

FOTOSFERISCHE

SNELHEIDSVELDEN

macandidaats caputcollege sterrekunde
najaar 1983

R.J. Rutten

Sterrewacht Sonnenborgh

Utrecht

I N H O U D S O P G A V E

pagina

1	I. INLEIDING
	1.1 Overzicht
2	1.2 Ontwikkeling onderzoeksterrein
3	1.2.1 Ontwikkeling instrumentatie
4	1.2.2 Ontwikkeling filosofie
6	II. DIAGNOSTIEKEN
	2.1 Samenvatting steratmosferen
	2.1.1 Klassieke modelatmosferen in RE en HE
7	2.1.2 Modernste empirische modelatmosferen
8	2.1.3 Echte atmosfeer
9	2.2 Diagnostisch gebruik van spektraallijnen
	2.2.1 Stralingstransport (micro - macro)
11	2.2.2 Contributiefuncties (Eddington-Barbier - Icf - Dcf)
13	2.2.3 Responsfuncties (Dopplerverschuiving - Dopplerverbreiding - temperatuurfluctuatie - conclusies)
17	2.3 Fouriermethoden
	2.3.1 Twee domeinen; Fourierreeksen
18	2.3.2 Continue Fouriertransformatie
19	2.3.3 CFT eigenschappen
21	2.3.4 Convolutie en correlatie
22	2.3.5 Voorbeelden
23	2.3.6 Discrete Fouriertransformatie (DFT - bemonstering - Nykvist frequentie - meetduur - recepten)
26	2.3.7 Discrete convolutie, correlatie
	2.3.8 Ruisfilters
28	2.3.9 Significantie van powerspectra
29	2.3.10 Tijdserie-analyse (niet-equidistant - data windows)
31	2.3.11 Image processing
32	III. WAARNEMINGEN NIET-OPGELOSTE BEWEGINGEN
	3.1 Lijnverbreding
	3.1.1 Bekende verbredingen (thermische - demping)
33	3.1.2 Onbekende verbredingen (micro - macro - lijnsterkte - diepteafhankelijkheid - hoekafhankelijkheid)
36	3.1.3 Meetmethoden onopgeloste bewegingen zon
37	3.1.4 Meetmethoden onopgeloste bewegingen sterren (lijnbreedtecorrelatie - rotatiedeconvolutie - diff. rot.)
41	3.1.5 Resultaten zon (klassiek - zwakke lijnen - sterke lijnen - standaard model - chromosfeer - zon als ster)
43	3.1.6 Resultaten sterren (micro - macro - discussie)
45	3.1.7 Andere beschrijvingen (filters - random - golven)
48	3.2 Lijnverschuiving (midden-rand zon - sterren - extreem)
49	3.3 Lijnsplitsing
	3.3.1 Zeemansplitsing
50	3.3.2 Meting splitsing zon
	3.3.3 Meting splitsing sterren

51	IV.	WAARNEMINGEN OPGELOSTE BEWEGINGEN
	4.1	Systematische snelheidsvelden zon
	4.1.1	Cellulaire structuren
53	4.1.2	Oscillaties
	4.1.2.1	Kort-periodieke oscillaties
54	4.1.2.2	Vijf-minuten oscillatie: grote l (geschiedenis - eigenschappen - resolutie - rotatie)
60	4.1.2.3	Vijf-minuten oscillatie: midden l
	4.1.2.4	Vijf-minuten oscillatie: kleine l
61	4.1.2.5	Periodes 10-60 minuten: Stanford
62	4.1.2.6	Periodes 10-60 minuten: SCLERA
63	4.1.2.7	Periode 160.0 minuten
64	4.2	Onopgeloste versus opgeloste bewegingen
	4.3	Systematische snelheidsvelden sterren
65	V.	THEORIE EN INTERPRETATIE: GOLVEN
	5.1	Inleiding en overzicht
66	5.2	Aandrijfmechanismen
	5.2.1	Convectie
	5.2.1.1	Convectief instabiel
67	5.2.1.2	Convectief stabiel
	5.2.1.3	Convectief overstabiel
68	5.2.2	Convectieve golfaandrijvingen (overstabiliteit - doorschietende convectie - Lighthill - lokatie - kappa mechanisme)
71	5.3	Golven in sterren
	5.3.1	Literatuur
	5.3.2	Basis
72	5.3.3	Behoudswetten
73	5.3.4	Geluidsgolven in homogeen gas (linearisatie - oplossing - fase/groepssnelheid - dispersierelatie - ontwikkeling in bolharmonischen)
78	5.3.5	AG-golven in isotherme atmosfeer (vertikale oplossing - algemene oplossing - polarisatie - dispersie - (k,omega) diagram - snelheden - domeinen - golfgetaldiagrammen - indexoppervlakken)
83	5.3.6	MAG-golven
84	5.3.7	Dissipatie
85	5.3.8	Trilholtes
86	5.3.9	Rotatie
87	5.4	Seismologie
	5.4.1	Trilholtes, voortplantingsdiagrammen
89	5.4.2	Mode classificatie
91	5.4.3	Vijf-minuten p-modes grote l
	5.4.3.1	Historie
93	5.4.3.2	Diagnostieken
94	5.4.3.3	Status
	5.4.4	Vijf-minuten p-modes kleine l
	5.4.4.1	Mode classificatie
95	5.4.4.2	Diagnostieken
	5.4.4.3	Status
	5.4.5	g-modes

VI. CONCLUSIE

FOTOSFERISCHE SNELHEIDSVELDEN

Nakandidaats Caput college R.J. Rutten; najaar 1983.

I. INLEIDING

1.1. Overzicht

Dit college gaat over hydrodynamica van stratosferen.

Nadruk op: - dichtere atmosfeer + dieper; niet coronae;
- Zon; toepassing/vergelijking sterren;
- golven, vooral geluidsgolven.

Driedeling in: - waarnemings technieken - waarnemingen - theorie

Ruwweg $\frac{1}{2}$ waarnemingen, $\frac{1}{2}$ interpretatie.

Selectie van onderwerpen, variatie in diepgang.

Indeling

I. Inleiding

Interesse voor uitwendige \odot $**$; voor inwendige \odot $**$.

II. Diagnostieken

Stralingstransport: atmosfeermodellen, spektrallijnen.

Fourier methoden: reeksen, CFT, DFT, convolutie, ruis

III. Waarnemingen

Niet-opgelost: micro/macro/meso "turbulentie"

Wel-opgelost: granulariteit, oscillaties, rotatie, \vec{B} veld

IV. Interpretatie

Theorie: aandrijving, golven, modes

Interpretatie: identificatie, seismologie, fluxbuizen.

Literatuur

Nog geen textbook \rightarrow oorspronkelijke artikelen, symposia en reviews.

Goed overzicht, nog tamelijk bij de tijd:

"The Sun as a Star", NASA SP-450, 1981. Bib: IVA456 (en RR, CR, ON, ...)

hoofdstukken 2 - 4 waarnemingen

8 - 12 interpretatie

overzicht bewegingen in ☉ fotosfeer:

beweging ≡

- transport mechanische energie
- transport massa
- transport impuls

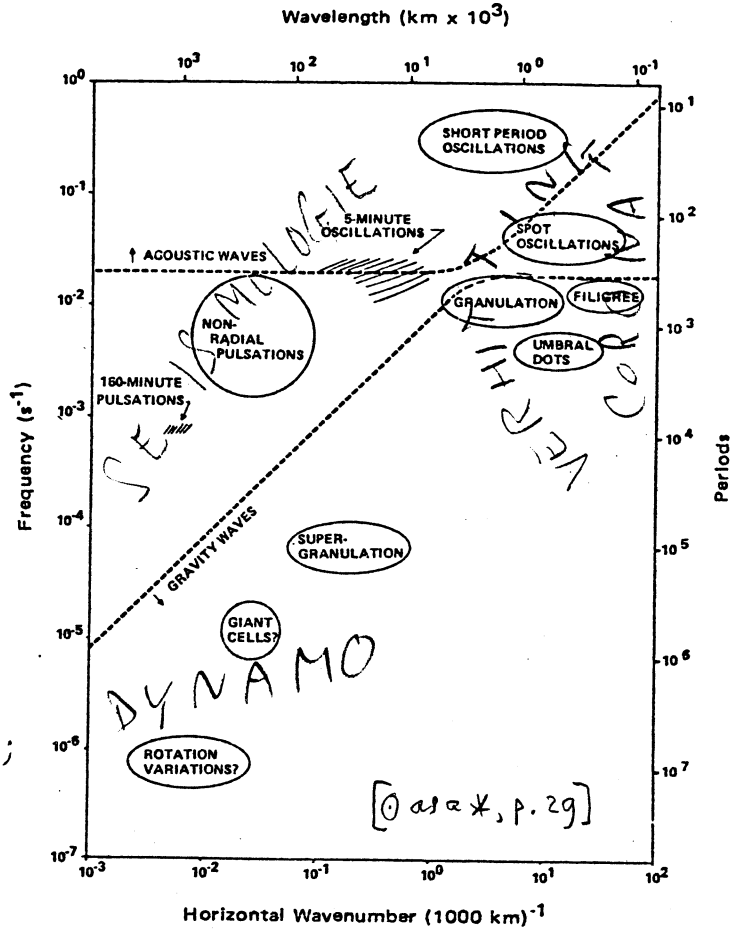
niet-thermisch
niet-lokaal

→ als er systematische bewegingen zijn, zijn er zulke transporten

☉ heeft allerlei transporten, velerlei schaal & aard.

belang van onderzoek hiervan:

- a - begrijpen complexe verschijnselen;
- b - consequenties voor structuur buitenkant & evolutie;
- c - consequenties / diagnostieken voor structuur inwendige & evolutie.



1.2 Ontwikkeling onderzoeksterrein

voorheen: alleen eerste aspect, dus alleen solair "hobbyisme". Beschrijving structuur in/uitwendige gebaseerd op klassieke (quasi-)thermische evenwichtsbeschrijvingen, met over oppervlakte & tijd gemiddelde waarnemingen. Verschijnselen grotendeels onopgelost & onbegrepen.

nu: in afgelopen jaren drie grote doorbraken:

- - identificatie 5^m oscillatie → seismologie → inwendige;
- - realisatie \vec{B} in sterke fluxbuisjes → buitenkant;
- ** - Ca II H&K, TUE UV, Einstein R α : niet-klassieke diagnostieken → ☉ rariteiten bij alle koude sterren.

