Gödels Onvolledigheidsstellingen

Jaap van Oosten

Department Wiskunde, Universiteit Utrecht

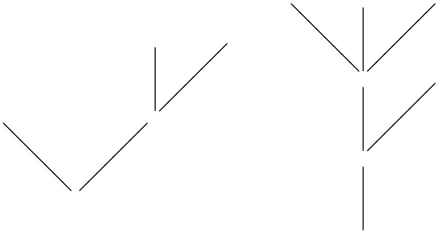
Symposium A-eskwadraat, 11 december 2014

De Onvolledigheidsstellingen van Gödel zijn verreweg de beroemdste resultaten uit de *Logica*.
Waar houdt Logica zich mee bezig?
De Logica bestudeert *formele systemen*.

Eerst formuleren we een grammatica van *formele beweringen over natuurlijke getallen*:
we gebruiken de tekens $0, 1, +, \cdot$, *variabelen* $x, y, z, \ldots$ en *logische tekens* $\wedge, \vee, \rightarrow, \neg, \forall, \exists$ en vormen daarmee *formules*, onze "beweringen". Bijvoorbeeld:

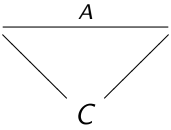
$$\exists x(y + (x + 1) = z)$$
$$\neg(a = 1) \wedge \forall x(\exists z(x{\cdot}z = a) \rightarrow x = 1 \vee x = a)$$

We formuleren ook een grammatica van *bewijzen*.
Een *bewijs* is een boom, dat is een figuur zoals:

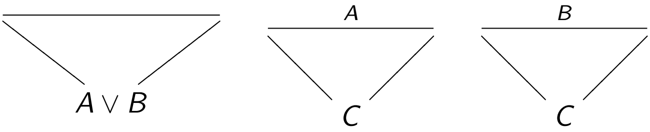


Maar nu staat er bij elk knooppunt een formule. De formules bovenaan (de "bladeren" van de boom) zijn de *aannamen*, de formule onderaan (bij de "wortel") is de *conclusie*. Sommige aannamen zijn doorgehaald: die hebben in een deelredenering hun werk gedaan, maar zijn niet meer nodig.

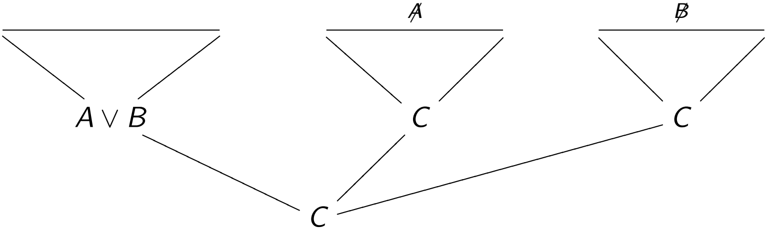
Specifieke regels vertellen ons hoe we zulke bomen mogen vormen. Laten we met



een boom aangeven waarin A een aanname is en C de conclusie. Stel, we hebben de volgende bomen:

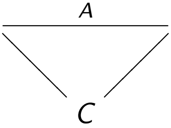


Dan mogen we de volgende boom vormen:

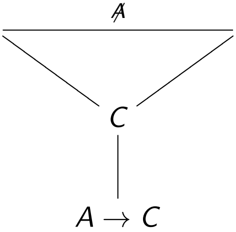


De aannamen A en B zijn niet meer nodig.
Ander voorbeeld:

Uit



maken we



Een *zin* is een formule zonder “vrije variabelen”.
Een *theorie* is een verzameling zinnen.
Met de schrijfwijze $T \vdash A$ geven we aan, dat er een bewijsboom bestaat met aannamen uit T en conclusie A.
Tot zover de Logica.

Vragen uit de filosofie van de wiskunde

Waar bevinden zich de wiskundige objecten? Wel's een element van $\mathbb{R}$ gezien?
Bestaan oneindige structuren echt?
Worden wiskundige waarheden ontdekt, of geconstrueerd?
Welke logische regels kunnen we veilig gebruiken als we redeneren over oneindige objecten?

