

Theo Gerkema

NIOZ, Den Burg

theo.gerkema@nioz.nl

Leo Maas

NIOZ, Den Burg

IMAU, Universiteit Utrecht

leo.maas@nioz.nl

# Wiskundige aspecten van interne golven

Het bestaan van golven aan het zeeoppervlak is wel bekend. Van het voorkomen van golfbewegingen onder het oppervlak is men zich vaak veel minder bewust. De amplitudes van deze golfbewegingen kunnen toch behoorlijk groot zijn (tot wel honderd meter). Vanwege hun transport van warmte en impuls, en van zuurstof, plankton en mineralen, zijn interne golven van belang voor de algemene oceaancirculatie en voor de mariene voedselketen. Theo Gerkema en Leo Maas laten aan de hand van een combinatie van fysische en mathematische methoden zien dat deze golven zich heel anders gedragen dan de golven aan het vrije oppervlak. Dit gedrag wordt sterk beïnvloed door de dichtheidsstructuur in de verticale richting en de rotatie van de aarde, en resulteert erin dat interne golven gestuurd worden naar heel bepaalde locaties, in zogenaamde golfaantrekkers.

In het inwendige van de oceaan zijn golfbewegingen alom aanwezig; deze worden *interne golven* genoemd. Ze hebben grote verticale uitwijkingen (orde 10 tot 100 m) en perioden variërend van minuten tot dagen. De terugdrijvende krachten verantwoordelijk voor de golfbewegingen zijn van tweeërlei aard: ten eerste zorgen de verticale dichtheidsverschillen voor een effectieve zwaartekracht; ten tweede geeft de dagelijkse rotatie van de aarde rond haar as aanleiding tot een afbuigende kracht, de zogenaamde corioliskracht.

Deze bepalen niet alleen het bestaan van interne golven, maar ook hun ongebruikelijke wiskundige eigenschappen. Ze maken de wiskundige behandeling weliswaar soms lastig, maar bevatten ook de sleutel tot de ongebruikelijke eigenschappen van de golven zelf. Zo zijn dus de wiskundige en fysische eigenaardigheden nauw verstrengeld. In het hiernavolgende zetten we dit nader uiteen.

## Symmetrie-brekers

Allereerst is het van belang een beeld te krijgen van het medium waarin de interne golven zich voortplanten. Figuur 1a toont een

voorbeeld van de structuur van de temperatuur in de Stille Oceaan, gaande van de Fiji-eilanden (zuidelijk halfrond) tot aan de Beringstraat (noordelijk halfrond). Duidelijk is te zien dat op grotere diepten, vanaf 1000 m onder het oppervlak, de temperatuur tamelijk homogeen is en steeds heel laag (minder dan 5°C), ook in de tropen. Alleen in de bovenste paar honderd meter neemt de temperatuur scherp toe naarmate men dichterbij het oppervlak komt. Een ander voor dit verhaal belangrijk aspect, is het verloop van de diepte. We zien dat de oceaانبodem verre van vlak is, maar vol zit met berggruggen en onderzeese heuvels (die een vulkanische oorsprong hebben). Terwijl dus het temperatuurverloop min of meer beschouwd kan worden als een opeenstapeling van horizontale lagen, breekt de oceaانبodem deze horizontale symmetrie.

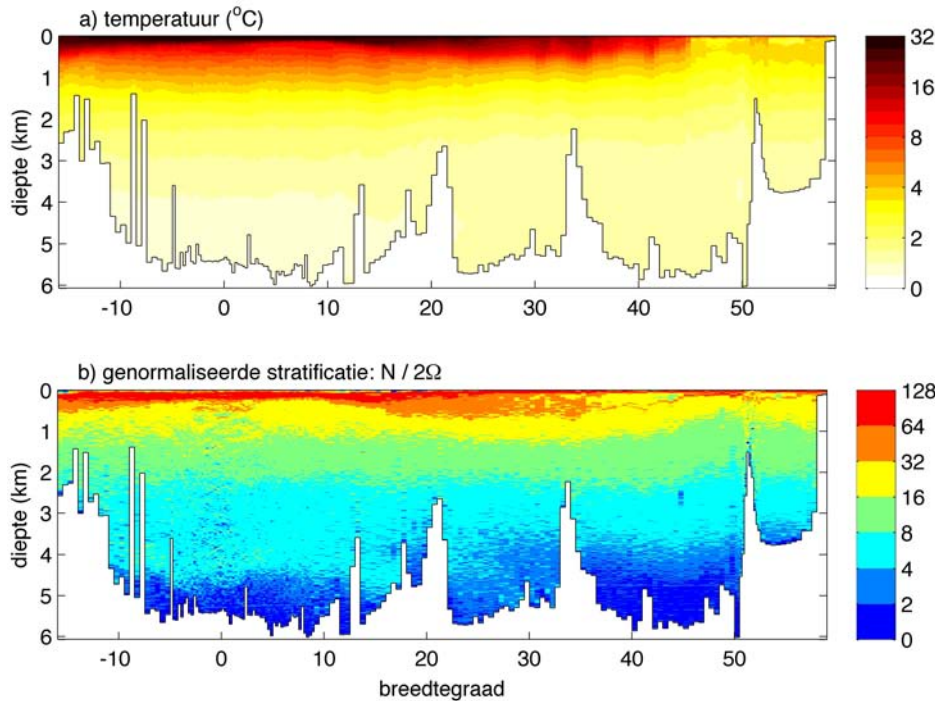
In de oceanografie en meteorologie is het gebruikelijk de verticale gelaagdheid uit te drukken in termen van de zogenaamde Brunt-Väisälä-frequentie (stabiliteitsfrequentie)  $N$ , hierna kortweg aangeduid als BV-frequentie. Deze wordt bepaald door de verticale dichtheidsgradiënt; hierbij is de dicht-