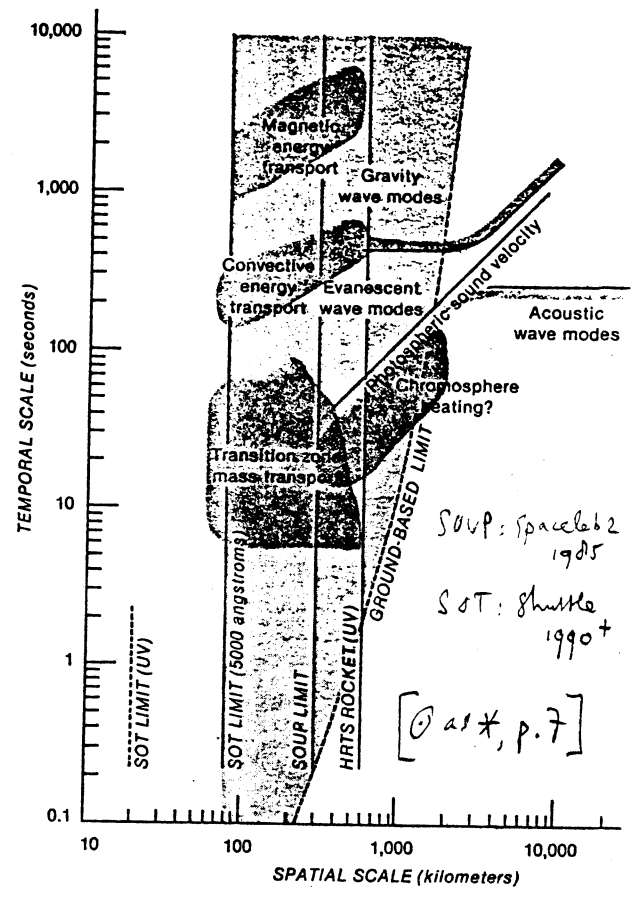
toekomst:

- goede ○ en ** seismologie: ster structuur → nieuw veld
- ○ resolutie fluxbuisen: \vec{B} , verhitting
- ** monitoren structuur & evolutie * 'dynamo's

1.2.1 Ontwikkeling instrumentatie:

aspect (a) (zonneverrijking-selen)

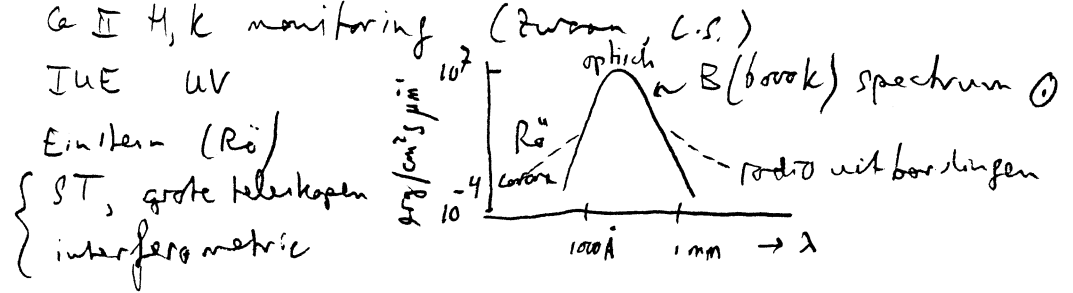
- ⊙ < 1970: scherpe plaatjes (1", zeer incidenteel)
- 1970 - 1985: tijdreeksen Sac Peak (2", enkele waven) → golfmodes
- > 1985: ruimte (SOUP, SOT) grand (HTT? active optics) tijdreeksen 0.3", vele waven → flux buis dynamica



aspect (b) (uitwendige)

- ⊙ < 1970: plaatjes (filtergrammen, eclipsogrammen)
- 1970 - 1985: Skylab → inhomogene corona } → geleide B } verzwakte } verhitting
B in flux buizen "loop" theorie
- > 1985 ISPM, SOUP, SOT: overgang flux buizen fotosfeer - loop, corona → wind

- ** < 1970 geen diagnostische behalve P.C. Wilson Ca II H, K
- 1970 - 1985 Ca II H, K monitoring (Zwaan, L.S.)



- IUE UV
- Einkeren (Rö)
- > 1985 { ST, grote teleskopen } interferometrie

aspect (c) (inwendige)

- ⊙ < 1970: alleen missende neutrino's (+ R₀, L₀, M₀ -)
- 1970 - 1985: golfmodes: tijdreeksen id → 5m oscillatie (Sac Peak) vele dagen → lage l modes (ruidpool)
- > 1985: netwerk telescopen / ballon zuidpool / satelliet in L: tijdreeks waarden → g modes interesse LRO (Peter Hoyng)
- ** > 1985: g modes uit helderheidsfluctuaties

1.2.2 Ontwikkeling filosofie

< 1970 nadruk op evenwicht, structuur
 "1D" model fotosfeer; middel inhomogeniteiten weg.
 fysica: stralingstransport - NLTE (PRD). Boek Micholas
 klassieke problemen: bestaan chromosfeer + corona,
 differentiale rotatie, schuivingscyclus aangepast
 met globale beschrijvingen

1970 - 1985 realisatie inhomogene structuur essentieel, andere
 fluxen dan straling belangrijk
 Project R.M. Thomas (opzet OAS* + andere serie delen)
 [zie Peter, Prosser, Thomas 1973 A&A 29, 289]
 energie \equiv reservoir - lek - dissipatie
 (storage mode) (flux)

klassiek model: massa, impuls, \vec{B} : geen lekken
 alleen stralingflux = klein lek uit zeer groot
 reservoir thermische energie, beschreven als evenwichtsconfiguratie,
 aangevuld door kernfusie of contractie

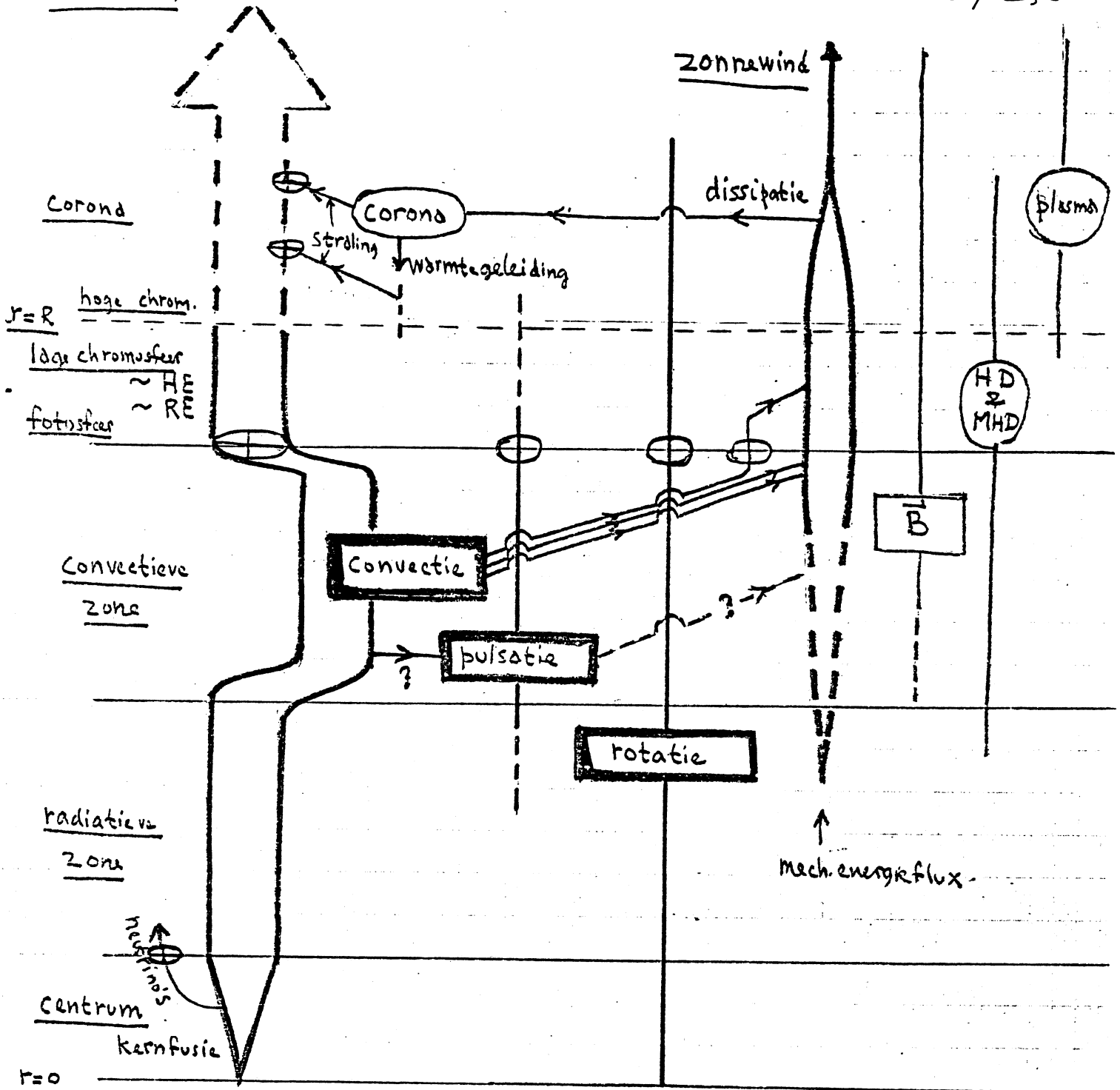
Thomas model: ster is ook niet afgesloten systeem voor
 materie \rightarrow massaflux, mechanische energieflux.
 Mechanische energie reservoirs: convectie, pulsaties, rotatie
 Belang: energie transport van optisch dik \rightarrow optisch dun
 groot reservoir groot effect

spaghetti model: magnetisch belangrijke structurele
 element - sterke fluxbuizen werken als golfpijpen;
 ordening belangrijk (Zwaan: Spruit, van Ballegoijen; HKK)

> 1985 "totaal" model: realisatie dat enerzijds de kleinste
 structuren beschrijfselen moeten worden begrepen: fysisch
zelf-consistent modelleren van fluxbuizen, granulen etc;
 anderzijds dat deze ingrediënten samen het geheel
 verzorgen:

granulatie \rightarrow convectie	} alles tezamen, niet goed splitsbaar
oscillaties \rightarrow modes	
fluxbuizen \rightarrow dynamo	
rotatie \rightarrow coriolis	

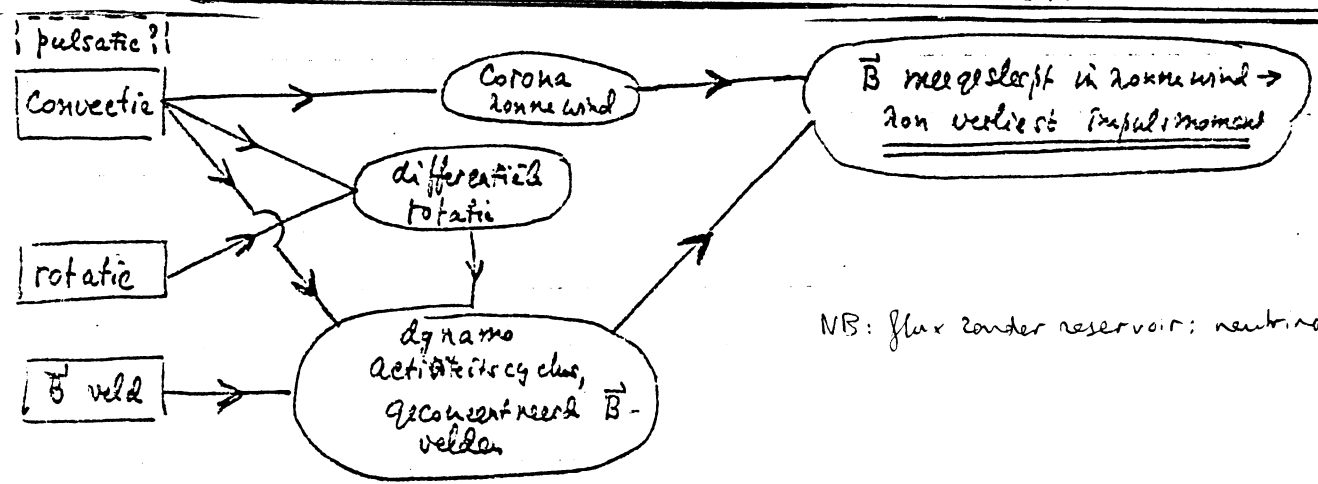
 zie 2 Zwaanogrammen
 op volgende bladzij



thermische energie flux

Schema fluxen en reservoirs voor mech. energie

⊕ : waarneembare effecten.



