Vereinigte elliptische Homologie

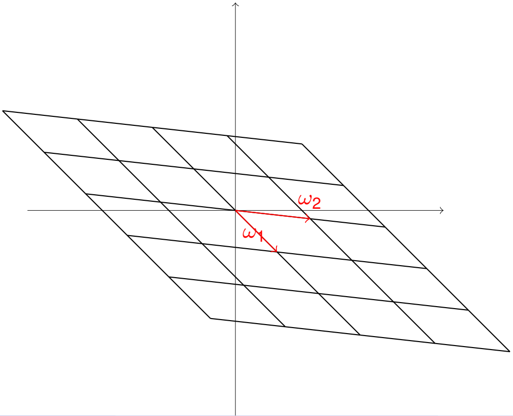
Lennart Meier

Mathematisches Institut, Universität Bonn

Verteidigungsvortrag

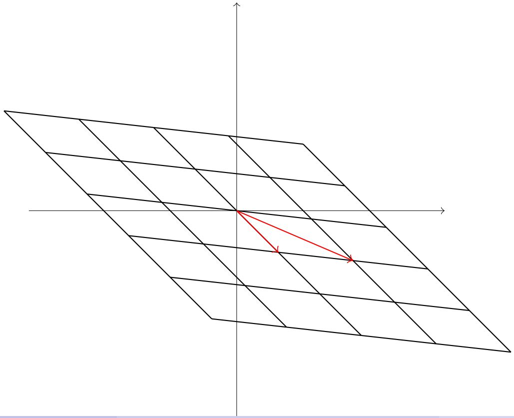
Gitter

Seien ω_1, ω_2 zwei komplexe Zahlen, die ein Gitter aufspannen.



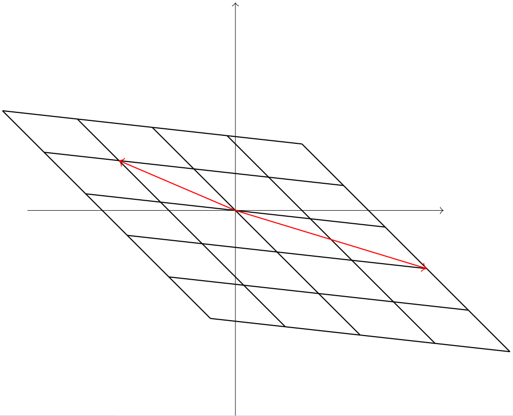
Gitter

Seien ω_1, ω_2 zwei komplexe Zahlen, die ein Gitter aufspannen.



Gitter

Seien ω_1, ω_2 zwei komplexe Zahlen, die ein Gitter aufspannen.

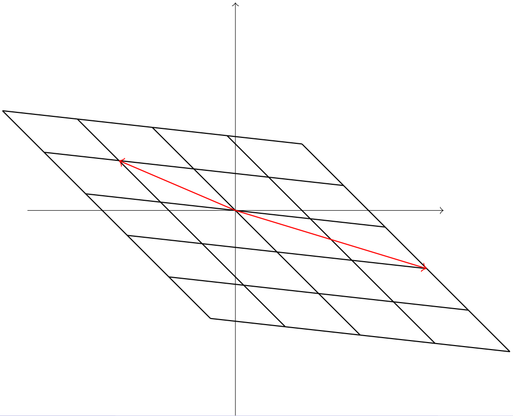


Gitter

Seien ω_1, ω_2 zwei komplexe Zahlen, die ein Gitter aufspannen.

- ω_1', ω_2' spannen genau dann dasselbe Gitter auf, wenn

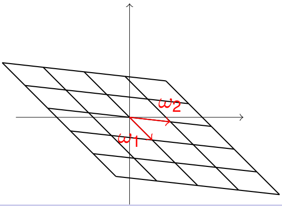
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_1' \\ \omega_2' \end{pmatrix} \text{ mit } \left| \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right| = 1.$$



Gitter

Seien ω_1, ω_2 zwei komplexe Zahlen, die ein Gitter aufspannen.

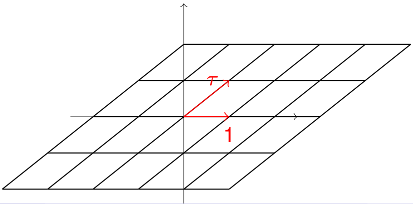
- ω_1', ω_2' spannen genau dann dasselbe Gitter auf, wenn
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_1' \\ \omega_2' \end{pmatrix} \text{ mit } \left| \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right| = 1.$$
- Bis auf Drehstreckung ist jedes Gitter aufgespannt von $(1, \tau)$ mit $\tau = \omega_2/\omega_1$ oder $\tau = \omega_1/\omega_2$ in $\mathbb{H}$.



Gitter

Seien ω_1, ω_2 zwei komplexe Zahlen, die ein Gitter aufspannen.

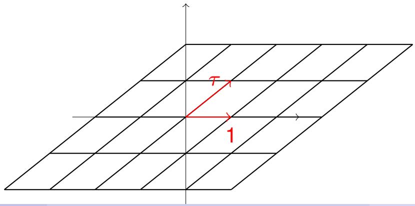
- ω_1', ω_2' spannen genau dann dasselbe Gitter auf, wenn
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_1' \\ \omega_2' \end{pmatrix} \text{ mit } \left| \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right| = 1.$$
- Bis auf Drehstreckung ist jedes Gitter aufgespannt von $(1, \tau)$ mit $\tau = \omega_2/\omega_1$ oder $\tau = \omega_1/\omega_2$ in $\mathbb{H}$.



Gitter

Seien ω_1, ω_2 zwei komplexe Zahlen, die ein Gitter aufspannen.

- ω_1', ω_2' spannen genau dann dasselbe Gitter auf, wenn
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_1' \\ \omega_2' \end{pmatrix} \text{ mit } \left| \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right| = 1.$$
- Bis auf Drehstreckung ist jedes Gitter aufgespannt von $(1, \tau)$ mit $\tau = \omega_2/\omega_1$ oder $\tau = \omega_1/\omega_2$ in $\mathbb{H}$.
- $(1, \tau)$ und $(1, \tau')$ spannen genau dann dieselbe Drehstreckungsklasse von Gittern auf, wenn $\tau' = \frac{a\tau+b}{c\tau+d}$ mit $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$.

