

CONVEXE MEETKUNDE

Pelle Wielinga & Han van der Ven

1. Convexe meetkunde

Convexe meetkunde is een tak van de meetkunde die zich bezighoudt met convexe verzamelingen. In de Euclidische ruimte wordt een object convex genoemd als het geen deuken of gaten heeft. Netjes geformuleerd:

1.0.1. Definitie: Convex

Een object of verzameling is convex, als voor een rechte lijn tussen elke twee punten in het object of in de verzameling geldt, dat alle punten op de lijn ook in het object of de verzameling zitten.



1.1. Vereniging en doorsnede

Er geldt een aantal stellingen voor convexe objecten:

1. De lege verzameling en de hele ruimte zijn convex;
2. De doorsnede van convexe verzamelingen is convex;

Hier volgen de bewijzen voor de bovenstaande stellingen:

1: Er zijn geen punten in de lege verzameling, dus alle rechte lijnen in de lege verzameling bevinden zich in de verzameling; Alle lijnen tussen punten in een meetkundige ruimte bevinden zich in de ruimte. $\square$

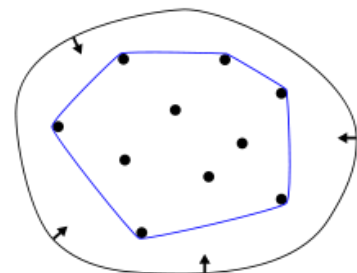
2: Laat A en B twee convexe verzamelingen zijn. Laat $x, y \in A \cap B$. Er geldt $x, y \in A$. Omdat A convex is, is de gehele lijn xy bevat in A , dus $xy \subseteq A$. Evenzo geldt $xy \subseteq B$. Hieruit volgt dat $xy \subseteq A \cap B$. $\square$

1.2. Convexe hulsen

Elke deelverzameling A van de metrische ruimte is bevat in een kleinste convexe object. Dit heet de convexe huls van A . Preciezer geformuleerd:

1.2.1. Definitie: convexe huls

De convexe huls van een verzameling A , is de kleinste convexe verzameling die A bevat, en wordt genoteerd als $\text{Conv}(A)$.



Of, gebruikmakend van stelling 2, de doorsnede van alle convexe verzamelingen die A bevatten.

2. Convexe operaties

Het optellen en aftrekken van convexe objecten levert al snel concave ('niet convexe') objecten op; twee driehoeken met een ruimte ertussen opgeteld, zijn concaaf; een cirkel waarvan een kleinere cirkel wordt afgetrokken, een 'O' vorm, is ook concaaf. We noemen operaties, die, uitgevoerd op convexe verzamelingen, weer een convexe verzameling geven, convex behoudend.

2.1. Minkowski-optellen

Een voorbeeld van een convex behoudende operatie, is Minkowski-optellen. De operatie houdt in dat alle punten van de ene verzameling, bij alle punten van de andere verzameling worden opgeteld.

2.1.1. Definitie: Minkowski-som

De Minkowski-som van twee verzamelingen A en B wordt gegeven door:

$$A \oplus B = \{a + b | a \in A, b \in B\}$$

Hiernaast staat de Minkowski-som van P en Q , met als oorsprongen voor P en Q de het meest linker punt. De rechter figuur kan verkregen worden door P vast te houden en de linkerpunt van Q door P te bewegen.



Dat de Minkowski-som convex behoudend is, is in te zien door een twee willekeurige punten de kiezen uit $A \oplus B$, zeg x en y . Het punt x is te schrijven als $x = a_x + b_x$, en $y = a_y + b_y$. De lijn $a_x a_y \subseteq A$, want A is convex. Evenzo is $b_x b_y \subseteq B$. Merk nu op dat $a_x a_y + b_x b_y \subseteq A + B$. Hieruit volgt dat de Minkowski-som convex behoudend.

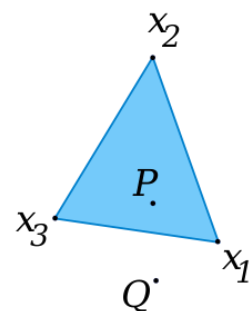
Merk op dat de Minkowski-som commuteert met het nemen van de convexe huls:

$$\text{Conv}(A \oplus B) = \text{Conv}(A) \oplus \text{Conv}(B)$$

Om dit inzichtelijk te maken; de rand van een convex object is vastgelegd door de gegeven hoekpunten uit verzameling A (of B). Observeer dat $A \oplus B$ alle sommen van alle hoekpunten bevat; de hoeken definiëren dus opnieuw de rand van het convexe object.