heid  $\rho$ , in het geval van oceaanwater, een functie van de toestandsvariabelen temperatuur, zoutgehalte en druk ( $p$ ). De precieze definitie luidt:

$$N^2 = g^2 \left( \frac{d\rho}{dp} - \frac{1}{c_s^2} \right). \quad (1)$$

Hierin is  $g$  de valversnelling en  $c_s$  de geluidssnelheid in zeewater (zelf eveneens een functie van temperatuur, zoutgehalte en druk). Deze laatste term hangt samen met de samen-drukbaarheid van zeewater, en is vooral van belang in de diepere lagen, waar de eerste term (de verticale gradiënt van dichtheid) gering is. De verdeling van  $N$  in de oceaan is te zien in Figuur 1b;  $N$  omspant twee orden van grootte, is gering in de diepere lagen en zeer hoog in de warme dunne bovenlaag.

In Figuur 1b is  $N$  gedeeld door een constante  $2\Omega$ , waarbij  $\Omega = 7.292 \times 10^{-5}$  radialen per seconde, de hoeksnelheid van de aarde (dat wil zeggen:  $2\pi$  gedeeld door de *siderische* dag, 23h 56 min 4s, de tijd waarin zich ten opzichte van de sterren één omwenteling voltrekt). De aardas zelf (zwarte pijl in Figuur 2) breekt lokaal de horizontale symmetrie. Bezien vanuit een positie op een zekere breedte  $\phi$ , is de oriëntatie van de aardas noch loodrecht op, noch parallel aan het aardoppervlak. Deze symmetriebreking manifesteert zich in een van de componenten van de corioliskracht, de kracht die bewegende deeltjes op de roterende aarde doet afbuigen in een richting loodrecht op hun snelheid (voor een nadere uiteenzetting hierover verwijzen we naar [3]).

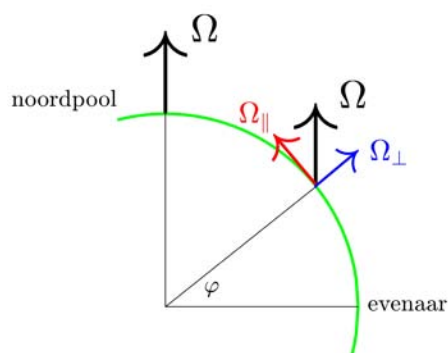


**Figuur 1** Een voorbeeld van de structuur van het inwendige van de oceaan: een zuid-noordsectie in de Stille Oceaan, lopend van de Fiji-eilanden (links) tot de Beringstraat (rechts). In (a), temperatuur; in (b) de geschaalde BV-frequentie, een maat voor de gravitationele stabiliteit van de waterkolom. (Data uit WOCE sectie P14)

De symmetrie in de overwegend horizontale gelaagdheid en de verticale zwaartekracht wordt dus op twee manieren gebroken: door de lokaal ‘dverse’ aardas en door de hellende bodem. Wiskundig betekent dit dat het probleem van de propagatie van interne golven zich niet simpel laat scheiden in een vergelijking voor de horizontale en verticale propagatie afzonderlijk, iets wat zonder de symmetriebreking wel mogelijk zou zijn. Deze niet-separeerbaarheid verhoogt de wiskundige complexiteit van het probleem. Toch staat dit een oplossing niet altijd in de weg, zoals hieronder zal blijken.

**Aardas**

We bekijken hier het probleem van de corioliskracht afzonderlijk, en nemen aan dat



**Figuur 2** Een doorsnede van een deel van de aardbol, met in zwart de rotatievector, en een ontbinding daarvan in een loodrechte en parallelle component op breedtegraad  $\phi$ .

de bodem horizontaal is. De beweging van het water wordt beschreven door de tweede wet van Newton, toegepast op vloeistoffen, tezamen met de wetten voor massa- en energiebehoud. Om de behandeling te vereenvoudigen, maken we een aantal benaderingen: wrijving wordt verwaarloosd en ook wordt aangenomen dat de golven voldoende klein van amplitude zijn om als lineair behandeld te kunnen worden. Tenslotte veronderstellen we, dat de BV-frequentie  $N$  enkel in verticale richting varieert; Figuur 1b geeft een indicatie hoe deze afhankelijkheid er in de oceaan uitziet.