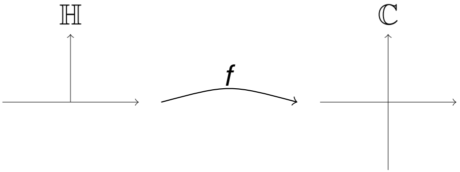


Modulformen

Eine **Modulform vom Gewicht k** ist eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{C}$ mit

$$f\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = (c\tau + d)^k f(\tau)$$

für $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$ (+Wachstumsbedingung).



Modulformen

Modulformen

Eine Modulform vom Gewicht k ist eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{C}$ mit

$$f\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = (c\tau + d)^k f(\tau)$$

für $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$ (+Wachstumsbedingung).

Gitterinterpretation

- Eine Modulform vom Gewicht 0 kann also aufgefasst werden als eine komplexwertige Funktion auf Drehstreckungsklassen von Gittern.

Modulformen

Eine Modulform vom Gewicht k ist eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{C}$ mit

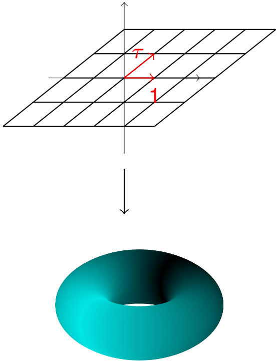
$$f\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = (c\tau + d)^k f(\tau)$$

für $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$ (+Wachstumsbedingung).

Gitterinterpretation

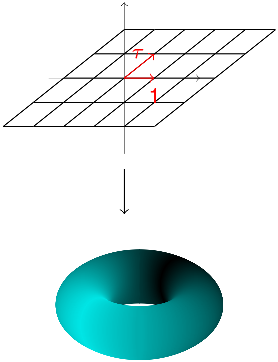
- Eine Modulform vom Gewicht 0 kann also aufgefasst werden als eine komplexwertige Funktion auf Drehstreckungsklassen von Gittern.
- Modulform vom Gewicht k ist eine komplexwertige Funktion von Gittern, so dass $f(\lambda\Gamma) = \lambda^{-k} f(\Gamma)$.

Gitter und elliptische Kurven



- Herausteilen eines Gitters aus der komplexen Ebene gibt eine Riemannsche Fläche vom Geschlecht 1 mit einem markierten Punkt, eine (komplexe) elliptische Kurve.

Gitter und elliptische Kurven

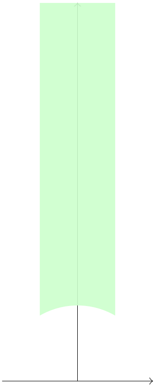


- Herausteilen eines Gitters aus der komplexen Ebene gibt eine Riemannsche Fläche vom Geschlecht 1 mit einem markierten Punkt, eine (komplexe) elliptische Kurve.
- Solche elliptischen Kurven sind genau dann isomorph, wenn die Gitter durch eine Drehstreckung auseinander hervorgehen.

Der Modulraum von elliptischen Kurven

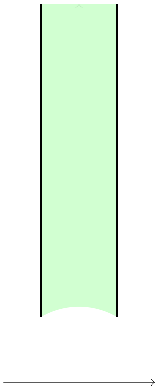
- Wie sieht $\mathcal{M}_{\mathbb{C}} = \mathbb{H}/SL_2(\mathbb{Z})$, der Modulraum von (komplexen) elliptischen Kurven, aus?

Der Modulraum von elliptischen Kurven



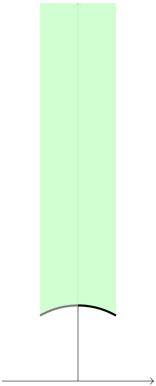
- Wie sieht $\mathcal{M}_{\mathbb{C}} = \mathbb{H}/SL_2(\mathbb{Z})$, der Modulraum von (komplexen) elliptischen Kurven, aus?

Der Modulraum von elliptischen Kurven



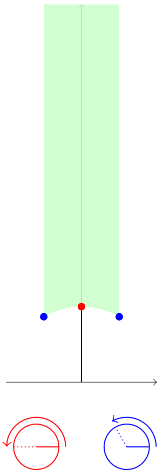
- Wie sieht $\mathcal{M}_{\mathbb{C}} = \mathbb{H}/SL_2(\mathbb{Z})$, der Modulraum von (komplexen) elliptischen Kurven, aus?

Der Modulraum von elliptischen Kurven



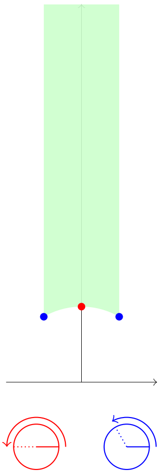
- Wie sieht $\mathcal{M}_{\mathbb{C}} = \mathbb{H}/SL_2(\mathbb{Z})$, der Modulraum von (komplexen) elliptischen Kurven, aus?

Der Modulraum von elliptischen Kurven



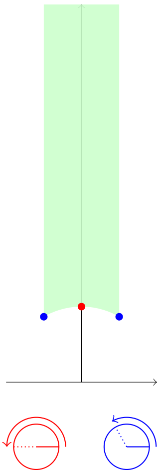
- Wie sieht $\mathcal{M}_{\mathbb{C}} = \mathbb{H}/SL_2(\mathbb{Z})$, der Modulraum von (komplexen) elliptischen Kurven, aus?
- Er ist homöomorph zu $\mathbb{C}$, besitzt aber zwei Orbifoldpunkte.