2.2. Convexe combinatie

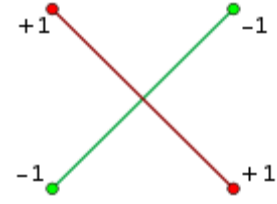
Alle punten behorend tot de convexe huls kunnen geschreven als lineaire combinatie van gegeven punten uit de verzameling A , in de vorm $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n$, met $\lambda_i \in \mathbb{R}$ en $a_i \in A$, waarbij de scalaren tevens moeten voldoen aan $\lambda_i \geq 0$ en $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1$.



3. De stelling van Radon

3.0.1. Stelling: Radon's stelling

Elke convexe verzameling P van $n + 2$ of meer punten in $\mathbb{R}^n$ is op te delen in twee convexe partities J, K waarbij de convexe hulsen $\text{Conv}(J)$ en $\text{Conv}(K)$ van de partities overlappen.



Bewijs: Omdat we te maken hebben met $n + 2$ vectoren in een n -dimensionale ruimte zijn de vectoren lineair afhankelijk. Er is dus een niet triviale oplossing voor $\sum_{i=1}^{n+2} \lambda_i p_i = 0$, voor alle punten p_i met $1 \leq i \leq n + 2$. Dit zijn n vergelijkingen, een voor elke dimensie. Omdat er $n + 2$ onbekenden zijn, alle λ_i , kunnen we nog een vergelijking opstellen: $\sum_{i=1}^{n+2} \lambda_i = 0$. Het stelsel van vergelijkingen:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n+2} \lambda_i p_i = 0 \\ \sum_{i=1}^{n+2} \lambda_i = 0 \end{cases}$$

Neem nu J als de verzameling van alle indices j met $\lambda_j > 0$ en K de verzameling van alle indices k met $\lambda_k \leq 0$. Definieer nu $\Lambda := \sum_{j \in J} \lambda_j = -\sum_{k \in K} \lambda_k$. Hieruit volgt dat er een punt q is zo dat:

$$q = \sum_{j \in J} \frac{\lambda_j}{\Lambda} p_j = -\sum_{k \in K} \frac{\lambda_k}{\Lambda} p_k$$

Merk op dat $\sum_{j \in J} \frac{\lambda_j}{\Lambda} = \sum_{k \in K} \frac{-\lambda_k}{\Lambda} = 1$. Dus q is in beide gevallen een convexe combinatie en dus ligt q in de convexe huls van beide verzamelingen. $\square$

3.1. Een voorbeeld

Kies de punten $(\pm 1, \pm 1) \in \mathbb{R}^2$ (rechtsonderaan beginnend in positieve richting draaiend). Dan is het stelsel vergelijkingen om de λ_i 's te vinden:

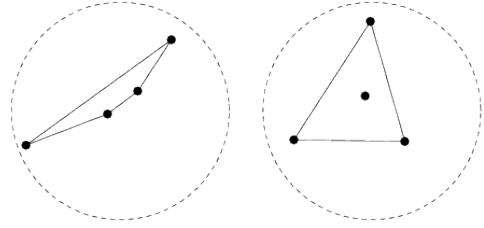
$$\begin{cases} \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \end{cases} \equiv \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4 = 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_4 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \end{cases}$$

Kies $\lambda_1 = 1$; Het stelsel heeft nu drie vergelijkingen met drie onbekenden, waaruit volgt, dat $\lambda_1, \lambda_3 = 1, \lambda_2, \lambda_4 = -1$. De doorsnede q wordt gegeven door de genormaliseerde som van de positieve scalar-vector-paren.

$$q = \sum_{j \in J} \frac{\lambda_j}{\Lambda} p_j = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}}{2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

4. Sylvesters vierpuntenprobleem

Als men in een eindig convex gebied in het vlak, R , vier willekeurige punten zet, wat is dan de kans dat deze een convexe vierhoek vormen? Dat vroeg Sylvester zich af in 1865. Hij formuleerde de volgende stelling:



4.0.1. Stelling: Sylvesters vierpuntenprobleem

De kans dat vier willekeurige punten in een eindig convex gebied in het vlak, R , een convexe vierhoek vormen, is

$$P(R) = 1 - \frac{4\overline{A_R}}{A(R)}$$

Waar $\overline{A_R}$ de verwachtingswaarde voor de oppervlakte van een driehoek is gegeven gebied R is, en $A(R)$ de totale oppervlakte van gebied R .