NB: flux zonder reservoir: neutrino's

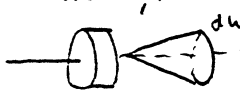
hoofdstuk 12: 7

Zwaan: stratosfeer, II, 1, 2:

intensiteit $dE / d\Omega d\cos\theta d\omega dt = I_\nu d\nu = I_\lambda d\lambda$; $I_\lambda = \nu^2 I_\nu$; $\lambda I_\lambda = \nu I_\nu$ +1
 gemiddelde intensiteit: $\bar{I}_\nu = \frac{1}{4\pi} \int I_\nu d\omega$ isotroop: $\bar{I}_\nu = I_\nu$ axiaal: $\bar{I}_\nu = \frac{1}{2} \int I_\nu(\mu) d\mu$
 flux $\pi F_\nu = \int I_\nu \cos\theta d\omega$ op $\text{cm}^{-2} \text{s}^{-1} (\text{Hz})^{-1} = 2\pi \int_0^\pi S_\lambda(\tau_\lambda) E_2(\tau_\lambda) d\tau_\lambda$ met $E_2(\tau) = \int_1^\infty \frac{e^{-\tau u}}{u^2} du$
 $\nabla F = 0$

LE: $T_R = T_{\text{coneland}}$. Stralingsevenwicht: $F = \bar{F}_{\text{rad}}$ op alle hoogten \rightarrow niet bij/of; T past zich aan aan k ;
 $F = F_{\text{conduction}} + F_{\text{rad}} + F_{\text{convection}} + F_{\text{mech}}$

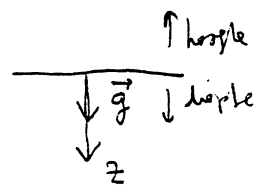
Zwaan, stratosfeer II, 7:



$dI_\nu(s) = -I_\nu(s) \cdot ds \cdot k_\nu$ lineaire / volume extinctie coeff. [cm^{-1}] = [$\text{cm}^2 \text{cm}^{-3}$]
 $dI_\nu(s) = -I_\nu(s) \cdot ds \cdot \rho \cdot k_\nu$ massa extinctie coefficient [$\text{cm}^2 \text{g}^{-1}$]
 $dI_\nu(s) = -I_\nu(s) \cdot ds \cdot n \cdot \alpha_\nu$ extinctie coeff. per deeltje = werkzame doorsnede [cm^2]
 $\rho = \text{massadichtheid } \text{g cm}^{-3}$

Extinctie - (zwarte) absorptie: versniet q van fotonen \rightarrow kinetische energie
 - verstrooiing: alle richtingsverandering (of hele kleine $d\nu$)

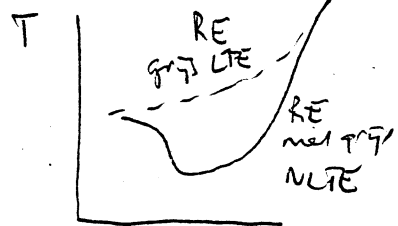
HE: $\uparrow p$
 $\downarrow p + dp = \downarrow \rho g$
 $\frac{dp}{dz} = \rho g$ gewicht
 $g = GM_\oplus / R_\oplus^2$ gravitatieversnelling
 $dT_{\text{Ross}} = k_{\text{Ross}} \rho dz$



figuur RE flux $\rightarrow \nabla T$ nodig // minder ∇T want ook F_{conv} geldt \rightarrow convectie diep
 Reageren SA III 46, 47 vragen // RE $\leftrightarrow \left| \frac{dT}{dz} \right|_{\text{ad}} > \left| \frac{dT}{dz} \right|_{\text{RE}}$ (Schwarzschild)

NB RE #: $F_\nu = S_\nu$! alleen $\int I_\nu d\nu = \int S_\nu d\nu$

$T_{\text{eff}} = 15000 \text{ K}$



NB hele sferen: NLTE is seriegrens continuu + H grens \rightarrow
 (Zwaan I, 7) lokale verhoging (niet genoeg voor convection)

- 1) was verandering: verandert want $F = F_{\text{conv}}$ ipv RE. RE bepaalt $T(T_R)$
- 2) $F_{\text{mech}} \sim 10^{-4}$ a 10^{-3} F_{tot} is genoeg voor hele corona (10^6 K) anders is
 zo weinig massa in zit: dezelfde dissipatie \rightarrow kan wijzig pen op grote hoogte of: T_{min} bij $r = -2$!
 (dissipatie is: zonnevind / magnetische wj R_0 , radio, lyman / geleiding \downarrow naar chromosfeer)

Adiabatische benadering $S(\tau) = f(\tau) \approx \frac{3}{4} F \left(\tau + \frac{2}{3} \right)$ \rightarrow wordt lineair $S(\tau)$

II DIAGNOSTIEKEN

6 / II, 1

2.1 Samenvatting steratmosferen

2.1.1 Klassieke modelatmosferen in stralingsevenwicht en in hydrostatisch evenwicht.

R.E. Stralingsevenwicht: $F = F_{\text{rad}}(\tau_R) = \int_0^{\infty} F_{\lambda}(\tau_R) d\lambda = \sigma T_{\text{eff}}^4$ (II,1) (hier is als golflijngt-onafhankelijke opaciteitsparameter de Rosseland extinctiecoëfficiënt κ_R gekozen, per massa-eenheid [$\text{cm}^2 \text{g}^{-1}$]).

H.E. Hydrostatisch evenwicht: $\frac{d(P_g + P_{\text{rad}})}{dz} = -g$ (II,2a) $\rightarrow \frac{d(P_g + P_{\text{rad}})}{d\tau_R} = \frac{g}{\kappa_R}$ (b)

z : diepte ($\parallel \vec{g}$)

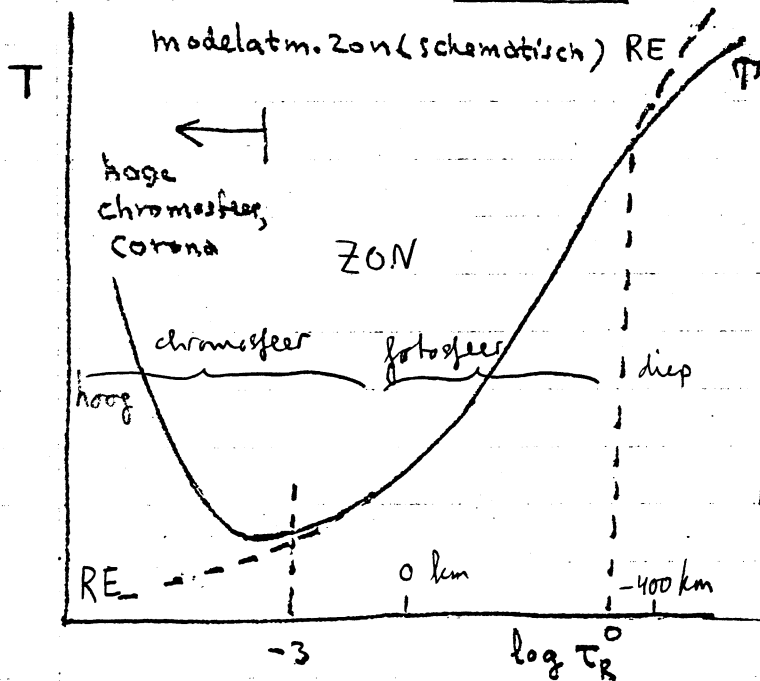
Modelatmosfeer bepaald door: 1) T_{eff} 2) g 3) betrekkelijke rijkte: door abundancies ($\rightarrow \kappa_{\lambda}$).

Temperatuurverloop $T(\tau_R)$ vooral door R.E. (en T_{eff}) bepaald.

R.E. + H.E. - modelatmosferen falen in twee bereiken:

1) voor sterren met convectiezones (hoofdreker F, G, K, M) voor $\tau_R > 1$

2) bij het optreden van het Corona's (bij zon: voor $\tau_R < 10^{-3}$), hetgeen aan een verhitting door een flux mechanische energie F_{mech} toegevoerd moet worden.



Twee algemene opmerkingen:

1) invloed van convectie op gemiddelde thermodynamische structuur gating van $\tau_R < 1$. Duidelijk: grootste deel fotonen is "net 1 à 2 stappen buiten".

2) Indien $F_{\text{mech}} \ll F_{\text{rad}}$ (als bij zon)

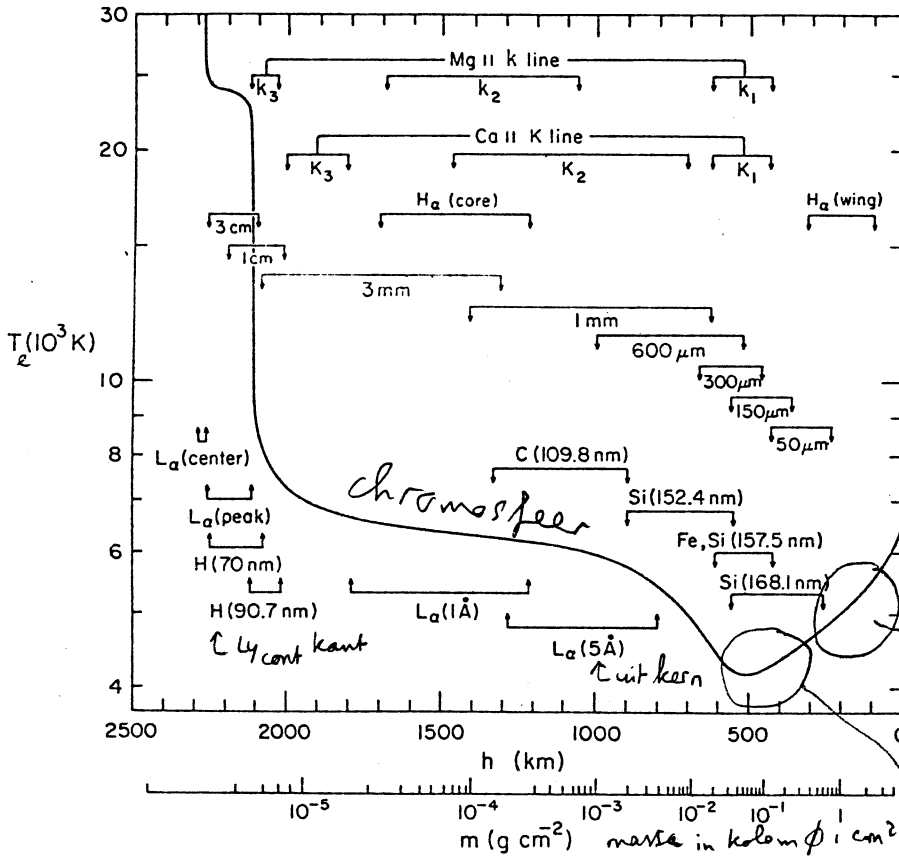
dan blijft $T(\tau_R)$ monoton dalen volgens R.E. tot de kleine τ_R waar atmosfeer voor vrijwel alle fotonen geheel doorzichtig is geworden, d.w.z. tot daar, waar materie losgekoppeld is van fotosferisch stralingsveld. (Zon: $\tau_R < 10^{-3}$) Dus, als $F_{\text{mech}} \ll F_{\text{rad}}$ hebben hydrodynamische verschijnselen niet veel effect op globale structuur fotosfeer. Toch is deze RE laag belangrijke voor dynamische verschijnselen: koppelt sterinwendige met reservoirs van buitenste atmosfeer met dissipatie (Zon: convectie - chromosfeer).

2.1.2 Modernste empirische modelatmosferen

State of the art: VAL III = Vernazza, Avrett, Loesser Ap. J. Suppl. 45, 635, 1981
 oplossing: - NTE stralingstransport: H, H⁻, C, Si, Fe, Mg

- statistisch evenwicht: $\downarrow = \uparrow$ (extinctie + electronen)
- hydrostatisch evenwicht

→ T(m), ρ(m) zo dat continua UV, IR en sterke lijnen (C, Lyα) het beste kloppen met waarnemingen. Aandacht op chromosfeer, Ly.