Der Modulraum von elliptischen Kurven



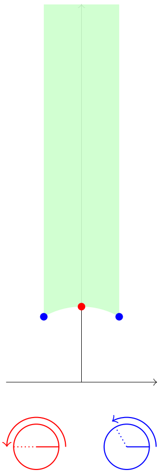
- Wie sieht $\mathcal{M}_{\mathbb{C}} = \mathbb{H}/SL_2(\mathbb{Z})$, der Modulraum von (komplexen) elliptischen Kurven, aus?
- Er ist homöomorph zu $\mathbb{C}$, besitzt aber zwei Orbifoldpunkte.
- Modulform vom Gewicht 0 entspricht algebraischer Funktion auf $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}$.

Der Modulraum von elliptischen Kurven



- Wie sieht $\mathcal{M}_{\mathbb{C}} = \mathbb{H}/SL_2(\mathbb{Z})$, der Modulraum von (komplexen) elliptischen Kurven, aus?
- Er ist homöomorph zu $\mathbb{C}$, besitzt aber zwei Orbifoldpunkte.
- Modulform vom Gewicht 0 entspricht algebraischer Funktion auf $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}$.
- Modulform f vom Gewicht 2 entspricht (algebraischer) Differentialform $f \cdot dz$, also Schnitt vom Differentialformbündel $\Omega^1 = \omega^{\otimes 2}$.

Der Modulraum von elliptischen Kurven



- Wie sieht $\mathcal{M}_{\mathbb{C}} = \mathbb{H}/SL_2(\mathbb{Z})$, der Modulraum von (komplexen) elliptischen Kurven, aus?
- Er ist homöomorph zu $\mathbb{C}$, besitzt aber zwei Orbifoldpunkte.
- Modulform vom Gewicht 0 entspricht algebraischer Funktion auf $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}$.
- Modulform f vom Gewicht 2 entspricht (algebraischer) Differentialform $f \cdot dz$, also Schnitt vom Differentialformbündel $\Omega^1 = \omega^{\otimes 2}$.
- Modulform vom Gewicht $2k$ entspricht Schnitt von $\omega^{\otimes 2k}$.

Elliptische Kurven - Algebraische Sichtweise

- Jede elliptische Kurve $\mathbb{C}/\Gamma$ lässt sich in den $\mathbb{CP}^2$ einbetten und genügt dort einer Gleichung

$$Y^2Z = 4X^3 + g_2XZ^2 + g_3Z^3,$$

mit $g_2, g_3 \in \mathbb{C}$ und $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2$ invertierbar.

Elliptische Kurven - Algebraische Sichtweise

- Jede elliptische Kurve $\mathbb{C}/\Gamma$ lässt sich in den $\mathbb{CP}^2$ einbetten und genügt dort einer Gleichung

$$Y^2Z = 4X^3 + g_2XZ^2 + g_3Z^3,$$

  mit $g_2, g_3 \in \mathbb{C}$ und $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2$ invertierbar.
- Können elliptische Kurve über beliebigem Ring R ähnlich durch eine kubische Gleichung bestimmter Form in $\mathbb{P}^2(R)$ definieren.

Der Modulstack von elliptischen Kurven

Während der Modulraum von (komplexen) elliptischen Kurven eine Orbifold ist, so gibt es im Allgemeinen einen Modulstack von elliptischen Kurven $\mathcal{M}$.

Der Modulstack von elliptischen Kurven

Während der Modulraum von (komplexen) elliptischen Kurven eine Orbifold ist, so gibt es im Allgemeinen einen Modulstack von elliptischen Kurven $\mathcal{M}$.

$$\mathrm{Hol}_{orb}(X, \mathcal{M}_{\mathbb{C}}) = \begin{cases} \text{Isomorphismusklassen von Familien} \\ \text{von elliptischen Kurven über X} \end{cases}$$

Der Modulstack von elliptischen Kurven

Während der Modulraum von (komplexen) elliptischen Kurven eine Orbifold ist, so gibt es im Allgemeinen einen Modulstack von elliptischen Kurven $\mathcal{M}$.

$$\begin{aligned} \mathrm{Hol}_{orb}(X, \mathcal{M}_{\mathbb{C}}) &= \begin{cases} \text{Isomorphismusklassen von Familien} \\ \text{von elliptischen Kurven über X} \end{cases} \\ \mathrm{Alg}(\mathrm{Spec}\, R, \mathcal{M}) = \mathcal{M}(R) &= \begin{cases} \text{Gruppoid von elliptischen Kurven} \\ \text{über } R \text{ und deren Isomorphismen} \end{cases} \end{aligned}$$

Vektorbündel

1. Frage

Kann man Vektorbündel auf dem Modulstack von elliptischen Kurven klassifizieren?

Vektorbündel

1. Frage

Kann man Vektorbündel auf dem Modulstack von elliptischen Kurven klassifizieren?

$\boxed{\mathcal{M}_{\mathbb{C}}}$

Vektorbündel

1. Frage

Kann man Vektorbündel auf dem Modulstack von elliptischen Kurven klassifizieren?

$\boxed{\mathcal{M}_{\mathbb{C}}}$ $\boxed{\mathcal{M}}$

Vektorbündel

1. Frage

Kann man Vektorbündel auf dem Modulstack von elliptischen Kurven klassifizieren?

$\mathcal{M}_{\mathbb{C}}$ $\mathcal{M}$

Geradenbündel — Mumford, Fulton–Olsson

Alle Geradenbündel (Vektorbündel vom Rang 1) sind Potenzen von ω.

Vektorbündel

1. Frage

Kann man Vektorbündel auf dem Modulstack von elliptischen Kurven klassifizieren?

$\mathcal{M}_{\mathbb{C}}$ $\qquad$ $\mathcal{M}$

Geradenbündel — Mumford, Fulton–Olsson

Alle Geradenbündel (Vektorbündel vom Rang 1) sind Potenzen von ω.

Über $\mathbb{C}$ — Folklore, Vistoli

Über $\mathbb{C}$ ist jedes Vektorbündel eine Summe von Geradenbündeln.

Vektorbündel über $\mathcal{M}$

Definition

Ein Vektorbündel über $\mathcal{M}$, das als iterierte Erweiterung von Geradenbündeln entsteht, heißt standard.

