden op een  $n \times n$  raster is gelijk aan

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)q^n \quad \text{met} \quad p(n) = \prod_{j=0}^{n-1} \frac{(3j+1)!}{(n+j)!}. \tag{57}$$

Uit de voorgaande paragrafen mag duidelijk zijn dat deze stelling, en dus ook formule (57), geldt voor de volgende situaties:

1. Het aantal verschillende mogelijkheden voor een ijsmodel met randvoorwaarden op een  $n \times n$  raster.
2. Het aantal verschillende monotone driehoeken van grootte  $n$ .
3. Het aantal verschillende mogelijkheden voor  $n \times n$  matrices van afwisselend teken.
4. Het aantal verschillende mogelijkheden voor  $(n+1) \times (n+1)$  drie kleuren schaakborden met randvoorwaarden.
5. Het aantal verschillende termen in de berekening volgens de methode van Dodgson voor de determinant van een  $n \times n$  matrix.

De route om te komen tot formule (57), die in de vorige paragraaf beschreven is, is bedacht door David Robbins. Hij ging hieraan werken toen hij in 1980 stuitte op de methode om determinanten uit te rekenen van Charles Dodgson die beschreven staat in paragraaf 14.4.

In de vorige paragraaf gebeuren veel onverwachte en verrassende stappen. Dat is ook de genialiteit van de bedenker van het bewijs, David Robbins. Veel wezenlijke stappen zijn hier nu niet bewezen of te algemeen en onvolledig geformuleerd. Maar het leek ons wel leuk om een globale schets op te nemen, van hoe je tot deze formule zou kunnen komen.

De uitkomst komt ons zeer bekend voor dankzij dezelfde Robbins. Hij heeft ons ook dezelfde formule gebracht middels stelling 8.1 op pagina 46. Alleen vertelt de formule ons daar iets over het aantal totaal symmetrische zelf complementaire 3-d partities van een hexagon ter grootte  $2n$ .

**Opgave 14.15. Totaal symmetrische zelf complementaire 3-d partities [antwoord onbekend]**

*Kun je een methode beschrijven die vanuit alle zelf-complementaire 3d-partities alle configuraties van het ijsmodel met randvoorwaarden construeert of andersom. Vergelijk alle mogelijkheden voor  $n = 2$  (dit zijn er 2) en  $n = 3$  (dit zijn er 7)?*

**Opgave 14.16. Samenvatting**

*Geef in je eigen woorden een samenvatting van hoofdstuk 14: Matrices van afwisselend teken en hun telfunctie.*

*Wat heb je er van geleerd?*

*Wat heeft je verbaasd?*

**Samenvatting hoofdstuk 14: Matrices van afwisselend teken en hun telfunctie**

In dit hoofdstuk hebben we het begrip matrix van afwisselend teken geïntroduceerd. Dit is vervolgens gerelateerd aan een veelheid van verschillende begrippen die blijken allemaal in elkaar vertaald te kunnen worden: matrix van afwisselend teken, ijsmodel met randvoorwaarden, drie kleuren schaakbord met randvoorwaarden, termen in de Dodgson determinant berekeningsmethode en monotone driehoek.

Gebruikmakend van kenmerken van enkele van deze verschillende objecten zijn we na een lange route uitgekomen op de telfunctie voor deze objecten. Dit blijkt verrassend genoeg dezelfde formule als die geldt voor totaal symmetrische zelf-complementaire 3-d partitie.

## 15 De telfunctie van 3d-partities

Percy MacMahon (1854 - 1929) was de eerste die in 1916 de volgende stelling bewees.

### Stelling 15.1. Telfunctie voor 3-d partities in dozen

De telfunctie van alle 3-d partities die passen in een doos met lengte  $\ell$ , breedte  $b$  en hoogte  $h$  is gelijk aan:

$$\prod_{i=1}^{\ell} \prod_{j=1}^b \prod_{k=1}^h \frac{1 - q^{i+j+k-1}}{1 - q^{i+j+k-2}}. \quad (58)$$

We zullen deze formule niet bewijzen, maar gewoon aannemen dat deze waar is.



Figuur 106: Percy MacMahon (1854 - 1929)

### Percy Alexander MacMahon

Percy Alexander MacMahon (26 September 1854, Sliema, Malta - 25 December 1929, Bognor Regis, Engeland) was een wiskundige, vooral bekend om partities van getallen en analyse.

MacMahon heeft in 1900 de Royal Medal ontvangen van de Royal Society, de Sylvester Medal in 1919 en de Morgan Medal van de London Mathematical Society in 1923. MacMahon was voorzitter van de London Mathematical Society van 1894 tot 1896.

MacMahon is het meest bekend door zijn onderzoek naar symmetrische functies en het tellen van twee dimensionale partities. Zijn twee-delige publicatie *Combinatory analysis*, uit 1915/16, is het eerste belangrijke boek over het tellen in de combinatoriek. MacMahon heeft ook pionier werk gedaan in recreatieve wiskunde en diverse succesvolle puzzels gepatenteerd.

Bron (17).

### Opgave 15.1. De telfunctie voor 3-d partities in dozen

Onderzoek deze telfunctie (58) voor dozen van  $1 \times 1 \times 4$ ,  $1 \times 2 \times 3$  en  $2 \times 2 \times 2$ . Ga na dat voor deze waarden van  $\ell$ ,  $b$  en  $h$  de formule klopt.

Om alle 3-d partities te tellen willen we een telfunctie waarin we  $\ell$ ,  $b$  en  $h$  oneindig groot laten worden. Dit geeft de formule:

$$\prod_{i=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{\infty} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1 - q^{i+j+k-1}}{1 - q^{i+j+k-2}}. \quad (59)$$

Deze formule vinden we te ingewikkeld. Ga na dat in zowel de teller als de noemer de som  $i + j + k$  een rol speelt. We willen dus tellen hoeveel mogelijkheden je hebt om de getallen  $i$ ,  $j$  en  $k$  allen groter dan 0 te kiezen zodat hun som

$i + j + k$  gelijk is aan een vast getal  $m$ . Met andere woorden we kunnen (59) dus als volgt herschrijven:

$$\prod_{i=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{\infty} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1 - q^{i+j+k-1}}{1 - q^{i+j+k-2}} = \prod_{m=3}^{\infty} \prod_{i+j+k=m} \frac{1 - q^{i+j+k-1}}{1 - q^{i+j+k-2}}. \quad (60)$$

We kunnen het aantal mogelijkheden dat  $i + j + k = m$ , met  $i, j$  en  $k$  allen groter dan 0, op de volgende manier meetkundig bepalen. De vergelijking

$$x + y + z = m$$

is een vlak dat gaat door de punten  $(m, 0, 0)$ ,  $(0, m, 0)$  en  $(0, 0, m)$ . We willen het aantal geheeltallige punten  $(i, j, k)$  tellen waarvan alle coördinaten  $i, j, k > 0$  zijn. Deze punten liggen in het inwendige van een driehoek. Voor  $m = 4$  zie je dit vlak in figuur 107, met de 3 inwendige geheeltallige punten  $(2, 1, 1)$ ,  $(1, 2, 1)$  en  $(1, 1, 2)$ .

Daar waar de driehoek de zijvlakken van de kubus snijdt, correspondeert met de vlakken  $i = 0$ ,  $j = 0$  of  $k = 0$ . Omdat we geheeltallige oplossingen zoeken met coördinaten  $i, j, k > 0$  kunnen de oplossingen niet op deze vlakken liggen. We zoeken dus oplossingen in het inwendige van de driehoek.

