Kant en Keus, Antinomie en Axioma
Een Ontogenese van de Paradox van Banach & Tarski

THEKLA TEUNIS EN F.A. MULLER

1. Preambule: Appelschillen en Kanonskogels

Men neme een appel. Schil de appel zodanig dat er drie losse stukken schil ontstaan. Pak een enkel stuk schil en bedek de geschilde appel met dit enkele stuk schil. Past niet? Het is *bewezen* dat het wel past. Mits je *heel speciaal* schilt.

Toegegeven, in de fysische wereld waarin wij dolen, denken en dansen is dit niet mogelijk, maar in de wiskundige wereld is dit zeer wel mogelijk. Deze wiskundige mogelijkheid heet de *Paradox van Banach & Tarski*, vernoemd naar de bekende Poolse wiskundige Stefan Banach en zijn nog veel bekendere landgenoot, de logicus-wiskundige Alfred Tarski; in 1924 bewezen zij gezamenlijk een stelling — *de Stelling van Banach & Tarski* (StBT) —, waarvan het paradoxale appelgeschil een bijzonder geval is. *Hoe* men de schil weer op de appel moet leggen, dat vertellen StBT en haar bewijs ons helaas niet; StBT vertelt ons alleen *dat* het wiskundig kan. Een ander bijzonder geval is dat men een kanonskogel in vijf stukken kan klieven, die vervolgens weer aan elkaar kan hechten zodanig dat er *twee* kanonskogels onstaan, ieder met een straal gelijk aan die van de oorspronkelijke kanonskogel. Mits je *heel speciaal* klieft. Ook niet te verwerkelijken in de wereld waarin wij zingen, zappen en zoenen. Wel in een wereld van abstracte objecten.

Welke ingrediënten zijn benodigd ten einde StBT te bereiden? Is het *te begrijpen* dat de zuivere wiskunde deze paradoxale stelling voortbrengt?

Wij denken van wel. We zullen zien dat het zogenaamde *KeusAxioma* (KA), dat in 1904 door Ernst Zermelo is ingevoerd — of althans expliciet is gemaakt — de bron is van de paradox.[1] Bertrand Russell ontdekte een wiskundig equivalente versie in hetzelfde jaar.[2] Dit axioma veroorzaakte terstond wat vermoedelijk het levendigste debat is geweest dat ooit over een axioma tussen wiskundigen is gevoerd. Abraham Fraenkel, bekend verzamelingstheoreticus van het eerste uur, heeft ooit gezegd dat KA het meest besproken axioma is sinds het Parallellen-Axioma uit *De Elementen* van Euklides (omstreeks 2300 jaar geleden). Het droogleggen van de bron van de Paradox van Banach & Tarski zou echter enorme delen van de wiskunde doen afsterven, zodat uiteindelijk voor de overweldigende meerderheid der

[1]Ten overvloede, correct Nederlands is *keus* (enkelvoud) en *keuzen* (meervoud), zoals het ook is 'neus' en 'neuzen', en 'reus' en 'reuzen' — en pertinent niet 'keuze' en 'keuzes' (taalverslonsing), zoals het immers ook niet is: 'neuze' en 'neuzes'. Bij samenstellingen van 'keus' verandert 'kies' in 'keuze' indien het opvolgende woord met een medeklinker begint, zoals in 'keuzemoment' en 'keuzemogelijkheid', en zelfs dan niet altijd, vgl. 'neusveroudheid'. Het woord 'axioma' begint echter met een klinker, en daarom is 'keusaxioma' corrext, en niet 'keuze-axioma', waarvan de uitspraak juist een struikelblok is, en bij snelle spraak *nota bene* vanzelf overvloeit in *keusaxioma*.

[2]Moore (1982: 2–3, 132). Wiskundige beweringen P en Q heten *(wiskundig) equivalent* desda 'P desda Q' bewijsbaar is in de relevante theorie (waarvoor in dit geval de verzamelingstheorie Z voldoende is — *lege infra* voor wat theorie 'Z' is.

wiskundigen de drooglegging van KA geen optie was. Het debat over KA lijkt eerder op pragmatische dan op principiële gronden beslecht.

Wij gaan op zoek naar een antwoord op de vraag hoe het mogelijk is dat een alleszins plausibel wiskundig axioma (KA) leidt tot paradoxen. Het raamwerk waarbinnen wij zoeken, en menen te vinden, is de kritische filosofie van Immanuel Kant. We argumenteren dat men KA kan beschouwen als de these van een 'vijfde antinomie' van Kant. Evenmin als debatten over menselijke vrijheid versus natuurlijke noodzaak, en over de oneindigheid versus de eindigheid van de wereld zijn te beslechten op basis van het verstand of de ervaring, zal het debat over KA versus ¬KA dat zijn, omdat zowel these als antithese de grenzen van ons kenvermogen overschrijden. Deze kentheoretische onbeslisbaarheid kenmerkt immers alle Kantiaanse antinomiëen.

Eerst zullen we dadelijk de broodnodige begripsbepalingen en context geven van de wiskunde (§§ 1–4), van de kritische filosofie van Kant (§ 5, § 7), van de Kantiaanse visie op de wiskunde (§ 6), en van ons Kantiaanse antwoord op de hoofdvraag hoe de paradox van Banach & Tarski mogelijk is (§ 8, § 9).

2. Kiezen en Goed-Ordenen

In 1900 gaf toenmalige *princeps mathematicorum* David Hilbert te Parijs een wereldberoemde lezing. In deze lezing presenteerde hij de grootste onopgeloste problemen van de wiskunde, die een uitdaging moesten zijn voor de wiskundigen van de aangebroken 20ste eeuw. Eén van de breinbrekers was de vraag of iedere verzameling *goed-geordend* kan worden. Het *Goede-OrdeningsBeginsel* (GOB) stelt dit altijd kan. Georg Cantor, de grondlegger van de verzamelingsleer en de wiskundige theorie van het oneindige, had als eerste, in 1883, GOB als een *Denkgesetz* onder de aandacht gebracht, dat hij regelmatig aanwendde in zijn bewijzen; in het laatste decennium van de 19de Eeuw beoordeelde Cantor GOB niet langer als een 'denkwet', want hij trachtte GOB (vergeefs) te bewijzen.

Voordat we onze denkweg vervolgen, eerst ter herinnering enkele definities. Een *ordening* op een verzameling X is een relatie tussen elementen van X. Een *lineaire ordening* $\prec$ op X is een relatie die irreflexief, transitief en *totaal* is (ieder tweetal elementen $a, b \in X$ is gerelateerd: $a \prec b$ of $b \prec a$). Heeft X een totale ordening '$\prec$' en een element, zeg b, zodanig dat $b \prec a$ voor alle $a \in X$, dan noemt men b de *bodem van* $\prec$ *in* X, of ook wel het *begin-element van* $\prec$ *in* X. Ten slotte is X *goed-geordend* desda X een lineair geordend is zodanig dat iedere deelverzameling van X een bodem heeft.[3]

Een bekend voorbeeld van een lineaire ordening is de relatie 'kleiner dan' ($<$) op de reële getallen ($\mathbb{R}$), en van een goede-ordening dezelfde relatie maar nu op de natuurlijke getallen ($\mathbb{N}$): je kunt ze op een lijn rangschikken (vandaar de terminologie 'linear'). De natuurlijke getallen zijn inderdaad te rangschikken zodanig dat de rangschikking ergens begint: $0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ (0 is de $<$-bodem); en dit geldt uiteraard ook voor iedere deelverzameling van $\mathbb{N}$ (het kleinste getal in die deelverzameling is dan de $<$-bodem). Een probleem ontstaat wanneer we proberen

[3]Engels: *well-ordered*. De Anglicismen 'welordening' en 'welgeordend', gebezigd door mensen die denken dat het Engelse bijwoord *well* dezelfde betekenis heeft als het Nederlandse 'wel', bezigen wij niet, omdat wij deze denkfout niet wensen te begaan.

een open deelverzameling van $\mathbb{R}$ goed te ordenen met de relatie '$<$'. Neem bijvoorbeeld het open interval $(0,1) \subset \mathbb{R}$. We moeten proberen een kleinste element in $(0,1)$ aan te wijzen. Voor ieder bijzonder klein positief reëel getal $x \in (0,1)$ kunnen we echter een nog kleiner getal $x/2 < x$ vinden, dat ook in $(0,1)$ ligt. De relatie '$<$' is geen goede-ordening op $(0,1)$. Hilbert:

> De vraag rijst nu of het geheel van alle [reële] getallen niet op een andere manier geordend kan worden zodanig dat iedere deelverzameling een eerste element heeft, d.w.z. of het continuüm beschouwd kan worden als een goedgeordende verzameling — een vraag waarvan Cantor denkt dat ze met 'Ja' moet worden beantwoord. Het lijkt mij uiterst wenselijk om een direct bewijs van deze opmerkelijke bewering van Cantor te vinden, wellicht door een feitelijke rangschikking van de getallen te geven, zodat in iedere deelverzameling een eerste getal kan worden aangewezen.[4]

In 1904 slaagde Zermelo, een ex-leerling en medewerker van Hilbert te Göttingen, erin GOB te bewijzen. Zermelo gebruikte een praemisse die men spoedig 'het KeusAxioma' (KA) zou gaan noemen. Zijn bewijs was niet triviaal.[5] Het bewijs van de omgekeerde bewering is wel triviaal, zoals we aanstonds zullen zien, nadat we KA uiteen hebben gezet.

Stel je staat voor de wand met glazen snoeppotten bij Jamin. Een snoepje kan niet in meerdere potten tegelijk zitten; de snoeppotten heten dan 'disjunct' te zijn.[6] Je kunt uit iedere pot een enkel snoepje kiezen en in een zakje stoppen. Dat zakje is dan een zogenaamde *keuzeverzameling* van de familie van snoeppotten. In de taal van de verzamelingsleer:

Het KeusAxioma (KA). *Voor iedere familie (verzameling) X van disjuncte en niet-lege verzamelingen, bestaat er een verzameling K_X, een zogenaamde keuzeverzameling van X, die van ieder familielid $A \in X$ precies een enkel element bevat en niets meer.* (1)

Voor iedere verzameling $A \in X$ geldt dan $A \cap K_X = \{a\}$, waarin a dat enkele gekozen element uit A is dat A met de keuzeverzameling K_X deelt. Een andere formulering van KA luidt als volgt: iedere familie X van (niet-lege) verzamelingen heeft een *keuzefunctie*, d.w.z. een functie f die aan iedere verzameling $A \in X$ een element $f(A)$ uit A toekent: $A \mapsto f(A) \in A$. Een niet-verzamelingstheoretische formulering van KA is de volgende, in de taal van de categorieleer: ieder epimorfisme heeft een rechter-inverse.[7]

Dat het Goede-OrdeningsBeginsel (GOB) voldoende is voor KA, kunnen we eenvoudig inzien. Als *iedere* verzameling een goede-ordening heeft, dan ook ieder familielid $A \in X$, dat immers zelf ook een verzameling is. Dan heeft A een bodem en die bodem stoppen we in een nieuwe verzameling. Dit herhalen voor ieder familielid van X ten einde al deze bodems te verzamelen. De verkregen verzameling bodems is een keuzeverzameling van X. Ergo, GOB $\longrightarrow$ KA. *Q.e.d.*

[4] Hilbert (1900), vertaald door de auteurs.