Vektorbündel über $\mathcal{M}$

Definition

Ein Vektorbündel über $\mathcal{M}$, das als iterierte Erweiterung von Geradenbündeln entsteht, heißt standard.

-

Vektorbündel über $\mathcal{M}$

Definition

Ein Vektorbündel über $\mathcal{M}$, das als iterierte Erweiterung von Geradenbündeln entsteht, heißt standard.

Vektorbündel über $\mathcal{M}$

Definition

Ein Vektorbündel über $\mathcal{M}$, das als iterierte Erweiterung von Geradenbündeln entsteht, heißt standard.

Vektorbündel über $\mathcal{M}$

Definition

Ein Vektorbündel über $\mathcal{M}$, das als iterierte Erweiterung von Geradenbündeln entsteht, heißt standard.

Vektorbündel über $\mathcal{M}$

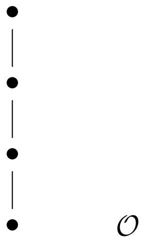
Definition

Ein Vektorbündel über $\mathcal{M}$, das als iterierte Erweiterung von Geradenbündeln entsteht, heißt standard.

Ein Beispiel auf $\mathcal{M}_{(3)}$

Definition

Ein Vektorbündel über $\mathcal{M}$, das als iterierte Erweiterung von Geradenbündeln entsteht, heißt standard.

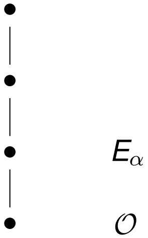


Ein Beispiel auf $\mathcal{M}_{(3)}$

Vektorbündel über $\mathcal{M}$

Definition

Ein Vektorbündel über $\mathcal{M}$, das als iterierte Erweiterung von Geradenbündeln entsteht, heißt standard.



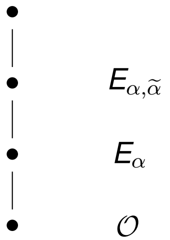
Ein Beispiel auf $\mathcal{M}_{(3)}$

$$0 \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow E_\alpha \longrightarrow \omega^{\otimes -2} \longrightarrow 0$$

Vektorbündel über $\mathcal{M}$

Definition

Ein Vektorbündel über $\mathcal{M}$, das als iterierte Erweiterung von Geradenbündeln entsteht, heißt standard.



Ein Beispiel auf $\mathcal{M}_{(3)}$

$$0 \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow E_\alpha \longrightarrow \omega^{\otimes -2} \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow E_\alpha \longrightarrow E_{\alpha,\widetilde{\alpha}} \longrightarrow \omega^{\otimes -4} \longrightarrow 0$$

Vektorbündel über $\mathcal{M}$

Definition

Ein Vektorbündel über $\mathcal{M}$, das als iterierte Erweiterung von Geradenbündeln entsteht, heißt standard.

Über $\mathbb{Z}_{(p)}$ — M.

- Für $p > 3$ ist jedes Standard-Vektorbündel über $\mathcal{M}_{(p)}$ eine Summe von Geradenbündeln.

Vektorbündel über $\mathcal{M}$

Definition

Ein Vektorbündel über $\mathcal{M}$, das als iterierte Erweiterung von Geradenbündeln entsteht, heißt standard.

Über $\mathbb{Z}_{(p)}$ — M.

- Für $p > 3$ ist jedes Standard-Vektorbündel über $\mathcal{M}_{(p)}$ eine Summe von Geradenbündeln.
- Über $\mathcal{M}_{(3)}$ ist jedes Standard-Vektorbündel Summe von ω^k, $E_\alpha \otimes \omega^k$ und $E_{\alpha,\widetilde{\alpha}} \otimes \omega^k$.

Vektorbündel über $\mathcal{M}$

Definition

Ein Vektorbündel über $\mathcal{M}$, das als iterierte Erweiterung von Geradenbündeln entsteht, heißt standard.

Über $\mathbb{Z}_{(p)}$ — M.

- Für $p > 3$ ist jedes Standard-Vektorbündel über $\mathcal{M}_{(p)}$ eine Summe von Geradenbündeln.
- Über $\mathcal{M}_{(3)}$ ist jedes Standard-Vektorbündel Summe von ω^k, $E_\alpha \otimes \omega^k$ und $E_{\alpha,\widetilde{\alpha}} \otimes \omega^k$.
- Über $\mathcal{M}_{(2)}$ gibt es unzerlegbare Vektorbündel von beliebig hohem Rang.

E_∞-Ringe

$\boxed{E_\infty\text{-Ringe}}$

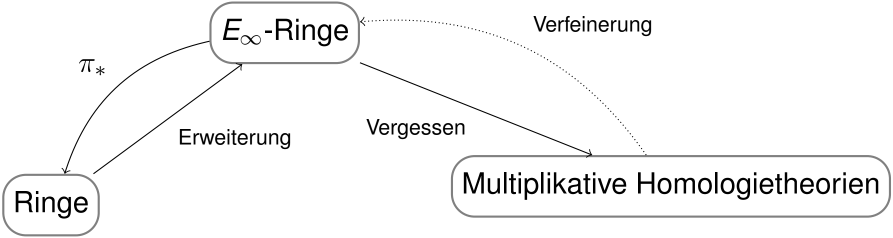
E_∞-Ringe

$$\begin{tikzcd}
\boxed{E_\infty\text{-Ringe}} \arrow[dr, "\text{Vergessen}"'] & \\
& \boxed{\text{Multiplikative Homologietheorien}} \arrow[ul, dotted, bend right, "\text{Verfeinerung}"']
\end{tikzcd}$$

E_∞-Ringe

$$
\begin{tikzcd}
 & E_\infty\text{-Ringe} \arrow[dl, bend right, "\pi_*"'] \arrow[dr, "\text{Vergessen}"] & \\
\text{Ringe} \arrow[ur, "\text{Erweiterung}"'] & & \text{Multiplikative Homologietheorien} \arrow[ul, dotted, bend right, "\text{Verfeinerung}"']
\end{tikzcd}
$$