Bewijs: Noem de vier punten a, b, c en d . Beschouw eerst de driehoek gevormd door drie van de vier punten, met oppervlakte A_{abc} . De kans dat het vierde punt zich in de driehoek bevindt, is $P(d \in \Delta abc) = \frac{A_{abc}}{A(R)}$, waarbij $A(R)$ de oppervlakte van gebied R is. De kans dat het punt zich erbuiten bevindt is dus $P(d \notin \Delta abc) = 1 - \frac{A_{abc}}{A(R)}$. Merk op dat voor een convexe vierhoek geldt, dat elk punt zich buiten de driehoek gevormd door de andere punten bevindt:

$$P(a \notin \Delta bcd \wedge b \notin \Delta acd \wedge c \notin \Delta abd \wedge d \notin \Delta abc) = 1 - \frac{A_{bcd}}{A(R)} - \frac{A_{acd}}{A(R)} - \frac{A_{abd}}{A(R)} - \frac{A_{abc}}{A(R)}$$

De oppervlakte van de vier driehoeken, die willekeurig is, vervangen door de verwachtingswaarde van de oppervlakte, levert:

$$P(R) = 1 - \frac{4\overline{A_R}}{A(R)} \square$$

4.1. De oppervlakte van de driehoek

In de bovensaande vergelijking staat de verwachtingswaarde van de driehoek vermeld. Hoewel dit wat minder met convexe meetkunde te maken heeft, laten we toch zien hoe deze gevonden kan worden.

We moeten de oppervlakten behorend bij alle mogelijke configuraties van drie punten sommeren. Eigenlijk komt het neer op een integraal van de oppervlakte over de coördinaten van het eerste punt, geïntegreerd over de coördinaten van het tweede punt, geïntegreerd over de coördinaten van het derde punt; Dit moet gedeeld worden door de totale oppervlakte van gebied R , om te normaliseren; dezelfde integraal, maar dan over 1.

Er komt dus iets te staan in de vorm van:

$$\overline{A_R} = \frac{\iiint |\Delta| dy_3 dx_3 dy_2 dx_2 dy_1 dx_1}{A(R)}$$

Waarbij $|\Delta|$ de oppervlakte van driehoek $\Delta\{x_1, y_1\}, \{x_2, y_2\}, \{x_3, y_3\}$; gegeven door

$$|\Delta| = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

We beschouwen eerst een driehoek kiezen als gebied R . Kies een eenvoudig te integreren driehoek: $\Delta(0,0)(1,0)(0,1)$, een gelijkbenige rechte driehoek met beenlengte 1. De integraal is dan:

$$\overline{A_{driehoek}} = \frac{\int_0^1 \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} \int_0^{x_3} |\Delta| dy_3 dx_3 dy_2 dx_2 dy_1 dx_1}{\int_0^1 \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} \int_0^{x_3} dy_3 dx_3 dy_2 dx_2 dy_1 dx_1}$$

Pfiefer('s computer) heeft deze integraal in 1989 als eerste opgelost, met als resultaat $\overline{A_{driehoek}} = \frac{1}{12}$

4.2. Verwachtingswaarde voor n -hoeken

Dit idee kan ook algemener uitgevoerd worden, door te integreren over het genormaliseerde oppervlak van een n -hoek. Er geldt, dat voor een n -hoek de verwachtingswaarde voor de oppervlakte van een driehoek bestaande uit drie willekeurige punten gegeven wordt door:

$$\overline{A_n} = \frac{9 \cos^2 \omega + 52 \cos \omega + 44}{36 n^2 \sin^2 \omega}$$

Met $\omega = 2\pi/n$. En n het aantal hoeken van de veelhoek. De limiet $n \rightarrow \infty$ geeft de verwachtingwaarde voor een cirkel. Voor het formele bewijs van deze stelling verwijzen we de lezer naar (Alikoski 1939; Solomon 1978, p. 109; Croft et al. 1991, p. 54).

4.3. Een afschatting voor $P(R)$

Voor een driehoek vinden geldt $\overline{A_{driehoek}} = \frac{1}{12}$, dus $P(driehoek) = \frac{2}{3}$. De driehoek blijkt de kleinste kans te hebben op Sylvesters convexe vierhoek.