Rond 1900 profileerden zich verschillende stromingen.

1. *Platonisme*: de wiskundige objecten en waarheden bestaan, onafhankelijk van ons, in de godenwereld. Door diep denken en schouwen kunnen we een glimp van die waarheden opvangen.
2. *Logicisme* (Russell, Wittgenstein): wiskunde is een formeel spel met symbolen. Wiskunde is hetzelfde als Logica, en wiskundige waarheden zijn tautologieën.
3. *Intuïtionisme* (Brouwer): wiskunde is een constructie van onze geest. Taal is daarbij een uiterst feilbaar hulpmiddel. Oneindige objecten bestaan niet echt, maar zijn idealiseringen. Bij het redeneren over oneindige objecten is het "uitgesloten derde" niet veilig.

Hiertegenover stelde Hilbert zijn *wiskundige programma*.

Het Programma van Hilbert

1. Wij werken in dat deel van de wiskunde, dat wij allemaal als onproblematisch beschouwen, namelijk de wiskunde van *eindige structuren*, of (equivalent) de wiskunde van *natuurlijke getallen* $0, 1, 2, \ldots$
2. Wij bestuderen (met deze veilige middelen) *wiskundige bewijzen*. Wiskundige bewijzen zijn namelijk eindige structuren. Wij creëren *Bewijstheorie*.
3. Met behulp van de bewijstheorie tonen we aan, dat het gangbare wiskundige redeneren, ook over oneindige objecten, *vrij van tegenspraken* is.

Een voorbeeld van zo'n veilig systeem is de zg. *Peano Rekenkunde* (PA). Het heeft de volgende axioma's:

$$\begin{array}{ll} \forall x \neg (x+1=0) & \forall x \forall y (x+1=y+1 \to x=y) \\ \forall x (x+0=x) & \forall x (x \cdot 0 = 0) \\ \forall x \forall y (x+(y+1)=(x+y)+1) & \forall x \forall y (x \cdot (y+1) = x \cdot y + x) \end{array}$$

en, voor elke formule $A(x)$, het *inductieaxioma*:

$$[A(0) \wedge \forall x (A(x) \to A(x+1))] \to \forall x A(x)$$

Het werk van Gödel

Wij kunnen alle formules een 'code' toekennen: een natuurlijk getal. We schrijven $\ulcorner A \urcorner$ voor de code van formule A. We kunnen dit zo doen, dat de belangrijkste eigenschappen van formules (die dus nu eigenschappen van getallen worden) volgen uit de axioma's van PA.

Wij kunnen ook bewijsbomen coderen.

Wij kunnen een formule $\mathrm{Bew}(x, y)$ opstellen die uitdrukt: "x is de code van een bewijsboom waarvan de aannamen axioma's van PA zijn, en de conclusie een formule met code y"
Let wel: de formule $\mathrm{Bew}(x, y)$ is geheel opgebouwd uit de tekens $0, 1, +, \cdot, \forall, \exists, \wedge, \vee, \rightarrow, \neg$ en variabelen.

Het Diagonalisatielemma

Voor elke formule $A(x)$ is er een zin B met de eigenschap dat de equivalentie

$$B \leftrightarrow A(\ulcorner B \urcorner)$$

een gevolg is van de axioma's van PA.

Dit lemma heeft een wonderlijk gevolg!

Pas het Diagonalisatielemma toe op de formule $\neg\exists x \mathrm{Bew}(x, y)$. Er is dus een zin G (de "Gödel-zin") waarvoor de equivalentie

$$G \leftrightarrow \neg\exists x \mathrm{Bew}(x, \ulcorner G \urcorner)$$

volgt uit de axioma's van PA.
Er volgt, dat als de theorie PA vrij van tegenspraak is, er een zin G is die waar is, maar niet te bewijzen. Dit is Gödels *Eerste Onvolledigheidsstelling*. Maar nog iets anders is waar:

De Gödelzin G is equivalent met de zin $\neg\exists x \mathrm{Bew}(x, \ulcorner 1 = 0 \urcorner)$. Deze laatste zin drukt uit, dat PA vrij van tegenspraak is. Er volgt dus, dat àls PA vrij van tegenspraak is, dit feit niet te bewijzen is *door* PA.