[5] Voor een bewijs van GOB, zie ieder boek over verzamelingsleer; een onvolprezen uiteenzetting in de Nederlandse taal is Van Dalen, Doets & De Swart (1975). Zie Stelling 9.2, pp. 216–218.

[6] Definitie: verzamelingen X en Y zijn *disjunct* desda hun doorsnede leeg is: $X \cap Y = \varnothing$.

[7] Mac Lane (1986: 405).

Zoals gezegd is Zermelo's bewijs van $\mathsf{KA} \longrightarrow \mathsf{GOB}$ ingewikkelder.[8] De conclusie luidt dat KA en GOB wiskundig equivalent zijn:[9]

$$\mathsf{Z} \vdash \mathsf{KA} \longleftrightarrow \mathsf{GOB}\,. \tag{2}$$

Wanneer moet men KA toepassen? Om dit uit te leggen, lenen we een fameus voorbeeld van Bertrand Russell.

Stel dat we een *oneindige* berg van paren schoenen hebben. Iemand vraagt ons of we een manier kunnen bedenken om uit ieder paar schoenen een enkele schoen te pakken ten einde een verzameling te formeren die van ieder paar een enkele schoen bevat. Het is niet moeilijk een manier te geven: pak alle linkerschoenen en gooi deze op een nieuwe berg. Hiervoor hebben we KA (1) niet nodig.

Nu dezelfde vraag voor een oneindige berg met paren sokken. Probleem. We kunnen niet alle 'linkersokken' pakken aangezien er geen verschil is tussen 'linker'- en 'rechtersokken'. Volgens KA bestaat er er ook in dit geval een keuzeverzameling van sokken. Het axioma vertelt ons niet *hoe* we moeten kiezen en dus ook niet *welke* sokken er in de keuzeverzameling zitten, alleen *dat* er van ieder paar eentje in zit. Hoe slagen we er dan in, zo kan men zich afvragen, bij Jamin een zakje te vullen met een enkel snoepje uit iedere glazen pot? Tja. We pakken *willekeurig* een snoepje uit iedere glazen pot. We denken er niet bij na. We specificeren onze keus uit iedere pot niet. Dat kunnen we desgevraagd niet eens — alle snoepjes in een pot zijn immers hetzelfde. We doen maar wat. We weten eigenlijk niet precies hoe we erin geslaagd zijn het zakje snoepgoed te vullen dat we bij de kassa staan af te rekenen. Of wacht eens even ...

Misschien steken we onze hand in de pot en pakken we het eerste de beste snoepje dat we aanraken. Toch een methode? Wel in de wereld van de fysische objecten, die we in de regel kunnen aanraken en kunnen optillen, mits niet te zwaar. Niet in de wiskundige wereld van abstracte objecten, waar niets 'aan te raken' of 'te pakken' valt.

Van KA (1) mogen we ons in de wiskundige wereld van abstracte objecten echter op dezelfde manier gedragen als in Jamin. Je hebt een verzameling X en geen benul hoe een keuzeverzameling van X te maken. Dan roep je met een ernstig gezicht KA aan, en *taraah!*, er ligt een keuzeverzameling K_X in je schoot. Wiskunde als magisch snoepgoed voor de geest. Maar niet iedereen houdt van zoet en magie. Dit brengt ons bij het debat dat onder wiskundigen over KA los barstte.

3. Het Meest Omstreden Axioma

Het bewijs van GOB op basis van KA (1) door Zermelo veroorzaakte een schok binnen de wiskundige wereld. Binnen enkele jaren hadden in gepubliceerde artikelen de volgende wiskundigen gereageerd: Bernstein, Schoenflies, Steinitz, Hamel, Hessenberg en Hausdorff in Duitsland; Baire, Borel, Fréchet, Hadamard, Lebesgue, Richard, Poincaré, Suslin en Levy in Frankrijk; Hobson, Hardy, Jourdain en Russell in Groot-Brittanië; König in Hongarije; Peano en Pieri in Italië; Brouwer in Nederland; en Keyser, Huntington en Van Vleck in de Verenigde Staten van

[8] Zie voetnoot 5.

[9] Wat theorie Z is, leggen we aanstonds uit; cf. voetnoot 2.

Amerika.[10] Een gebeurtenis in de geschiedenis van de wiskunde zonder precedent.[11] In 1926 noemde Hilbert KA “het meest aangevallen axioma in de wiskundige literatuur”.[12] Velen achtten KA een ontoelaatbare praemisse. Wel zij opgemerkt dat veel wiskundigen KA aangrepen om hun smeulende onbehagen over de verzamelingstheoretische leer van het oneindige van Cantor op te laten vlammen.

In hun hun logicistische monument *Principia Mathematica* (1910–1913), bewezen Whitehead & Russell KA voor *eindige* families van willekeurige verzamelingen ($\mathsf{KA}^{\mathrm{fin}}$).[13] Het oneindige geval (KA^{∞}) konden zij niet bewijzen en zij maakten er een gewoonte van bij iedere stelling in *Principia Mathematica* expliciet te vermelden of KA^{∞} in het bewijs was gebruikt — een gewoonte die breed navolging heeft gevonden. Op basis van de standaard-axioma’s van de verzamelingsleer, opgesteld in 1908 door Zermelo, kon niemand KA^{∞} bewijzen op basis van de overige axioma’s, ook Zermelo niet, en daarom bleef KA (1) een *axioma*. De gangbare aanduiding ‘ZFC’ van de standaard verzamelingsleer verwijst naar de axioma’s van Zermelo (Z), naar KA (in het Engels *Axiom of Choice*, vandaar de ‘C’), en nog twee extra axioma’s.[14] Eind 30er jaren van de vorige eeuw, zou Kurt Gödel definitief bewijzen dat KA consistent is toe te voegen aan ZF mits ZF consistent is; en nog wat later, in 1963, zou Paul Cohen bewijzen dat ook $\neg$KA consistent is toe te voegen, waarmee de *onafhankelijkheid* van KA van de axioma’s van ZF een onomstotelijk logisch feit was geworden.

De reikwijdte van KA bleek spoedig enorm te zijn. Zermelo wist menig criticus van KA te betrappen op stilzwijgend gebruik van KA in de eigen bewijzen. En dit was pas het begin. In de analyse, de functionaalanalyse, de topologie, de maattheorie, de grafenleer, de algebra, de tralie-theorie, de transfinitie rekenkunde en zelfs in de logica en de model-theorie, is KA onontbeerlijk gebleken. De waslijst van wiskundige stellingen die equivalent zijn aan KA, waarvan GOB de allereerste was (2), is heden ten dage nauwelijks meer te overzien. In een zeer recent overzichtswerk gewijd aan KA bevat de lijst ‘Rampen zonder KA’ een veelvoud aan stellingen in vergelijking met de lijst ‘Rampen met KA’, waarop StBT als Ramp staat geboekstaafd; en de lijst ‘Rampen zonder KA’ is flink te verlengen.[15] Wij durven te gissen dat er in de gehele wiskunde geen andere wiskundige propositie is die zoveel equivalenten heeft als KA (zie voetnoot 2). Het was en het is zowel wenselijk als noodzakelijk om KA te aanvaarden ten einde al deze equivalenten te behouden voor het corpus der wiskundige kennis. Dat KA onverwacht ook enkele wiskundige monsters baarde, waaronder StBT, dat is de prijs die de wiskundige kennelijk moet betalen voor KA.

[10] Moore (1982: 92–139).

[11] Men bedenke zich dat indertijd een fractie van het aantal wiskundigen leefde dat nu leeft. Ook was KA een onderwerp in briefwisselingen, hetgeen de lijst aan reacties verlengt. Het standaardwerk over de oorsprong, ontwikkeling en invloed van KA is Moore (1982).

[12] Aangehaald in Moore (1982: 1).

[13] Om onnaspeurbare redenen *blijft* men echter KA en niet KA^{∞} als axioma nemen, terwijl de even overbodige doch trivialer verzwakking tot families van *disjuncte* verzamelingen wel in KA (1) voor *blijft* komen.

[14] Zie Dalen, Doets en De Swart (1975) 141–153, Muller (1998) 43–45. De twee andere extra axioma’s zijn het VervangingsAxioma van Fraenkel (F) en Von Neumann, en Von Neumann’s RegulariteitsAxioma.

[15] Herrlich (2006) verlengd met *Appendix 2* van Moore (1982).

Ook is nadien gebleken dat KA in talrijke bewijzen niet nodig is; wel zijn logisch zwakkere keusaxioma's nodig om de stellingen te bewijzen. Zulke zwakkere keusaxioma's ontstaan door bijvoorbeeld beperkingen op te leggen aan de kardinaliteit van de verzamelingen die onder KA (1) vallen. Stellingen die wel het onbeperkte KA benodigen en niet op basis van zwakkere axioma's te bewijzen zijn, kunnen we misschien missen als kiespijn, hoopten critici van KA aanvankelijk. Deze hoop is echter vergeefs gebleken.

Naast wiskundige argumenten voor KA, waagden ook meer filosofische argumenten tegen KA zich in het daglicht. Het idee van 'oneindig veel keuzen' (KA^∞) die de wiskundige lijkt te moeten maken ten einde over een keuzeverzameling te beschikken, is bij nadere beschouwing vreemd. Dat men een willekeurig element uit een oneindige verzameling 'kiest' (het idee van een *variabele*), zoals in 'Kies een willekeurig natuurlijk getal $n \in \mathbb{N}$', en in 'Men neme een willekeurig punt P op de lijn ℓ', dat is begrijpelijk en in feite zo oud als de wiskunde zelf; dit behelst een enkele 'keus'. Doch KA^∞ lijkt alleen begrijpelijk in zoverre het idee van 'oneindig veel keuzen' begrijpelijk is. Niets in de wiskunde tot dan toe had een dergelijk begrijpen verlangd. Bernays heeft in dit verband over een 'ideaal wiskundig subject' gesproken.