De grootste kans op een convexe vierhoek, is in een cirkel (of ellips). De verwachtingswaarde voor de oppervlakte van een willekeurige driehoek is $\overline{A_{cirkel}} = \frac{35}{48\pi^2}$; de kans op een convexe vierhoek is dan $P(cirkel) = 1 - \frac{35}{12\pi^2}$.

Hiermee is de kans op een convexe vierhoek voor alle convexe gebieden af te schatten op:

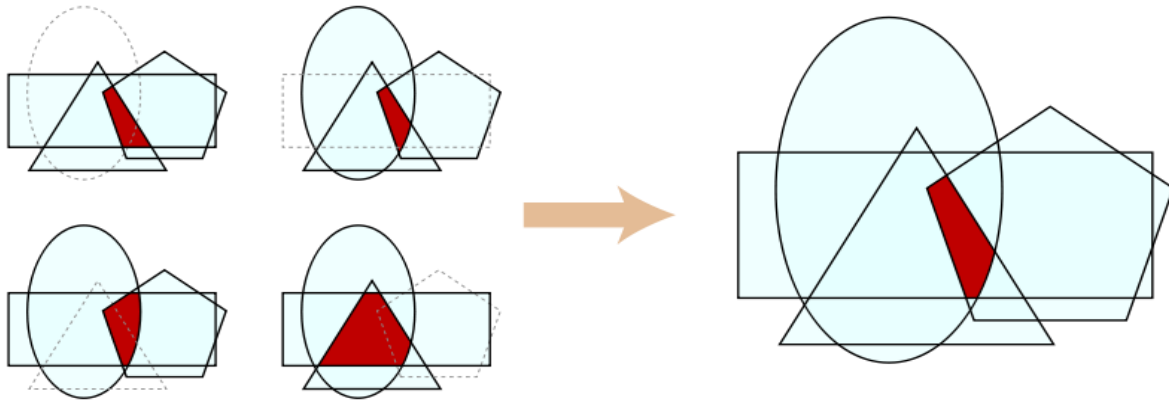
$$\frac{2}{3} \leq P(R) \leq 1 - \frac{35}{12\pi^2}$$

5. De stelling van Helly

5.0.1. De stelling van Helly

Zij $C = \{C_1, \dots, C_k\}$ convexe verzamelingen in $\mathbb{R}^n$, met $k > n$. Noem alle $(n + 1)$ -combinaties uit C (deelverzamelingen van orde $n + 1$) $K_j \subseteq C$.

Als geldt voor alle K_j , dat de doorsneden niet leeg zijn, oftewel $\bigcap_{C_i \in K_j} C_i \neq \emptyset$, dan is $S := \bigcap_{i=1}^k C_i$ ook niet leeg.



Bewijs: Als $k = n + 1$, $K_1 = C$, de doorsneden van K_j zijn niet leeg, dus die van C ook niet, dus de stelling is dan waar.

Stel nu dat $k = n + 2$. We weten dat voor alle $1 \leq i \leq k$ de doorsnede van alle verzamelingen behalve C_i , namelijk $\bigcap_{j=1, j \neq i}^k C_j \neq \emptyset$, oftewel een element x_i bevat. Merk op dat voor alle $j \neq i$ geldt $x_i \in C_j$.

Op deze manier kunnen we voor elke i een of andere x_i vinden. Noem de verzameling X van alle x_i . Deze verzameling heeft niet noodzakelijk unieke elementen.

Als twee elementen, zeg x_a en x_b hetzelfde zijn, geldt $x_a \in \bigcap_{j=1, j \neq a}^k C_j \neq \emptyset$ en $x_b = x_a \in \bigcap_{j=1, j \neq b}^k C_j$, dus $x_a \in \bigcap_{j=1}^k C_j = S$, dus zijn we klaar.

Als alle elementen verschillend zijn, geldt $|X| = k = n + 2$. Er volgt nu uit Radon's theorem dat X op te delen is in 2 kleinere verzamelingen P_1 en P_2 waarbij de doorsnede van hun convexe hulsen niet leeg is; $\text{Conv}(P_1) \cap \text{Conv}(P_2) \neq \emptyset$. Als x_i in P_1 zit, dan $P_2 \subseteq X - x_i \subseteq C_i$. Aangezien C_i convex is, volgt dat $\text{Conv}(P_2) \subseteq C_i$ zit.