Vergelijk figuur 107 eens met figuur 108. Hier zie je een zelfde driehoek als we zien in figuur 107, echter nu met alle geheeltallige punten. Op de zijde van deze driehoek liggen 5 punten. We zeggen dat dit een driehoek is met zijde 4. De 3 inwendige punten liggen op een driehoek met zijde 1. Algemeen willen we dus de inwendige punten tellen van een driehoek met zijde  $m$ .

#### Opgave 15.2. Op zoek naar inwendige punten

Ga aan de hand van enkele voorbeelden na dat de inwendige punten, van een driehoek met zijde  $m$ , alle punten zijn die liggen op de gelijkzijdige driehoek met zijde lengte  $m - 3$ .

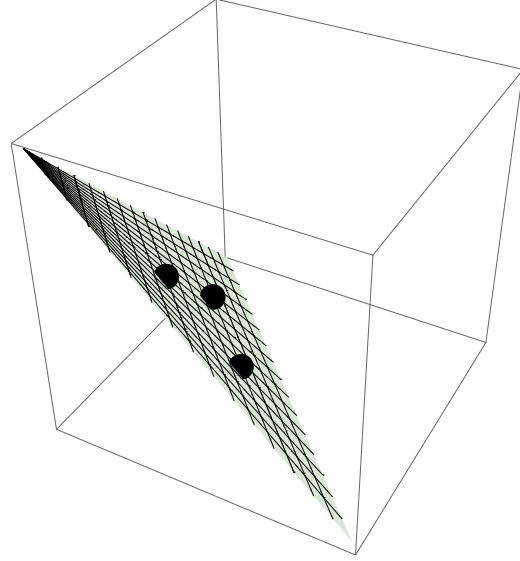
We krijgen zo de driehoeksgetallen, zie figuur 108. We zien zo eenvoudig in dat het aantal punten voor een driehoek met een zijde ter lengte  $p$  gelijk is aan

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (p + 1) = \frac{(p + 1)(p + 2)}{2}. \quad (61)$$

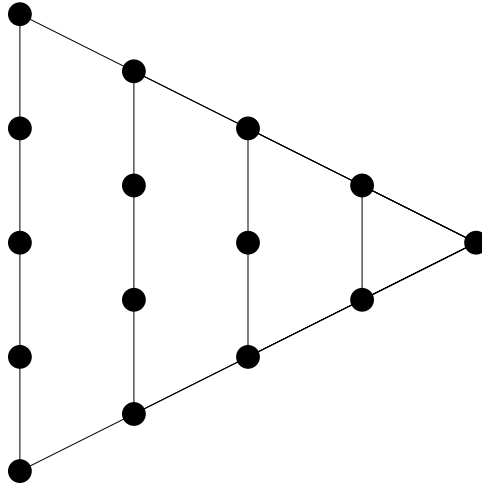
Denk hierbij ook aan het voorbeeld bij figuur 86 op pagina 79, waarbij we de energie berekende voor een Mayadiagram van gewicht  $m$  van een lege partitie.

Met andere woorden het aantal mogelijkheden zodat  $i + j + k = m$  met  $i, j, k > 0$  is gelijk aan het driehoeksgetal dat hoort bij  $m - 3$ . Als we dit in formule (61) invullen krijgen we:  $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ . Dus de uitdrukking (60) wordt zo:

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{\infty} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1 - q^{i+j+k-1}}{1 - q^{i+j+k-2}} &= \prod_{m=3}^{\infty} \prod_{i+j+k=m} \frac{1 - q^{i+j+k-1}}{1 - q^{i+j+k-2}} \\ &= \prod_{m=3}^{\infty} \frac{(1 - q^{m-1})^{\frac{(m-1)(m-2)}{2}}}{(1 - q^{m-2})^{\frac{(m-1)(m-2)}{2}}} \\ &= \prod_{m=3}^{\infty} (1 - q^{m-1})^{\frac{(m-1)(m-2)}{2}} \\ &= \prod_{m=3}^{\infty} (1 - q^{m-2})^{\frac{(m-1)(m-2)}{2}}. \end{aligned} \quad (62)$$



Figuur 107: vlak  $x + y + z = 4$



Figuur 108: driehoeksggetallen 1, 3, 6, 10, 15

Vervang nu in de teller  $m - 1$  door  $r$  en in de noemer  $m - 2$  door  $s$ , zo krijgen we:

$$\prod_{i=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{\infty} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1 - q^{i+j+k-1}}{1 - q^{i+j+k-2}} = \frac{\prod_{r=2}^{\infty} (1 - q^r)^{\frac{r(r-1)}{2}}}{\prod_{s=1}^{\infty} (1 - q^s)^{\frac{(s+1)s}{2}}} . \quad (63)$$

**Opgave 15.3.** *Het herformuleren van het product met variabele  $r$*

Laat zien dat  $\prod_{r=2}^{\infty} (1 - q^r)^{\frac{r(r-1)}{2}} = \prod_{r=1}^{\infty} (1 - q^r)^{\frac{r(r-1)}{2}}$  .

Merk nu op dat we, gezien het resultaat van opgave 15.3, de  $r$  in de teller ook vanaf 1 in plaats van vanaf 2 mogen nemen. Zo krijgen we

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{\infty} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1 - q^{i+j+k-1}}{1 - q^{i+j+k-2}} &= \frac{\prod_{r=1}^{\infty} (1 - q^r)^{\frac{r(r-1)}{2}}}{\prod_{s=1}^{\infty} (1 - q^s)^{\frac{(s+1)s}{2}}} \\ &= \frac{\prod_{s=1}^{\infty} (1 - q^s)^{\frac{s(s-1)}{2}}}{\prod_{s=1}^{\infty} (1 - q^s)^{\frac{(s+1)s}{2}}} \\ &= \prod_{s=1}^{\infty} (1 - q^s)^{\frac{s(s-1)}{2} - \frac{(s+1)s}{2}} \\ &= \prod_{s=1}^{\infty} (1 - q^s)^{-s} . \end{aligned} \quad (64)$$

**Opgave 15.4. Het delen van producten**

Leg uit waarom 
$$\frac{\prod_{s=1}^{\infty} (1 - q^s)^{\frac{s(s-1)}{2}}}{\prod_{s=1}^{\infty} (1 - q^s)^{\frac{(s+1)s}{2}}} = \prod_{s=1}^{\infty} \frac{(1 - q^s)^{\frac{s(s-1)}{2}}}{(1 - q^s)^{\frac{(s+1)s}{2}}}.$$

En daarmee zijn we uitgekomen op de volgende stelling.

**Stelling 15.2. Telfunctie van 3-d partities**

De telfunctie van 3-d partities is:

$$\prod_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(1 - q^s)^s}. \quad (65)$$

Formule (65) wordt tegenwoordig ook wel de *MacMahon-formule* genoemd.

**Opgave 15.5. De telfunctie van 3-d partities**

Bereken met formule (65) en één van de hulpmiddelen uit paragraaf 9 het aantal mogelijke 3-d partities van 3, 5, 8, 17 en 65.

**Opgave 15.6. De telfunctie van 3-d partities vergeleken met de telfunctie in dozen**

In opdracht 15.1 heb je voor verschillende waarden van  $\ell$ ,  $b$  en  $h$  verschillende uitkomsten gekregen, terwijl in alle drie de voorbeelden  $\ell + b + h = 6$ .

In stelling 15.2 zijn de verschillende waarden voor  $\ell$ ,  $b$  en  $h$  niet meer herkenbaar. Leg uit waarom dit toch klopt en onderbouw dit met wat je in opdracht 15.1 hebt gevonden.

**Opgave 15.7. Samenvatting**

Geef in je eigen woorden een samenvatting van hoofdstuk 15: De telfunctie van 3d-partities.

Wat heb je er van geleerd?

Wat heeft je verbaasd?