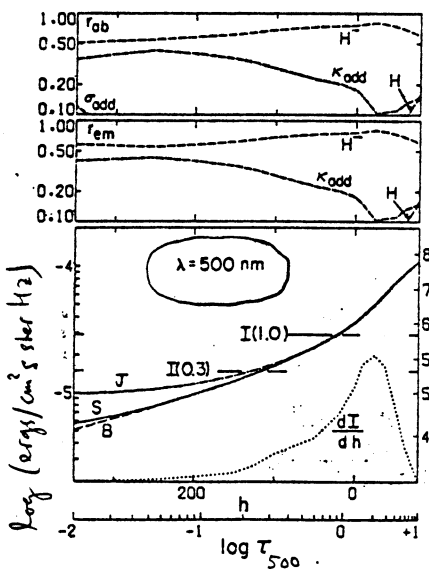


Mg II
 Ca II 393.3, 396.6 nm
 (1 nm = 10 Å)

IR continue
 H β
 H γ

UV gebonden-vrij (kanten)
 IR $\approx 1.6\ \mu m$
 "fotosfeer"
 - oprechte lijnen
 [vooral Fe I: veel hyperfijn spl. geen isotop spl.]
 - verre vengels Ca II H, k

"T_{min}-region"
 - kernen sterke Fe I lijnen
 - Ca II H, k,
 - moleculen CO, CN (IR) (UV)



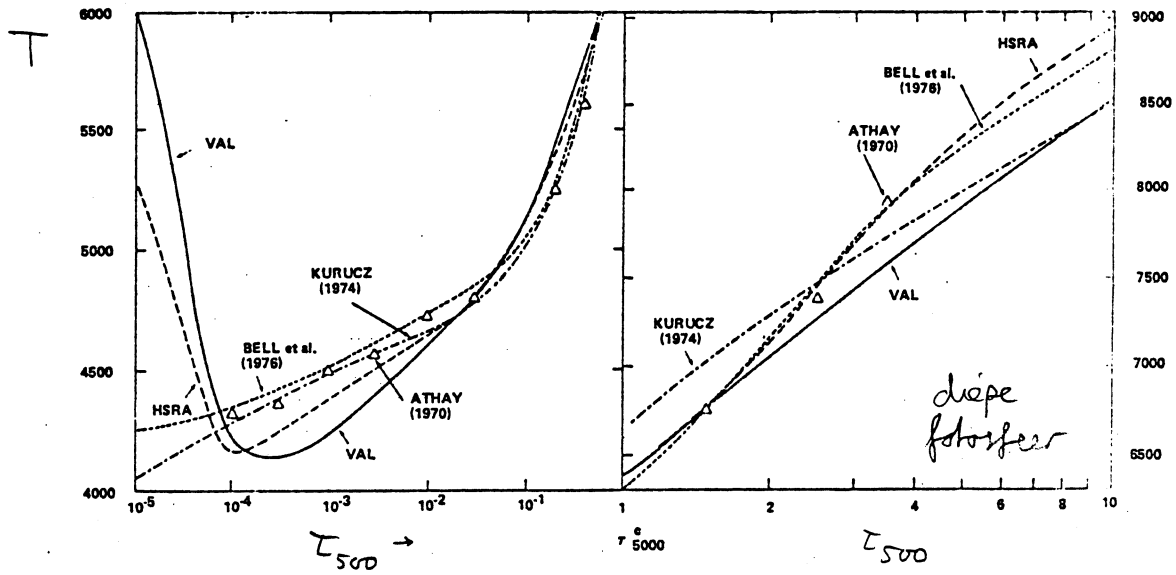
relatieve bijdrage tot
 extinctie coefficient;
 $k_{add} \equiv$ "line-hate" onopgeloste lijntjes
 $\sigma_{add} =$ verstrooiing
 H α emissie coefficient

$I(\lambda, \mu) =$ intensiteit $\mu = 1$: centrum schijf

NB: $I(\lambda) \approx B(\lambda, \mu)$ Eddington-Barbier
 $f > S > B$ aan rand
 ↑ door verstrooiing
 in blauw door steile $\partial B / \partial h$
 in rood $f < S$; wel $\int f d\lambda \approx \int S d\lambda$ (RE)

Andere voorbeelden:

(© as*, p. 475)

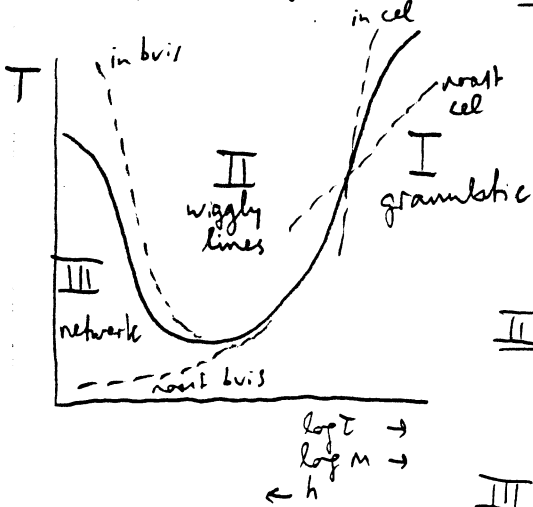


HSRA, VAL: empirisch, uit continua (voorlopers van VAL III);
 BELL, KURUCZ: theoretisch, RE-HE, LTE, line blanketing;
 ATHAY: " " NLTE, geen line blanketing
 Spreiding \approx onzekerheid: nog groot!

2.1.3 Echte atmosfeer

Alle \uparrow modellen zijn: "1-dim" $[T(z), \{N_{at}, N_e(T)\}, \tau_{500}(h)]$,
 moeten gemiddelde (x, y, E) spectrale informatie ($\langle z \rangle$) reproduceren.

Drie probleemgebieden:



I Convectie

- opstijgende hete, dalende koude materie;
 - tot woor? contrast omkering? flux?
 $\overline{B(T)_{aanw}} \neq \overline{B(T)_{rood}}$? Dynamica?
 verschijnsel: granulatie

II Oscillaties

- flux? fase sprongen? dynamica?

III Fluxbuizen

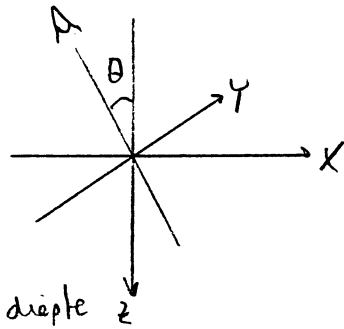
Expanderen tot peukke T_{min} $\left[\begin{matrix} P_g \ll B^2/\rho T \\ P_g \gg B^2/\rho T \end{matrix} \right]$
 Filling factor gaat van $< 0.1 \rightarrow \sim 1$?

Nodig: gedetailleerde beschrijving {granulatie; oscillaties; \vec{B} veld}

2.2 Diagnostisch gebruik van spectraallijnen

2.2.1 Stralingstransport

Vlekgeloopte atmosfeer, homogeen in x en y ("homogeen 1-D")



Uitredende intensiteit:

$$I_{\lambda}(z, \mu) = \int_0^{\infty} S_{\lambda}(\tau_{\lambda}) e^{-\tau_{\lambda}/\mu} d\tau_{\lambda}/\mu \quad (II, 3)$$

$z=0$ buiten de zon

met:

$$\mu = \cos \theta$$

$\tau_{\lambda}(z)$ = totale monochromatische optische diepte = $\int_0^z (k_c + l_{\lambda}) \rho dz'$
 k_c = continue extinctiecoëfficiënt } per massa eenheid [$cm^2 g^{-1}$]
 l_{λ} = lijn extinctiecoëfficiënt } = "wate" extinctie + verstrooiing

$$\tau_c = \text{continue optische diepte} = \int_0^z k_c \rho dz'; \quad \tau_l = \int_0^z l_{\lambda} \rho dz'$$

$$\eta_{\lambda} \equiv l_{\lambda}/k_c \rightarrow \tau_{\lambda} = \tau_c + \tau_l = \int_0^{\tau_c} (1 + \eta_{\lambda}) d\tau_c'$$

$$S_{\lambda}(z) = \text{totale bronfunctie} = \frac{S_c + \eta_{\lambda} S_l}{1 + \eta_{\lambda}}$$

$$S_c = \text{continue bronfunctie} \approx B_{\lambda}$$

$$S_l = \text{lijnbronfunctie}$$

$$\text{LTE: } S_l = B_{\lambda}$$

$$\text{NLTE: } S_l = \frac{\left\{ \int \mathcal{F}_{\nu} \varphi_{\nu} d\nu \right\} + \epsilon B + \left\{ B^* \right\}}{1 + \epsilon + \eta}$$

PRD interlocking
"ε is small!"

lijn extinctiecoëfficiënt: $l_{\lambda} = \frac{\pi e^2}{mc} f \varphi(\lambda - \lambda_0) n$

= functie (λ, T, P, f, v_{ll})

dit college

oscillatorsterkte

profielvorm

aantal deeltjes per cm^3 in onderzette niveau

v_{ll} zit in $\varphi(\lambda - \lambda_0)$: plaats en vorm profiel lijn extinctiecoëfficiënt, diepte afhankelijk. Per atoom: $\Delta\lambda/\lambda = v/c$ (niet relativistisch)

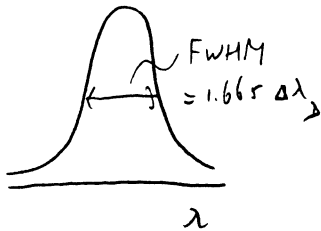
Twee extremen:

MACRO: hele atmosfeer beweegt coherent: lijnverschuiving

MICRO: alle atomen velslopen stochastisch: lijnverbreding

Voorbeeld MACRS: radiale snelheid van de hele ster; $\Delta\lambda = \lambda \frac{v_{rad}}{c}$
 MICRO: thermische beweging atomen:

Maxwell verdeling heeft rms snelheid in 1 r. dir.
 $\langle v^2 \rangle = \frac{kT}{m} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} v^2 e^{-v^2/v_0^2} dv = \frac{v_0^2}{2}$



middelbare snelheid $v_0 = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = \sqrt{\frac{2RT}{A}}$

profiel $\varphi(\Delta\lambda) = \frac{1}{\sqrt{\pi} \Delta\lambda_D} e^{-\left(\frac{\Delta\lambda}{\Delta\lambda_D}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi} \Delta v_D} e^{-\left(\frac{v}{v_0}\right)^2}$

met $\frac{\Delta v_D}{v_0} = \frac{\Delta\lambda_D}{\lambda_0} = \frac{v_0}{c}$; $\Delta\lambda_D$ is de Dopplerbreedte
 $\Delta\lambda_D = \frac{\lambda_0}{c} \sqrt{\frac{2RT}{A}}$ (II,4)

Thermische snelheden in stoffeer volgen Maxwell verdeling.

Maar: overige materiebewegingen in steratmosfeeren complexer:

- waarneming altijd oppervlakte: sterren de hele ster, $\text{zon} \gg 1'' = 700 \text{ km}^2$ (Kommerschleif op La Palma $< 1''^2$?); dus middeling over x, y.
- tijdsoplossing \rightarrow middeling over integratietijd.
- coherente grootte bewegende volume $>$ microscopisch maar $<$ lijnvormende volume \rightarrow lijnvormings effecten.

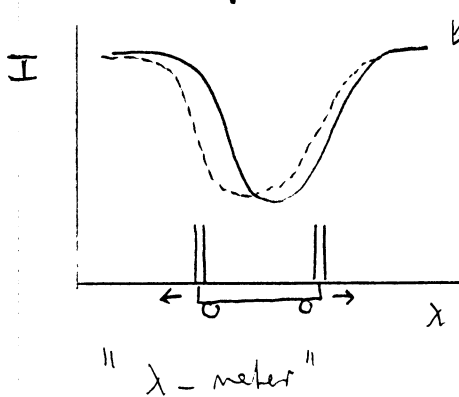
Verschuiven voor verschillende λ 's in het profiel:

λ valt van $\Delta\lambda = 0$ naar $\Delta\lambda = 3 \Delta\lambda_D$ over $e^4 = 10^4$, τ_e orde!

- Systematische bewegingen \leftrightarrow stochastische bewegingen;
- effect snelheidsgradiënt $Dv(z)$

duur: aard bewegingen en aard lijnvorming beide essentieel.

Nu omkering: met λ -meter meet je signaal \vec{v}_{rad} . Waar komt 2 vandaan?