Op dezelfde manier geldt dat als x_i in P_2 zit dan zit $\text{Conv}(P_1)$ in C_i . Omdat voor elke i geldt dat $\text{Conv}(P_1) \subseteq C_i$ en/of $\text{Conv}(P_2) \subseteq C_i$, dus $\text{Conv}(P_1) \cap \text{Conv}(P_2) \subseteq C_i$ voor elke i . Eerder stelden we vast dat $\text{Conv}(P_1) \cap \text{Conv}(P_2)$ niet leeg is, dus

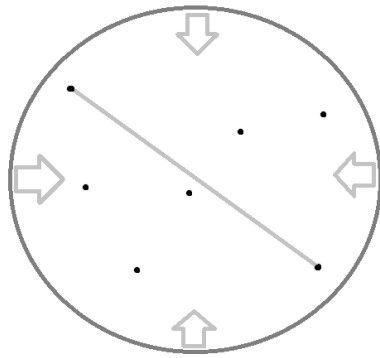
$$\text{Conv}(P_1) \cap \text{Conv}(P_2) \subseteq \bigcap_{i=1}^k C_i = S$$

We hebben gesteld dat de doorsnede van $k - 1$ verzamelingen niet leeg is, waaruit we concluderen dat de doorsnede van elke k verzamelingen niet leeg zijn. De stelling is waar voor $k \leq n + 1$. Op grond van inductie geldt de stelling van Helly voor elke k . $\square$

6. De stelling van Jung

6.0.1. De stelling van Jung

Voor elke verzameling punten S in $\mathbb{R}^n$ waarbij de afstand tussen de verste twee punten d is, met een eindig getal d , bestaat er een bol met straal $\sqrt{\frac{n}{2n+2}}d$, zo dat heel S in de bol ligt.

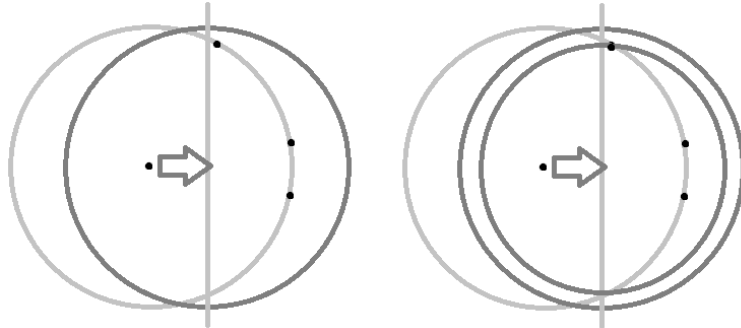


We zullen eerst aantonen dat dit geldt voor $|S| \leq n + 1$ en het vervolgens met behulp van de stelling van Helly uitbreiden naar elke S .

Bewijs deel I: Neem eerst aan dat $|S| \leq n + 1$. Omdat d eindig is bestaat de kleinste bol om S heen. Laat het middelpunt van deze bol de oorsprong zijn, noem de straal r en laat S' de punten in S zijn die op de rand van de bol liggen. Het is makkelijk te zien dat S' niet leeg is (anders kan de bol kleiner) en elk element van S' lengte r heeft.

Merk op dat de oorsprong altijd in de convexe huls van S' ligt. Stel dat dit niet het geval zou zijn, dan bestaat er een hypervlak (of in twee dimensies, een lijn) dat tussen de oorsprong en S' in ligt.

Als we de oorsprong nu opschuiven in de richting van het hypervlak dan komen alle punten van S' strict binnen de bol te liggen en kan de bol kleiner, maar de bol was al de kleinst mogelijke bol om alle punten heen dus dit is een contradictie.



Laat $S' = \{p_1, p_2, \dots, p_m\}$ met $m \leq n + 1$ (want $|S'| \leq |S| \leq n + 1$). Omdat de oorsprong binnen de convexe huls van S' ligt, is de oorsprong te schrijven als een convexe combinatie, namelijk:

$$\sum \lambda_i p_i = 0, \sum \lambda_i = 1$$

waarbij alle $\lambda_i \geq 0$. Voor een willekeurige $1 \leq k \leq m$ geldt nu, $1 = \sum \lambda_i$, oftewel;

$$1 - \lambda_k = \sum_{i \neq k} \lambda_i$$

De afstand van elk punt tot het punt p_k , gegeven door $\|p_i - p_k\|$ is per definitie kleiner of gelijk aan d , dus:

$$1 - \lambda_k \geq \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\|p_i - p_k\|^2}{d^2} = \frac{1}{d^2} \sum_{i=1}^m \lambda_i \|p_i - p_k\|^2$$