Voor sinusoidale golven van frequentie  $\omega$  kan men voor het ruimtelijke deel van de stroomfunctie,  $\psi(x, z) \exp(-i\omega t)$ , dan de volgende vergelijking afleiden:

$$A \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} + C \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0. \quad (2)$$

Hierin is  $x$  de horizontale coördinaat en  $z$  de verticale. Wiskundig interessant en ook ongebruikelijk is de aanwezigheid van de gemengde afgeleide — de tweede term — die wijst op een verstrengeling van horizontale en verticale afhankelijkheden. Anders gezegd, de vergelijking is *niet-separeerbaar*; we kunnen de oplossing niet schrijven als een product van reële functies van de onafhankelijke variabelen,  $\psi = f(x)g(z)$ .

Wat is de oorsprong van deze kruisterm?

Dit is direct te zien aan de definitie van de coëfficiënten:

$$A = N^2 - \omega^2 + \tilde{f}^2; \quad B = f\tilde{f}; \quad C = f^2 - \omega^2,$$

met  $f = 2\Omega \sin \phi$  en  $\tilde{f} = 2\Omega \cos \phi$ . Deze laatste,  $\tilde{f}$ , wordt in de geofysische stromingsleer meestal verwaarloosd (de zogenaamde ‘Traditionele Benadering’), en we zien dat het effect van deze benadering is dat de kruisterm in (2) verdwijnt; het probleem wordt daardoor separeerbaar.

We zijn hier echter geïnteresseerd in wat er gebeurt wanneer men deze term *niet* verwaarloost. Hoewel (2) in haar volledige vorm niet-separeerbaar is, kunnen we toch gemakkelijk tot een oplossing komen. Wanneer we namelijk substitueren

$$\psi = \Psi(z) \exp i(kx + \delta z), \quad (3)$$

met  $\delta = -kB/C$  en (vooralsnog willekeurig) golfgetal  $k$ , dan krijgen we

$$\Psi'' + k^2 \left[ \frac{B^2 - AC}{C^2} \right] \Psi = 0, \quad (4)$$

waarbij het accent de afgeleide naar  $z$  weergeeft. Merk op dat deze vergelijking geheel reëel is. Wanneer we dus het reële deel nemen van  $\psi(x, z) \exp(-i\omega t)$ , krijgen we

$$\psi = \Psi(z) \cos(kx + \delta z - \omega t).$$

Het niet-separeerbare karakter, de verstrengeling van  $x$  en  $z$ , toont zich in het argument van de cosinus.

Wat betekent dit concreet voor de golven zelf? We zullen kijken naar twee aspecten: de dispersie-relatie en de verticale structuur van de golven.

Wat betreft het eerste, zullen we veronderstellen dat  $N$  een constante is. Hoewel onrealistisch (zie Figuur 1b), heeft dit het voordeel dat we het probleem geheel analytisch kunnen oplossen. We leggen als randvoorwaarde op dat de stroomfunctie nul moet zijn aan bodem en oppervlak ( $z = -H, 0$ ), wat neerkomt op de natuurlijke eis dat daar de verticale (dat wil zeggen loodrechte) snelheid nul moet zijn. De oplossing van (4) luidt dan:  $\Psi = \sin n\pi z/H$  met  $n = 1, 2, 3, \dots$ , waarbij tevens moet gelden:

$$k^2 = \left( \frac{n\pi}{H} \right)^2 \frac{C^2}{B^2 - AC}, \quad (5)$$

waarmee het verband is gelegd tussen het

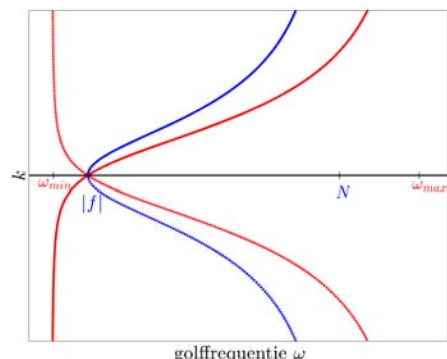
golfgetal  $k$  en de golfrequentie  $\omega$  (bevat in  $A$  en  $C$ ) — de dispersie-relatie.