2 spleten, op vaste afstand $\Delta\lambda$ op karretje. karretje voortdurend zo gepositioneerd dat

$I_1 = I_2 \rightarrow$ plaats is $f(v(t))$

(veranderingen in I in 1e orde symmetrisch, dus drie vallen weg)

2.2.2. Bijdragefuncties

Eddington-Barbier benadering: $I_\lambda(\mu) \approx S_\lambda(\tau = \mu)$

Exact als S_λ lineair in τ_λ : $S = a + b\tau \rightarrow I = a + b\mu$
 (zie e.g. Kertgenshoff p. 77 (II H6 124))

Meest gebruikt. Idee: $\tau = \mu$ is laag waar de straling uit komt
 \rightarrow indient van verstorving op I zal in die laag het grootst zijn.
 Maar: bij vormende laag is niet scherp bepaald - zie volgende benadering:

Intensiteitsbijdrage functie

Integrand: $CF_I(\tau_\lambda(z)) = \frac{1}{\mu} S_\lambda(\tau_\lambda) e^{-\tau_\lambda/\mu}$ (II, 5)

Stel: $\tau(z) = \tau_0 e^{z/H_\tau}$ met H_τ de τ -schaalhoogte (klept ford; $H_\tau \sim H_p$)
 bandbreedte waarneming $\nu_2 - \nu_1$ heeft $\tau_{\nu_2}/\tau_{\nu_1} = e^\alpha$

dan: breedte bijdragefunctie:

$$W_{CF} \approx (\alpha + 2) H/\mu \quad (\text{Athay, Erice 1976, p. 408, II C 17})$$

Voorbeelden: - continuüm - fotosfeer: $H = 60 \text{ km} \rightarrow$ dikte vormende laag $\Delta z \approx 120 \text{ km}$, i.e. $1/4$ van de hele fotosfeerdikte.
 - H_α filtergram: $1/4 \text{ \AA}$ filter, $3/8 \text{ \AA}$ van λ_0 heeft $\alpha = 3 \rightarrow \Delta z = 1250 \text{ km} \rightarrow$ hele chromosfeer

Dus: - vormende laag is erg dik t.o.v. stratificatie atmosfeer.
 - wel: vormende laag $\ll R_\odot \rightarrow$ lokale lagen goede benadering.

Beweringen kunnen over de hele vormingsdikte Δz veranderingen
 - $I_\lambda(0, \mu)$ veroorzaken \rightarrow geen 1-1 duidelijke diepte bepaling.

Bovendien: bij lijnen twee extinctions: $k_c(z)$ en $k_\lambda(z)$, ieder eigen diepte afhankelijkheid. (II, 5) is daarvan alleen nuttig, als bijdragefunctie tot intensiteit, voor:

- continuüm ($k_\lambda = 0$)
- hele sterke lijnen ($k_c \ll k_\lambda$)
- lijnen met $\eta_\lambda(z)$ konstant. (Milne-Eddington atmosfeer)

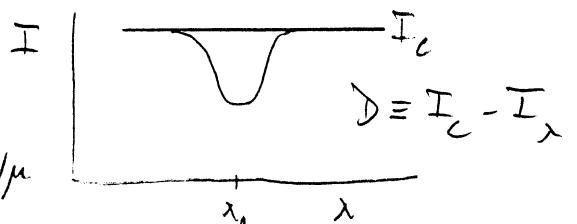
De gemiddelde vormingsdiepte is dan: $\langle \tau \rangle = \int_0^\infty \tau CF d\tau / \int_0^\infty CF d\tau$

In de literatuur 1950 - 1980 is zeer veel geharrewar, vaak fout.
Reden: CF_{I} is evident fout voor zwakke lijnen: dan overheersen de continue vormen, en doet de lijnvorming niet mee in CF_{I} .

Bijv.: He lijn (chromosfeer wegens hoge excitatie energie)
Ba III lijn (" " " ionisatie energie)
CO lijn (T_{min} wegens lage dissociatie energie)
allemaal ver boven $\tau_c = \mu$ gevond, maar $\langle \tau \rangle \approx \mu$.

Dus:

Inzakkingsbijdrage functie



Vaiesf: $D_\lambda = \int_0^\infty S_c e^{-\tau_c/\mu} d\tau_c/\mu - \int_0^\infty S_\lambda e^{-\tau_\lambda/\mu} d\tau_\lambda/\mu$
 $= \int_0^\infty CF \frac{d\tau_c}{\mu}$ met $CF_\lambda = B_\lambda(\tau_c) e^{-\tau_c/\mu} [1 - e^{-\tau_c/\mu} (1 + \eta_\lambda)]$

(met: $S_c = S_\lambda = B_\lambda$ (LTE), $d\tau = d\tau_\lambda + d\tau_c = (1 + \eta_\lambda) d\tau_c$)

Echter, er zijn legio integraal uitdrukkingen voor D_λ mogelijk; allerlei auteurs hebben hun eigen integrand, dus CF_λ .

- Gurtovenko, Ratnikova, de Jager (1974, Solar Physics 37, 43);
 $D_\lambda \uparrow$ is product twee CF 's met nuldoorgang en rare eigenenschappen; ze hebben een andere die fysiek juist is (F_λ^*)

- nog beter: Caccin et al. (1977, A&A 54, 227, eq. 23);
 bekijk eerst voor CF_{I} de differentiele en integrale vorm transportvgl.

$$\frac{dI}{dz} = k_\lambda(I - B) = k_\lambda I - j \iff I(z) = \int_0^\infty j(z') e^{-\tau_\lambda(z-z')} dz' \quad (\mu=1 \text{ LTE})$$

j = emissiecoefficient = inhomogene deel = lokale emissieproductie

kI = homogene deel vgl.; oplossing $e^{-\tau}$ = alle verzwakking van j boven z .

B = "source" term: draagt nieuwe fotonen bij.

Probeer felyte termen voor "inzakkings transportvgl." te vinden:

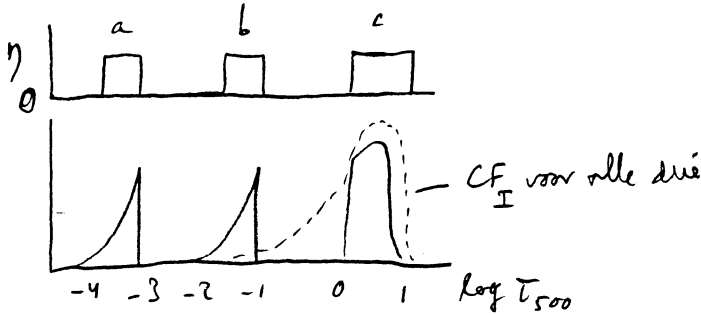
$$\frac{d}{dz} (I_c - I_\lambda) = k_c I_c - k_\lambda I_\lambda - j_c + j \implies \frac{dD_\lambda}{dz} = k_c [D_\lambda - \eta (I_\lambda - B_\lambda)]$$

Nu: $\eta (I_\lambda - B_\lambda)$ is inhomogene source term, met lokale imbalance $I - B$ die nieuwe depressie bijdraagt ($I > B$: emissielijn)

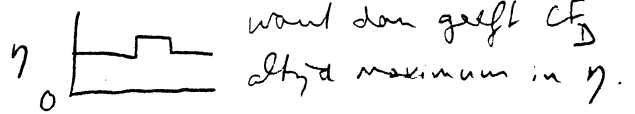
$k_c D_\lambda$ is homogene deel; zonder sources vermindert verdere τ_c de D .

Dus: $D(\omega) = \int_0^{\infty} \eta (I-B) e^{-\tau_c} d\tau_c \Rightarrow CF_D(\lambda, z) = \eta_{\lambda} (I_{\lambda} - B_{\lambda}) e^{-\tau_c}$ (II, 6)

Deze versie van voortvankende c.s.'s behelst voor hele zwakke lijnen. Fortvankende et al. doen schematische test voor hele zwakke lijnen:



Phay (Ericc 1976) stelt: CF_D alleen goed voor zulke "He, Co" lijnen: schuiter, schwaartzelheid atmosfeer; lijn is "hap" uit continuum. Niet goed voor



Voorlopige conclusie:

(maar kritische analyse + proefberekeningen nog nodig!)

- CF goed als $\eta(z)$ konstant (ME atmosfeer)
- CF_I goed als $\eta(z)$ gepiekt (LS atmosfeer)
- in ieder geval: breedte CF \propto atmosfeer dikte \Rightarrow weinig precisie.

2.2.3 Response functies

Main Solar Physics 20, 7, 1971

Beckers + Mithey " " 43, 209, 1975

Campfield " " 50, 239, 1976

→ Gaccin et al. AFA 54, 227, 1977

Hoe verandert I voor een (kleine) verandering van de beschouwdde parameter?

Main: in eerste orde:

$$\Delta I = \int \frac{\partial I}{\partial x} \delta x dz$$

$\frac{\partial I}{\partial x}$ = response functie

δx = verstoring

waarin x de versturende parameter, = v , of ξ_{μ} , of T_s ---

Intermezzo: introductie microturbulentie ξ_{μ}

II, 4: $\Delta \lambda_D = \frac{\lambda_0}{c} \sqrt{\frac{2RT}{A}}$ voor thermische snelheden, uit Maxwell verd.

Stel: er zijn "turbulente" bewegingen die zich precies zo voordoen, als thermische bewegingen, met middelbare snelheid in de gezichtsricting

$$\xi_{\mu} \rightarrow \Delta \lambda_D \equiv \frac{\lambda_0}{c} \sqrt{\frac{2RT}{A} + \xi_{\mu}^2} \quad (II, 7)$$

Response Function $RF(z) \equiv \frac{\partial I}{\partial x}(z)$, voor verstoring $\delta x(z)$

Neem aan:

- kleine verstoring, $\delta x \rightarrow$ alleen lineaire perturbatie;
- $I(z)$ en $\tau(z)$ alleen lokaal gevoelig voor δx
(niet waar in allerlei NLTE situaties, z.g. flou-pompen);

dan volgt:

$$RF(z) = \frac{\partial I(z)}{\partial x} = \left(k \frac{\partial I}{\partial x} + \int \frac{\partial k}{\partial x} \right) e^{-\int_0^z k(z') dz'} - \frac{\partial k}{\partial x} \int_k^{\infty} e^{-\int_0^{z'} k(z'') dz''} dz' \quad (\text{II}, 8)$$

Afleiding: Mein - door perturbatie formele oplossing transportvgl.:

$$I(z) = \int_0^{\infty} k \int_0^{\infty} e^{-\int_0^{z'} k(z'') dz''} dz' \quad (\text{not gebruik Heaviside stepfunctie voor splitting binerente integrale})$$

Galvin et al. - door perturbatie transportvgl. zelf:

$$dI/dz = k(I - I')$$

We vereenvoudigen (II, 8) door aanname LTE ($I_c = I_s = I = I_v(z)$),

$$\text{en met: } \int_k^{\infty} k \int_0^{\infty} e^{-\int_0^{z'} k(z'') dz''} dz' = \int_z^{\infty} k \int_z^{\infty} e^{-\int_z^{z'} k(z'') dz''} dz' \cdot e^{-\int_0^z k(z'') dz''} = I(z) e^{-\tau(z)}$$

$$RF(z) = \left(k \frac{\partial I}{\partial x} + I \frac{\partial k}{\partial x} - \frac{\partial k}{\partial x} I \right) e^{-\tau} \quad \left(\text{alles functie van } \lambda, \nu \text{ en } z \right) \quad (\text{II}, 9)$$

Voor verstoringen die alleen de absorptiecoëfficiënt beïnvloeden, maar niet de bronfunctie, krijgen we:

$$RF(z) = \frac{\partial k}{\partial x} (B - I) e^{-\tau} \quad (\text{door } \eta \text{ ipv } k \text{ wegens } d\tau \text{ ipv } dz) \quad (\text{II}, 10)$$

dit is de vorm als CF_B (II, 6), maar verstoring expliciet in gebracht.

De verandering in $I_v(0)$ is nu:

$$\Delta I_v(0) = \int_0^{\infty} RF(z) \delta x(z) dz \quad \left\| \begin{array}{l} \text{je moet de verstoring } \delta x \\ \text{des expliciet kennen!} \end{array} \right. \quad (\text{II}, 11)$$

We bekijken de responsefuncties voor drie populaire verstralingen:
(naar Cascin et al.)