Ten slotte wezen de Franse analisten (Lebesgue, Baire, Borel) en, om andere redenen, de Nederlandse intuïtionist Brouwer, op wat wij thans het *niet-constructieve* karakter van KA noemen. KA geeft immers geen methode om de keuzeverzameling te construeren, het postuleert louter het bestaan van *een* dergelijke verzameling. Logisch gesproken voorziet KA ons niet van een predikaat om uit te maken *welke* elementen van de familieleden uit X tot de keuzeverzameling K_X behoren. In tegenstelling tot de machtsverzameling $\mathcal{P}X$ en de verenigingsverzameling $\bigcup X$, die uniek vastliggen bij gegeven X, is dat bij K_X geenszins het geval; bij een uniek beschreven verzameling X (in de zin van Russell), zijn '$\mathcal{P}X$' en '$\bigcup X$' namen van uniek bestaande verzamelingen, terwijl 'K_X' geen naam is, doch eerder een variabele met als domein de verzameling van alle keuzeverzamelingen van X, waarvan KA alleen zegt dat die verzameling niet leeg is. Samengevat:

$$\begin{aligned} A \in \mathcal{P}X &\quad \text{desda} \quad A \subseteq X\,; \\ A \in \bigcup X &\quad \text{desda} \quad \exists Y \in X : A \in Y\,; \\ A \in K_X &\quad \text{desda} \quad \ldots A \ldots X \ldots \quad ? \end{aligned} \tag{3}$$

De conclusie luidt, met een variatie op de bekendste uitspraak van Wittgenstein: wat men niet construeren kan, daarover moet men zwijgen.[16] We rapporteren dat anno nu de constructivisten in de wiskunde een zeer kleine minderheid vormen. Blijkbaar maakt hun veto geen indruk op hun collega's.

[16] Wittgenstein (1922), slotzin van *Tractatus Logico-Philosophicus*: "Wovon man nicht sprechen kann, darüber muss man schweigen."

4. De Stelling van Banach & Tarski

De paradoxale stelling van Banach & Tarski (StBT) is slechts te bewijzen met behulp van KA. De inhoud van enkele bijzondere gevallen van StBT is uit te leggen aan een snotneus van de Lagere School; het bewijs van StBT is dat bepaald niet en vereist vertrouwdheid met verzamelingstheoretische constructies en met maattheorie op $\mathbb{R}^n$.[17] Eigenlijk is de exacte formulering van de paradoxale stelling eveneens alleen geschikt voor gevorderden; een exacte uiteenzetting hier zou echter te veel ruimte in beslag nemen, en bovendien zijn zeker niet alle exacte aspecten van belang voor het vervolg. Niettemin zullen we in deze paragraaf een exacte formulering van StBT geven, omdat enig wiskundig inzicht in hoe de paradoxale stelling tot stand is gekomen ons ter dienste zal staan bij de uiteenzetting van ons uiteindelijke Kantiaanse inzicht.[18]

Tegen het einde van de 19de eeuw onstond onder wiskundigen de behoefte aan een *maat* voor verzamelingen die fijner is dan het kardinaalgetal, dat het aantal elementen van de verzameling aanduidt. Zoals de oppervlakte van een vlak meetkundig figuur een maat is voor zijn grootte, dat tenslotte ook een verzameling is (een verzameling van punten), zal de maat van verzameling ook zoiets moeten zijn. In het bijzonder wilde de analytici een maat voor willekeurige verzamelingen van reële getallen, dus deelverzamelingen van $\mathbb{R}$. De leer der kardinaalgetallen is in dit opzicht tamelijk grof: het kardinaalgetal van $E \subseteq \mathbb{R}$ is eindig, of aftelbaar oneindig (gelijkmachtig met $\mathbb{N}$) of overaftelbaar, zoals $\mathbb{R}$ zelf. Meer smaken zijn er niet. Men wist dat het gesloten interval $[0,1] \subset \mathbb{R}$ *evenveel punten* bevat als $[0,2]$ en als $[0,2010]$, en ook als $[0,z]$, met $z > 0$ *willekeurig* groot; en piepklein interval $[0,x]$, met $x > 0$ *willekeurig* klein, bevat evenveel punten als $\mathbb{R}$ zelf. Dat is nog steeds even slikken. Zulke resulaten werden trouwens aanvankelijk ook niet zonder slag of stoot aanvaard. Toen Cantor bewees dat er evenveel punten op een lijn ($\mathbb{R}$) liggen als in het vlak ($\mathbb{R}^2$), schreef hij aan Richard Dedekind (de eerste Moore-zin op): "Ik zie het maar ik geloof het niet." Want laten we eerlijk zijn, $[0,2]$ lijkt 2 keer groter dan $[0,1]$ en $[0,2009]$ lijkt 2009 keer groter dan $[0,1]$. En dat is waar zolang we onder de 'maat' van $[a,b]$ verstaan het getal $b-a$. Dit is de zogenaamde *Lebesgue-maat* μ van het interval.

De vraag luidt nu of de Lebesgue-maat is uit te breiden van gesloten intervallen naar *alle* deelverzamelingen van $\mathbb{R}$. De uitbreiding naar open en half-open intervallen is een koud kunstje (punten hebben geen afmeting, dus maat 0, zodat een puntje meer of minder geen verschil uitmaakt voor de maat):

$$\mu(0,1] = \mu[0,1) = \mu(0,1) = \mu[0,1] = 1.$$

En voor verenigingen van disjuncte intervallen is er een voor-de-hand-liggende keus voor de som van de maten van de intervallen: de lengte van twee achter elkaar gelegde lijnstukken, zeg van $AC = AB \smile BC$, is immers de som van de lengten van AB en BC. Voor de Lebesgue-maat van onbegrensde intervallen, zoals $[0,\infty)$, en van $\mathbb{R} = (-\infty,+\infty)$ zelf, neemt men ∞. Deze uitbreidingen omvatten echter nog lang niet *alle* deelverzamelingen van $\mathbb{R}$.

---

[17] Een begrijpelijk bewijs is te vinden in Wagon (1985), dat geheel gewijd is aan StBT. Zeer weinig wiskundige proposities kunnen bogen op geheel aan hun gewijde monografieën.

[18] We putten voornamelijk uit Moore (1982: 185–188, 284–286).

In het algemeen is een *maat* m op een willekeurige verzameling X per definitie een afbeelding van een familie van deelverzamelingen van X, zeg $\mathcal{F}(X)$, naar de positieve reële getallen ($\mathbb{R}^+$) samengevoegd met 0 en ∞, zodanig dat m *additief* is, d.w.z. de maat van een vereniging van twee disjuncte familieleden is gelijk aan de som van de maten van de afzonderlijke familieleden:

$$\forall A, B \in \mathcal{F}(X) : \; A \cap B = \varnothing \;\longrightarrow\; m(A \cup B) = m(A) + m(B)\,. \tag{4}$$

Men ziet onmiddellijk dat Lebesgue-maat μ op intervallen van $\mathbb{R}$ additief is:

$$2 = \mu[0,2] = \mu\big([0,1] \cup (1,2]\big) = \mu[0,1] + \mu(1,2] = 1 + 1\,. \tag{5}$$

De veralgemenisering van additiviteit naar σ-*additiviteit* bestaat eruit dat men (4) ook eist voor aftelbaar-oneindige verenigingen: aan de rechterzijde van het =-teken in (4) komt dan een oneindige som te staan, gedefinieerd op de gebruikelijke wijze als een limiet.

De vraag naar de uitbreidbaarheid van μ naar *alle* deelverzamelingen van $\mathbb{R}$, dus of we voor het domein van μ de machtsverzameling $\mathcal{P}\mathbb{R}$ kunnen nemen, is de vraag of er *Lebesgue-onmeetbare* deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ bestaan.

In 1902 bracht Henri Lebesgue het *Maatprobleem* onder woorden: bestaat er een σ-additieve maat op $\mathbb{R}^n$ die aan congruente begrensde deelverzamelingen van $\mathbb{R}^n$ dezelfde maat geeft, en aan eenheidskubus maat 1? Men bewijst eenvoudig dat als er *geen* oplossing bestaat voor zekere n, dan ook niet voor alle $m > n$. Het Maatprobleem kwam net twee jaren te laat om op de lijst van Hilbert uit 1900 te kunnen. De wiskundige activiteit die met dit probleem aanving, zou uiteindelijk tot StBT leiden.

Twee deelverzamelingen $A, B \subset \mathbb{R}^n$ zijn per definitie *G-congruent* desda ze op elkaar worden afgebeeld door een element uit een groep G van afbeeldingen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. In het geval $n = 1$ (lijn) is de groep van *verschuivingen* de canonieke keus voor G. Bijvoorbeeld een p-verschuiving beeldt $X \subseteq \mathbb{R}$ af op de verzameling van alle punten $x + p$ voor iedere $x \in X$; het interval $[a, b]$ verschuift naar $[a + p, b + p]$, die inderdaad dezelfde Lebesgue-maat hebben: $b - a$. In het geval $n = 2$ (vlak), is de kanonieke keus voor de groep G die van de verschuivingen en de draaiingen in het vlak. En in het geval $n = 3$ (de 3-dimensionele Euklidische ruimte), bestaat de groep G uit verschuivingen en draaiingen in de ruimte. Deze groep heet de *Euklidische groep*, ook wel de *bewegingsgroep van Helmholtz* geheten, daar men zich bij deze transformaties een star lichaam voorstelt dat de ruimte beweegt (zonder te vervormen). Twee lichamen die men niet op elkaar kan afbeelden door ze te bewegen zonder te vervormen heten *incongruent*. Voorbeelden zijn lichamen met een verschillende vorm of afmeting, en ook de twee beroemde handschoenen van Kant, de 'incongruente tegenhangers', vormen een voorbeeld — ze zijn elkaars spiegelbeeld, en spiegelen is geen beweging.

De Lebesgue-maat μ is de enige congruentie-invariante maat op deelverzamelingen van $\mathbb{R}^n$. Indien μ aan *alle* deelverzamelingen van $\mathbb{R}^n$ een maat toekent, dan lijkt het Maatprobleem opgelost. Reeds in 1905 bewees Giuseppe Vitali, door gebruik te maken van het bestaan van een keuzefunctie (en dus van KA), dat er geen verschuivings-invariante maat op $\mathcal{P}\mathbb{R}$ bestaat. Aangezien μ wel congruentie-invariant is, heeft $\mathbb{R}$ derhalve Lebesgue-onmeetbare deelverzamelingen. (In 1970 toonde Robert Solovay aan dat er een model bestaat van ZF waarin *alle* deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ *Lebesgue-meetbaar* zijn, waarmee de onmisbaarheid van KA voor het bestaan van *Lebesgue-onmeetbare* verzamelingen een meta-wiskundig feit was.)

In 1914 vroeg Felix Hausdorff zich af of het Maatprobleem wel een oplossing zou hebben wanneer men de eis van σ-additiviteit afzwakt tot additivieit (4). Met behulp van KA bewees hij dat er geen oplossing bestaat voor deze afgezwakte versie voor $n \geqslant 3$. Hausdorff slaagde erin het eenheidsboloppervlak $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ in (i) vier disjuncte delen A, B, C, D onder te verdelen, zodanig dat (ii) A, B, C en $B \cup C$ congruent zijn, en waarin alleen (iii) D aftelbaar oneindig is.