**Samenvatting hoofdstuk 15: De telfunctie van 3d-partities**

In dit hoofdstuk zijn we begonnen met een telfunctie voor het aantal 3-d partities, die passen in een doos met een zekere omvang. Met deze telfunctie zijn we verder gaan rekenen om de omvang van de doos te generaliseren. Via het begrip driehoeksgetal zijn we uiteindelijk terecht gekomen op de MacMahon formule: de telfunctie van 3-d partities, die ons antwoord kan geven op de vraag uit de inleiding, zo'n honderd pagina's geleden.

## 16 Slotopdrachten

Voor de afronding van de lessen reeks *Combinatoriek en Partities* is het de bedoeling dat jullie in groepjes van twee een werkstuk maken over één van de onderwerpen die in dit hoofdstuk staan. Kies uit deze onderwerpen één die jullie aanspreekt en ga er mee aan de slag. Maak een document waarin jullie verslag doen van wat jullie onderzocht hebben, welke resultaten jullie verkregen hebben en tegen welke moeilijkheden je bent aangelopen. Beschouw de tekst die hier over het onderwerp staat niet als afbakening, maar als inspiratiebron en globale richtinggever.

De komende weken werken jullie aan dit werkstuk en iedere week leveren jullie een tussen-versie in of een document met vragen of overwegingen waar jullie feed-back op willen krijgen. Voor de laatste les bereiden jullie een presentatie voor van 5 à 10 minuten over jullie onderwerp en jullie werkstuk. Tijdens de laatste les houdt ieder tweetal een presentatie en is er gelegenheid elkaar vragen te stellen over het gepresenteerde. Hierna hebben jullie nog één week om het werkstuk definitief te maken.

Het werkstuk dient een omvang te hebben die overeenkomt met 10 à 15 uur werk per persoon. Dit is inclusief de voorbereiding voor de presentatie.

### Slotopdracht 1. 4-dimensionale partities

Denkend aan de manier waarop je 3d-partities kunt noteren in een matrix van niet-negatieve getallen, hoe kun je dan 4-dimensionale partities definiëren? Vind een handige notatie. Zijn er meerdere notaties mogelijk? Kun je ze opbouwen uit 3-dimensionale? Zo ja hoe en op welke manieren? Stel dat het getal van zo'n partitie weer de som is van alle getallen die voorkomen, hoeveel 4d-partities zijn er dan voor kleine getallen  $n$ ?

### Slotopdracht 2. Priempartities

In plaats van naar gewone partities te kijken, kunnen we ons ook afvragen op hoeveel manieren een getal te schrijven is als som van priemgetallen. We noemen dit een priempartitie. Wat is de bijbehorende telfunctie? Bereken eens voor kleine waarden van  $n$  het aantal priem-partities. Gebruik de methode van Euler uit Hoofdstuk 11 om recursief het aantal priempartities te bepalen. Kijk ook eens naar strikte priempartities.

### Slotopdracht 3. Gekleurde partities

We kunnen in plaats van naar gewone partities ook kijken naar partities waarbij we getallen kleuren geven. Bijvoorbeeld twee kleuren. Hierbij kan een getal bijvoorbeeld de kleuren zwart of rood hebben. Op hoeveel manieren kun je dan een getal  $n$  schrijven in dit soort gekleurde getallen? Het getal 3 is te schrijven als

$$3 = \mathbf{3} = 2 + 1 = 2 + \mathbf{1} = \mathbf{2} + 1 = \mathbf{2} + \mathbf{1} = 1 + 1 + 1 = \mathbf{1} + 1 + 1 = \mathbf{1} + \mathbf{1} + 1 = \mathbf{1} + \mathbf{1} + \mathbf{1}.$$

Dus op 10 verschillende manieren. Onderzoek dit soort partities, ook voor meerdere kleuren. Is er een Frobenius notatie mogelijk? Een frequentienotatie? Wat is de telfunctie voor dit soort partities? Wat is de telfunctie voor dit soort strikte partities? Wat is strikt hier? Kan men de methode van Euler toepassen? Etc. etc.

### Slotopdracht 4. $n$ -gonale getallen

We zijn zogenaamde pentagonale getallen en driehoeksgetallen tegengekomen. Zie de Figuren 73 en 108. Hetzelfde kun je ook doen voor een willekeurige  $n$ -gon. Welke getallen krijg je zo? Probeer een algemene formule te vinden voor de  $n$ -gonale getallen.

Drie-dimensionaal zijn er 5 regelmatige veelvlakken, de Platonische lichamen. Ze zijn ontdekt door de Griekse filosoof en wiskundige Plato, die leefde van ± 428 - 347 v.Chr. Eén van deze lichamen is de kubus. Net als bij de pentagonale en driehoeksgetallen kun je de zijanten steeds groter laten worden en tellen hoeveel punten er in zo'n kubus liggen. Tel het aantal punten en stel een formule op. Zoek op Wikipedia de Platonische lichamen op. Kun je hetzelfde doen voor de andere Platonische lichamen?

## Slotopdracht 5. Mayavlakvulling

In paragraaf 6 hebben we gezien dat we elke 3d-partitie kunnen schrijven als een oneindige rij van eerst toenemende en dan afnemende 2d-partities

$$\dots \preceq \lambda^{(-2)} \preceq \lambda^{(-1)} \preceq \lambda^{(0)} \succeq \lambda^{(1)} \succeq \lambda^{(2)} \succeq \dots$$

Hierbij hanteren we het symbool  $\lambda^{(i)} \preceq \lambda^{(j)}$  om aan te duiden dat partitie  $\lambda^{(i)}$  kleiner dan of gelijk aan partitie  $\lambda^{(j)}$  is. Dit betekent niet alleen dat het getal van partitie  $\lambda^{(i)}$  kleiner dan of gelijk aan het getal van partitie  $\lambda^{(j)}$  is. Maar ook dat voor elke  $k \geq 1$  geldt dat  $\lambda_k^{(i)} \leq \lambda_k^{(j)}$ .

Nu kunnen we elke 2d-partitie  $\lambda^{(j)}$  laten corresponderen met een Mayadiagram van gewicht  $j$ , dat in hoofdstuk 13 gedefinieerd is. Als we nu deze Mayadiagrammen onder elkaar plakken krijgen we een opvulling van het vlak in hokjes die een bal kunnen bevatten of leeg zijn. Dit noemen we Mayavlakvulling. De linkerkant is altijd leeg en de rechterkant is altijd vol. Bestudeer dit verschijnsel en bepaal voor een aantal 3d-partities de Mayavlakvullingen. Wat gebeurt er als je voor alle  $\lambda^{(j)}$  een Mayadiagram neemt van gewicht 0? Is er een connectie met de niet snijdende paden?

## Slotopdracht 6. Bewijzen met Ferrers-diagrammen

In paragraaf 10.2 heb je met bewerkingen op Ferrersdiagrammen aangetoond dat het aantal zelf-geconjugeerde partities van  $n$  gelijk is aan het aantal strikte partities van  $n$  in oneven getallen. Probeer door een bewerking op de mogelijke Ferrersdiagrammen te maken het volgende aan te tonen:

- Het aantal partities van  $n$  in niet meer dan  $k$  getallen is gelijk aan het aantal partities van  $n$  in getallen kleiner of gelijk aan  $k$ .
- Het aantal partities van  $n$  in niet meer dan  $k$  getallen is gelijk aan het aantal partities van  $n + k$  in precies  $k$  getallen.
- Het aantal strikte partities van  $n$  in  $k$  oneven getallen is gelijk aan het aantal partities van  $n - k^2$  in niet meer dan  $k$  even getallen.
- Het aantal partities van  $n$  in getallen, waarvan  $k$  het grootste getal is, is gelijk aan het aantal partities van  $n - k$  in getallen kleiner dan of gelijk aan  $k$ .