Dopplerverschuiving $\Delta x \equiv v/c$:

$dS/dv = 0$ gaat doorfront wel op (golven etc) in orde;
maar dat heeft niet: bij een constante gradient $\partial v/\partial z$
levert in λ verschuivingen de lijn-piek, en voor stralingstransport!
Neem $dS/dv = 0$ hier aan; verder $\partial k/\partial x = c \frac{\partial(k_0 + l)}{\partial v} = c \frac{\partial l}{\partial v}$

$$\rightarrow \frac{\partial I}{\partial v} = c \frac{\partial l}{\partial v} (B - I) e^{-\tau} \quad (\text{uit II, 10})$$

kies de lijnrechter gaussisch (goed in lijnkern):

$$l(\Delta v, z) = \frac{l_0}{\sqrt{\pi} \Delta v_D} e^{-\left(\Delta v / \Delta v_D\right)^2}, \quad \frac{\Delta v}{v} = v/c$$

$$\rightarrow RF_{v/c}(\Delta v, z) = \frac{2v \Delta v}{\Delta v_D^2(z)} l(\Delta v, z) \left[B_v(z) - I_v(z) \right] e^{-\tau_v(z)} \quad (\text{II, 12})$$

[dise = 0 voor $\Delta v = v - v_0 = 0$: in lijnkern geen voorlijf! 

Dopplerverbreding $\Delta x = \Delta \frac{v}{c} / \frac{v}{c}$:

Neem weer $dS/dx = 0$ (hoort weer niet! bij v. in overgang
kern = deufel van Ca II H&K is S_{λ} zeer gevoelig voor kleine $\frac{v}{c}$,
wegens overgang Dopplerredistributie \rightarrow deufel coherentie].

Daar, met gaussische rechte l_v en $\Delta v_D = \frac{v}{c} \sqrt{\frac{2RT}{A} + \frac{v^2}{c^2}}$:

$$\rightarrow RF_{\frac{\Delta v}{v/c}}(\Delta v, z) = \left(\frac{2 \Delta v^2}{\Delta v_D^2(z)} - 1 \right) \frac{l_{\mu}^2(z)}{v_D^2(z)} l(\Delta v, z) \left[B_v(z) - I_v(z) \right] e^{-\tau_v(z)} \quad (\text{II, 13})$$

met $v_D^2 = \frac{2RT}{A} + \frac{v^2}{c^2}$ (Kernische + quasithermische)

[dise = 0 voor $\Delta v = \Delta v_D / \sqrt{2}$: schaarwippen fongverdeling]

Gevoeligheid Dopplerverschuiving en Dopplerverbreding verschillen
dat van CF_D door expliciete $\partial k/\partial x$ variatie. (II, 12) en (II, 13)
verschillen in Δv afhankelijkheid, en ook in z -afhankelijkheid
als $\frac{v^2}{c^2}(z)$ sterk meeltelt en sterk verschilt van \sqrt{T} afhankelijkheid.
(dat is, voor de zwaarte, niet het geval!)

Temperatuur variatie $\delta x \equiv \frac{\Delta T}{T}$:

Direct uit (II, 9): $RF_{\frac{\Delta T}{T}}(\Delta v, z) = T \left[\frac{\partial k}{\partial T} (B-I) + k \frac{\partial B}{\partial T} \right] e^{-\tau}$ (II, 14)

Nu in $\frac{\partial k}{\partial T}$ mengsel lijn - continuüm: lijn - Boltzmann, factor voor lijn
 continuüm - gabel $\frac{\partial T}{T}$ } etc
 uv meetbarten

Voorbeelden (Laccin et al.):

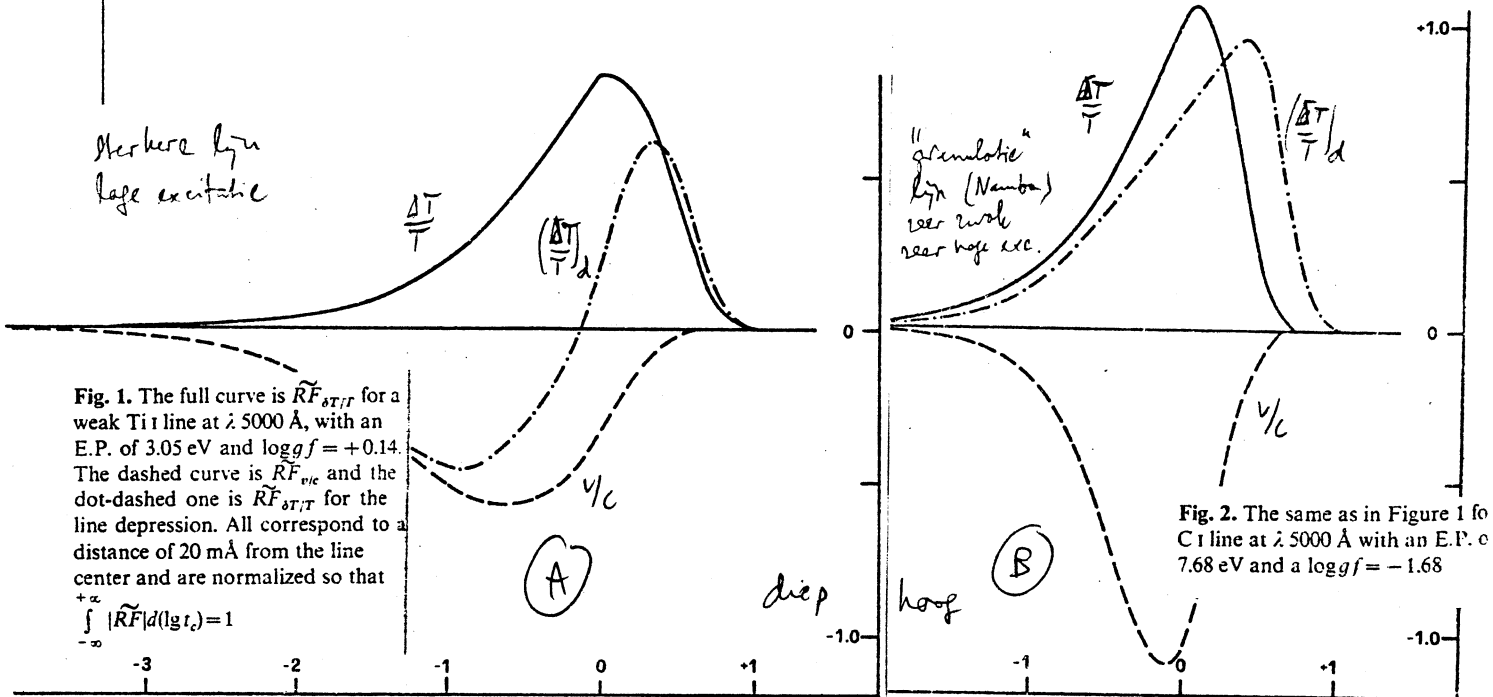


Fig. 1. The full curve is $RF_{\frac{\Delta T}{T}}$ for a weak Ti I line at λ 5000 Å, with an E.P. of 3.05 eV and $\log g f = +0.14$. The dashed curve is RF_{vic} and the dot-dashed one is $RF_{\frac{\Delta T}{T}}$ for the line depression. All correspond to a distance of 20 mA from the line center and are normalized so that $\int_{-\infty}^{+\infty} |RF| d(\lg t_c) = 1$

Fig. 2. The same as in Figure 1 for C I line at λ 5000 Å with an E.P. of 7.68 eV and a $\log g f = -1.68$

Op school $x = \log t_c$, dus $RF^* \equiv RF(x) = t_c$. In 10 $RF(t_c)$
 en oppervlakte, formule: $\int RF^* dx = 1$. (2.3026) $L =$ vrije met η ipv. l)
 Verschil A-B: B hoge excitatie = minder bijdrage hoge lagen (waarom?).
 $(\frac{\Delta T}{T})_d = RF_c^* (\frac{\Delta T}{T}) - RF_l^* (\frac{\Delta T}{T})$: voor lijn in zehling. Die voor A
 heeft twee pieken: gevoeligheid voor ΔT diep via continuüm, voor
 ΔT hoog via lijn. Hoe interpreteer je voorfenomen verandering?

Conclusies

- veel CF's in literatuur zijn fout of misleidend;
- CF_D in (II, 6) is 't beste;
- Respanke functies zijn beter, maar je moet de voorstoring δx kennen;
- de lijn vormende laag is sowieso meestal erg dik.

Alleen als $RF_{\delta x}(z)$ scherp gepiekt is rond \bar{z} , en nauw tov. een
 typische waarde van δx , geldt: $\Delta I(o) = \delta x(\bar{z}) \int_0^{\infty} RF(z) dz$

2.3 FOURIER METHODEN

We zullen Fourier methoden gebruiken in diverse toepassingen: snelheidsvelden ontwarren, golven beschrijven, versmeringen ontsmeren, etc. Daarom een 'gebruiker' overzicht.

Literatuur:

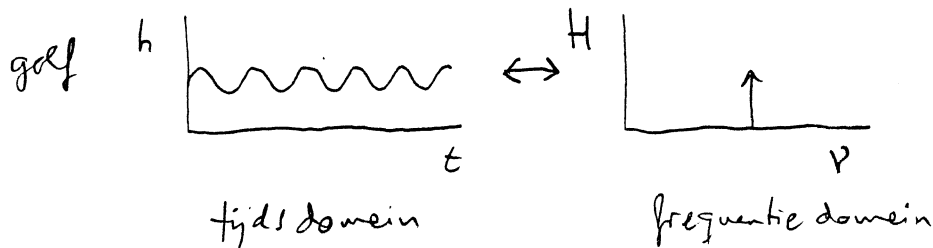
XIV B 191 Bracewell: The Fourier Transform and its Applications



XIV B 305 Brigham: The Fast Fourier Transform

Brouet + White, 1971 A & A 13 169 [koskeboole restoration]

Rutten, 1982: Rotter - Radix Fourier Package (CYBER routines)

2.3.1 Twee domeinen; Fourier reeksen



Som twee sinusoiden;  \leftrightarrow : duidelijker in v -domein.

Dus: beschrijving ingewikkelde periodieke signalen mogelijk met lineaire combinatie sinusoiden? Ja: Fourier reeks:

$$y(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \cos(2\pi n v_0 t) + b_n \sin(2\pi n v_0 t) \right\} \quad (\text{II}, 14)$$

goot goed voor alle periodieke functies. Som van cos en sin reeks is goed voor fase verschuivingen in signaal:

$$\sin(x+c) = \sin x \cos c + \cos x \sin c$$

Complexe notatie Fourierreeks (Brigham p. 78):

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n e^{i 2\pi n v_0 t}$$

$$\alpha_n = \frac{1}{2} (a_n - b_n) = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} y(t) e^{-i 2\pi n v_0 t} dt \quad (\text{II}, 15)$$

voor $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$v_0 = 1/T_0$ met T_0 de periode van het signaal

NB: notatie hier: (t, v) in {tijd, frequentie}. Bracewell (x, s) . Brigham: (t, f) . Beste: (x, ω) ?