Alle p_i liggen op de rand dus $\langle p_i, p_i \rangle = r^2$ voor alle i . Hieruit volgt:

$$\begin{aligned} 1 - \lambda_k &\geq \frac{1}{d^2} \sum_{i=1}^m \lambda_i (\langle p_i, p_i \rangle - 2\langle p_i, p_k \rangle + \langle p_k, p_k \rangle) = \frac{1}{d^2} \sum_{i=1}^m \lambda_i (2r^2 - 2\langle p_i, p_k \rangle) \\ &= \frac{2}{d^2} \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i r^2 - \sum_{i=1}^m \langle \lambda_i p_i, p_k \rangle \right) \end{aligned}$$

De sommatie over alle λ_i is 1, en de sommatie over alle $\lambda_i p_i$ is 0; hieruit volgt dat:

$$1 - \lambda_k = \frac{2r^2}{d^2}$$

Als we dit dan voor alle k bij elkaar optellen krijgen we, weer gebruikmakend van de sommatie over alle λ .

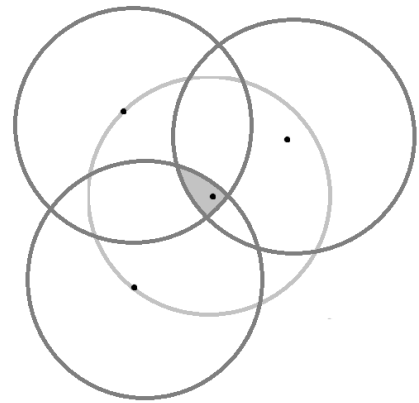
$$\sum_{k=1}^m 1 - \lambda_k = m - 1 \geq m \frac{2r^2}{d^2} = \sum_{k=1}^m \frac{2r^2}{d^2}$$

Door de $2m$ naar de andere kant te halen en $m \leq n + 1$ te gebruiken krijgen we $\frac{2r^2}{d^2} \leq \frac{m-1}{2m} \leq \frac{n}{2n+2}$, waaruit volgt dat $r \leq \sqrt{\frac{n}{2n+2}} d$.

Bewijs deel II: Nu we het bewezen hebben voor $|S| \leq n + 1$ kunnen de stelling van Helly gebruiken.

Beschouw $n + 1$ punten uit de verzameling S , (een $(n + 1)$ -combinatie) en noem deze verzameling K_i .

Omdat de grootste afstand tussen twee punten uit K_i kleiner of gelijk is aan d , mogen we zonder problemen $r = \sqrt{\frac{n}{2n+2}} d$ als straal gebruiken. Er bestaat een bol B met straal r , zodat alle punten van K_i in de bol liggen. Oftewel, er is een punt (het middelpunt van B) met afstand $\leq r$ tot elk van de punten uit K_i .



Beschouw nu de bollen met als middelpunten de punten uit K_i . Het middelpunt van B ligt in de doorsnede van deze K_i -bollen. Dit kan voor elke $(n + 1)$ -combinatie, ofwel voor elke i .

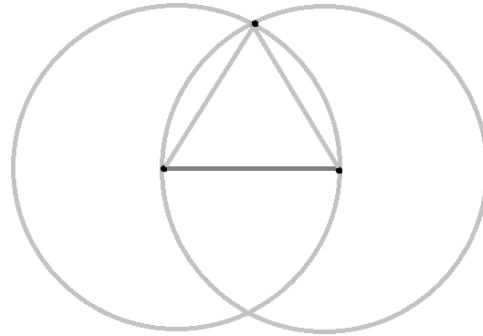
Bollen zijn convex, en alle $(n + 1)$ -combinaties hebben een niet-lege doorsnede. Uit de stelling van Helly volgt nu, dat de doorsnede van alle bollen niet leeg is.

Kies nu een punt in de doorsnede als middelpunt van een bol met straal r , dan liggen alle punten in S binnen de bol. $\square$

6.1. Een meetkundige benadering

We gaan hetzelfde probleem nu meetkundig benaderen. Beschouw twee punten, met afstand d . Teken om beide punten een cirkel met straal d . Als we nu een derde vrij punt willen kiezen, moet het binnen beide cirkels liggen, omdat anders de afstand tot een van de andere punten groter dan d is.