Hoe ziet dit verband eruit? Duidelijk is dat  $k$  naar oneindig gaat (dat wil zeggen de golven worden *kort*) wanneer  $B^2 - AC$  naar nul nadert. Deze laatste bevat de gegeven constanten van het medium ( $N$ ,  $f$  en  $\tilde{f}$ ) en de golfrequentie  $\omega$ . Wegens het kwadratische voorkomen van  $\omega$  in  $A$ , zullen er twee waarden van de frequentie zijn waarvoor  $B^2 - AC \rightarrow 0$ . Dit is geïllustreerd met de rode lijn in Figuur 3; wanneer de frequentie  $\omega$  haar maximum nadert, gaat het golfgetal, in absolute zin, naar oneindig; maar dit is óók het geval wanneer de frequentie haar minimum nadert. Dit is ongebruikelijk, want doorgaans vallen in de geofysische stromingsleer lage frequenties samen met *kleine* golfgetallen, niet met grote! De sleutel voor dit vreemde gedrag ligt in de kruisterm met de gemengde afgeleide. Stellen we namelijk  $B$  nul dan valt  $C$  weg uit de noemer van (5); golfgetallen gaan dan alleen nog naar oneindig wanneer  $\omega = N$ , voor hoge frequenties (zie blauwe lijn in Figuur 3).

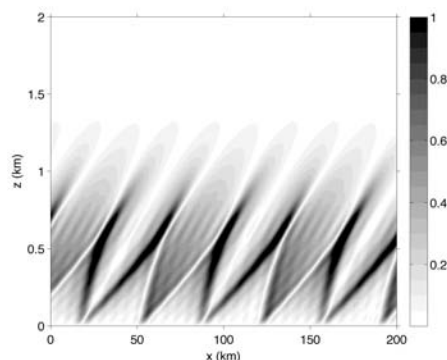
We zien hier dat de niet-separeerbaarheid een singulier karakter heeft: voor eindige  $B$ , hoe klein ook, vinden we steeds hogere golfgetallen naarmate de frequentie haar minimum nadert; stellen we  $B = 0$ , dan gaat ineens het golfgetal naar nul bij de laagste frequentie.

Voor de oceaan heeft dit mogelijk interessante implicaties, want een van de kernvragen uit de fysische oceanografie is hoe de energie van de lage frequenties en grote ruimteschalen naar de kleine ruimteschalen gaat waar de dissipatie plaatsvindt. In de hierboven beschreven eigenschappen zou deze overgang al in de golfeigenschappen zelf bevat zijn!

Tenslotte vormen we ons een beeld van die golfpropagatie. We kijken daartoe naar een iets realistischer geval van  $N$  en nemen deze nu niet constant maar laten  $N^2$  lineair met



**Figuur 3** Dispersierelatie met de niet-traditionele component (rood), en zonder (blauw). Ontleend aan [2].



**Figuur 4** Amplitude van een golfoplossing voor een sub-inertiale frequentie (dat wil zeggen  $\omega \leq |f|$ ) bestaande in het onderste, zwak gestratificeerde deel van de waterkolom.

$z$  variëren, afnemend met de diepte. De oplossing van (4) kan dan in termen van Airy-functies worden verkregen. Voor lage frequenties krijgen we dan een golf die gebonden is aan de bodem en boven een bepaalde hoogte exponentieel verval, zie Figuur 4. Het patroon geeft de plaatsen weer waar verticale snelheden hoog zijn en de golfenergie plant zich daarlangs voort. Duidelijk is de symmetriebreking ten opzichte van de verticaal een gevolg van de kruisterm met  $B$ . Deze term speelt in dit geval een nog fundamentele rol: voor  $B = 0$  zou de hier afgebeelde golf, waarvan de frequentie lager is dan  $|f|$ , zelfs helemaal niet bestaan!

**Hellende bodems**

Een alternatief voor het zoeken naar gesloten-vorm oplossingen, waarin de oplossing een expliciete afhankelijkheid van de onafhankelijke variabelen — hierboven  $x$  en  $z$  — kent, bestaat in het algoritmisch oplossen van de vergelijking. Hier zullen we deze methode toelichten voor het geval de afmeting van het uniform-gelaagde ( $N = \text{const}$ ) vloeistofbasin zo klein is dat rotatie van de aarde verwaarloosbaar is ( $f = \tilde{f} = 0$  en in het bijzonder  $B = 0$ ). Denk bijvoorbeeld aan het relatief kleine, door temperatuurverschillen nagenoeg uniform-gelaagde Loch Ness, een fjord dat we hierna als ‘kanaal’ zullen typeren. Aan het einde van de ijstijd bezorgden terugtrekkende gletsjers dit kanaal in dwarsrichting een trapezoidale vorm. Omwille van de eenvoud zullen we naar zo’n kanaal kijken waar de bodem,  $z = -H(x)$ , voor  $-L < x < 0$  een constante diepte,  $H_0$ , heeft, die voor  $0 \leq x < L$  lineair afneemt,  $z = H_0(x/L - 1)$ . Hier is  $H_0$  de maximale diepte en  $L$  de halve kanaalbreedte. Het ruimtelijk patroon van vrije golven van frequentie  $\omega$  wordt beschreven door een stroomfunctie  $\psi(x, z)$  die nul moet zijn op alle randen.