E_∞-Ringe



Ring R $\longmapsto$ Singuläre Homologie mit Koeffizienten in R

Derivierter Modulstack von elliptischen Kurven

- Man kann einen derivierten Modulstack von elliptischen Kurven $\mathcal{M}^{top}$ definieren, so dass $\mathcal{M}^{top}(R)$ für jeden E_∞-Ring R der Raum von (orientierten) derivierten elliptischen Kurven über R ist. (Goerss–Hopkins–Miller, Lurie)

Derivierter Modulstack von elliptischen Kurven

- Man kann einen derivierten Modulstack von elliptischen Kurven $\mathcal{M}^{top}$ definieren, so dass $\mathcal{M}^{top}(R)$ für jeden E_∞-Ring R der Raum von (orientierten) derivierten elliptischen Kurven über R ist. (Goerss–Hopkins–Miller, Lurie)
- $\mathcal{M}^{top}$ ist der Modulstack von elliptischen Kurven mit einer Garbe von E_∞-Ringen $\mathcal{O}^{top}$ mit $\pi_{2n}\mathcal{O}^{top} = \omega^{\otimes n}$.

Derivierter Modulstack von elliptischen Kurven

- Man kann einen derivierten Modulstack von elliptischen Kurven $\mathcal{M}^{top}$ definieren, so dass $\mathcal{M}^{top}(R)$ für jeden E_∞-Ring R der Raum von (orientierten) derivierten elliptischen Kurven über R ist. (Goerss–Hopkins–Miller, Lurie)
- $\mathcal{M}^{top}$ ist der Modulstack von elliptischen Kurven mit einer Garbe von E_∞-Ringen $\mathcal{O}^{top}$ mit $\pi_{2n}\mathcal{O}^{top} = \omega^{\otimes n}$.

$$\Gamma(\mathcal{O}^{top}) = TMF$$

E_∞-Ring der topologischen Modulformen

$$\Gamma(\omega^{\otimes *}) = MF_*$$

Ring der ganzzahligen Modulformen

Derivierter Modulstack von elliptischen Kurven

- Man kann einen derivierten Modulstack von elliptischen Kurven $\mathcal{M}^{top}$ definieren, so dass $\mathcal{M}^{top}(R)$ für jeden E_∞-Ring R der Raum von (orientierten) derivierten elliptischen Kurven über R ist. (Goerss–Hopkins–Miller, Lurie)
- $\mathcal{M}^{top}$ ist der Modulstack von elliptischen Kurven mit einer Garbe von E_∞-Ringen $\mathcal{O}^{top}$ mit $\pi_{2n}\mathcal{O}^{top} = \omega^{\otimes n}$.

$$\Gamma(\mathcal{O}^{top}) = TMF \qquad \pi_* TMF \longrightarrow \Gamma(\omega^{\otimes *}) = MF_*$$

E_∞-Ring der topologischen Modulformen

Ring der ganzzahligen Modulformen

Derivierter Modulstack von elliptischen Kurven

- Man kann einen derivierten Modulstack von elliptischen Kurven $\mathcal{M}^{top}$ definieren, so dass $\mathcal{M}^{top}(R)$ für jeden E_∞-Ring R der Raum von (orientierten) derivierten elliptischen Kurven über R ist. (Goerss–Hopkins–Miller, Lurie)
- $\mathcal{M}^{top}$ ist der Modulstack von elliptischen Kurven mit einer Garbe von E_∞-Ringen $\mathcal{O}^{top}$ mit $\pi_{2n}\mathcal{O}^{top} = \omega^{\otimes n}$.

$\Gamma(\mathcal{O}^{top}) = TMF$

E_∞-Ring der topologischen Modulformen

$$\pi_* TMF \longrightarrow \Gamma(\omega^{\otimes *}) = MF_*$$

Ring der ganzzahligen Modulformen

Isomorphismus nach Tensorieren mit $\mathbb{Z}[\frac{1}{6}]$

Derivierter Modulstack von elliptischen Kurven

- Man kann einen derivierten Modulstack von elliptischen Kurven $\mathcal{M}^{top}$ definieren, so dass $\mathcal{M}^{top}(R)$ für jeden E_∞-Ring R der Raum von (orientierten) derivierten elliptischen Kurven über R ist. (Goerss–Hopkins–Miller, Lurie)
- $\mathcal{M}^{top}$ ist der Modulstack von elliptischen Kurven mit einer Garbe von E_∞-Ringen $\mathcal{O}^{top}$ mit $\pi_{2n}\mathcal{O}^{top} = \omega^{\otimes n}$.

$\Gamma(\mathcal{O}^{top}) = TMF$ $\qquad$ $\pi_* TMF \longrightarrow \Gamma(\omega^{\otimes *}) = MF_*$

E_∞-Ring der topologischen Modulformen

Ring der ganzzahligen Modulformen

Isomorphismus nach Tensorieren mit $\mathbb{Z}[\frac{1}{6}]$

$\pi_* TMF$ enthält aber 2- und 3-Torsion!

Elliptische Homologie

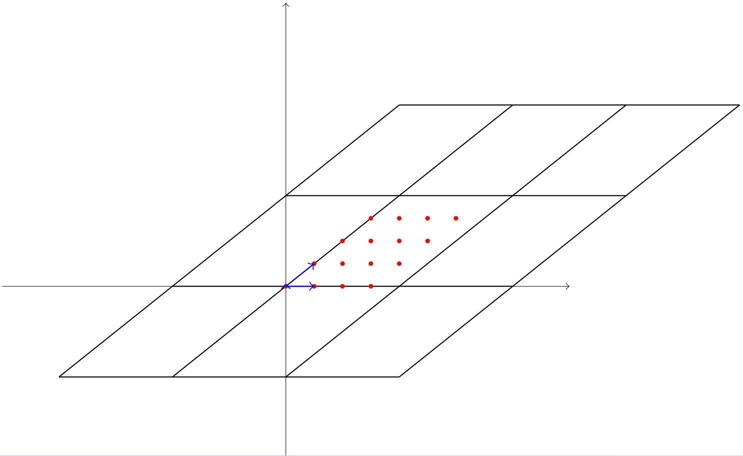
- $\mathcal{O}^{top}$ ausgewertet auf Spec $R \longrightarrow \mathcal{M}$ ($\widehat{=}$ Ring R + elliptischer Kurve darüber) ist eine sogenannte elliptische Homologietheorie.