Stel er bestaat een congruentie-invariante en additieve maat m voor minstens deze vier verzamelingen, d.w.z. ze zijn *meetbaar*. Uit (ii) en de congruentie-invariantie van m volgt dat er een $a > 0$ is zodanig dat

$$m(A) = m(B) = m(C) = m(B \cup C) = a\ . \tag{6}$$

Uit (iii) volgt dat $m(D) = 0$. Hieruit volgt, in combinatie met (i) en de additiviteit van m, de maat van het boloppervlak:

$$m(S^2) = m(A) + m(B) + m(C) + m(D) = a + a + a + 0 = 3a\ . \tag{7}$$

Uit de addiviteit van m en (i) volgt ook dat:

$$m(B \cup C) = m(B) + m(C) = a + a = 2a\ . \tag{8}$$

Uit (6) en (8) volgt dat $a = 2a$, dus $a = 0$, in tegenspraak met $a > 0$. De conclusie luidt dat er geen congruentie-invariante additivieve maat is voor $A, B, C, D \subset S^2$. Per implicatie hebben deze verzamelingen ook geen Lebesgue-maat. Ze zijn *onmeetbaar*, in tegenspraak met het boven gestelde.

We zouden nu kunnen zeggen dat we een appel geschild hebben in vier stukken (A, B, C, D), waarvan drie stukken bij elkaar genomen (A, B, C) weer het oppervlak van de appel bedekken. Doch weglaten van een *aftelbare* verzameling D is flauw. In 1924 slaagden Banach en Tarski erin verzameling D te elimineren door, met behulp van KA, het volgende te bewijzen:

De Stelling van Banach & Tarski (StBT). *Voor iedere $n \geqslant 3$ geldt dat elk tweetal begrensde deelverzamelingen van $\mathbb{R}^n$ (met ieder een inwendig punt) onder te verdelen is in een eindig aantal, paarsgewijs congruente delen.* (9)

In axiomatische termen:

$$\mathsf{Z} \vdash \mathsf{KA} \longrightarrow \mathsf{StBT}\ . \tag{10}$$

De congruente delen zijn uiteraard onmeetbaar, anders raken we, zoals in het geval van Hausdorff, in tegenspraken verstrikt. Banach en Tarski wezen erop dat, in het geval $n = 3$, wanneer men voor de ene begrensde verzameling een bol kiest met een miniscule straal $r > 0$, men voor de andere een bol kan kiezen met een gigantische straal $R \gg r$. Men kan dan de kleine bol in een eindig aantal stukken verdelen, deze stukken draaien en verplaatsen zodanig dat het resultaat de grote bol oplevert. In de wereld van de wiskunde kun je met een nanoknikker een reuzeplaneet maken, een gevolg niet minder wonderlijk dan ons paradoxale appelgeschil en kanonskogelgeklief uit de Preambule.

Tot slot, in 1924 bewees Banach tevens dat het afgezwakte Maatprobleem *wel* een oplossing heeft voor de lijn ($n = 1$) en het vlak ($n = 2$) — vandaar de voorwaarde $n \geqslant 3$ in StBT (9). Dit suggereerde dat de dimensie n cruciaal is en dat StBT een tot dan toe onopgemerkte kloof blootlegde tussen lijnen en vlakken enerzijds en de ruimte anderzijds. Doch dit riep terstond de vraag op hoe dit mogelijk is, aangezien dimensie een *topologisch* en geen *verzamelingstheoretisch* begrip is in de zin dat niet iedere verzameling een dimensie heeft — alleen zeer bepaalde families $\mathcal{T}(X)$ van deelverzamelingen van een gegeven verzameling X, te weten die een zogenaamde *topologische ruimte* vormen (eerst gekarakteriseerd door Hausdorff), hebben een dimensie. Deze zaak werd in 1929 beslissend opgehelderd door Von Neumann.

Von Neumann generaliseerde het afgezwakte Maatprobleem van $\mathbb{R}^n$ met zijn congruentie-groep (de Euclidische transformaties) naar willekeurige verzamelingen met een willekeurige groep G van transformaties. De topologische dimensie was hiermee van tafel. Cruciaal bleek de transformatie-groep G. Von Neumann bewees o.a. een voldoende voorwaarde voor het bestaan van een oplossing van zijn Verzamelingstheoretische Maatprobleem, en liet zien dat aan deze voorwaarde voldaan is wanneer men voor de willekeurige verzameling $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^2$ neemt en voor de transformatie-groep G de Euklidische groep (consistent met het resultaat van Banach), en dat daar niet aan voldaan is wanneer men $\mathbb{R}^n$ met $n > 2$ neemt (consistent met het resultaat van Hausdorff). In zijn bewijzen maakte van Von Neumann gretig gebruik van KA. We laten deze ontwikkelingen nu rusten en wenden ons tot Kant.

5. De Reikwijdte en de Grenzen van ons Kenvermogen

Hoe is het mogelijk dat de paradox van Banach & Tarski ontstaat binnen de grenzen van wat Simon Stevin 'de kunst van het zeker weten' heeft genoemd? Dat is onze hoofdvraag. Zoals aangekondigd, zullen we binnen de kritische filosofie van Immanuel Kant naar een antwoord zoeken. We denken daar iets te zullen aantreffen omdat meer dan honderd jaar voor de ontdekking van KA (1), Kant antwoord heeft gegeven op de vraag *hoe zuivere wiskunde mogelijk is*, en StBT (9) is onmiskenbaar een stelling in de zuivere wiskunde. Nadat we dadelijk het antwoord van Kant extreem kort hebben uiteengezet, dat uiteraard is gericht op de wiskunde van de 18de Eeuw, zullen we ons afvragen of zijn antwoord nog steeds van kracht is in de nadien gigantisch verder ontwikkelde wiskunde (§ 5, § 6); vervolgens gaan we te rade bij het antwoord dat Kant gaf op de vraag *hoe metafysika mogelijk is* (§ 7) en zullen we zijn antwoord op die vraag aanwenden om te begrijpen hoe de paradox van Banach & Tarski ontstaat (§ 8, § 9).

Kritik der reinen Vernunft (1781; 1786) en de synopsis *Prolegomena zu einer jeden künftigen Metaphysik die als Wissenschaft wird auftreten können* (1783) zijn de monumentale weerslag van het onderzoek door Kant naar de reikwijdte en grenzen van het menselijk kenvermogen.[19] Door werkelijkheid noch ervaring maar het kenvermogen in het middelpunt van de filosofie te plaatsen, wilde Kant een Copernicaanse Revolutie inluiden ten einde een *kritische* filosofie te vestigen, die de *dogmatische* filosofie van de Britse empiristen (Locke, Berkely, Hume) en van de Continentale rationalisten (Descartes, Spinoza, Leibniz, Wolff) zou moeten overwinnen, opdat er eindelijk ook in de metafysika *objectieve vooruitgang* een aanvang zou nemen, zoals die zich in de wiskunde reeds eeuwen voltrok en zich sinds de 17de Eeuw ook in de natuurfilosofie (met name de natuurkunde en de astronomie) aan het voltrekken was. De natuurfilosofie, in gang gezet door de pre-Sokratische wijsgeren, was in de 17de Eeuw revolutionair getransformeerd tot natuurwetenschap, en de metafysika, in gang gezet door Aristoteles, moest nu even revolutionair volgen.

Het menselijk kenvermogen bestaat volgens Kant uit de volgende drie samenwerkende kenvermogens:[20]

1. *De aanschouwing.* De vermogens die ons in staat stellen objecten zintuiglijk te ervaren, d.w.z. waar te nemen of voor te stellen, zijn *ruimte* en *tijd*, respectievelijk het uitwendige en het innerlijke aanschouwingsvermogen. Onze beschikking over deze vermogens is noodzakelijk voor het hebben van zintuiglijke ervaringen en maken van zintuiglijke voorstellingen.

2. *Het verstand.* Het vermogen om proposities uit te drukken in de taal met behulp van de twaalf categorieën (de zg. verstandsbegrippen), om te redeneren, en om oordelen te vormen over wat wij zintuigelijk ervaren, d.i. het vermogen om er achter te komen welke proposities waar zijn.

3. *De rede.* Ons vermogen om proposities uit te drukken in de taal over (1) het aanschouwingsvermogen en (2) het verstand, om oordelen daaromtrent te vormen, en om het geheel van alle ware oordelen van het verstand over objecten te laten voldoen aan zekere structurele voorwaarden ten einde een systematische eenheid te scheppen.

Het is voor ons onmogelijk iets uitwendig te ervaren (d.i. middels de zintuigen) wat *niet* in de ruimte gesitueerd is, en geen uitgebreidheid heeft, en evenzeer iets innerlijk te ervaren (gedachten, associaties, herinneringen, dromen, emoties, enz.) wat *niet* in de tijd gesitueerd is, en geen tijd in beslag neemt. Het is onmogelijk de afwezigheid van ruimte en tijd te ervaren. Het kenvermogen van de mens maakt dat onmogelijk, zoals het kenvermogen van de brilkikker het onmogelijk maakt dat hij kleuren ervaart en StBT (9) begrijpt.

Ervaring zonder verstandsbegrippen, en derhalve zonder verstandsoordelen, zoals wellicht bij dieren het geval is doordat zij geen taal machtig zijn, dus aanschouwing zonder verstand, noemt Kant *blind*; en verstandsbegrippen die geen betrekking hebben op een werkelijke of mogelijke ervaring, noemt Kant *leeg*. Oordelen die geen betrekking hebben op een werkelijke of mogelijke ervaring

[19]We zullen op de gangbare A/B-manier verwijzen naar *Kritik*, waartoe de prachtige Nederlandse vertaling de gelegenheid biedt; bladzijdenummers van *Prolegomena* verwijzen naar de Nederlandse vertaling. Zie **Literatuur**.

[20]In modieuze termen: cognitieve vermogens. Zie Rescher (1981: 290).

en dus alle mogelijke ervaringen overstijgen, noemt Kant *transcendent*; oordelen die betrekking hebben op alle mogelijke ervaringen, noemt Kant *transcendentaal*. Transcendentale metafysika is volgens Kant de enige vorm van metafysika die ons kennis verschaft, 'kennis van de zuivere rede', die in Kantiaanse terminologie *wetenschappelijk* is. Transcendente metafysika is daarentegen kentheoretisch onmogelijk. Afscheid nemen van alle mogelijke ervaring is een enkele reis nonsens genereren. Doch de geest is gewillig en laat zich voortdurend verleiden tot transcendente beschouwingen, die geen echte kennis doch pseudo-kennis opleveren; de geest verstrikt zich in *paralogismen* en *antinomieën*, zich bedienend van *transcendentale dialektiek*, de logika van de epistemische illusies.[21]

'Achter' of 'onder' de kenbare werkelijkheid, die al onze werkelijke en mogelijke ervaringen omvat, de *fenomenale wereld*, postuleert Kant een onkenbare werkelijkheid, de *noumenale wereld*. Achter ieder object uit onze ervaring, ieder *Ding für mich*, ligt een onkenbaar *Ding an sich*. Daarom is *ontologie*, of *algemene metafysika*, de tak van de filosofie die kennis vergaart over wat er onafhankelijk van ons, mensen, bestaat, een onzinnige onderneming, waar niettemin alle dogmatische rationalisten, Descartes, Spinoza, Leibniz, Wolff, Baumgarten, enz., zich aan bezondigd hebben (B303, B518). Objecten zijn fenomenaal reëel en transcendentaal ideëel. Ook de dogmatische empiristen, zoals Berkeley, Locke en Hume, gaan in de fout en wel door het bestaan van noumenale wereld te ontkennen: iedere ervaring die een mens heeft, is werkelijk, en is een ervaring *van iets*, zodat dat iets even werkelijk is als de ervaring ervan (hallucinaties e.d. daargelaten); dat iets, het fenomenale object, is *een verschijning van* een noumenaal object, dat derhalve even werkelijk is. Maar doordat we er niets van *kunnen* weten, bestaat het *Ding an sich* voor ons alleen als idee: het is transcendentaal ideëel en fenomenaal onwerkelijk.[22]

Kant voert twee fundamentele onderscheidingen in (B10–B14), een (i) *epistemisch* en een (ii) *logisch* onderscheid.