Als we de horizontale coördinaat  $x$  schalen met  $L$  en de verticale coördinaat  $z$  met  $D \equiv L(N^2/\omega^2 - 1)^{-1/2}$ , dan vereenvoudigt (2) tot

$$\psi_{xx} - \psi_{zz} = 0. \tag{6}$$

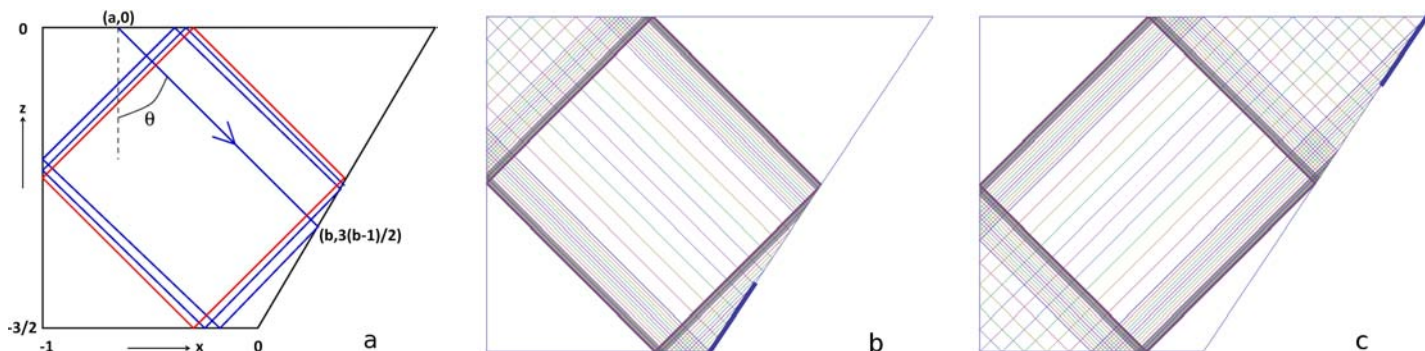
Dit probleem lijkt samen met de eerdergenoemde randvoorwaarde zo schraal dat men wellicht denkt dat er geen niet-triviale oplossingen zijn. Dit is echter wel degelijk het geval, en wel voor bijna iedere frequentie  $\omega < N$ . Het probleem hangt nog van één parameter af. Dit is de met  $D$  geschaalde kanaaldiepte  $H_0$ , ofwel dimensieloze diepte  $\tau = H_0/D = (N^2/\omega^2 - 1)^{1/2}H_0/L$ . Volledigheidshalve luiden de randvoorwaarden in het trapezoidale kanaal dan ook  $\psi = 0$  aan het oppervlak,  $z = 0$ , aan de verticale zijwand,  $x = -1$ , aan de bodem  $z = -\tau$ , voor  $-1 < x < 0$  en, voor  $0 \leq x < 1$ , op de hellende bodem,  $z = \tau(x - 1)$ .

Een algemene oplossing die voldoet aan de oppervlakterandvoorwaarde is formeel te schrijven als

$$\psi = F(x + z) - F(x - z). \tag{7}$$

‘Formeel’ omdat  $F(\xi)$  een nog onbekende functie van karakteristieke coördinaten  $x_{\pm} = x \pm z$  is, wiens precieze vorm nadere bepaling vereist, gebaseerd op de onderliggende geometrische structuur van de karakteristieken. In de gestrekte verticale coördinaat ( $z$ ) bewaren karakteristieken altijd dezelfde hoek van 45 graden ten opzichte van de zwaartekracht. Als twee karakteristieken (golfstralen) daarom parallel, van boven af invallen op een hellende bodem (Figuur 5a) zullen zij na weerkaatsing nog steeds parallel zijn, maar zal hun afstand kleiner worden (focusering). Als de karakteristieken in omgekeerde richting worden gevolgd zal deze afstand juist toenemen (defocusering). Het blijkt dat gesloten gebieden — waar een vloeistof zich noodzakelijkerwijs altijd in bevindt — door focusering gedomineerd worden. Dit impliceert dat golfstralen uiteindelijk bijna altijd een periodieke baan zullen bereiken, een *golfaantrekker* genoemd (weergegeven door de rode lijn in Figuur 5a). Dit geometrisch aspect van de oplossing is, zoals we zullen zien, ook in het stroomfunctieveld zichtbaar.