Elliptische Homologie

- $\mathcal{O}^{top}$ ausgewertet auf Spec $R \longrightarrow \mathcal{M}$ ($\widehat{=}$ Ring R + elliptischer Kurve darüber) ist eine sogenannte elliptische Homologietheorie.
- Beispiel: $TMF(4) = \mathcal{O}^{top}(\mathcal{M}(4))$

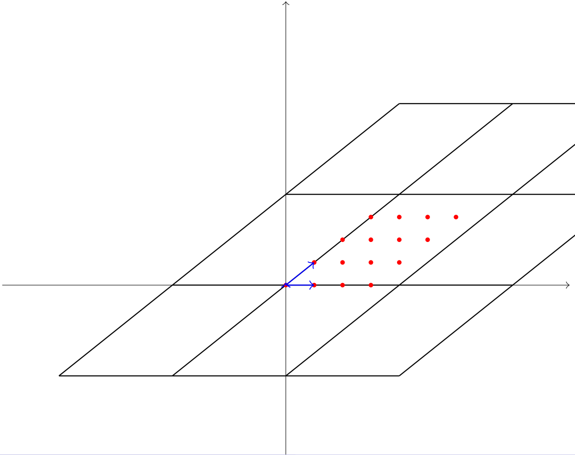
Elliptische Homologie

- $\mathcal{O}^{top}$ ausgewertet auf Spec $R \longrightarrow \mathcal{M}$ ($\widehat{=}$ Ring R + elliptischer Kurve darüber) ist eine sogenannte elliptische Homologietheorie.
- Beispiel: $TMF(4) = \mathcal{O}^{top}(\mathcal{M}(4))$



Elliptische Homologie

- $\mathcal{O}^{top}$ ausgewertet auf Spec $R \longrightarrow \mathcal{M}$ ($\widehat{=}$ Ring R + elliptischer Kurve darüber) ist eine sogenannte elliptische Homologietheorie.
- Beispiel: $TMF(4) = \mathcal{O}^{top}(\mathcal{M}(4))$
- $R = \pi_0 TMF(4) = \mathbb{Z}[\frac{1}{2}, i][\sigma^{\pm 1}, (\sigma^4 - 1)^{-1}]$



Vektorbündel II

2. Frage

Kann man Vektorbündel auf dem derivierten Modulstack von elliptischen Kurven klassifizieren?

Vektorbündel II

2. Frage

Kann man Vektorbündel auf dem derivierten Modulstack von elliptischen Kurven klassifizieren?

$$\begin{tikzcd} & \text{Derivierte Vektorbündel} \arrow[dl, "\pi_*"'] \arrow[dr, "\Gamma"] & \\ \text{Vektorbündel auf } \mathcal{M} & & \mathit{TMF}\text{-Moduln} \end{tikzcd}$$

Vektorbündel II

2. Frage

Kann man Vektorbündel auf dem derivierten Modulstack von elliptischen Kurven klassifizieren?

$$
\begin{tikzcd}
& \text{Derivierte Vektorbündel} \arrow[dl, "\pi_*"'] \arrow[dr, "\Gamma"] & \\
\text{Vektorbündel auf } \mathcal{M} & & \mathit{TMF}\text{-Moduln}
\end{tikzcd}
$$

Bild “relativ frei”

Relativ freie Moduln

Relativ freie Moduln

Ein endlicher $TMF_{(p)}$-Modul M heißt relativ frei, wenn $M \wedge_{TMF} TMF(4)$ ein freier $TMF(4)$-Modul ist (für $p > 2$).

Relativ freie Moduln

Relativ freie Moduln

Ein endlicher $TMF_{(p)}$-Modul M heißt relativ frei, wenn $M \wedge_{TMF} TMF(4)$ ein freier $TMF(4)$-Modul ist (für $p > 2$).

Satz (M.)

Die (Homotopie-)kategorie von Vektorbündeln über $\mathcal{M}^{top}_{(p)}$ ist äquivalent zu relativ freien $TMF_{(p)}$-Moduln (für $p > 2$).

Relativ freie Moduln

Relativ freie Moduln

Ein endlicher $TMF_{(p)}$-Modul M heißt relativ frei, wenn $M \wedge_{TMF} TMF(4)$ ein freier $TMF(4)$-Modul ist (für $p > 2$).

Satz (M.)

Die (Homotopie-)kategorie von Vektorbündeln über $\mathcal{M}_{(p)}^{top}$ ist äquivalent zu relativ freien $TMF_{(p)}$-Moduln (für $p > 2$).

Für $p > 3$

Sei $\mathcal{E}$ ein (deriviertes) Vektorbündel auf $\mathcal{M}_{(p)}^{top}$, so dass $\pi_*\mathcal{E}$ Standard-Vektorbündel auf $\mathcal{M}$ sind. Dann ist $\mathcal{E}$ eine Summe von $\Sigma^k \mathcal{O}^{top}$.

Typen von relativ freien Moduln

Auf- und Abbau

- Wenn M ein relativ freier Modul und $a \in \pi_* M$ Torsion ist, ist Kegel($\Sigma^{|a|} TMF \xrightarrow{a} M$) ein relativ freier Modul mit Rang 1 höher.

Typen von relativ freien Moduln

Auf- und Abbau

- Wenn M ein relativ freier Modul und $a \in \pi_* M$ Torsion ist, ist Kegel($\Sigma^{|a|} TMF \xrightarrow{a} M$) ein relativ freier Modul mit Rang 1 höher.
- Es gibt eine Abbildung $\Sigma^{|x|} TMF \longrightarrow M$, deren Kegel ein relativ freier Modul mit Rang um 1 niedriger ist.