(i) Het epistemische onderscheid, dat men reeds in het werk van David Hume kan aantreffen, is tussen kennis *a priori*, dat verworven is onafhankelijk van, en niet getoetst kan worden door de zintuiglijke ervaring doch alle mogelijke ervaring betreft, en kennis *a posteriori*, dat verkregen is middels, en getoetst kan worden door de zintuiglijke ervaring.

(ii) Het logische onderscheid is tussen *analytische* en *synthetische* oordelen; analytische waarheden komen voort uit de betekenis van de woorden die in de waarheden voorkomen (monikken zijn ongetrouwd; een hengst is geen merrie; rode objecten zijn gekleurd; enz.); synthetische waarheden komen daar *niet* uit voort.[23] Vat men de regels van natuurlijke deductie op als constitutief voor de betekenis van de logische operatoren en quantoren, dan zijn bijvoorbeeld alle tautologieën analytische waarheden. Logische analyse is het middel bij uitstek om analytische waarheden op te sporen.

[21] Zie Grier (2006).

[22] Zie Rescher (1981).

[23] Volgens Kant hadden alle oordelen de syntactische vorm 'De F is een G'. Deze beperking van Kant heeft echter vervelende gevolgen (zie volgende §), vandaar dat wij deze meteen laten varen. Men kan zijn logische onderscheid (ii) generaliseren tot oordelen van vrijwel willekeurige syntaktische vorm, zoals wij stilzwijgend hebben gedaan.

Alle analytische waarheden zijn *a priori*, zodat waarheden nimmer analytisch *en a posteriori* kunnen zijn. Synthetische waarheden kunnen *a priori* of *a posteriori* zijn, nooit beide. Grofweg handelt de logika in analytische waarheden, en de natuurwetenschap in zowel synthetische *a posteriori* als *a priori* waarheden. De vraag van Kant of metafysika als tak van wetenschap mogelijk is, staat of valt nu met de vraag of er synthetische *a priori* waarheden bestaan en hoe wij daar achter kunnen komen, d.w.z. of er synthetische *a priori* kennis bestaat. Daartoe wendde Kant zich tot de wiskunde.

6. De Mogelijkheid van Zuivere Wiskunde

Kant schrijft in *Prolegomena* (1783: § 6):

> Hier is nu een grote en bewezen vorm van kennis die reeds nu van bewonderenswaardige omvang is en onbegrensde uitbreiding belooft voor de toekomst, die door en door apodictische zekerheid, d.i. absolute noodzakelijkheid in zich draagt, derhalve niet berust op ervaringsgronden en dus een zuiver produkt is van het verstand [*a priori*], maar die bovendien door en door synthetisch is.

Dat wiskunde *kennis* oplevert, staat buiten kijf. Kant staat nu voor de opgave een epistemische these, te weten dat alle wiskundige kennis *a priori* is, en een metafysische these, te weten dat alle wiskundige kennis synthetisch is, te gronden; de conjunctie van deze thesen zullen we *de WiskundeThese van Kant* noemen: wiskundige kennis is *a priori* en synthetisch (B14, B15, B55, B108, B741, B744). Uit de WiskundeThese volgt trivialiter dat wij over kennis beschikken die *a priori* en synthetisch is, waardoor het bestaan en de verwerving *van de soort* van kennis die de metafysika zou moeten opleveren gegarandeerd is.[24]

We zijn bij de wiskunde aangeland en noemen drie centrale vragen in de hedendaagse filosofie van de wiskunde.

- W1. *De Onderwerpsvraag.* Waar gaat de wiskunde over? Wat is het onderwerp van de wiskunde? Waar bestaat het vertoogdomein van de wiskunde, de 'wiskundige wereld', uit?
- W2. *De Kenvraag.* Hoe verschaffen wij ons toegang tot het vertoogdomein van de wiskunde? Hoe kunnen wij de 'wiskundige wereld' kennen? Hoe vergaren wij wiskundige kennis?
- W3. *De Toepassingsvraag.* Waarom kunnen wij wiskundige kennis toepassen op *niet-wiskundige* objecten, gebeurtenissen, processen, zoals ruimte, tijd, materie, straling, mensen, economie, enz.? Hoe is het mogelijk dat wiskunde *toepasbaar* is?

De Onderwerpsvraag (W1) en de Kenvraag (W2) beschouwen we als de twee vragen waarin de Mogelijkheidsvraag naar de zuivere wiskunde van Kant (B20) uiteenvalt. We zullen het antwoord van Kant op de drie vragen het *w-Kantwoord* noemen.

[24] Wegens ruimtegebrek gaan we voorbij aan de argumenten die Kant aanvoerde voor zijn WiskundeThese. Zie voor reconstructies: Broad (1978: 57–71), Shabel (2006), Brittan (2006).

Kant was de enige wijsgeer in wiens kritische filosofie men samenhangende antwoorden kon aantreffen op deze drie vragen, die wellicht toereikend leken voor de wiskunde van zijn tijd. In de 18de Eeuw was de zuivere wiskunde volgens iedereen, Kant niet uitgezonderd, de *leer der grootheden* (*quanta*, hoeveelheden): discrete grootheden (Rekenkunde) en continue grootheden (Meetkunde[25], InfinitesimaalRekening). Algebra was indertijd de leer van vergelijkingen van grootheden. In een notedop luidt het w-Kantwoord als volgt.[26]

W1. Wiskunde gaat uiteindelijk over de twee aanschouwingsvormen, ruimte en tijd, en is daarom *a priori* en synthetisch (de WiskundeThese van Kant, B14).

W2. Wiskunde is mogelijk doordat wij beschikken over drie samenwerkende kenvermogens. In *Kritiek* licht Kant toe dat wij wiskundige kennis verwerven "door het verstand uit de constructie van begrippen", waarin het laatste betekent "*a priori* de aanschouwingsvorm te tonen die met het begrip correspondeert" (B741); constructies zijn ostensief in de meetkunde, en symbolisch in de rekenkunde en algebra (B745). De verstandsbegrippen waar de wiskunde zich van bedient zijn *qualiteit* en *quantiteit*.

W3. Wiskundige kennis is toepasbaar op de 'niet-wiskundige' fenomenale wereld omdat zij is kennis van datgene wat zich in *al* onze werkelijke en mogelijke ervaringen manifesteert (B221).

In de loop der opvolgende eeuwen, waarin de wiskunde en wetenschap zich versneld zouden ontwikkelen, zijn de nodige kritische noten geserveerd voor het w-Kantwoord, die zeker niet altijd even succesrijk door Kantianen en neo-Kantianen zijn gekraakt. Sta ons toe er zeven te noemen.[27]

1°. Een oordeel vellen, een uitspraak doen, een beweerzin uitspreken of opschrijven, is *iets over iets anders beweren*. Volgens Kant hadden alle oordelen, inclusief wiskundige, de syntaktische vorm 'De F is een G', waarin F en G monadische predikaten zijn, die eigenschappen uitdrukken. Dan zou elementaire monadische predikaten-logika voor de wiskunde voldoende zijn. Vandaar ook dat Kant dacht dat de Logika, de wetenschap van het redeneren, voltooid was.[28] Het staat echter met zekerheid vast dat monadische logika te zwak is voor de wiskunde, zelfs voor de Meetkunde en de Rekenkunde die Kant kende. Dientengevolge wankelen de argumenten die Kant aanvoerde voor zijn WiskundeThese, daar zij deels steunen op zijn uitgangspunt over de syntaktische vorm van alle oordelen.[29]

2°. Indien Euklidische meetkunde ons leert hoe onze uitwendige aanschouwingsvorm in elkaar steekt, die alle werkelijke en mogelijke ervaring constitueert, hoe

[25] Bedenk dat *geometrie* letterlijk *landmeetkunde* betekent, 'de leer van het landmeten'; en 'meten' is het bepalen van een grootheid. Kan het praktischer?

[26] Voor exegese van het w-Kantwoord, alsook voor de onderbouwing van zijn WiskundeThese, zie Broad (1978: 16–71), Parsons (1983), (1984), Young (1984), Hintikka (1984), De Jong (1997), Brittan (2006), Shabel (2006), Hanna (2006).

[27] Of het bestaan van blinde wiskundigen voor of tegen Kant pleit, is niet duidelijk; zie Jackson (2002).

[28] De elementair monadische predikaten-logika is de predikaat-logische versie van de syllogistische logika, waarmee Aristotles de Logika ooit begon.

[29] Friedman (1985).

kunnen niet-Euklidische meetkunden in de 19de Eeuw dan zijn onstaan en hoe kunnen *nota bene* ook zij tot onze wiskundige *kennis* zijn gaan behoren?[30]

3°. Indien Euklidische meetkunde ons leert hoe onze uitwendige aanschouwingsvorm in elkaar zit, die alle werkelijke en mogelijke ervaring constitueert, hoe kunnen dan de speciale en de algemene relativeitstheorie, die beide een niet-Euklidische ruimte-tijd postuleren, tot *kennis* behoren van onze fenomenale wereld?[31]

4°. De oneindigheid en oneindige deelbaarheid van de Euklidische ruimte corresponderen niet met enige mogelijke ervaring; ze zijn transcendent en niet transcendentaal. Maar dan is Euklidische meetkunde niet langer louter kennis van onze uitwendige aanschouwingsvorm. Waarvan dan? Het antwoord op W1 verkeert in gevaar.[32]

5°. Wanneer de noodzakelijkheid van wiskundige oordelen (die hun *a priori*-karakter impliceert) over, bijvoorbeeld, alle driehoeken gegrond is in het feit dat wij ons een willeurige driehoek *in conreto* voorstellen, en de beschouwing van meetkundige figuren en via meetkundige constructies de enige manier is om erachter te komen wat *de structuur* van de ruimte is (t.w. dat de ruimte Euklidisch is), dan kunnen wij niet contingente van noodzakelijke eigenschappen van de *in concreto* voorgestelde driehoek onderscheiden, aangezien dat onderscheid beslissend afhangt van de *structuur* van de ruimte waartoe de driehoek behoort. Dit is een vicieuze cirkulariteit.[33]

6°. Het behoeft geen toelichting dat de wiskunde van de 20ste en 21ste eeuw een geheel andere is dan de wiskunde van de 18de eeuw. De gigantische groei en veelvuldige versplintering die aan het begin van de 20ste eeuw is ingezet, blijft tot op de dag van vandaag doorgaan.[34] De groei en versplintering gaat vergezeld van een *omhoog schietende graad van abstractie*. Nicolas Bourbaki uit Nancago is de laatste die zich heeft gewaagd aan een soort van overzicht van de gehele wiskunde, door zich te beperken tot de mooiste en vruchtbaarste stellingen en bewijzen uit de wiskunde; en van Bourbaki, die met zijn werken begon voor de helft van de vorige eeuw was aangebroken, heeft niemand al lange tijd meer iets vernomen.[35] Opvolgers heeft hij niet en zal hij wellicht nooit meer krijgen. Bourbaki was de laatste der Mohikanen.[36] Alle nieuwe abstracte gebieden die wiskundigen hebben ontdekt, ontsloten, opgesteld, bedacht, geconstrueerd, ontgonnen, bevrucht, bewerkt, zijn met geen mogelijkheid op te vatten als constructies van begrippen die *a priori* de aanschouwingsvorm tonen waarmee zij vermeend corresponderen, zoals Kant nog over de wiskunde van zijn tijd kon beargumenteren.