De algoritmische oplosmethode [5] bestaat daarin dat we de functionele afhankelijkheid van  $F(\xi)$  niet pogen te raden maar, bescheidener, eerst veronderstellen dat we diens waarde op een of andere wijze in één



**Figuur 5** (a) Trapezoïdaal bassin ter diepte  $\tau = 3/2$  met half karakteristiek web startend in  $(a, 0)$  (blauwe lijn) en golfaantrekker (rood) van een intern golfveld in een uniform-gelaagde vloeistof. (b) en (c) Fundamentele intervallen (dik lijnstuk op hellende bodem) en daarvan geconstrueerde karakteristieke webben.

punt kennen. Laten we dat punt aan het oppervlak kiezen als  $\mathbf{x}_0 = (a, 0)$ , zodat we veronderstellen dat  $F(a)$  bekend is, zeg  $F(a) = F_*$ , zie Figuur 5a. De algemene oplossing laat ons toe te concluderen dat op de naar rechtsonder hellende lijn  $z + x = a$ ,  $F(x + z)$  vanzelfsprekend ook constant is. Als we nu het snijpunt van deze lijn en de bodem bepalen, gegeven door  $\mathbf{x}_1 = (b, 3/2(b - 1))$ , met  $b = (2a + 3)/5$ , dan kunnen we ook de specifieke, naar links-onder hellende reflecterende karakteristiek bepalen die door dat punt gaat. Op die karakteristiek,  $x - z = 3/2 - b/2$ , is  $F$  alweer constant, namelijk  $F(3/2 - b/2)$ . Omdat het snijpunt op de rand ligt moet  $\psi$  daar nul zijn. Derhalve volgt uit (7) dat  $F(3/2 - b/2) = F(a) = F_*$ . Met andere woorden,  $F$  is invariant onder reflectie van die karakteristiek aan de wand. Aangezien dit geldt voor alle daaropvolgende en ook voor alle eerdere reflecties, dus voor de gehele verzameling reflectiepunten  $\{\dots, \mathbf{x}_{-1}, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots\}$ , concluderen we dat voor het gehele karakteristieke web — het web van via reflecties aan elkaar verbonden karakteristieken, de karakteristieke baan —  $F(X)$  invariant is en wel gelijk aan  $F_*$ . In Figuur 5a is de helft van het web geplott. De andere helft volgt door de karakteristiek vanuit  $(a, 0)$  naar linksonder te volgen. Tegelijkertijd zien we dat dit ene web niet het gehele kanaal bedekt. Maar hoeveel webben zijn daarvoor nodig, waar kunnen we die web-invariant per web kiezen, en wat is de betekenis van die web-invariant eigenlijk?

In een trapezoïdaal kanaal blijken op de rand twee intervallen te liggen, fundamentele intervallen genaamd, waarvan de randen worden bepaald door zogenaamde kritische punten van de domeinrand. Dit zijn punten waar de raaklijn aan de rand onder eenzelfde hoek met de verticaal staat als de karakteristieken (vanwege de schaling, hier dus een hoek van 45 graden). De bijzondere aard van deze punten volgt uit het feit dat een invallende karakteristiek (een kritische karakteristiek)

gedwongen is terug te keren volgens hetzelfde pad, in plaats van, als gewoonlijk, zich in een richting daar loodrecht op voort te zetten. Voor het trapezoïdale domein vallen deze kritische punten samen met de vier hoekpunten. Wanneer in beide fundamentele intervallen ieder punt als startpunt  $\mathbf{x}_0$  van een karakteristiek web gekozen wordt, dan zullen de aldus verkregen karakteristieke webben gezamenlijk het hele kanaal op een unieke manier bedekken. Op de hellende bodem geven de in Figuur 5b en 5c doorgetrokken dikke lijnelementen deze fundamentele intervallen weer. Voor een kanaal van dimensieloze diepte  $\tau = 3/2$  zijn dat de intervallen  $x \in (0, 1/5)$  en  $(4/5, 1)$ . De karakteristieke webben die vanuit beide fundamentele intervallen bereikt worden zijn complementair aan elkaar. Zij naderen allen de voor dit geval vierkante golfaantrekker, en doen dat, opmerkelijkerwijs, voor beide flanken van het web,  $x_{\pm\infty}$ , met dezelfde kloksgewijze oriëntatiezin.

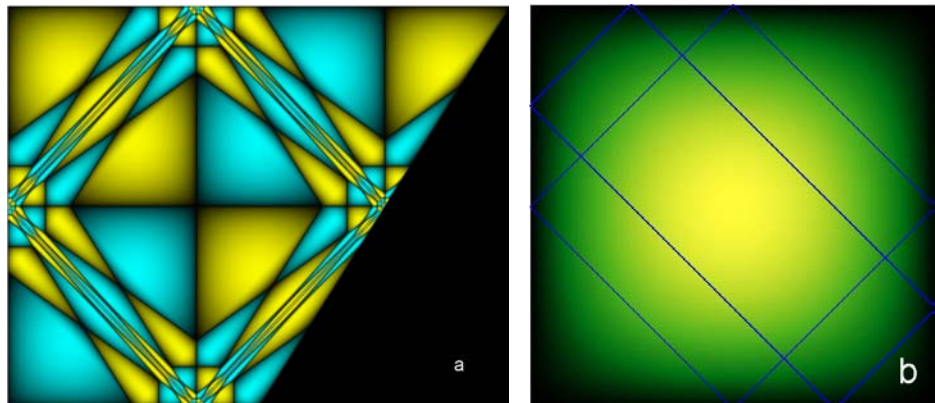
Ieder punt in het kanaal ligt op het kruispunt van precies twee karakteristieke lijnen. Als daarom  $F(\xi)$  op beide fundamentele intervallen (willekeurig) wordt voorgeschreven, dan is de stroomfunctie uniek bekend. Door in deze gebieden voor  $F(\xi)$  bijvoorbeeld een halve cosinus te kiezen — in het voorbeeld hierboven  $F(x) = \cos(5\pi x)$  — construeren we