Typen von relativ freien Moduln

Auf und Abbau

- Abkegeln von Torsionselementen $\rightsquigarrow$ Rang +1
- Töten eines Erzeugers $\rightsquigarrow$ Rang -1

Typen von relativ freien Moduln

Auf und Abbau

- Abkegeln von Torsionselementen $\rightsquigarrow$ Rang +1
- Töten eines Erzeugers $\rightsquigarrow$ Rang -1

Abkegeln von Torsionselementen

$\bullet \qquad \Sigma^{?} TMF$

Typen von relativ freien Moduln

Auf und Abbau

- Abkegeln von Torsionselementen $\rightsquigarrow$ Rang +1
- Töten eines Erzeugers $\rightsquigarrow$ Rang -1

Abkegeln von Torsionselementen

$\Sigma^{?} TMF$

Typen von relativ freien Moduln

Auf und Abbau

- Abkegeln von Torsionselementen $\rightsquigarrow$ Rang +1
- Töten eines Erzeugers $\rightsquigarrow$ Rang -1

Abkegeln von Torsionselementen

$\Sigma^{?}\,TMF$

Typen von relativ freien Moduln

Auf und Abbau

- Abkegeln von Torsionselementen $\rightsquigarrow$ Rang +1
- Töten eines Erzeugers $\rightsquigarrow$ Rang -1

Abkegeln von Torsionselementen

$\Sigma^{?} TMF$

Typen von relativ freien Moduln

Auf und Abbau

- Abkegeln von Torsionselementen $\rightsquigarrow$ Rang +1
- Töten eines Erzeugers $\rightsquigarrow$ Rang -1

Abkegeln von Torsionselementen

$\Sigma^{?}\,TMF$

Typen von relativ freien Moduln

Auf und Abbau

- Abkegeln von Torsionselementen $\rightsquigarrow$ Rang +1
- Töten eines Erzeugers $\rightsquigarrow$ Rang -1

Abkegeln von Torsionselementen

Haken-Moduln

$\Sigma^{?} TMF$

Typen von relativ freien Moduln

Auf und Abbau

- Abkegeln von Torsionselementen $\rightsquigarrow$ Rang +1
- Töten eines Erzeugers $\rightsquigarrow$ Rang -1

Abkegeln von Torsionselementen

$\Sigma^{?}\mathit{TMF}$

Haken-Moduln

Typen von relativ freien Moduln

Auf und Abbau

- Abkegeln von Torsionselementen $\rightsquigarrow$ Rang +1
- Töten eines Erzeugers $\rightsquigarrow$ Rang -1

Abkegeln von Torsionselementen

$\Sigma^{?} TMF$

Haken-Moduln

Typen von relativ freien Moduln

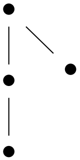
Auf und Abbau

- Abkegeln von Torsionselementen $\rightsquigarrow$ Rang +1
- Töten eines Erzeugers $\rightsquigarrow$ Rang -1

Abkegeln von Torsionselementen

$\Sigma^? TMF$

Haken-Moduln



Typen von relativ freien Moduln

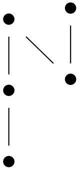
Auf und Abbau

- Abkegeln von Torsionselementen $\rightsquigarrow$ Rang +1
- Töten eines Erzeugers $\rightsquigarrow$ Rang -1

Abkegeln von Torsionselementen

$\Sigma^? TMF$

Haken-Moduln



Typen von relativ freien Moduln

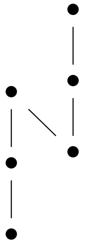
Auf und Abbau

- Abkegeln von Torsionselementen $\rightsquigarrow$ Rang +1
- Töten eines Erzeugers $\rightsquigarrow$ Rang -1

Abkegeln von Torsionselementen

$\Sigma^? TMF$

Haken-Moduln



Typen von relativ freien Moduln

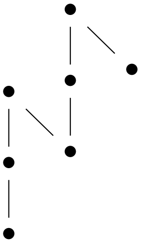
Auf und Abbau

- Abkegeln von Torsionselementen $\rightsquigarrow$ Rang +1
- Töten eines Erzeugers $\rightsquigarrow$ Rang -1

Abkegeln von Torsionselementen

$\Sigma^? TMF$

Haken-Moduln



Typen von relativ freien Moduln

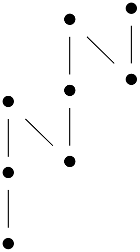
Auf und Abbau

- Abkegeln von Torsionselementen $\rightsquigarrow$ Rang +1
- Töten eines Erzeugers $\rightsquigarrow$ Rang -1

Abkegeln von Torsionselementen

$\Sigma^? TMF$

Haken-Moduln



Typen von relativ freien Moduln

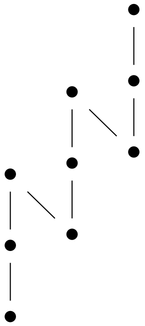
Auf und Abbau

- Abkegeln von Torsionselementen $\rightsquigarrow$ Rang +1
- Töten eines Erzeugers $\rightsquigarrow$ Rang -1

Abkegeln von Torsionselementen

$\Sigma^{?}TMF$

Haken-Moduln



Eine Klassifikation von relativ freien Moduln?

Theorem (Haken-Theorem, M.)

Sei M ein relativ freier $TMF_{(3)}$-Modul und $\mathcal{F}_M$ das assoziierte derivierte Vektorbündel. Wenn $\pi_*\mathcal{F}_M$ Standard-Vektorbündel sind, dann ist M ein Haken-Modul.

Eine Klassifikation von relativ freien Moduln?

Theorem (Haken-Theorem, M.)

Sei M ein relativ freier $TMF_{(3)}$-Modul und $\mathcal{F}_M$ das assoziierte derivierte Vektorbündel. Wenn $\pi_*\mathcal{F}_M$ Standard-Vektorbündel sind, dann ist M ein Haken-Modul.

- Haken-Moduln können im Prinzip bis zu jedem endlichen Rang klassifiziert werden. Insbesondere gibt es von jedem gegebenen Rang nur endlich viele Haken-Moduln.