[30] Russell (1897), Friedman (1985), Risjard (1990), (1991).

[31] Friedman (1985).

[32] Parsons (1964), Posey (2008).

[33] Kitcher (1975).

[34] Ze zijn veroorzaakt door interne ontwikkelingen in de wiskunde alswel door de explosieve groei van het absolute aantal wiskundigen op Aarde ten gevolge van de groei van de wereldbevolking en de toegenomen welvaart en ontwikkeling van velerlei landen. Jaarlijkse verschijnen meer wiskundige stellingen en bewijzen dan in een menseleven te bevatten is. *Glmpf.*

[35] 'Nicolas Bourbaki' is het vermaarde pseudoniem van een collectief van vrijwel uitsluitend Franse wiskundigen; voor een overzicht van zijn lotgevallen en voortbrengsels, zie Muller (1998: 98–105).

[36] De enige schetsen van overzichten ons bekend zijn te vinden in Saunders Mac Lane's uiteenzetting van zijn visie op de wiskunde, *Mathematics: Form and Function* (1986), in hoofdstukken XI en XII; ze zijn schetsmatig, verre van volledig en betreffen delen van de wiskunde.

7°. De visie van Kant op de algebra, waarin zijn 'schemata' een brug moeten slaan tussen (a) objecten aanschouwen en (b) begripsmatige kennis over de aanschouwde objecten, is gammel en gevaarlijk; naar hedendaagse maatstaven kan men deze brug niet anders dan afkeuren.[37] Ook andere Kantiaanse elementen fonkelen bij nadere beschouwing niet van duidelijkheid en overtuigingskracht (de relatie tussen *phenomenon* en *noumenon*, zijn transcendentale psychologie, de precieze rol van de Euklidische structuur van de ruimte, enz.); zij eisen een interpretatie-arbeid die even zwaar als welwillend is ten einde ze op te poetsen. Het kasteel van Kant heeft duistere kamers en kille kerkers.[38]

Kortom, wat de wiskunde betreft, maakt men *anno nunc* geen goede beurt met het w-Kantwoord eens flink de filosofische bloemetjes buiten te willen zetten — met als noemenswaardige uitzondering de WiskundeThese van Kant, zij het dan wel met betere argumenten dan die van Kant. Het w-Kantwoord op de vragen W1–W3 kan niet meer overtuigen. Geen nood. Het kasteel van Kant telt veel gangen en zalen. We keren terug naar de balzaal van de metafysika, in het bijzonder naar het *m-Kantwoord*: het antwoord van Kant op de vraag hoe metafysika mogelijk is.

7. De Mogelijkheid van Metafysica

Analoog aan zijn vraag hoe zuivere wiskunde mogelijk is (W1 en W2 van het lijstje uit § 6; de Toepassingsvraag doet zich hier niet voor), stelde Kant de vraag hoe metafysika mogelijk is (B19):

M1. *De Onderwerpsvraag.* Waar gaat de metafysika over? Wat is het onderwerp van de metafysika? Waar bestaat het vertoogdomein van de metafysika uit?

M2. *De Kenvraag.* Hoe kunnen wij de onderwerpen van metafysika kennen? Hoe verwerven wij metafysische kennis?

Het m-Kantwoord luidt, opnieuw in een notedop, als volgt.

M1. Metafysika gaat over de reikwijdte en de grenzen van het menselijk kenvermogen.

M2. Metafysika is mogelijk doordat wij beschikken over met name het kentheoretisch vermogen genaamd de rede (zie begin van § 5).

De *verstandsbegrippen* zijn de categorieën die noodzakelijk zijn om kennis van de fenomenale wereld mogelijk te maken. Kant neemt zijn verstandsbegrippen goeddeels over uit de metafysika Aristoteles (die ze uiteraard niet als epistemische doch als ontologische categorieën ziet) en rangschikt ze als volgt:[39]

---

[37] Kneebone (1963: 249), Broad (1978: 69–71), Parsons (1983), (1984), Young (1984), Friedman (1985).

[38] Niet voor niets is de secundaire literatuur over Kant's *opera* gigantisch. Het lijkt of iedere generatie filosofen opnieuw begint met de herstel- en herzieningswerkzaamheden aan het kasteel dat *Kritik der reinen Vernunft* heet.

[39] Kant (1783: § 21); Kant (1785: B106).

1. *Quantiteit*	2. *Qualiteit*	3. *Relatie*	4. *Modaliteit*
Eenheid (Maat)	Realiteit	Substantie	Mogelijkheid
Veelheid (Grootte)	Negatie	Oorzaak	Bestaan
Alheid (Geheel)	Beperking	Gemeenschap	Noodzakelijkheid

Met zijn befaamde *transcendentale deducties* zal Kant de noodzaak van de verstandsbegrippen voor onze kennisverwerving verklaren (B116–169).

Evenals men met de rede synthetische kennis *a priori* kan vergaren over de aanschouwingsvormen, kan men dat over de verstandsbegrippen. Ook kan men met de rede *a priori* beginselen opsporen die een synthetische eenheid verlenen aan onze *a posteriori* kennis, de zg. grondbeginselen van de zuivere rede (B200). Dit zijn taken van de metafysika; zij verschaft ons *redekennis*.

Een voorbeeld van een dergelijk metafysisch beginsel is het *CausaliteitsBeginsel*: iedere gebeurtenis heeft een oorzaak. Dit Beginsel staat los van de ervaring in de zin dat geen bijzondere ervaring het kan bekrachtigen of ontkrachten (een les die Kant van Hume had geleerd), d.w.z. het is *a priori*; en het is synthetisch want niet analytisch — geen tautologie en geen implicatie van de betekenis van de begrippen ‘gebeurtenis’, ‘oorzaak’ en ‘gevolg’; en door causele verbanden te leggen tussen alle gebeurtenissen in de ruimte en de tijd, schept het beginsel onmiskenbaar samenhang, synthetische eenheid. Doch het CausaliteitsBeginsel geldt *alle* gebeurtenissen in de ruimte en de tijd, een geheel dat buiten iedere mogelijke ervaring valt. Kant (1783: § 33):

> Daarom lijken verstandelijke begrippen veel meer betekenis en inhoud te hebben dan dat de gehele bepaling ervan uitgeput zou worden door enkel het ervaringsgebruik, en zo bouwt het verstand ongemerkt aan het huis van de ervaring een nog veel groter bijgebouw aan, dat het met enkel gedachtenwezens opvult, zonder zelfs maar te merken dat het met zijn overigens juiste begrippen de grenzen van hun gebruik ver te buiten is gegaan.

Causaliteit is een relatie tussen gebeurtenissen en valt daarmee in kolom 3 van de tabel van verstandsbegrippen. Wanneer men de verstandsbegrippen buiten iedere mogelijke ervaring wil toepassen, kan men verstrikt raken in tegenstrijdigheden. Kant noemte ze *antinomieën van de zuivere rede* (B454–B490). In *Prolegomena* somt Kant ze op (§ 51, onze namen voor de antinomieën):

1. *QuantiteitsAntinomie*.
   These. De wereld heeft met betrekking tot tijd en ruimte een begin.
   Antithese. De wereld is met betrekking tot tijd en ruimte oneindig.

2. *QualiteitsAntinomie.*
   These. Alles in de wereld bestaat uit het enkelvoudige.
   Antithese. Niets is eenvoudig, alles is samengesteld.

3. *Relatie-Antinomie*.
   These. Er bestaat vrije keus in de wereld.
   Antithese. Er is geen vrijheid, alles is natuur.

4. *ModaliteitsAntinomie.*
   These. In de serie van gebeurtenissen op de wereld is er een bepaald noodzakelijk wezen.
   Antithese. Er is geen noodzakelijk wezen, de serie gebeurtenissen op de wereld is toevallig.

Ter verduidelijking staan we heel even stil bij de QuantiteitsAntinomie (1), daar zij wiskundig van aard is. Deze antinomie ontstaat volgens Kant doordat zowel these als antithese nooit zintuiglijk te ervaren zijn. We hebben hier te maken met louter gedachten, met transcendente gedachten-objecten die alle mogelijk ervaring overstijgen (P). Ze bestaan los van enige ervaring. Maar dat is niet mogelijk, omdat ruimte en tijd, waarbinnen deze oneindigheid en onbegrensheid (these), en eindigheid en begrensdheid (antithese), zouden moeten bestaan, in feite onze aanschouwingsvormen zijn, die onze zintuigelijke ervaring mogelijk maken en onze verstandsbegrippen van inhoud voorzien. Deze gedachten, inclusief hun gedachten-objecten, kunnen niet los staan van de ervaring ($\neg P$). Tegenspraak.[40]

Om uit deze antinomie te geraken, moeten we ophouden de verstandsbegrippen toe te passen op situaties die buiten iedere mogelijke ervaring vallen. Gelijk radertjes in een uurwerk die dol draaien en derhalve geen bijdrage leveren aan de functie van een klok (de correcte tijd aanwijzen), leveren de verstandsbegrippen in dergelijke situaties geen bijdrage aan de functie van ons verstand (kennis vergaren). Gelijk er bij de losse radartjes in het uurwerk uitsluitend sprake is van draaien, en niet van tijd aanwijzen, is hier uitsluitend sprake van *denken*, en niet van *kennen* of *weten*.[41]

8. Een Vijfde Antinomie

In het licht van onze conclusie aan het einde van § 6 dat het w-Kantwoord niet meer kan overtuigen voor de hedendaagse wiskunde, zeker niet voor de verzamelingsleer — waartoe KA (1) behoort —, omdat de meeste takken aan de boom der wiskundige kennis abstract zijn en met ruimte noch tijd iets te maken hebben, zullen we ons wenden tot de metafysika en het m-Kantwoord (vorige §).