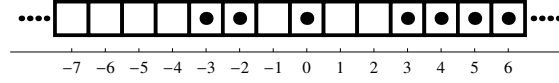
Probeer dit ook te bewijzen door te kijken naar hun telfuncties. Zijn er nog meer identiteiten die je door operaties op Ferrers-diagrammen kunt bewijzen? Bijvoorbeeld dat het aantal partities van  $n$  in oneven getallen gelijk is aan het aantal strikte partities van  $n$  (lastig).

## Slotopdracht 7. Mayadiagrammen en bewegende ballen

Neem het Mayadiagram van gewicht 0 dat correspondeert met de lege partitie. We gaan nu een bewegingsproces beschrijven. Op tijdstip 0 starten we met dit Mayadiagram. Er zitten ballen in de dozen  $0, 1, 2, \dots$  en alle negatieve dozen zijn leeg. Elke minuut slaat de klok en wordt willekeurig één bal exact één doos naar links of naar rechts geplaatst. Let op: een doos mag maar hoogstens één bal bevatten, dus een bal die verplaatst wordt moet wel een buurdoos hebben die leeg is. Elke bal, die een lege buurdoos heeft, heeft even grote kans om verplaatst te worden.

Voer dit proces uit voor een aantal stappen/minuten. Maak een boom van de mogelijkheden. Kijk welke configuraties optreden na  $n$  stappen. We nemen eerst aan dat naar links stappen dezelfde kans heeft als naar rechts stappen. Kijk welke configuratie voor  $n = 1, 2, 3, \dots$  het meest voorkomt.

Wat gebeurt er als je andere kanswaarden toekent aan het naar links en naar rechts stappen? Bijvoorbeeld dat de kans om naar links te stappen twee keer zo groot is dan de kans om naar rechts te stappen. Welke configuratie zal het dan winnen? Bekijk ook eens andere kansen  $p$  naar rechts en  $1 - p$  naar links. Bestudeer dit proces.



Figuur 109: Een voorbeeld van een Mayadiagram na enkele stappen

Bijvoorbeeld in figuur 109 zie je een situatie met twee gaten. Vanuit deze situatie zijn 5 bewegingen mogelijk. De ballen  $-3$ ,  $0$  en  $3$  kunnen een beweging naar links maken en de ballen  $-2$  en  $0$  kunnen een beweging naar rechts maken. Stel de kans waarden zijn  $\frac{2}{3}$  voor een beweging naar links en  $\frac{1}{3}$  voor een beweging naar rechts. Dan zijn we er nog niet. Want in deze situatie zijn er 5 mogelijkheden waarvoor we de kansen moeten normeren zodat de som 1 is. Maar de verhouding tussen de kansen voor bewegingen naar links of naar rechts is wel  $2 : 1$ . Als we de gegeven kansen zomaar optellen komen we tot  $3 \times \frac{2}{3} + 2 \times \frac{1}{3} = \frac{8}{3}$ . Om dus ook in deze situatie kansen toe te delen die sommeren tot 1 moeten we de kansen delen door  $\frac{8}{3}$ .

Dus de ballen  $-3$ ,  $0$  en  $3$  kunnen een beweging naar links maken met elk een kans  $\frac{2}{8}$  en de ballen  $-2$  en  $0$  kunnen een beweging naar rechts maken met elk een kans  $\frac{1}{8}$ .

Onderzoek nog meer verschillende situaties, zoals de begin situatie, een situatie met één gat, een situatie met meerdere gaten, een situatie met een lange aaneengesloten rij leeg ergens tussen ballen. Beschrijf in deze situaties welke verplaats bewegingen er mogelijk zijn en welke kans elk van die beweging heeft. Doe dit voor concrete waarden voor de kansverdeling tussen een beweging naar links of naar rechts. Maar doe het ook bij kansen  $p$  naar rechts en  $1 - p$  naar links. Welke variabele moet je hierbij mogelijk nog meer introduceren?

Vertaal het proces naar 2-d partities. Zowel de handelingen van een bal naar links of naar rechts verplaatsen, als de configuraties met een grote kans.

## Slotopdracht 8. De methode van Euler voor 3d-partities

In hoofdstuk 11 hebben we een recursieve formule afgeleid voor de gewone partities. Probeer hetzelfde te doen voor de 3d-partities.

Bedenk dat de telfunctie van 3d-partities  $\sum_{i \geq 0} P(i)q^i$  gegeven wordt de MacMahon formule (65):

$$\sum_{i=0}^{\infty} P(i)q^i = \prod_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(1 - q^s)^s}.$$

Als we deze telfunctie nu vermenigvuldigen met

$$\prod_{j=1}^n (1 - q^j)^j, \quad (66)$$

dan krijgen we

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^n (1 - q^j)^j \sum_{i=0}^{\infty} P(i)q^i &= \prod_{j=1}^n (1 - q^j)^j \prod_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(1 - q^s)^s} \\ &= \prod_{s=n+1}^{\infty} \frac{1}{(1 - q^s)^s}. \end{aligned} \quad (67)$$

De rechterkant van (67) bevat geen term met  $q^k$  voor  $k = 1, 2, \dots, n$ . Dus de linkerkant bevat deze termen ook niet.

Bereken voor kleine waarden van  $n$  de formule (66) en gebruik deze om met behulp van (67) een recursieve formule af te leiden voor de  $P(i)$ -en.

Gebruik deze formules om een aantal  $P(i)$ -en te berekenen.

## Slotopdracht 9. Partities in de getallen 1, 2 en 3

We willen het aantal partities vinden van het getal  $n$  in de getallen 1, 2, en 3.

**9.a.** Onderzoek het aantal partities van het getal  $n$  als we alleen het getal 1 gebruiken.

**9.b.** Vind een formule voor het aantal partities van het getal  $n$  als we alleen de getallen 1 en 2 gebruiken.

**9.c.** Bewijs door de formule (30) voor de meetkundige reeks  $p$  keer te differentiëren dat

$$\frac{1}{(1-q)^{p+1}} = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{j+p}{p} q^j.$$

**9.d.** Ga na dat het aantal partities van het getal  $n$  in de getallen 1, 2, en 3 gelijk is aan de coëfficiënt in de reeks

$$\frac{1}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)}.$$

**9.e.** Bereken de eerste 5 termen van de bijbehorende reeks.

**9.f.** (Lastig) Vind getallen  $a$ ,  $b$ ,  $c$  en  $d$  zodat:

$$\frac{1}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)} = \frac{a}{(1-q)^3} + \frac{b}{(1-q)^2} + \frac{c}{(1-q^2)} + \frac{d}{(1-q^3)}.$$

*Hint: Gebruik kruislings-vermenigvuldiging om de breuken weg te werken. Vermenigvuldig alles uit en kijk naar de coëfficiënten voor de machten van  $q$  en bepaal daaruit  $a$ ,  $b$ ,  $c$  en  $d$ .*

**9.g.** Gebruik de meetkundige reeks en de resultaten uit de voorafgaande opgaven om

$$\frac{a}{(1-q)^3}, \quad \frac{b}{(1-q)^2}, \quad \frac{c}{(1-q^2)}, \quad \frac{d}{(1-q^3)}$$

te schrijven als reeksontwikkeling.

Bepaal hiermee expliciet de coëfficiënten voor de machten van  $q$  in

$$\frac{1}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)}.$$

**9.h.** Toon nu aan dat het aantal partities van het getal  $n$  in de getallen 1, 2, en 3 gelijk is aan het gehele getal dat het dichtst ligt bij  $\frac{(n+3)^2}{12}$ .