We proberen het derde punt zo te kiezen dat de straal van de cirkel die alle punten omsluit zo groot mogelijk is, ten opzichte van d , het ‘worst-case scenario’. Dat blijkt een van de twee snijpunten te zijn van de twee cirkels, zodat de afstand van het nieuwe punt tot de twee eerste, gemaximaliseerd is.



Hetzelfde kan men doen voor $\mathbb{R}^3$; beschouw de gevonden driehoek, en zet om elk punt een bol. Het ‘worst case scenario’ voor een nieuw punt, is weer snijpunt tussen de bollen.

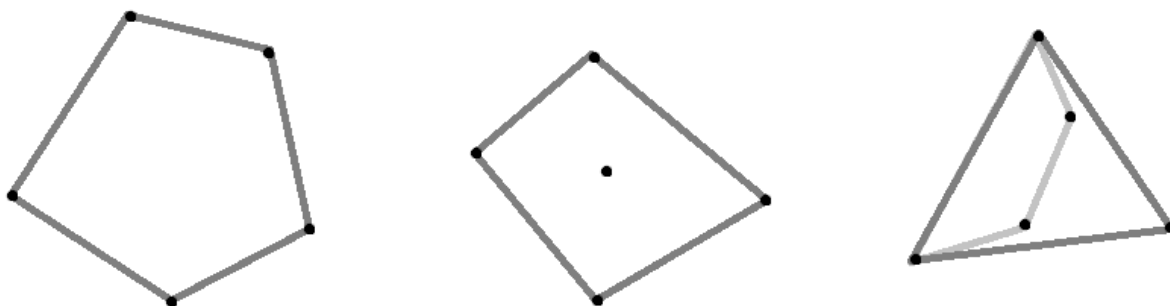
De figuur die ontstaat in $\mathbb{R}^n$, is een n -simplenx. We laten het aan de lezer (in de opgaven) om deze benadering van de stelling van Jung in $\mathbb{R}^2$ te controleren.

7. Het ‘Happy ending’ probleem

Erdős en Szekeres hielden zich bezig met een probleem, dat later het happy ending probleem genoemd zou worden. Ze pogen de volgende stelling, geformuleerd door Esther Klein (Szekeres en Klein huwden naar aanleiding van hun werk aan dit probleem, vaandaar ‘happy end’) op te lossen:

“Van vijf punten in het vlak, waarvan geen drie op dezelfde lijn liggen, is het altijd mogelijk om vier punten te selecteren die een convexe vierhoek vormen.”

De juistheid van deze stelling is eenvoudig in te zien; vijf punten kunnen op de volgende drie manier gerangschikt zijn:



Noem de verzameling punten P . Als $\text{Conv}(A)$ een vier- of vijfhoek is, is de oplossing triviaal. Neem daarom aan dat $\text{Conv}(A)$ een driehoek $(\Delta a_1 a_2 a_3)$ is. De twee overgebleven punten a_4 en a_5 bevinden zich binnen $a_1 a_2 a_3$. Twee van deze punten, (zeg, zonder verlies van algemeenheid, a_1 en a_2) bevinden zich aan dezelfde kant van de lijn $a_4 a_5$. Hieruit volgt dat $a_1 a_5 a_4 a_2$ een convexe vierhoek is.

7.1. Het algemene happy ending probleem

De algemene probleemstelling luidt, naar Klein's formulering, als volgt:

“Kunnen we, gegeven n , een getal $N(n)$ vinden, zodat voor elke verzameling met ten minste N punten het mogelijk is een convexe n -hoek te vormen?”

We hebben de resultaten $N(3) = 3$, en $N(4) = 5$ al gezien. Er zijn nog meer resultaten bekend, die op experimentele wijze zijn vastgesteld; $N(5) = 9$ (hier rechts een voorbeeld dat $N(5) > 8$ bevestigt), en $N(6) = 17$. De huidige hypothese is dat $N(n) = 2^{n-2} + 1$, deze is echter nog niet bewezen.



Met het toenemen van het aantal punten n , neemt het aantal k -combinaties, (deelverzamelingen met orde k) om te kijken of ze een convexe veelhoek vormen toe als $\binom{n}{k}$, waardoor gevallen $n \gg 5$ al een hels karwei wordt om eenvoudig te onderzoeken. Willekeurige oplossingen vinden is ook een problematische onderneming. Een bovengrens, en daarmee de existentie van N is in 1935 bewezen door Erdős en Szekeres. Dit bewijs is als bijlage toegevoegd. De bovengrens werd door hen gegeven als $N(n) \leq \binom{2n-4}{n-2}$. Inmiddels is de bovengrens al teruggebracht tot $N(n) \leq \binom{2n-5}{n-2} + 2$. Door Tóth en Valtr (1998).