Centraal plaatsen wij de volgende these.

De Kantiaanse VerzamelingsThese. *Verzamelingstheoretische kennis is a priori en synthetisch.* (11)

Zoals in gebieden van wiskundige activiteit het geval is, bewijst men in de verzamelingsleer stellingen. Nooit en te nimmer zal een wiskundige een bijzondere zintuiglijke waarneming tot essentieel onderdeel van een bewijs van een stelling maken. Uitsluitend en alleen op de terreinen van de wiskundige heuristiek en pedagogiek spelen zintuiglijke ervaringen een rol van betekenis, zoals het tekenen van Venn-diagrammen in de verzamelingsleer. Dus wiskundige kennis is *a priori* en zo ook de verzamelingsleer.[42]

[40] We geven grif toe dat deze redenering rammelt. Dit geldt voor alle redeneringen die Kant heeft opgesteld voor zijn antinomieën. Optimistische analysen van Kant's antinomie-rederingen zijn schaars; zie Cleve (1981) voor een analyse van de QualiteitsAntinomie.

[41] Kant onderscheidt denken en weten scherp, B146.

[42] In de categorieleer is dat anders: commutatieve diagrammen kunnen onderdeel zijn van een bewijs, alhoewel zij geen ruimtelijke figuren voorstellen. Zie Mac Lane (1978: 387–392).

De val van het Logicisme van Frege en Russell lijkt korte metten te maken met de these dat wiskunde analytisch is: louter logika voldoet niet. De wiskunde is niet analytisch en derhalve wel synthetisch.

Wij denken dat het ook mogelijk is rechtstreeks voor het synthetische karakter van de verzamelingsleer te argumenteren.

Laten we om te beginnen eens het verzamelingsbegrip beschouwen vanuit de Kantiaanse verstandsbegrippen. Bij een eerste kennismaking met het verzamelingsbegrip, grijpt men niet zelden naar velerlei uitdrukkingen uit de spreektaal die het verzamelingsbegrip uitdrukken: een klas kinderen, een zwerm bijen, een vlucht vogels, een school vissen, een menigte mensen, een collectie postzegels, een kudde schapen, een perk bomen, een bataljon soldaten, een peleton wielrenners, een roedel wolven, enz. Het verband met de zintuiglijke ervaring is hier evident. En dan komen verzamelingen van abstracte objecten, zoals die van alle natuurlijke getallen ($\mathbb{N}$), van alle reële getallen ($\mathbb{R}$), van alle complexe getallen ($\mathbb{C}$), van $\mathcal{P}\mathbb{N}$, enz. Vervolgens komen de begrippen doorsnede en vereniging, die ook gemakkelijk te illustreren zijn met alledaagse voorbeelden. Zo beschouwd komt het verzamelingsbegrip overeen met het getalbegrip: verzamelingen en getallen zijn beide abstracte objecten en hebben een betekenis die verweven is met concrete objecten. De toepasbaarheid van beide begrippen op de fysische werkelijkheid is gruwelijk evident. Is het verzamelingsbegrip in een kolom van de tabel met de verstandscategorieën te plaatsen, zoals het getalbegrip in de kolom Quantiteit thuis hoort?

De eerste kolom, met de quantiteitsbegrippen eenheid (Q1), veelheid (Q2) en geheel (Q3), dringt zich op. Qua betekenis lijken deze drie begrippen elkaar uit te sluiten. Niettemin lijkt een verzameling zowel een eenheid (een enkel abstract object) als een veelheid (met meerdere elementen). In een voetnoot in *Principia Mathematica*, argumenteren Whitehead & Russell voor de absurditeit van het verzamelingsbegrip:

> Als er dergelijke objecten bestaan als een verzamelingen, dan moet een dergelijk object in een bepaalde zin een *enkel* object zijn. Toch zijn het alleen verzamelingen die het predikaat 'veel' toekennen. Kortom, als we verzamelingen als objecten toestaan, zijn we gedwongen hetzelfde object als enkelvoudig en meervoudig te erkennen, hetgeen absurd is.[43]

De spanning verdwijnt zodra we opmerken dat een verzameling een eenheid (Q1) is die zelf een veelheid (Q2) *van elementen* is maar zelf niet onder *die elementen* valt.

Ten slotte is een verzameling een *geheel* (Q3) van elementen.

Enig staren brengt tevens het modaliteitsbegrip 'bestaan' (kolom 4) binnen beeld, dat onontbeerlijk is voor de verzamelingsleer.

Wanneer we nu KA (1) uitpluizen, dan komen we tot het gebruik van de volgende verstandsbegrippen: voor iedere [*Eenheid*] familie X [*Veelheid*] van verzamelingen [*Eenheid*], is [*Bestaan*] er een verzameling K_X [*Veelheid*] zodanig dat K_X

[43] Whitehead & Russell (1910) 72; we hebben 'class' vertaald door 'verzameling', wat *in de context van dit artikel* verdedigbaar is.

van ieder [*Eenheid*] familielid $A \in X$ [*Eenheid*] precies een enkel element [*Eenheid*] bevat.

We denken nu dat KA, evenals de andere axioma's van de verzamelingsleer, *a priori* een synthetische eenheid tot stand brengt in 'de wereld van alle verzamelingen' (standaard het vertoogdomein $\mathbf{V}$ van ZFC), en dan vergelijkbaar is met het CausaliteitsBeginsel, dat eveneens *a priori* een synthetische eenheid tot stand brengt in 'de wereld van alle gebeurtenissen' (het universum). Indien deze gedachte juist is, dan zal ook KA ten prooi vallen aan een antinomie. Vanzelfsprekend zal een antinomie zich alleen voor oneindige families van verzamelingen voordoen (KA^{∞}), want zoals voor een eindige hoeveelheid gebeurtenissen het CausaliteitsBeginsel niet het minste logische kwaad aanricht (blijft binnen de grenzen van de mogelijke ervaring), zal de eindige verzamelingsleer dit ook niet doen, inclusief het eindige keusaxioma ($\mathsf{KA}^{\mathrm{fin}}$). Slechts wanneer oneindige families van verzamelingen het toneel betreden, kunnen we een antinomie verwachten, hetgeen naadloos aansluit bij zowel de bewijsbaarheid van $\mathsf{KA}^{\mathrm{fin}}$ (in Z) en de onbewijsbaarheid van KA^{∞} (in ZF). Deze vijfde antinomie ziet er als volgt uit:

5. *These.* Iedere oneindige familie van disjuncte verzamelingen heeft een keuzeverzameling (KA^{∞}).
   Antithese. Oneindige families van disjuncte verzamelingen hebben lang niet altijd een keuzeverzameling ($\neg\mathsf{KA}^{\infty}$).

Door ons grondige voorwerk zijn we nu vrijwel klaar: dat de These en de Antithese elkaar tegenspreken is evident, en argumenten voor en tegen KA^{∞} hebben we reeds behandeld in § 3. Deze, vaak als 'heuristisch' aangemerkte argumenten voor en tegen KA, verleiden de rede tot de waarheid van KA^{∞} en tot de waarheid van $\neg\mathsf{KA}^{\infty}$. Analyse van deze argumenten (waarvoor geen plaats meer is in dit artikel) valt onder de transcendentale dialektiek.

Met een oneindige familie verzamelingen moeten we ons voorstellen een *oneindig aantal keuzen te maken*, hetgeen buiten iedere mogelijke ervaring in ruimte en tijd treedt. Wanneer het maken van een enkele keus enige tijd in beslag neemt, dan komt er geen eind aan het maken van oneindig veel keuzen, zelfs niet voor een onsterfelijk wezen. Denkt men aan een supertaak, waarbij men, gelijk Achilles in de paradox van Zeno, steeds de helft van de benodigde tijd neemt voor een keus van de vorige keus, dan ziet men zich spoedig miljoenen keuzen te moeten maken binnen een nanoseconde. Ook dat valt buiten iedere mogelijke menselijke ervaring.

Een oneindige verzameling zelf kan wellicht al geen ervaringsobject zijn en is daarom een transcendentaal object, een wezen van de zuivere rede. Ook andere abstracte objecten in het vertoogdomein van ZFC zijn trascendentale objecten: verzamelingen van reële getallen die niet Lebesgue-meetbaar zijn, de oneindige toren van oneindige ordinaal- en kardinaal-getallen, Dedekind-sneden, oneindige reeksen, enz. We kunnen ze denken, ze blijven binnen het bereik van ons denkvermogen, maar ze blijven buiten het bereik van het weten en kennen, buiten het bereik van ons kenvermogen. Ze zijn bewoners van een bijgebouw aan het huis van de ervaring.

Zoals beloofd richten we, ten slotte, onze aandacht op het onstaan van de paradox van Banach & Tarski.

9. De Ontogenese van een Meetkundige Paradox

Het transcendente karakter van KA^{∞} verklaart het ontstaan van het debat over KA, *omdat* het een vijfde antinomie van de zuivere rede constitueert. Er zijn geen *doorslaggevende* argumenten voor of tegen die men kan gronden in kennis; zulke argumenten zijn epistemisch onmogelijk. We vragen ons nu alleen nog af waardoor er paradoxen ontstaan wanneer men KA toepast *in de meetkunde*.

De verzamelingstheoretische constructie van de paradoxale verdeling is te volgen door het menselijk verstand. Geen wonder, want de mensen Banach en Tarski hebben het bedacht. De constructie vloeit voort uit een onberispelijke logische redenering over zekere abstracte meetkundige objecten (bolschil, bol, lijn), gegeven een aantal verzamelingstheoretische axioma's, en culmineert in StBT (9). Men maakt gebruik van het modaliteitsbegrip Bestaan, en van de quantiteitsverstandbegrippen Eenheid (Q1), Veelheid (Q2), Geheel (Q3), waarvan het verzamelingsbegrip een begripsmatige drie-eenheid vormt.[44] We bevinden ons hier binnen de metafysika en buiten de zintuiglijke aanschouwingsvormen van Kant. Zodra wij willen voorstellen hoe de paradoxale verdeling er in de fysische werkelijkheid uit zou kunnen zien, zoals een appel die we schillen of een kanonskogel die we klieven, treedt de paradox van Banach & Tarski naar voren. Waarom? Omdat we dan iets toepassen op onze mogelijke ervaring, in het bijzonder de transcendente propositie KA (1), wat iedere mogelijke ervaring overstijgt. We overtreden de grens tussen denken en weten.

Met KA bouwt men een bijgebouw aan het huis van de mogelijke ervaring. Dit bijgebouw is geconstrueerd door middel van logische redeneringen, maar waar deze 'transcedentale kennis' over gaat, dat bestaat uitsluitend in onze gedachtenwereld. Volgens de 18de-eeuwse letter van Kant is dit geen echte kennis. Volgens ons is dit echte *metafysische* kennis, redekennis, kennis van het quantiteitsbegrip *verzameling*.