## Slotopdracht 10. Andere rastermodellen

Naast het ijsmodel, dat in de literatuur het “six vertex model” heet, bestaat er nog een ander model dat het “eight vertex model” heet. We gebruiken daarbij hetzelfde raster als we voor het ijsmodel hebben.

We laten echter toe dat er 0, 2 of 4 pijlen naar een rasterpunt toe wijzen in plaats van slechts 2 pijlen.

Ga na dat je zo 8 mogelijke pijl-configuraties krijgt. Kijk voor kleine  $n$  hoeveel mogelijke configuraties je hebt als je dezelfde randvoorwaarden als voor het ijsmodel oplegt.

We kunnen nu ook een ander model bekijken. Ga uit van een 2-dimensionaal raster dat opgebouwd is uit gelijkzijdige driehoeken. Elk rasterpunt heeft 6 verbindingslijnen naar een ander rasterpunt. Laten we nu aannemen dat naar elk rasterpunt 3 pijlen toewijzen en 3 er vandaan. Onderzoek hoeveel mogelijke pijl-configuraties je per rasterpunt kunt hebben.

Maak gelijkzijdige driehoeken van grootte  $n$  deze zijn opgebouwd uit  $n^2$  kleine driehoeken van grootte 1. Leg eens wat randvoorwaarden op en onderzoek voor kleine  $n$  hoeveel mogelijkheden er zijn.

Doe nu hetzelfde voor een hexagon. Een hexagon van grootte 1 bestaat uit 6 regelmatige driehoeken. Van grootte 2 uit 24 van grootte  $n$  uit  $6 \times n^2$  van dit soort driehoeken. Leg opnieuw randvoorwaarden op en onderzoek voor kleine  $n$  hoeveel mogelijkheden er zijn.

Bouw een raster op uit alleen maar hexagons en doe hierbij hetzelfde.

Onderzoek ook 3-dimensionale rasters met kubussen of met tetraëders. Beschrijf mogelijke voorwaarden op de rasterpunten en op de randen en onderzoek de mogelijkheden.

## Slotopdracht 11. Telfuncties voor Mayadiagrammen over energie heen

In paragraaf 13.2 hebben we gerekend aan de energie van Mayadiagrammen van *gewicht*  $m$ . Als we hier mee verder werken, krijgen we dat de telfunctie van het aantal Mayadiagrammen van vast gewicht  $m$  waarbij we de energie tellen gelijk is aan

$$q^{\frac{1}{2}m(m-1)} \sum_{n=0}^{\infty} p(n)q^n = q^{\frac{1}{2}m(m-1)} \prod_{j=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^j}.$$

Als we nu dit alles willen combineren, dus alle Mayadiagrammen willen tellen dan kunnen we dit doen door een extra variabele in te voeren die ook het gewicht telt. We nemen hiervoor de variabele  $t$ . De macht van  $t$  geeft het gewicht van het Mayadiagram aan en de macht van  $q$  de *Energie*. De telfunctie die alle Mayadiagrammen telt, is dus gelijk aan

$$\begin{aligned} \sum_{m=-\infty}^{\infty} t^m \times (\text{de telfunctie van Mayadiagrammen van gewicht } m) = \\ \sum_{m=-\infty}^{\infty} t^m q^{\frac{1}{2}m(m-1)} \sum_{n=0}^{\infty} p(n)q^n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} t^m q^{\frac{1}{2}m(m-1)} \prod_{j=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^j} \end{aligned} \quad (68)$$

We kunnen deze telformule ook anders beschrijven. We gaan uit van het lege Mayadiagram van gewicht 0 zoals gegeven in figuur 81. We krijgen nu alle mogelijke toestandsconfiguraties van Mayadiagrammen door eindig veel ballen in negatieve dozen te plaatsen en eindig veel ballen weg te halen uit dozen met index  $j \geq 0$ . Een bal plaatsen in een doos met index  $-j < 0$  verlaagt het *gewicht* met 1 en verhoogt de *Energie* met  $j$ . Een bal weghalen uit doos  $i$  met  $i \geq 0$  verhoogt het *gewicht* met 1 en verhoogt de *Energie* met  $i$ .

De term *energie* die we hier gebruiken betekent dat je echt werk moet verzetten. Als je met een steen  $j$  stappen zet, dan kost dat energie  $j$ . Voor het weghalen of het bijplaatsen kun je de energie verklaren doordat de deur bij positie 0 zit. Wil je een steen uit een doos met index  $i \geq 0$  weghalen, dan moet je er eerst  $i$  stappen mee lopen naar positie 0 en dan pas kun je de deur uit. Wil je een steen bijplaatsen in een doos met index  $-j < 0$ , dan moet je via de deur bij 0 naar binnen, en dan nog  $j$  stappen lopen.

We kunnen een toestand dus vergelijken met het Mayadiagram van figuur 81. Als we ons dus concentreren op één negatieve doos met index  $-j$  dan zijn daar twee mogelijkheden.

- (1) er is geen bal aanwezig dan verhoogt deze doos het *gewicht* en *Energie* van deze toestand t.o.v. het Mayadiagram van figuur 81 niet;
- (2) als er wel een bal aanwezig is dan wordt het *gewicht* 1 kleiner en de *Energie*  $j$  groter dan het Mayadiagram van figuur 81.

Als we het Mayadiagram van figuur 81 tellen als  $t^0 q^0$ , dus als  $t^0 q^0 = 1$ , dan correspondeert het wel of niet aanwezig zijn van een bal in deze doos met

$$(1 + t^{-1}q^j)t^0 q^0 = (1 + t^{-1}q^j).$$

Namelijk 1 correspondeert met geen bal en  $t^{-1}q^j$  met een bal in doos  $-j$ . Omdat we dit voor elke negatieve doos  $-j$  kunnen doen correspondeert het wel of aanwezig zijn van bal in de negatieve dozen met

$$t^0 q^0 \prod_{j=1}^{\infty} (1 + t^{-1}q^j) = \prod_{j=1}^{\infty} (1 + t^{-1}q^j).$$

**11.a.** Beschrijf op vergelijkbare wijze de mogelijkheden voor een doos met niet-negatieve index  $i \geq 0$ . Toon aan dat we voor het wel of niet aanwezig zijn van ballen in niet-negatieve dozen uitkomen op

$$t^0 q^0 \prod_{i=0}^{\infty} (1 + tq^i) = \prod_{i=0}^{\infty} (1 + tq^i).$$

Combineren we dit nu en bekijken we alle dozen dan krijgen we dus dat de telfunctie van alle Mayadiagrammen dus gelijk moet zijn aan

$$t^0 q^0 \prod_{j=1}^{\infty} (1 + t^{-1} q^j) \prod_{i=0}^{\infty} (1 + tq^i) = \prod_{j=1}^{\infty} (1 + t^{-1} q^j) \prod_{i=0}^{\infty} (1 + tq^i). \quad (69)$$

**11.b.** Beschrijf de afleiding van deze telfunctie in andere woorden. Onderzoek het gedrag van deze telfunctie aan de hand van enkele voorbeelden.