2.3.2 Continue Fourier transformatie

Nu veralgemeening voor niet-periodieke functies: ook zo te beschrijven? I.h.a. wel, mits ze niet zo lang voortduren en geen al te rare discontinuïteiten hebben. Voor normale "signalen" dus altijd "tijds domein" en "frequentie domein" mogelijk - en raadzaam! → FT als gereedschap.

$$FT: F(\omega) \equiv \tilde{f}(\omega) \equiv \Phi \left[\tilde{f}(t) \right] = a_1 \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad \text{"heen"}$$

$$f(t) \equiv \tilde{F}(\omega) \equiv \tilde{f}(t) \equiv \Phi^+ [F(\omega)] = a_2 \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{+i\omega t} d\omega \quad \text{"terug" (II, 16)}$$

Normering: allerlei gebruiken - oppassen! $a_1 \cdot a_2 = 1/2\pi$

Vooral: $\{a_1=1, a_2=1/2\pi\}$, $\{a_1=1/2\pi, a_2=1\}$, $\{a_1=a_2=1/\sqrt{2\pi}\}$

$\{a_1=a_2=1 \text{ en } d\nu \text{ ipv } d\omega, \text{ wegens } \omega = 2\pi\nu\}$

[Brigham, hier]

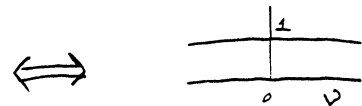
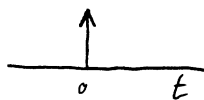
FT bestaat als:

- $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt$ bestaat en eindig is;
- $-\infty$ voor functies zoals $\frac{\sin t}{t}$ ("sinc-functie")

De Fourier integraal bestaat niet voor:

- periodieke signalen (tenzij je een segment neemt → echte wereld)
- {constante} maar die definiëren we als limiet FT:

$$\left. \begin{array}{l} \delta \text{ functie} \\ \delta(t-t_0) = 0 \text{ voor } t \neq t_0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0) dt = 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{FT} \\ \iff \\ 1 \end{array}$$



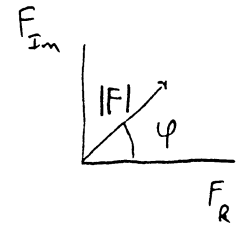
Deze δ -functie is handig in beschrijving en notatie, voorbeelden:

$f(t)$	(Brigham p. 20)	$F(\nu)$	$R(f)$	$R(F)$
$A \cos(2\pi\nu_0 t)$	\iff	$\frac{A}{2} \delta(\nu - \nu_0) + \frac{A}{2} \delta(\nu + \nu_0)$		
$A \sin(2\pi\nu_0 t)$	\iff	$i \left[\frac{A}{2} \delta(\nu + \nu_0) - \frac{A}{2} \delta(\nu - \nu_0) \right]$		

2.3.3 CFT eigenschappen

f en F beide complex:

$$F(\omega) \equiv F_R(\omega) + i F_{Im}(\omega) = |F(\omega)| e^{i\varphi(\omega)}$$



$$|F(\omega)| = \sqrt{F_R^2 + F_{Im}^2} = \text{amplitude (dichtheits) spectrum}$$

$$P(\omega) \equiv |F(\omega)|^2 = F_R^2 + F_{Im}^2 = \text{vermogen (dichtheid) spectrum energie}$$

$$\varphi(\omega) = \arctg(F_{Im}/F_R) = \text{fase (dichtheid) spectrum} \quad (\text{II, 17})$$

Power spectrum bevat geen fase meer: laat zien hoeveel er is van elke frequentie, ongeacht eventuele fase verschuivingen. Goed voor periode analyse en energie (ω) analyse. Alle energie is er wel volgens Parseval: $\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(f)|^2 df$

Fase spectrum bevat geen vermogen meer.

voorbeeld: $f(t) = A \sin(2\pi\nu_0 t + \alpha) = A \sin \alpha \cos(2\pi\nu_0 t) + A \cos \alpha \sin(2\pi\nu_0 t)$

$$F_R(\nu) = \frac{1}{2} A \sin \alpha [\delta(\nu - \nu_0) + \delta(\nu + \nu_0)]$$

$$F_{Im}(\nu) = \frac{1}{2} A \cos \alpha [\delta(\nu + \nu_0) - \delta(\nu - \nu_0)]$$

$$\rightarrow P(\nu_0) = P(-\nu_0) = \frac{1}{4} A^2 \quad (\text{NB: afhankelijk in } \leftarrow !)$$

$$\varphi(\nu_0) = -\alpha \quad \varphi(-\nu_0) = \alpha$$

Momenten:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^n f(t) dt = \frac{F^{(n)}(0)}{(-2\pi i)^n} \quad \text{Bracewell p. 141}$$

speciaal: oppervlak $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = F(0)$ (1^{ste} Fourier component)

zwaartekijn $\langle t \rangle \equiv \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt} = -F'(0) / (2\pi i F(0))$

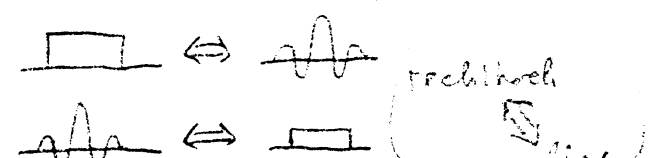
equivalente breedte $\equiv \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt}{f(0)} = F(0) / \int_{-\infty}^{+\infty} F(\nu) d\nu$

(II, 18)

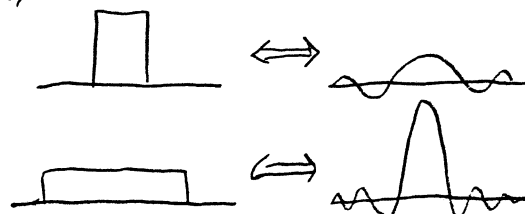
Lineariteit $f(t) = x(t) + y(t) \Leftrightarrow F(\nu) = X(\nu) + Y(\nu)$
 dus goed voor lineaire analyse van komplexe systemen

voorbeeld: $f(t) = c + \cos(2\pi\nu_0 t) \Leftrightarrow \uparrow c + \uparrow \frac{1}{2} \uparrow \frac{1}{2}$

Symmetrie als $f(t) \Leftrightarrow F(\nu)$, dan $F(t) = f(-\nu)$

dan komen er weer bijv: 
 rechthoek \Leftrightarrow sinc

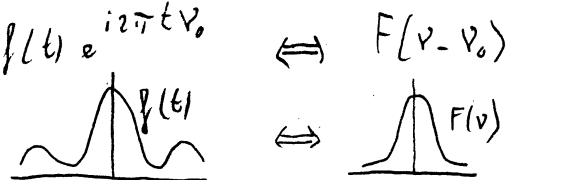
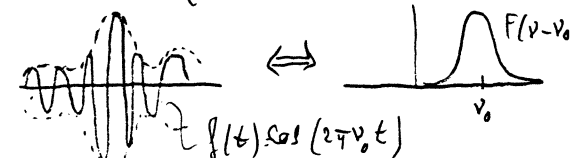
Schaling $f(kt) \Leftrightarrow \frac{1}{k} F(\frac{\nu}{k})$
 $\frac{1}{k} f(\frac{t}{k}) \Leftrightarrow F(k\nu)$ } inverse schaalverandering (II, 18)

Bjv: 

breed in de één \Leftrightarrow smal in de ander
 (oppervlakte blijft gelijk)

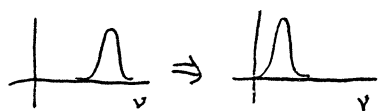
Verschuiving $f(t - t_0) \Leftrightarrow F(\nu) e^{-i2\pi\nu t_0}$

fasedraaiing (voorbeeld vorige pag.)

$f(t) e^{i2\pi\nu_0 t} \Leftrightarrow F(\nu - \nu_0)$

 $f(t) \cos(2\pi\nu_0 t) \Leftrightarrow F(\nu - \nu_0)$



modulatie (II, 19)


NB: bijvoorbeeld heterodyne:



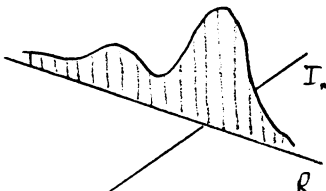
langzame veranderingen omhullende blijven behouden

Even / Oneven

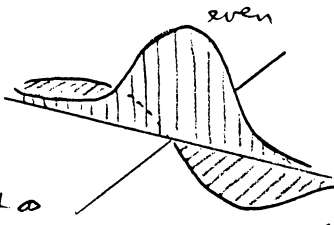
 $f(t)$ reëel en even \rightarrow alleen cos termen $\rightarrow F_R$ even, $F_{Im} = 0$

 $f(t)$ reëel & oneven \rightarrow alleen sin termen $\rightarrow F_R = 0$, F_{Im} oneven

en willekeurige reële $f(t)$ heeft hermitische $F(\nu)$:



\Leftrightarrow



zie Bracewell p. 15 voor complexe f

dus: meeksignaal $\rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} ip\nu \dots$ is voldoende beschrijving

2.3.4 Convolutie, Correlatie

Convolutie (versmearing, vouwing, ...)

$$h(y) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) g(y-x) dx \equiv f(x) * g(x) \quad (\text{II, 20})$$

"gewogen gemiddelde met plaats onafhankelijke gewichtsfunctie"
 Voorbeelden: verwaging door buiging, spleetbreedte, etc.

Eigenschappen: $f * g = g * f$

1^e en 2^e momenten tellen op: $\langle x \rangle_{f * g} = \langle x \rangle_f + \langle x \rangle_g$
 $\langle x^2 \rangle_{f * g} = \langle x^2 \rangle_f + \langle x^2 \rangle_g$

Convolutie theorema:

$$h = f * g \Leftrightarrow H = F \cdot G \quad (\text{II, 21})$$

Dus "restoratie" gaat eenvoudig: gegeven h, g

$$\rightarrow f = FT^{-1} [H/G]$$

Correlatie

↳ verschil: functie niet omgekeerd in x

$$h(y) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) g(y+x) dx \equiv f(x) \otimes g(x) \quad (\text{II, 22})$$

"hoe goed past g of f terwijl je g verschuift?"

$f \neq g$: kruis correlatie

$f = g$: auto correlatie (= test voor periodiekt - ga na)

Correlatie theorema:

$$h = f \otimes g \Leftrightarrow H = F \cdot G^* \quad \text{(complex geconjungeerde)} \\ \text{(niet symmetrisch = } f \neq g \text{)}$$

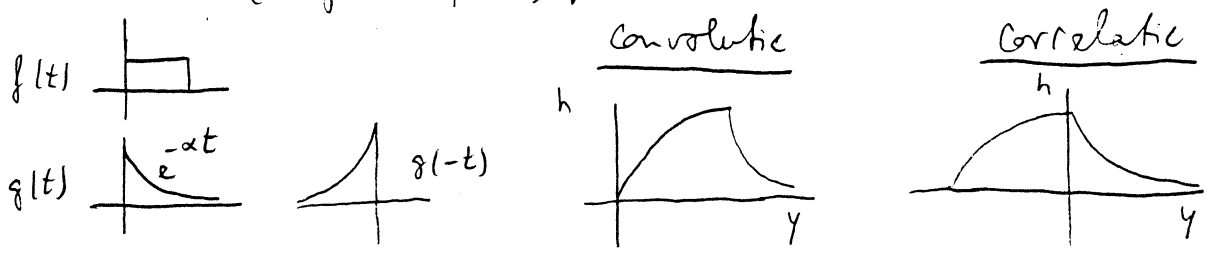
en in het bijzonder:

$$h = f \otimes f \Leftrightarrow H = F \cdot F^* = |F|^2 \quad (\text{II, 23})$$

power spectrum = FT van auto correlatie functie

(wat taal dat de auto correlatie functie ook geen fase info bevat)

Voorbeeld (Brigham p. 65; ga na, direct grafisch):



2.3.5 Voorbeelden (Bracewell p. 357 ff, Brigham p. 24 ff)

reële domein

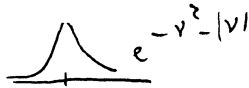
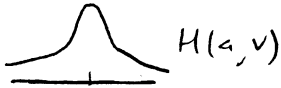
frekwentie domein
R — Im — — —



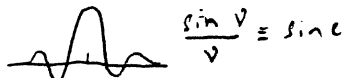
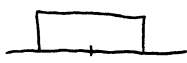
gauss blijft gauss
Convolutie: $e^{-at^2} * e^{-bt^2} = e^{-(a+b)t^2}$



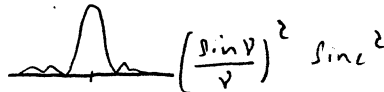
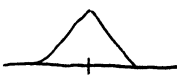
lorentz



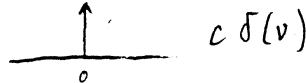
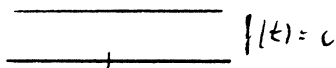
Voigt = Gauss * Lorentz



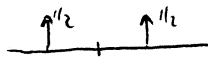
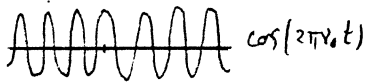
apertuurfunctie
maskerfunctie (data segment!)