Om met de reeds aangehaalde woorden van Kant te spreken, kunnen we door KA (1) te onderstellen ongemerkt "aan het huis van de ervaring nog een veel groter bijgebouw maken, dat opgevuld is met gedachtenwezens, zonder zelfs maar te merken dat het met zijn overigens juiste begrippen de grenzen van hun gebruik ver te buiten is gegaan."[45] We stuiten echter op aanschouwingsproblemen wanneer we de gedachtenwezens die uitsluitend in het bijgebouw kunnen verblijven, toelaten in het huis van de ervaring.

Er lijkt nog een andere mogelijkheid om de ontogenese van de paradox te verklaren, die ook in het kasteel van Kant woont. De paradox ontstaat mede doordat we denken dat een wiskundige bol een model kan zijn voor een materiële kanonskogel. Indien dit het geval zou zijn, dan was materie oneindig vaak deelbaar, wanneer een deel materie altijd een open verzameling is in de Euklidische topologie; vatten we daarentegen *iedere* meetbare deelverzameling van de bol op als een deel van een kanonskogel, dan stellen de verzamelingen met een enkel punt de letter-

[44] Minstens even wonderlijk als de Katholieke *trinitas sanctorum* van God als *pater–filius–spiritus sanctus*, zoals Max Black (1971: 616) ooit heeft opgemerkt.

[45] Kant (1783: § 33).

lijke *atomen* voor. De natuurkunde modelleert een kanonskogel niet met maatloze atomen en ook niet met aftelbaar-oneindig veel, en zeker niet als oneindig vaak deelbaar. Bij deze vingerwijzing in de richting van de QualiteitsAntinomie zullen we het moeten laten.

Andere verzamelingstheorieën, die logisch onverenigbaar zijn met ZFC, hoe zit het daarmee?[46] Dit zijn *andere* bijgebouwen aan het huis van de ervaring, alle onderdeel van het uitdijende kasteel van Kant. Anders dan het huis van de ervaring, waarin onze wetenschappelijke kennis resideert, hoeven de metafysische bijgebouwen niet logische verenigbaar te zijn, zoals Kant wist: de antinomieën en paralogismen bewijzen precies dat. Vandaar dat we bij de loopbruggen van de metafyische bijgebouwen naar het centrale huis van de ervaring levensgrote gevarendriehoeken plaatsen. Wanneer men aldaar aankomt met StBT (9), moet men niet dom doorlopen maar resoluut rechtsomkeerd maken.

10. Slotaccoord

Volgens velen zijn wijsgerige kastelen als die van Kant hopeloos uit de tijd. Archaïsche overblijfsels uit lang vervlogen tijden, zoals het kasteel van Edinburgh. Niettemin bezoeken jaarlijks volksstammen het kasteel van Edinburgh en dwalen er met ontzag en bewondering in rond. Ze maken contact met iets wat zindert. Het ware denken zindert ook. Wij hebben de vraag gesteld hoe het mogelijk is dat zoiets als de paradox van Banach & Tarski ontstaat binnen de grenzen van de kunst van het zeker weten, de wiskunde. Wij hopen dat onze tocht door het kasteel van Kant een zinderend antwoord heeft opgeleverd.

Literatuur

Aczel, P., Rathjen, M. (2001), 'Notes on Constructive Set Theory', *Report 40*, Oslo: Institut Mittag-Leffler.

Black, M. (1971), 'The Elusiveness of Sets', *Review of Metaphysics* **24**, pp. 614–636.

Brittan, G. (2006), 'Kant's Philosophy of Mathematics', in: *The Blackwell Companion to Kant*, G. Bird (ed.), pp. 222–235.

Broad, C.D. (1978), *Kant. An Introduction*, Cambridge: Cambridge University Press.

Cleve, J. van (1981), 'On Kant's Second Antinomy', *Synthese* **47**, pp. 481–494.

Dalen, D. van, Doets, H.C., De Swart, H.C.M. (1975), *Verzamelingen. Naïef, Axiomatisch, Toegepast*, Utrecht: Oosthoek, Scheltema en Holkema.

Fraenkel, A.A., Bar-Hillel, Y., Lévy, A., (1973), *Foundations of Set Theory* (2nd. Ed.), Amsterdam: North-Holland.

Friedman, M. (1985), 'Kant's Theory of Geometry', *Philosophical Review*, **94.4**, pp. 455–506.

Grier, M. (2006), 'The Logic of Illusion and the Antinomies', in: *The Blackwell Companion to Kant*, G. Bird (ed.).

Hanna, R. (2006), 'Mathematics for Humans: Kant's Philosophy of Arithmetic Revisited', *European Journal of Philosophy* **10.3**, pp. 328–353.

Herrlich, H. (2006), *The Axiom of Choice*, Berlijn en New York: Springer-Verlag.

Hilbert, D. (1900), 'Mathematische Probleme', Vortrag: Internationale Mathematische Kon-

[46] Zie Fraenkel, Bar-Hillel en Lévy (1973), Aczel & Rathjen (2001).

gress, Paris 1900, *Nachrichten der Akademische Wissenschaften Göttingen* **1900**, 253–297; Engelse vertaling in: *Bullentin of the American Mathematical Society* **2.8** (1902) pp. 437–479.

Hintikka, J. (1984), 'Kant's Transcendental Method and his Theory of Mathematics', *Topoi* **3**, pp. 99-108.

Jackson, A. (2002), 'The World of Blind Mathematicians', *Notices of the American Mathematical Society*, **49.10**, pp. 1246–1251.

Jong, W.R. de (1997), 'On Hintikka's Kant', *Studies in the History and Philosophy of Science*, **28.1**, pp. 141–166.

Kant, I. (1781), *Kritik der reinen Vernunft*, Riga: Hartknoch, 1ste, A-druk (1781), 2de herziene, B-druk (1787); Nederlandse vertaling: *Kritiek van de zuivere Rede*, vertaald door J. Veenbaas, W. Visser, Amsterdam: Boom, 2004.

Kant, I. (1783), *Prolegomena zu einer jeden künftigen Metaphysik die als Wissenschaft wird auftreten können*, Johann Friedrich Hartknoch Riga, Nederlandse vertaling: *Prolegomena*, vertaald door H. van de Velde, F. Montens, Meppel: Boom, 1979.

Kitcher, P. (1975), 'Kant and the Foundations of Mathematics', *Philosophical Review* **84.1**, pp. 23–50.

Mac Lane, S. (1986), *Mathematics: Form and Function*, Berlijn en New York: Springer-Verlag.

Kneebone, G.T. (1963), *Mathematical Logic and the Foundations of Mathematics*, Princeton: D. van Nortrand Company.

Moore, G.H. (1982), *Zermelo's Axiom of Choice. It's origins, development and influence*, Berlijn en New York: Springer Verlag.

Muller, F.A. (1998), *Structures for Everyone*, Amsterdam: A. Gerrits & Son.

Parsons, C. (1964), 'Infinity and Kant's Conception of Possible Experience', *Philosophical Review* **73.2**, pp. 182–197.

Parsons, C. (1983), 'Kant's Philosophy of Arithmetic', in: *Mathematics in Philosophy*, C. Parsons, New York: Cornell University Press, pp. 188–149.

Parsons, C. (1984), 'Arithmetic and the Categories', *Topoi* **3**, pp. 109–121.

Posey, C. (2008), 'Intuition and Infinity: A Kantian Theme with Echoes in the Foundations of Mathematics', *Royal Institute of Philosophy Supplement* **63**, pp. 165–193.

Rescher, N. (1981), 'On the Status of Things in Themselves in Kant', *Synthese* **47**, pp. 289–299.

Risjord, M. (1990), 'Sensible Foundations for Mathematics: A Defence of Kant', *Studies in the History and Philosophy of Science*, **21.1**, pp. 123–143.

Risjord, M. (1991), 'Further Reflections on the Sensible Foundations for Mathematics', *Studies in the History and Philosophy of Science*, **22.4**, pp. 665–672.

Russell, B. (1897), *An Essay on the Foundations of Geometry*, Cambridge: Cambridge University Press.

Shabel, L. (2006), 'Kant's Philosophy of Mathematics', in: *The Cambridge Companion to Kant and Modern Philosophy*, P. Guyer (ed.), Cambridge: Cambridge University Press, pp. 94–128

Strawson, P.F. (1966), *The Bounds of Sense. An Essay on Kant's Critique of Pure Reason*, London: Methuen & Co.

Wittgenstein, L. (1922), *Tractatus Logico-Philosophicus*, London: Kegan Paul, Trench, Trubner & Co.

Wagon, S. (1985), *The Banach-Tarski Paradox*, Cambridge: Cambridge University Press.

Young, J.M. (1984), 'Construction, Schematism and Imagination', *Topoi* **3**, pp. 123–131.

Contactgegevens

F.A. Muller [correspondent]
f.a.muller@uu.nl
Faculteit der Wijsbegeerte
Burg. Oudlaan 50, kamer H5-16
Erasmus Universiteit Rotterdam
3062 PA Rotterdam
en
Instituut voor Geschiedenis en Grondslagen der Natuurwetenschappen
Universiteit Utrecht
Budapestlaan 6, IGG, kamer 3.08
3584 CD Utrecht

Thekla Teunis
T.Teunis@students.uu.nl
Mathematisch Instituut
Universiteit Utrecht
WiskundeGebouw, Budapestlaan 6
3584 CD Utrecht

Title

Kant and Choice, Antinomy and Axiom.
An Ontogenesis of the Banach-Tarski Paradox

Summary

We provide an account of the ontogenesis of the Banach-Tarski Paradox within Kant's view on metaphysics, rather than within his view on mathematics, when the Axiom of Choice in set-theory is seen as giving rise to a fifth antinomy. The key insight is that the Axiom of Choice (as well as its negation) when applied to infinite sets transcends all possible experience.

Personalia

Dr. F.A. Muller (1962) is gepromoveerd op de grondslagen en filosofie van de natuurkunde en de wiskunde *(Structures for Everyone*, 1998), Universiteit Utrecht; NWO VENI post-doc over de grondslagen en interpretatie van de quantumveldentheorie (2000–2003), Universiteit Utrecht; NWO VIDI post-doc over structuurrealisme, Erasmus-Universiteit Rotterdam (2003–2009); publiceerde in: *Philosophy of Science, British Journal for the Philosophy of Science, Erkenntnis, Synthese, Analysis, Studies in the History and Philosophy of Modern Physics, Foundations of Physics, Nuclear Physics B*, en in: *Hollands Maandblad, De Gids, Algemeen Nederlands Tijdschrift voor Wijsbegeerte, Nederlands Tijdschrift voor Natuurkunde, NRC Handelsblad*.

Thekla Teunis (1984) is student wiskunde en taal- & cultuurstudies, Universiteit Utrecht; Ontvanger Studentprijs Bijzondere Verdiensten (2008); studentlid van de Utrecht Development Board, ingesteld in Juni 2009 door de Gemeente Utrecht en PriceWaterhouseCoopers.