Tentamen Grondslagen van de Wiskunde B
2 februari 2023, 13:30–16:30
met beknopte uitwerking

DIT TENTAMEN BEVAT 5 OPGAVEN; ZIE OOK DE OMMEZIJDE.
Alle opgaven tellen even zwaar (10 punten); je cijfer is het totaal aantal punten, gedeeld door 5. Als een opgave uit meerdere deeltjes bestaat, staat bij elk deeltje hoeveel van de 10 punten dat deeltje waard is.
Advies: maak eerst die opgaven, die je kunt; en ga dan nadenken over de rest. Succes!

Opgave 1. Laat T een theorie zijn met de volgende eigenschappen:

i) T heeft kwantoreliminatie.

ii) Er is een model M van T zodat voor elk model N van T, M isomorf is met een substructuur van N.

a) (5 pts) Bewijs dat T volledig is.

b) (5 pts) Laat zien dat voor het bewijs van a), voorwaarde ii) niet gemist kan worden.

Uitwerking: a) Om te laten zien dat T volledig is, is het genoeg te laten zien dat alle modellen van T dezelfde L-zinnen waar maken (waar L de taal van T is). Gegeven twee modellen N_1, N_2 van T, zijn er substructuren M_1, M_2 van N_1, N_2 respectievelijk, zodat beide isomorf zijn met M. Stel nu $N_1 \models \phi$. Omdat N_1 een model is van T en T kwantoreliminatie heeft, is er een kwantorvrije zin ψ zodat $N_1 \models \phi \leftrightarrow \psi$. Er volgt dat $N_1 \models \psi$ en dus (omdat ψ kwantorvrij is) $M_1 \models \psi$ en dus (vanwege het isomorfisme) $M \models \psi$ en $M_2 \models \psi$. Weer volgt uit het feit dat ψ kwantorvrij is, dat $N_2 \models \psi$ en dus $N_2 \models \phi$, omdat N_2 een model is van T.

b): Het voor de hand liggendste tegenvoorbeeld is: zij T de theorie van algebraïsch afgesloten lichamen. Deze heeft kwantoreliminatie, maar specificeert niet de karakteristiek van het lichaam, en is dus niet volledig (er zijn algebraïsch afgesloten lichamen van karakteristiek 2, waarin de zin $1 + 1 = 0$ waar is, wat niet geldt in $\mathbb{C}$).

Opgave 2. In deze opgave zijn steeds gegeven: een taal L, een L-structuur N en een substructuur M van N. Bepaal steeds of M een elementaire substructuur is van N. Motiveer je antwoord.

a) (2 pts) $L = \{<\}$, $N = \mathbb{R}$, $M = [0, 1)$ (met de gewone ordening).

b) (3 pts) $L = \{<\}$, $N = \mathbb{R}$, $M = (0,1)$ (met de gewone ordening).

c) (2 pts) $L = \{f\}$ (f een 1-plaatsig functiesymbool), $N = \mathbb{Z}$ met $f^N(n) = n+1$; $M = \mathbb{N}$ met $f^M(n) = n+1$.

d) (3 pts) $L = L_{\text{rings}} = \{+, \cdot; 0, 1\}$, $N = \mathbb{Z}$, $M = \mathbb{N}$ (met standaard 0 en 1, en gebruikelijke optelling en vermenigvuldiging).

Uitwerking: a) Geen elementaire substructuur: 0 is het kleinste element in M, maar niet in N.

b) Wel elementair: beide zijn modellen van de theorie T_d van dichte lineaire ordeningen zonder eindpunten, en deze theorie heeft kwantoreliminatie. Dus $M \prec N$.

c) Geen elementaire substructuur: de L-zin $\forall y \exists x (f(x) = y)$ is waar in N, maar niet in M.

d) Geen elementaire substructuur: de L-zin $\forall y \exists x (x + y = 0)$ is waar in N, niet in M.

Opgave 3. Een L-zin heet *universeel* als hij van de vorm

$$\forall x_1 \cdots \forall x_n \phi(x_1, \ldots, x_n)$$

is met ϕ kwantorvrij (een rij universele kwantoren gevolgd door een kwantorvrije formule).

a) (5 pts) Laat zien: als N een L-structuur is en M een substructuur van N, dan geldt voor elke universele L_M-zin ψ: als $N \models \psi$ dan $M \models \psi$.

b) (3 pts) Laat nu $L = L_{\text{rings}}$ (zie opgave 2d)). Laat zien dat voor een ring N, opgevat als L-structuur, niet noodzakelijkerwijs elke substructuur van N ook een ring is.

c) (2 pts) Concludeer uit a) en b) dat niet elk axioma van de theorie van ringen universeel is; en geef aan welk axioma niet universeel is.