het stroomfunctiepatroon zoals getoond in Figuur 6a.

Bij constructie is dit een vrije, maar staande golfoplossing. Omdat door de reële keuze van  $F(\xi)$ , het ruimtelijke patroon reëel is, zal deze oplossing in de tijd slechts ‘knippen’. Dit lijkt de betiteling van de periodieke baan als ‘golfaantrekker’ niet te rechtvaardigen. Wanneer we op een fundamenteel interval  $F$  echter complex kiezen (hetgeen een randforcering van interne golven voorstelt) zullen deze golven de golfaantrekker daadwerkelijk benaderen.

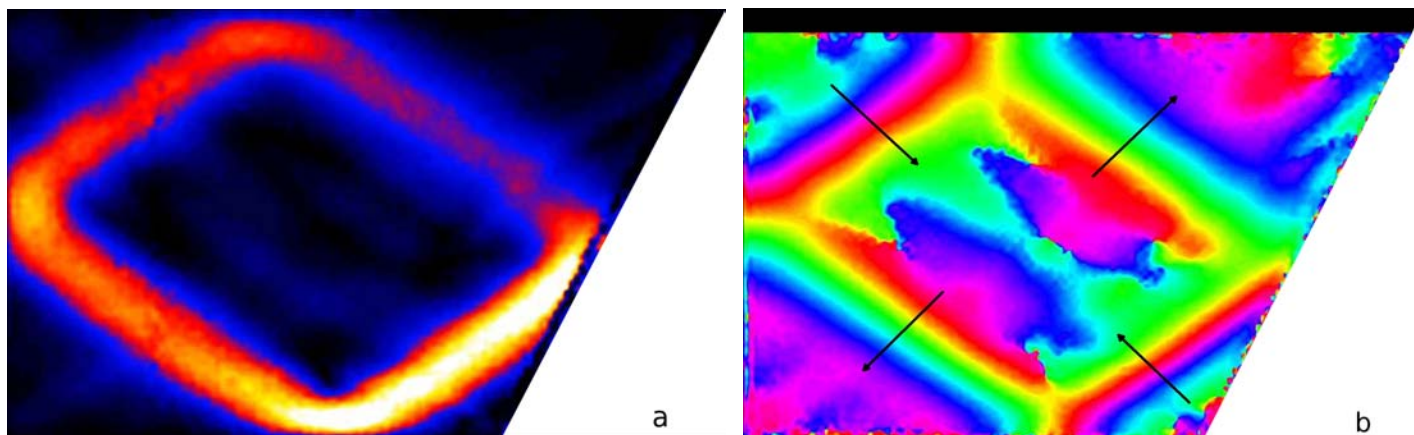
Maar wat stelt  $F$  nu precies voor? De fysische betekenis van  $F$  volgt uit het feit dat storingsdruk,  $p(x, z)$ , net als stroomfunctie  $\psi$  moet voldoen aan vergelijking (6). Diens oplossing,  $p = F(x+z) + F(x-z)$ , wordt gegeven in termen van precies dezelfde functie  $F$ . Dit identificeert  $F$  als een partiële druk.

Merk op dat we ‘stroomfunctie’ zelf niet kunnen meten. Wel echter diens afgeleide, de snelheid. Hoewel  $\psi$  begrensd is, laat Figuur 6a zien dat bij nadering van de vierkante golfaantrekker diens gradiënt alsmaar toeneemt. Dit suggereert dat deze golven zich rond de aantrekker zullen manifesteren als intense gelokaliseerde beweging. Figuur 7 toont experimentele bevestiging van dit vermoeden in de hierboven besproken configuratie.



**Figuur 6** Stroomfunctiepatroon in (a) trapezoïde, diepte  $\tau = 3/2$ ; (b) vierkant. Lijnen in (b) zijn enkele periodieke webben.





**Figuur 7** Experimenteel bepaalde (a) amplitude en (b) fase van verstoringen van het dichtheidsveld in een interne golf, die ontstaan door de bak horizontaal te schudden [4]. Deze verstoringen volgen het snelheidsveld (de gradiënt van de stroomfunctie). In (b) geven de pijlen de richting aan waarin de fase in de tijd loopt.