Als we nu (68) en (69) combineren krijgen we de volgende identiteit:

$$\prod_{j=1}^{\infty} (1 + t^{-1} q^j) \prod_{i=0}^{\infty} (1 + tq^i) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} t^m q^{\frac{1}{2}m(m-1)} \prod_{j=1}^{\infty} \frac{1}{1 - q^j} \quad (70)$$

We kunnen deze nog wat herschrijven en krijgen zo een vorm van een identiteit die bekend staat als de Jacobi-tripel-product identiteit:

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1 - q^k) \prod_{j=1}^{\infty} (1 + t^{-1} q^j) \prod_{i=0}^{\infty} (1 + tq^i) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} t^m q^{\frac{1}{2}m(m-1)} \quad (71)$$

**11.c.** We zien dat als we in (70) de coefficient van  $t^0$  nemen dat rechts de telfunctie van alle partities staat. De linkerkant lijkt op het product van twee telfuncties van strikte partities. We hebben in paragraaf 4.3 de Frobenius notatie geïntroduceerd en in opdracht 10.3 e gezien dat je een partitie ook anders kunt noteren namelijk als twee strikte partities, waar we ook 0 toelaten. In opdracht 13.2 b heb je Frobenius notaties vertaald naar Mayadiagrammen. Kun je uit deze observatie de rechterkant van (70) verklaren? Denk hierbij aan hoe je in de Frobenius notatie het getal van de partitie opbouwt. Het helpt hierbij om (70) iets anders te schrijven namelijk als:

$$\prod_{i=0}^{\infty} (1 + t^{-1} q^{i+1}) (1 + tq^i) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} t^m q^{\frac{1}{2}m(m-1)} \prod_{j=1}^{\infty} \frac{1}{1 - q^j}.$$

**11.d.** Vaak vind je in de literatuur de Jacobi-tripel-product identiteit (71) geformuleerd als

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^{2n})(1 + x^{2n-1} z^2) \left(1 + \frac{x^{2n-1}}{z^2}\right) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x^{m^2} z^{2m} \quad (72)$$

Leid (72) uit (71) af. Hint: druk  $q$  en  $t$  uit in  $x$  en  $z$ .

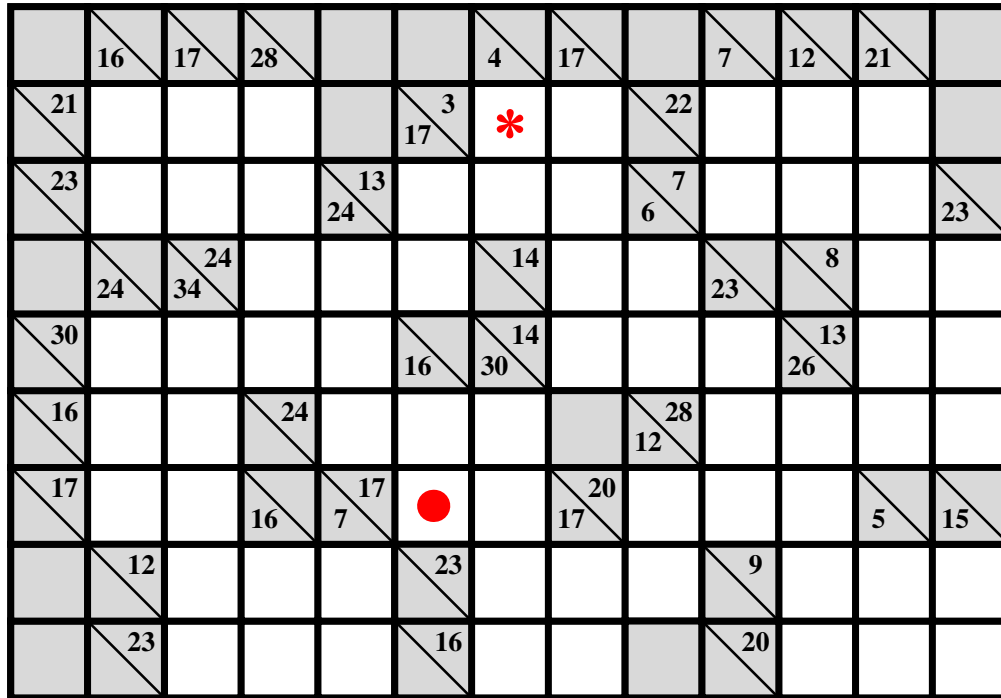
## Slotopdracht 12. Kakuro en strikte partities

Naast de immens populaire Sudoku puzzels zijn er de afgelopen jaren in de dagbladen veel puzzelsoorten bij gekomen waar met getallen gewerkt mag worden. Een voorbeeld hiervan is de Kakuro. Hier mag in ieder verticaal of horizontaal rijtje aaneengesloten witte vakjes cijfers ingevuld worden. Hiervoor kan gebruik gemaakt worden van de cijfers 1 tot en met 9. Per verticaal of horizontaal rijtje moeten altijd verschillende cijfers gebruikt worden. In de grijze vakjes staat rechts boven de diagonaal de som van het horizontale rijtje witte vakjes er rechts van. In de grijze vakjes staat links onder de diagonaal de som van het verticale rijtje witte vakjes er onder. In figuur 110 zie je een voorbeeld van een Kakuro.

Doordat het hier gaat om het optellen van enkele getallen tot een vooraf gegeven som hebben we het dus eigenlijk over partities. Maar dan wel partities waarbij ook het aantal delen vooraf vastligt. Bovendien is gegeven dat per rijtje de getallen verschillend moeten zijn, dus gaat het hier om strikte partities. (zie ook definitie 7.1).

Voor het oplossen van deze puzzels is een veelbelovende strategie om op zoek te gaan naar strikte partities die, gegeven het aantal delen, maar één oplossing kennen. Als je twee van zulke partities slim kunt combineren levert dit mogelijk een getal op wat je kunt plaatsen.

In het voorbeeld van figuur 110 zie je bijvoorbeeld dat het witte vakje met het rode sterretje onderdeel is van een verticaal rijtje van twee vakjes dat moet optellen tot 4 en onderdeel van een horizontaal rijtje van twee vakjes dat mag



Figuur 110: Een voorbeeld van een Kakuro puzzel van Jan Meulendijks in de Volkskrant van november 2010

optellen tot 3. Een strikte partitie bestaande uit twee delen met als som 3 kent maar één oplossing, namelijk  $\lambda = (2, 1)$ . Een strikte partitie bestaande uit twee delen met als som 4 kent ook maar één oplossing, namelijk  $\lambda = (3, 1)$ . Het vakje met het rode sterretje is onderdeel van deze twee partities, dus het enige getal dat hier geplaatst kan worden is 1.

**12.a.** *Op vergelijkbare wijze kun je bepalen welk getal mag komen in het vakje met de rode bol. Doe dit, en beschrijf hoe je te werk bent gegaan.*

**12.b.** *Hoe lang kan een aaneengesloten rijtje witte vierkantjes maximaal zijn?*

**12.c.** *Maak een tel formule die voor alle mogelijke sommen in een kakuro telt hoeveel mogelijkheden er zijn om zo'n som te maken.*

**12.d.** *Breidt deze tel formule uit zodat je ook rekening houdt met het aantal witte vierkantjes van een som.*

**12.e.** *Bepaal met de zojuist gevonden formule een overzicht van alle sommen die in combinatie met het aantal vierkanten een unieke partitie kennen.*

**12.f.** *Maak een puzzelvariant op de Kakuro, beschrijf deze, maak de bijbehorende tel formule en geef ook hiervan de lijst van sommen met unieke partities.*

### Slotopdracht 13. *Matrices van afwisselend teken en zijn variaties*

In hoofdstuk 14 worden diverse verschillende zaken beschreven die in elkaar vertaald kunnen worden. Matrix van afwisselend teken, ijsmodel met randvoorwaarden, drie kleuren schaakbord met randvoorwaarden, termen in de Dodgson determinant berekeningsmethode en monotone driehoek.

Onderzoek minstens drie van deze zaken grondig en maak enkele van de hierbij gegeven opgaven. Geef enkele voorbeelden en vertaal ze in alle drie. Beschrijf het vertaalproces.

Beschrijf op welke manier je zou zoeken naar een nog niet in dit dictaat genoemd wiskundig object dat je ook zou kunnen vertalen naar een matrix van afwisselend teken.