8. Opgaven

Maak opgaven 1 tot en met 3, opgave 4 is facultatief. (en tijdrovend)

8.0.1. Stelling van Radon

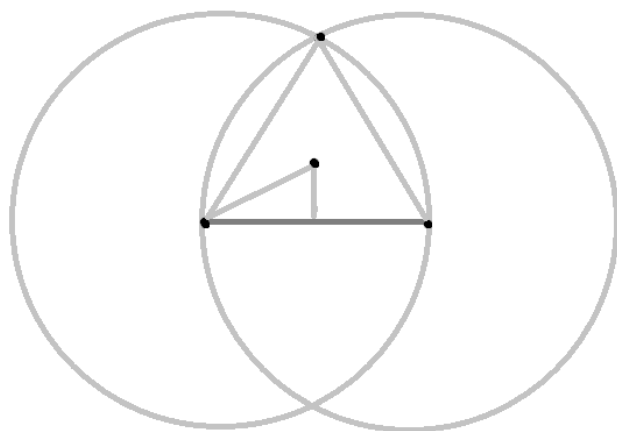
Gegeven de vier punten $(0,0)$, $(4,0)$, $(0,2)$, $(1,1)$, vind de doorsnede q .

8.0.1. Stelling van Helly

Geldt de stelling van Helly ook voor niet-convexe verzamelingen. Beperk je tot $\mathbb{R}^2$. Motiveer je antwoord.

8.0.3. Stelling van Jung

Reken meetkundig de stelling van Jung na in $\mathbb{R}^2$. Maak daarbij gebruik van het plaatje rechts.



8.0.4. Happy Ending (Bonus)

Vind een tegenvoorbeeld voor $N(6) \leq 16$.

9. Bronvermelding

“Composito Mathematica - A combinatorial problem in geometry” (1935)- P. Erdős & G. Szekeres

mathworld.wolfram.com

cstheory.wordpress.com/2010/08/07/jungs-theorem/

10. Bijlage I: Happy Ending

Voor we de existentie van N kunnen aantonen, moeten we Ramsey’s combinatiestelling laten zien. Deze stelling bewijzen we niet in dit dictaat. De strekking van de stelling is dat voor hele grote verzamelingen, met de juiste restricties, er geen onderverdeling in klassen mogelijk is voor klein genoeg deelverzamelingen.

10.0.1. Stelling: Ramsey’s combinatiestelling

Laat k, l, e gegeven positieve gehele getallen zijn, met $k \geq i; l \geq i$. Stel dat er twee klassen zijn, α en β . Van i -combinaties van m elementen, zodat elke k -combinatie ten minste één combinatie van klasse α en elke l -combinatie bevat ten minste één combinatie van klasse β . Dan is dit onmogelijk voor groot genoeg $m < m_i(k, l)$.

Nota bene; de 3-combinaties van $\{1, 2, 3, 4\}$, zijn $\{\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}\}$.

We staan voortaan voor het gemak toe, dat er gestrekte hoeken en hoeken van 0° mogen voorkomen in een convexe veelhoek; er mogen dus meer dan twee punten op een lijn komen te liggen. Hieronder volgt het eerste van twee bewijzen van Erdős en Szekeres voor de existentie van het getal $N(n)$.

Bewijs: Hierboven is bewezen dat $N(4) = 5$. Het is eenvoudig te bewijzen, met inductie, dat $n(\geq 4)$ punten een convexe veelhoek vormen dan en slechts dan, als elke 4 punten daarvan een convexe vierhoek vormen.

Schrijf de punten als $a_1, a_2, \dots, a_N$. Elke k -hoek van deze verzameling punten, is vertegenwoordigd door k van deze punten, ofwel een k -combinatie. Stel nu dat elke n -hoek concaaf (‘niet convex’) is, dan proberen we de 4-combinaties in klassen onder te verdelen; “convex” en “concaaf”, zodat elke 5-combinatie tenminste een “convexe” combinatie bevat, en elke n -combinatie een concave.

Uit de combinatietheorie van Ramsey volgt, dat voor een groot genoeg N , dit niet kan. Hiermee is de existentie van $N(n)$ aangetoond. $\square$

Merk op dat dit bewijs voor alle dimensies geldig is.