Golfaantrekkers treden niet alleen op in een kanaal van trapezoidale vorm, maar voor bijna elke bodenvorm die de reflectiesymmetrie van kaatsende golfstralen ‘voldoende breekt’. Met dat laatste voorbehoud bedoelen we dat sommige domeinvormen, zoals de rechthoek, aan de dominantie van focusering weten te ontsnappen (zie Figuur 6b). Voor rationale dieptes  $\tau = 2m/n$ , ( $m, n \in \mathbb{N}$ ) is de stroomfunctie simpelweg in separeerbare vorm te vinden,

$$\psi = \sin(n\pi(x+1)/2) \sin(m\pi z/\tau). \quad (8)$$

In dat geval is iedere reflectie van twee parallelle golfstralen neutraal: er treedt noch focusering noch defocusering op, althans, als de zijdes van de rechthoek tenminste loodrecht op (of parallel aan) de zwaartekracht staan (in [1] wordt een tegenvoorbeeld gegeven). Voor de niet-gekatelde rechthoek ligt iedere golfstraal op zijn eigen periodieke web en bijgevolg kent zo'n vloeistofdomein oneindig veel periodieke karakteristieke webben (zie Figuur 6b). In andere uitzonderlijke gevallen kan focusering geneutraliseerd worden door een precies even sterke mate van defocusering, zodanig dat iedere golfstraal weer op zijn ei-

gen periodieke web ligt (bijvoorbeeld in een elliptisch domein waarvan één van de symmetrieassen loodrecht op de zwaartekracht staat). Maar in het algemeen zullen golfaantrekkers de respons domineren en kunnen stroomfunctie en druk met behulp van de hierboven geschetste geometrische methode geconstrueerd worden.

De hier besproken singuliere oplossing in een trapezoidaal bekken voor  $\tau = 3/2$  is interessant omdat voor dit speciale geval de stroomfunctie ook analytisch bekend is [6]:

$$\psi = \sum_{m=1}^{\infty} a_{2m} \sin\left(4m\pi \frac{(x+1)}{3}\right) \cdot \sin\left(4m\pi \frac{z}{3}\right), \quad (9)$$

met Fourier-coëfficiënten

$$a_{2m} = \frac{2m(-1)^{m+1}}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sin\left(\frac{m\pi}{2b_n}\right) \cdot \left(\frac{1}{b_n^2 - m^2} - \frac{1}{(5b_n)^2 - m^2}\right),$$

waar

$$b_n = \frac{3}{2} 5^n.$$

De individuele termen in de Fourier-reeks (9) voldoen afzonderlijk aan de ruimtelijke golfvergelijking en aan de randvoorwaarden op het horizontale deel van de bodem, de verticale zijwand en het oppervlak. Ze zijn in wezen stuk voor stuk identiek aan de separeerbare modi in de rechthoek (8). Maar hun koppeling en daarmee hun *niet*-separeerbaarheid (en de bepaling van de  $a_{2m}$ ) wordt door de laatste randvoorwaarde op de schuine helling bepaald. Deze is te schrijven als een functionaalvergelijking die op algebraïsche wijze het bestaan van de eerder geometrisch afgeleide fundamentele intervallen bevestigt.

### Conclusie

Dichtheidsgelaagdheid en rotatie verlenen de oceaan een anisotroop karakter. Als gevolg hiervan gedragen interne golven in de oceaan zich heel anders dan oppervlaktegolven. De anisotropie leidt ertoe dat de ruimtelijke vergelijking met randvoorwaarden in het algemeen geen separeerbare oplossingen kent. Dit heeft verreikende gevolgen voor de dispersie van deze golven en voor hun scheve propagatie. Binnen de kaders van deze theorie leidt dit uiteindelijk bijna altijd tot hun onderschepping door golfaantrekkers.  $\leftarrow$

### Referenties

- 1 J. Bajars, J. Frank en L.R.M. Maas, On the appearance of internal wave attractors due to an initial or parametrically excited disturbance, *J. Fluid Mech.* 714, 2013, 283–311.
- 2 T. Gerkema en V.I. Shrira, Near-inertial in the ocean: beyond the ‘traditional approximation’, *J. Fluid Mech.* 529, 2005, 195–219.
- 3 T. Gerkema en L. Gostiaux, A brief history of the Coriolis force, *Eur. Phys. News* 43/2, 2012, 14–17.
- 4 J. Hazewinkel, P. van Breevoort, S.B. Dalziel en L.R.M. Maas, Observations on the wave number spectrum of an interval wave attractor in a two-dimensional, *J. Fluid Mech.* 598, 2008, 373–382.
- 5 L.R.M. Maas en F.-P.A. Lam, Geometric focusing of internal waves, *J. Fluid Mech.* 300, 1995, 1–40.
- 6 L.R.M. Maas, Exact analytic self-similar solution of a wave attractor field, *Physica D – Nonlinear Phenomena* 238, 2009, 502–505.