Eine Klassifikation von relativ freien Moduln?

Theorem (Haken-Theorem, M.)

Sei M ein relativ freier $TMF_{(3)}$-Modul und $\mathcal{F}_M$ das assoziierte derivierte Vektorbündel. Wenn $\pi_*\mathcal{F}_M$ Standard-Vektorbündel sind, dann ist M ein Haken-Modul.

- Haken-Moduln können im Prinzip bis zu jedem endlichen Rang klassifiziert werden. Insbesondere gibt es von jedem gegebenen Rang nur endlich viele Haken-Moduln.
- Es scheint unendlich viele unzerlegbare Haken-Moduln zu geben.

Eine Klassifikation von relativ freien Moduln?

Theorem (Haken-Theorem, M.)

Sei M ein relativ freier $TMF_{(3)}$-Modul und $\mathcal{F}_M$ das assoziierte derivierte Vektorbündel. Wenn $\pi_*\mathcal{F}_M$ Standard-Vektorbündel sind, dann ist M ein Haken-Modul.

- Haken-Moduln können im Prinzip bis zu jedem endlichen Rang klassifiziert werden. Insbesondere gibt es von jedem gegebenen Rang nur endlich viele Haken-Moduln.
- Es scheint unendlich viele unzerlegbare Haken-Moduln zu geben.

Danke für Ihre Aufmerksamkeit!

Eine unendliche Familie

Haben Torsionselement $\beta \in \pi_{10}\mathit{TMF} \rightsquigarrow \beta^2, \beta^3, \beta^4 \in \pi_*\mathit{TMF}$.

Eine unendliche Familie

Haben Torsionselement $\beta \in \pi_{10}$*TMF* $\rightsquigarrow \beta^2, \beta^3, \beta^4 \in \pi_*$*TMF*.

- *TMF*

Eine unendliche Familie

Haben Torsionselement $\beta \in \pi_{10} TMF \rightsquigarrow \beta^2, \beta^3, \beta^4 \in \pi_* TMF$.

$$\begin{array}{lll} \bullet & & X_2 \\ \big| \, \beta^3 & & \\ \bullet & & TMF \end{array}$$

Eine unendliche Familie

Haben Torsionselement $\beta \in \pi_{10} TMF \rightsquigarrow \beta^2, \beta^3, \beta^4 \in \pi_* TMF$.

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[d, dash, "\beta^4"] & X_3 \\
\bullet \arrow[d, dash, "\beta^3"] & X_2 \\
\bullet & TMF
\end{tikzcd}$$

Eine unendliche Familie

Haben Torsionselement $\beta \in \pi_{10} \mathit{TMF} \rightsquigarrow \beta^2, \beta^3, \beta^4 \in \pi_* \mathit{TMF}$.

$$\begin{tikzcd}[row sep=large]
\bullet \arrow[d, dash, "\beta^3"] & X_4 \\
\bullet \arrow[d, dash, "\beta^4"] & X_3 \\
\bullet \arrow[d, dash, "\beta^3"] & X_2 \\
\bullet & \mathit{TMF}
\end{tikzcd}$$

Eine unendliche Familie

Haben Torsionselement $\beta \in \pi_{10} \mathit{TMF} \rightsquigarrow \beta^2, \beta^3, \beta^4 \in \pi_* \mathit{TMF}$.

$$\begin{array}{ll} \bullet & X_5 \\ \big| \beta^4 & \\ \bullet & X_4 \\ \big| \beta^3 & \\ \bullet & X_3 \\ \big| \beta^4 & \\ \bullet & X_2 \\ \big| \beta^3 & \\ \bullet & \mathit{TMF} \end{array}$$

Eine unendliche Familie

Haben Torsionselement $\beta \in \pi_{10} \mathit{TMF} \rightsquigarrow \beta^2, \beta^3, \beta^4 \in \pi_* \mathit{TMF}$.

$$\begin{tikzcd}[row sep=small]
{} \arrow[d, dash, "\beta^3"] & \\
\bullet \arrow[d, dash, "\beta^4"] & X_5 \\
\bullet \arrow[d, dash, "\beta^3"] & X_4 \\
\bullet \arrow[d, dash, "\beta^4"] & X_3 \\
\bullet \arrow[d, dash, "\beta^3"] & X_2 \\
\bullet & \mathit{TMF}
\end{tikzcd}$$

Eine unendliche Familie

Haben Torsionselement $\beta \in \pi_{10} \mathit{TMF} \rightsquigarrow \beta^2, \beta^3, \beta^4 \in \pi_* \mathit{TMF}$.

$$\begin{array}{ll}
\big|\, \beta^3 & \\
\bullet & X_5 \\
\big|\, \beta^4 & \\
\bullet & X_4 \\
\big|\, \beta^3 & \\
\bullet & X_3 \\
\big|\, \beta^4 & \\
\bullet & X_2 \\
\big|\, \beta^3 & \\
\bullet & \mathit{TMF}
\end{array}$$

- X_k ist nicht zerlegbar in Moduln vom kleineren Rang, die durch Abkegeln von Torsionselement von $\Sigma^? \mathit{TMF}$ entstehen.

Eine unendliche Familie

Haben Torsionselement $\beta \in \pi_{10} TMF \rightsquigarrow \beta^2, \beta^3, \beta^4 \in \pi_* TMF$.

$$
\begin{tikzcd}[row sep=small]
{} \arrow[d, dash, "\beta^3"] & \\
\bullet \arrow[d, dash, "\beta^4"] & X_5 \\
\bullet \arrow[d, dash, "\beta^3"] & X_4 \\
\bullet \arrow[d, dash, "\beta^4"] & X_3 \\
\bullet \arrow[d, dash, "\beta^3"] & X_2 \\
\bullet & TMF
\end{tikzcd}
$$

- X_k ist nicht zerlegbar in Moduln vom kleineren Rang, die durch Abkegeln von Torsionselement von $\Sigma^? TMF$ entstehen.
- Falls X_k zerlegbar ist, dann in Haken-Moduln.