### Slotopdracht 14. *De formule voor het aantal matrices van afwisselend teken*

Lees hoofdstuk 14 en besteed vooral aandacht aan de paragrafen 14.5 en 14.6. Maak de opgaven in deze paragrafen. Beschrijf enkele van de stappen in de afleiding van paragraaf 14.6 en beargumenteer waarom de stappen gezet worden en dat ze kloppen. Betrek hierbij ook de bronnen [3] en [4].

### Slotopdracht 15. *Matrices van afwisselend teken en totaal symmetrische zelf complementaire 3-d partities*

In opgave 14.15 wordt een vraag voorgelegd, waarop het antwoord onbekend is. Ga aan de slag met deze vraag en kijk hoever je komt. Probeer een vertaling te construeren tussen matrices van afwisselend teken en totaal symmetrische zelf complementaire 3-d partities.

### Slotopdracht 16. *Fibonacci en de gevlekte bosuil*

In hoofdstuk 12 leiden we voor de rij van Fibonacci een genererende functie af.

**16.a.** *Maak de opgaven in deze paragraaf en beschrijf de afleiding.*

Deze afleiding begint met de getallen 1 en 1. De rij van Fibonacci begint men ook vaak met de getallen 0 en 1. Tellen we die twee bij elkaar op, dan komen we weer uit op 1, dus de rij zal er verder hetzelfde uit zien, maar hij is één positie opgeschoven, omdat er vooraan een 0 is bij gekomen.

**16.b.** *Onderzoek hoe de genererende functie er dan uit gaat zien en welke uitdrukking er uitkomt als je de berekeningen uitvoert tot aan de formule in opgave 12.4 e.*

De Fibonacci reeks maakt gebruik van recursie, namelijk  $p(n) = p(n-1) + p(n-2)$ . Zulke recursieve formules kom je regelmatig tegen in de wiskunde en in allerlei wiskundige modellen. Bijvoorbeeld vind je soortgelijke formules in de populatie-biologie. We geven hier het beroemde voorbeeld van de gevlekte bosuil (zie figuur 111) in California. Zo'n 30 jaar geleden was er een dispuut over het kappen van oude bomen, waar de gevlekte bosuil graag in nestelt, en het hierdoor met uitsterven bedreigd worden van deze bosuil. Aan de andere kant van het spectrum was het werkgelegenheidsargument, dat veel banen verloren zouden gaan als het kappen niet meer zou mogen. In die periode is de populatie grondig onderzocht en wiskundig gemodelleerd (beschreven in [8] pagina 301 en 302).



Figuur 111: De gevlekte bosuil (*Strix occidentalis*) afbeelding afkomstig uit [17]

De populatie bestaat uit volwassen uilen. De volwassenen kunnen jonge uilen krijgen. Na een jaar zijn deze jonge uilen “puber uilen” geworden. Deze puber uilen kunnen nog geen jongen krijgen, maar zoeken al wel een partner uit aan wie ze de rest van hun leven trouw blijven. De puber uilen zijn na een jaar volwassen uilen, en vanaf dan kunnen ze mee doen aan het krijgen van jongen. Er is globaal gesproken een gelijke verhouding tussen mannen en vrouwen. Voor het gemak tellen we nu alleen de vrouwen, mede ook door de levenslange trouw van de uilen.

Elk jaar krijgt 33% van de vrouwen een dochter. Elk jaar overleeft 18% van de dochters het om puber-meid te worden. Elk jaar overleeft 71% van de puber-meiden het om volwassen vrouw te worden. En tot slot overleeft elk jaar 94% van de vrouwen het om het jaar er op er nog steeds te zijn als vrouw.

**16.c.** *Onderzoek de ontwikkeling van de populatie voor enkele jaren met een beginstand van 100 gevlekte bosuilen.*

**16.d.** *Formuleer formules om de drie levensfasen te berekenen uit de populatie het jaar ervoor.*

**16.e.** *Formuleer een recursieve formule om het aantal volwassen vrouwen in een jaar te berekenen uit de gegevens van het aantal volwassen vrouwen van de jaren ervoor.*

**16.f.** *Onderzoek of je uitspraken kunt doen over een start populatie die zich veelbelovend ontwikkeld en over een startpopulatie die zich zorgwekkend ontwikkeld, als een dergelijk verschil aanwezig is.*

**16.g.** *Maak voor een gegeven startpopulatie een genererende functie voor het aantal volwassen vrouwen in jaar  $n$ . Probeer dit eventueel ook voor een variabele startpopulatie. Probeer hiermee een uitspraak te doen over grenzen tussen veelbelovende of zorgwekkende startpopulaties.*

**16.h.** *Varieer de overlevingskansen (de 18, 71 en 94 %), het geboortepercentage (de 33 %) en de begin populatie en probeer aan de hand van de genererende functie uitspraken te doen over de levensvatbaarheid van de uilenpopulatie. Dat wil zeggen zullen de uilen overleven of uitsterven? Je kunt dit doen door  $p(n)$  te berekenen voor  $n$  groot.*

## Referenties

- [1] George E. Andrews, Kimmo Eriksson  
*Integer partitions*  
2004, Cambridge University Press, Cambridge
- [2] Pavel M. Bleher, Vladimir V. Fokin  
*Exact solution of the six-vertex model with domain wall boundary conditions. Disordered phase*  
2006, arXiv:math-ph/0510033v3  
2006, Communications in Mathematical Physics, Vol 268, nr 1, pp 223 - 284
- [3] David Bressoud  
*The Art of Counting*  
2006, Eigen beheer, via <http://www.macalester.edu/~bressoud>, geraadpleegd op 10 december 2009
- [4] David Bressoud  
*Proofs & Confirmations. The story of the alternating sign matrix conjecture*  
2009, Eigen beheer, slides bij diverse lezingen in 2009 over gelijknamig boek. Via <http://www.macalester.edu/~bressoud>, geraadpleegd op 10 december 2009
- [5] M.O. Elout, W.J.A. Maaskant  
*A First-Order Phase Transition in a Three-Dimensional Vertex Model*  
1995, Journal of Statistical Physics, Vol. 80, nr 3/4, pp 919 - 927
- [6] Andrew N.W. Hone  
*Dodgson condensation, alternating signs and square ice*  
2006, Philosophical Transactions of the Royal Society A, Vol. 364, nr 1849, pp 3183 - 3198
- [7] Richard Kenyon  
*Dimer Problems*  
pp 61 - 67 in  
*Encyclopedia of Mathematical Physics*  
Editors: Jean-Pierre Francoise, Gregory L. Naber, Tsou Sheung Tsun  
2006, Academic Press, Oxford
- [8] David C. Lay  
*Linear Algebra and its applications*  
2003, Addison Wesley, Boston
- [9] P.W.H. Lemmens, T.A. Springer  
*Hoofdstukken uit de Combinatoriek*  
1992, Epsilon Uitgaven, Utrecht
- [10] J.H. van Lint, J.W. Nienhuys  
*Discrete Wiskunde*  
1991, Academic Service, Schoonhoven
- [11] Doeschka Meijsing  
*Over de Liefde*  
2008, Uitgeverij Querido, Amsterdam
- [12] Vicente Muñoz, Ulf Persson  
*Interviews with Three Fields Medalists*  
2007, Notices of the American Mathematical Society, Vol. 54, nr 3, pp 405 - 410
- [13] Andrei Okounkov, Nikolai Reshetikhin  
*Correlation function of Schur Process with application to local geometry of a random 3-dimensional Young Diagram*  
2003, Journal of the American Mathematical Society, Vol 16, nr 3, pp 581 - 603

- [14] Andrei Okounkov, Nikolai Reshetikhin, Cumrun Vafa  
*Quantum Calabi-Yau and Classical Crystals*  
 pp 597 - 618 in  
*The Unity of Mathematics*  
 Editors: Pavel Etingof, Vladimir Retakh, I.M. Singer  
 2006, Birkhäuser, Boston
- [15] Hjalmar Rosengren  
*The Three-Colour model with domain wall boundary conditions*  
 2009, arXiv:0911.0561v1
- [16] diverse auteurs  
*History of Mathematics archive*  
 Website van de School of Mathematics van de University of St. Andrews Scotland  
 Website gecreëerd door John J. O'Conner en Edmund F. Robertson  
<http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/index.html> geraadpleegd op diverse momenten in 2009 en 2010.
- [17] diverse auteurs  
*Wikipedia*  
<http://www.wikipedia.nl> geraadpleegd op diverse momenten in 2009 en 2010.