Laat staan dat uit PA een bewijs te verkrijgen zou zijn, dat de gehele wiskunde vrij van tegenspraken is!

Hilbert geloofde rotsvast dat elk probleem in principe oplosbaar was. Door hard werken zouden we op den duur achter elke waarheid kunnen komen. In 1930, op 8 september, tijdens een wiskundig congres te Königsberg, sprak hij een lezing voor de radio uit. Hij sprak daarin de volgende beroemde woorden:

> *Statt des törichten Ignorabimus heiße im Gegenteil*
> *unsere Losung:*
> *wir müssen wissen – wir werden wissen*

Op het moment dat Hilbert bezig was met deze radio-opname, was op het congres juist een jonge doctor het podium opgegaan, Kurt Gödel, om zijn nieuwe resultaten omtrent Hilberts programma te presenteren. . .

Enkele latere ontwikkelingen

In 1936 kwam Alan Turing met een mathematische definitie van het begrip *algoritme*. Dit maakte het mogelijk om te bewijzen, dat voor sommige problemen *geen oplossingsalgoritme bestaan kan*. Voorbeelden zijn:

1. Hilbert's *Entscheidungsproblem*, 1928: vind een algoritme om uit te maken of er voor een logische formule een bewijs bestaat. Alonzo Church bewees dat zo'n algoritme niet kan bestaan; hij combineerde ideeën van Turing en Gödel.
2. *Hilbert's Tiende Probleem*, 1900: gegeven een veelterm in $f(X_1, \ldots, X_n) \in \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n]$. Vind een algoritme om te bepalen of er $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$ zijn zodat $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$. In 1971 bewees Yuri Matiyasevich dat zo'n algoritme niet kan bestaan.

Nog een toepassing van Gödels bewijs is de *stelling van Tarski*. Er is een formule A(x) die precies dan waar is voor een getal n, als n de code is van een bewijsbare zin: de formule $\exists y \mathrm{Bew}(y, x)$.
Maar... bewijsbaar en waar zijn twee verschillende dingen. Tarski bewees, dat er géén formule $\mathrm{Waar}(x)$ is, die precies dan waar is voor een getal n, als n de code is van een *ware* zin.
Immers bestond zo'n formule $\mathrm{Waar}(x)$ wel, pas dan het Diagonalisatielemma toe op de formule $\neg\mathrm{Waar}(x)$. We vinden een zin B, zodat de equivalentie $B \leftrightarrow \neg\mathrm{Waar}(\ulcorner B \urcorner)$ te bewijzen is uit de axioma's van PA. En dus is deze equivalentie waar. Maar dan is B waar, precies wanneer hij niet waar is...

Slotopmerkingen/vragen

1. Welk filosofisch standpunt hing Gödel zelf eigenlijk aan?
2. Is PA consistent? Voevodsky.

Literatuur

Over de stellingen van Gödel zijn natuurlijk de bladeren van de (bewijs)bomen geschreven. Maar een voor geïnteresseerde leken (alleen middelbare-schoolwiskunde vereist) leesbaar boekje, dat bovendien de vloer aanveegt met een hoop hoogdravende nonsens waar Gödel bij gehaald wordt, is

> *Torkel Franzen – Gödel's Theorem – An Incomplete Guide to its Use and Abuse, Peters 2005*

Wie meer wil weten over de filosofische kwesties en het programma van Hilbert, zij verwezen naar

> *Craig Smorynski – Hilbert's Programme, hoofdstuk 4 van het boek Logic's Lost Genius: the Life of Gerhard Gentzen, Addison-Wesley 1986.*