Uitwerking: a) stel N een L-structuur, M een substructuur van N, ψ een universele L_M-zin, en $N \models \psi$. We kunnen ψ schrijven als

$$\forall x_1 \cdots \forall x_1 \phi(x_1, \ldots, x_n)$$

waar ϕ een kwantorvrije L_M-formule is. Dat $N \models \psi$ betekent, dat voor elk n-tal $b_1, \ldots, b_n$ uit N geldt: $N \models \phi(b_1, \ldots, b_n)$. In het bijzonder geldt dit voor alle $b_1, \ldots, b_n$ uit M. Merk op dat voor $b_1, \ldots, b_n$ uit M, $\phi(b_1, \ldots, b_n)$ een kwantorvrije L_M-zin is, die dus waar is in M precies als hij waar is in

N. Dus voor alle $b_1, \ldots, b_n$ uit M geldt $M \models \phi(b_1, \ldots, b_n)$, dus $M \models \psi$, als verlangd.

b) De ring $\mathbb{Z}$ heeft $\mathbb{N}$ als substructuur; de laatste is geen ring.

c) Als elk axioma van de theorie van ringen universeel was, dan zou uit a) volgen dat elke substructuur van een ring zelf een ring is, wat niet zo is zoals we in b) gezien hebben. Er is inderdaad een axioma dat niet universeel is: het axioma $\forall x \exists y(x + y = 0)$.

Opgave 4. Laat met bewijsbomen zien:

a) (3 pts) $\phi \to (\psi \to \chi) \vdash \psi \to (\phi \to \chi)$

b) (4 pts) $\neg\forall x \phi(x) \vdash \exists x \neg\phi(x)$

c) (3 pts) $\exists x \neg\phi(x) \vdash \neg\forall x \phi(x)$

Uitwerking: a)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\phi \to (\psi \to \chi)^1 \qquad \phi^2}{\psi \to \chi}\to E \qquad \psi^3}{\chi}\to E}{\phi \to \chi}\to I, 2}{\psi \to (\phi \to \chi)}\to I, 3$$

b)

$$\dfrac{\neg\forall x \phi(x) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg\exists x \neg\phi(x)^1 \qquad \dfrac{\neg\phi(u)^2}{\exists x \neg\phi(x)}\exists I}{\bot}\neg E}{\phi(u)}\bot E, 2}{\forall x \phi(x)}\forall I}{\dfrac{\bot}{\exists x \neg\phi(x)}\bot E, 1}\neg E$$

c)

$$\dfrac{\exists x \neg\phi(x) \qquad \dfrac{\dfrac{\neg\phi(u)^1 \qquad \dfrac{\forall x \phi(x)^2}{\phi(u)}\forall E}{\bot}\neg E}{\neg\forall x \phi(x)}\neg I, 2}{\neg\forall x \phi(x)}\exists E, 1$$

Opgave 5.

a) (5 pts) Laat zien: als $\{\beta\}$ een ordinaalgetal is, dan is $\beta = 0$.

b) (5 pts) Laat zien: als γ een ordinaalgetal is en $\{\beta\} \in \gamma$, dan is $\beta = 0$.

Uitwerking: In de verzamelingenleer is 0 een ander symbool voor $\emptyset$.

a) Stel $\alpha \in \beta$. Dan hebben we $\alpha \in \beta \in \{\beta\}$ en omdat $\{\beta\}$ een ordinaalgetal is, dus transitief, volgt $\alpha \in \{\beta\}$, dus $\alpha = \beta$. We concluderen $\beta \in \beta$; dit geeft een tegenspraak met het regulariteitsaxioma. Dus $\beta = \emptyset$, als verlangd.

b) Als $\{\beta\} \in \gamma$ en γ is een ordinaalgetal, dan is $\{\beta\}$ ook een ordinaalgetal (want elk element van een ordinaalgetal is een ordinaalgetal). Met a) volgt meteen dat $\beta = \emptyset$.