## Index

$\binom{n}{k}$ , 34  
 $\infty$ , 59  
 $\lambda$ -notatie, 17  
 $\lim$ , 59  
 $\prod$ , 38  
 $\sum$ , 17  
 $c_{n,k}$ , 32  
 $k$  uit  $n$ , 34  
 $n$  boven  $k$ , 34  
2-d deelpartitie, 25  
    evenwijdig aan de diagonaal, 26  
    evenwijdig aan de linker zijwand, 26  
    evenwijdig aan de rechter zijwand, 25  
2-d partitie, 16  
    telfunctie, 62  
3-d partitie, 7  
    opdelen, 25  
    telfunctie, 101  
    totaal symmetrisch zelf-complementair, 46, 97

## A

Andrews, George, 46  
argument, 50, 54

## B

betegeling  
    honingraat, 47  
    ruit, 44  
    hexagon, 47  
bijjectie, 76  
binomiaal-coëfficiënten, 34, 93  
binomium van Newton, 35  
Bressoud, David, 88

## C

Carroll, Lewis, 87  
coëfficiënt, 36  
Coefficient, 52  
combinatoriek, 6  
complement, 9  
computer, 50

## D

determinant, 86  
diagonaalwand, 26  
Diophantische notatie, 22  
Diophantische vergelijking, 21  
Diophantus van Alexandrië, 22  
Dirac, Paul, 80  
Dirac-zee, 81  
Dodgson, Charles, 87  
dominosteen, 71  
drie kleuren schaakbord met randvoorwaarden, 83  
driehoek van Pascal, 32, 93  
driehoeksgetal, 99

## E

electronentoestand, 80  
energie, 78  
Euler, Leonhard, 69  
Expand, 51, 55

## F

Ferrersdiagram, 16  
Fibonacci, 72  
    rij van, 72  
Fields Medal, 4, 5  
frequentie notatie, 23  
Frobenius, Ferdinand, 20  
Frobenius-notatie, 18, 77

## G

geconjugeerde partitie, 16  
Geim, Andre, 48, 49  
genererende functie, 73  
gewicht, 79  
grafeen, 48  
grootte van hexagon, 44

## H

Hardy, Godfrey, ii  
hexagon, 44

grootte van, 44  
 hexagon-betegeling, 47  
 honingraatbetegeling, 47

## I

ijsmodel, 11  
 met randvoorwaarden, 13, 83

## K

Kékule structuur, 48  
 kleuren kiezen, 31  
 koolstofring, 48  
 kwantum mechanica, 80  
 kwantumtoestand, 80

## L

lading, 81  
 limiet, 59  
 lus-theorie, 5

## M

Maclaurinreeks, 52, 57  
 MacMahon, Percy, 98  
 MacMahon-formule, 101  
 Mathematica, 50  
 matrix, 28  
   determinant, 86  
 matrix notatie, 28  
 matrix van afwisselend teken, 82, 82  
 Mayadiagram, 76  
   energie, 78  
   gewicht, 79  
 meetkundige reeks, 61  
 Meijsing, Doeschka, 4  
 modelleren, 6  
 monotone driehoek, 90  
 muntstuk, 63

## N

Newton, binomium van, 35  
 Newton, Isaac, 35  
 niet snijdende paden, 41, 42  
 Nobelprijs, 48

Noord-Zuid, 13, 83  
 notatie  
    $\lambda$ -notatie, 17  
   Diophantische notatie, 22  
   Ferrersdiagram, 16  
   frequentie notatie, 23  
   Frobenius-notatie, 18, 77  
   matrix notatie, 28  
   optel notatie, 18  
   standaard notatie, 17  
 Novoselov, Konstantin, 48  
 numeriek benaderen, 50, 54

## O

Okounkov, Andrei, 5, 5  
 oneindig, 59  
 Oost-West, 13, 83  
 optel notatie, 18  
 optellingen, 17

## P

partitie, 6, 7  
   2-d deelpartitie, 25  
     evenwijdig aan de diagonaal, 26  
     evenwijdig aan de linker zijwand, 26  
     evenwijdig aan de rechter zijwand, 25  
   2-d partitie, 16  
   3-d partitie, 7  
     opdelen, 25  
   geconjugeerde, 16  
   strikt, 37  
   totaal symmetrische zelf-complementaire 3-d parti-  
     tie, 46, 97  
 Pascal, Blaise, 32  
 Pascal, driehoek van, 32, 93  
 Pauli's uitsluitingsprincipe, 80  
 pentagonale getallen, 67  
 Perelman, Grigori, 4  
 permutatie, 86  
 Pisa, Leonardo van, 72  
 Poincaré, vermoeden van, 4  
 product, 38  
 Product, 51, 55

## R

raster, 11

recursieve formule, 67  
restterm, 53, 57  
RheniumOxide model, 15  
rij van Fibonacci, 72  
    telfunctie, 73  
Robbins, David, 46, 97  
roteren van ruitbetegeling, 45  
ruit, 44  
ruitbetegeling, 44  
    roteren, 45  
    spiegelen, 45

## S

schaakbord, drie kleuren met randvoorwaarden, 83  
Schur, Issai, 65  
Series, 52, 57  
SeriesCoefficient, 53  
smeltend kristal, 5  
sommatie, 17  
spiegelen van ruitbetegeling, 45  
standaard notatie, 17  
standaardhoogte, 41  
statistische mechanica, 12  
strikte partitie, 37  
    telfunctie, 59  
Sum, 51, 54

## T

Taylorreeks, 52, 57  
telfunctie, 36, 58  
    2-d partities, 62  
    3-d partities, 101  
    3-d partities in dozen, 98  
    dominostroken, 73  
    drie kleuren schakbord met randvoorwaarden, 96  
    ijsmodel met randvoorwaarden, 96  
    matrix van afwisselend teken, 96  
    monotone driehoek, 96  
    muntstukken, 63  
    partities met elk getal maximaal  $m$  keer, 59  
    rij van Fibonacci, 73  
    strikte partities, 59  
    termen in Dodgson determinant berekening, 96  
    totaal symmetrische zelf-complementaire 3-d partities, 46  
    zelf-geconjugeerde partitie, 60  
totaal symmetrische zelf-complementaire 3-d partitie, 46, 97

## U

uitvouwen, 60

## V

vermenigvuldigingen, 38

## W

watermolecuul, 11  
wiskunde, 6  
Wolfram Alpha, 53

## Z

zelf-geconjugerd, 59  
    telfunctie, 60  
zeshoek, 44

## Sjabloonpagina voor zeshoeken

In paragraaf 8.2 (3-d partities en ruitbetegelingen) en 8.3 (3-d partities en honingraatbetegeling) worden zeshoekige figuren geïntroduceerd, waarmee aardig wat tekenopgaven gemaakt mogen worden. Ter ondersteuning hieraan is een sjabloon pagina opgenomen met stippellijnen die hierbij behulpzaam zouden kunnen zijn. Kopieer deze pagina zo vaak als nodig en leef je uit met de opgaven.