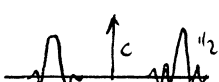
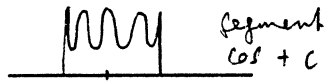
$\Delta \equiv \square * \square$



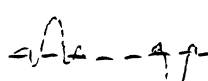
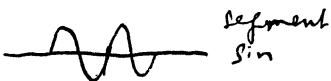
∞ breed $\Leftrightarrow \infty$ scherp
apertuur = $F(0)$



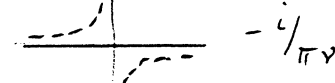
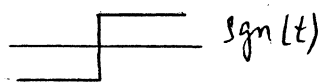
heer en teruglopend beide
hermetisch



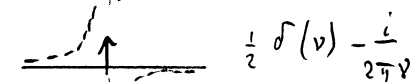
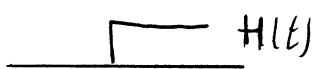
stukje: $\square \Rightarrow * \delta$
+ c: $F(0)$ er bij gezet



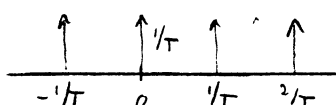
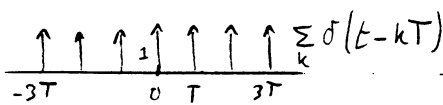
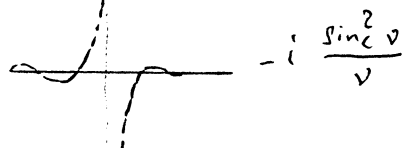
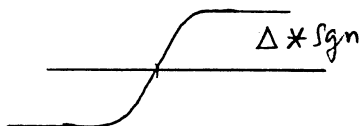
idem maar imaginair



hebenfunctie



Heaviside unit step functie



$\frac{1}{T} \sum_k \delta(v - \frac{n}{T})$

" hoe fijner \Leftrightarrow hoe grover "

2.3.6 Discrete Fourier Transformatie

Door de FFT (Fast Fourier Transform) valt de FT in de echte wereld ook te gebruiken, i.e. per computer. FFT is rekentruuc (zie Brigham ch. 10) die versnelling levert voor mate aantal meetpunten beter = factoren valt te ontbinden, beste voor $N = 2^m$. FFT is zo snel dat auto correlatie en convolutie voor beste via FFT gedaan kunnen worden. Extra voordeel: reëel signaal = $1/2$ FT is voldoende (of in twee helften splitsen, 1 in R, 1 in Im).

DFT (Brigham 6-21):

$$F\left(\frac{n}{NT}\right) = \sum_{k=0}^{N-1} f(kT) e^{-i2\pi nk/N} \quad \text{en} \quad f(kT) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} F\left(\frac{n}{NT}\right) e^{i2\pi nk/N}$$

II, 24

$T =$ bemonsteringsinterval $N =$ aantal samples niet symmetrisch!

Voor een reëel signaal geldt de halve DFT (Brigham p. 169):

$$\left. \begin{aligned} F(v_j) &= \frac{1}{2N_N} \sum_K f(x_k) e^{-i\pi jk/N_N} \\ f(x_k) &= \frac{1}{2} \sum_j F(v_j) e^{i\pi jk/N_N} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} j = 0, \dots, N_N \\ k = 0, \dots, 2N_N - 1 \\ x_k = k \cdot T \\ v_j = (j-1)/2N_N T \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} N_N = N/2 \\ (\text{Nyquist } N) \end{array} \right\}$$

Continue Fourier transform	Property	Discrete fourier transform
$x(t) + y(t) \Leftrightarrow X(f) + Y(f)$	Linearity (3-2)	$x(k) + y(k) \Leftrightarrow X(n) + Y(n)$ (8-1)
$H(t) \Leftrightarrow h(-f)$	Symmetry (3-6)	$\frac{1}{N} H(k) \Leftrightarrow h(-n)$ (8-2)
$h(t - t_0) \Leftrightarrow H(f) e^{-j2\pi f t_0}$	Time shifting (3-21)	$h(k - i) \Leftrightarrow H(n) e^{-j2\pi n i/N}$ (8-5)
$h(t) e^{j2\pi f_0 t} \Leftrightarrow H(f - f_0)$	Frequency shifting (3-23)	$h(k) e^{j2\pi k i/N} \Leftrightarrow H(n - i)$ (8-7)
$\left[\int_{-\infty}^{\infty} H^*(f) e^{-j2\pi f t} df \right]^*$	Alternate inversion formula (3-25)	$\left[\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} H^*(n) e^{-j2\pi k n/N} \right]^*$ (8-9)
$h_e(t) \Leftrightarrow R_e(f)$	Even functions (3-27)	$h_e(k) \Leftrightarrow R_e(n)$ (8-11)
$h_o(t) \Leftrightarrow jI_o(f)$	Odd functions (3-32)	$h_o(k) \Leftrightarrow jI_o(n)$ (8-14)
$h(t) = h_e(t) + h_o(t) = \left[\frac{h(t) + h(-t)}{2} \right] + \left[\frac{h(t) - h(-t)}{2} \right]$	Decomposition (3-33)	$h(k) = h_e(k) + h_o(k) = \left[\frac{h(k) + h(N-k)}{2} \right] + \left[\frac{h(k) - h(N-k)}{2} \right]$ (8-15)
$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau = x(t) * h(t)$	Convolution (4-1)	$y(k) = \sum_{i=0}^{N-1} x(i) h(k - i) = x(k) * h(k)$ (7-1)
$y(t) * h(t) \Leftrightarrow Y(f) H(f)$	Time convolution theorem (4-11)	$y(k) * h(k) \Leftrightarrow Y(n) H(n)$ (7-8)
$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t + \tau) d\tau$	Correlation (4-20)	$y(k) = \sum_{i=0}^{N-1} x(i) h(k + i)$ (7-11)
$y(t) h(t) \Leftrightarrow Y(f) * H(f)$	Frequency convolution theorem (4-17)	$y(k) h(k) \Leftrightarrow \frac{1}{N} Y(n) * H(n)$ (8-28)
$\int_{-\infty}^{\infty} h^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} H(f) ^2 df$	Parseval's theorem (4-19)	$\sum_{k=0}^{N-1} h^2(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} H(n) ^2$ (8-33)

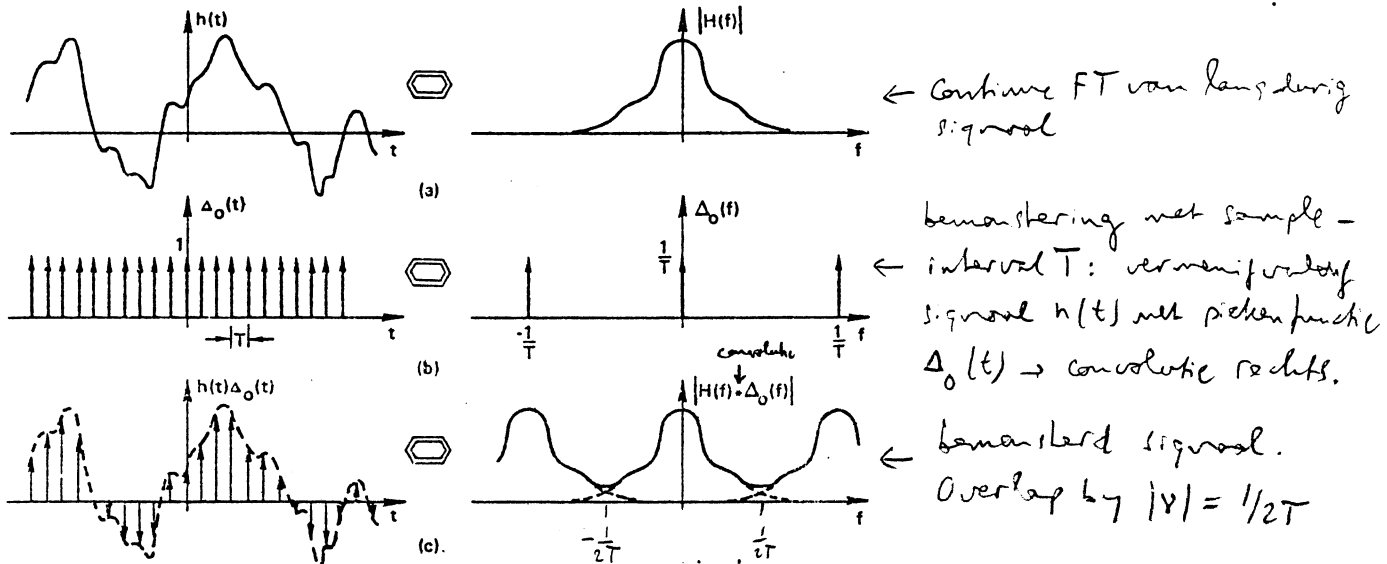
$k \equiv kT$
 $n \equiv n/NT$
 $i \equiv iT$
 $j \equiv jT$
 $T =$ sample interval

(equations in Brigham)

Eigenschappen DFT (tabel vorige blz) \approx CFT; maar:
 signalen discreet bemonsterd, paduende eindige meetduur, met ruis.

Bemonstering:

notatie: $\nu \rightarrow f$



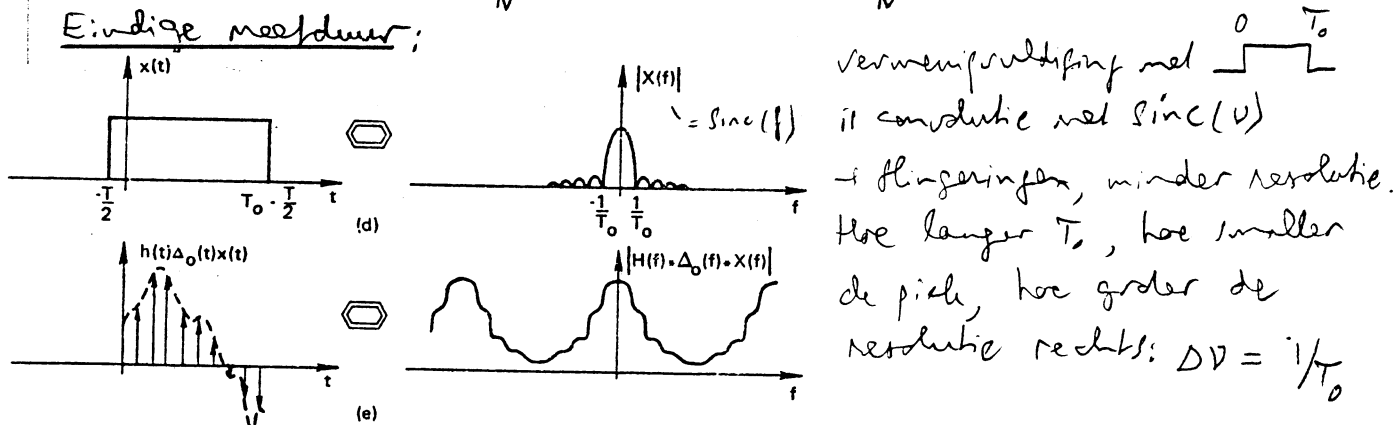
Hoe fijner T, hoe minder overlap; geen info in FT voorbij $\nu = \frac{1}{2T} = \frac{\nu_N}{2}$
 D.t. is de Nyquist frequentie: alleen als signaal geen frequenties $\nu > \frac{1}{2T}$ bevat is er geen "aliasing"; anders paraderen hogere frequenties als lagere:



Dus: $T \leq \frac{1}{2f_M}$ nodig als f_M hoogst-voorkomende frequentie is,
 d: signaal moet, voor bemonstering, low-pass gefilterd worden zodat $H(\nu) * \Delta_0(\nu) \approx 0$ is voor $\nu \geq \frac{1}{2T}$.

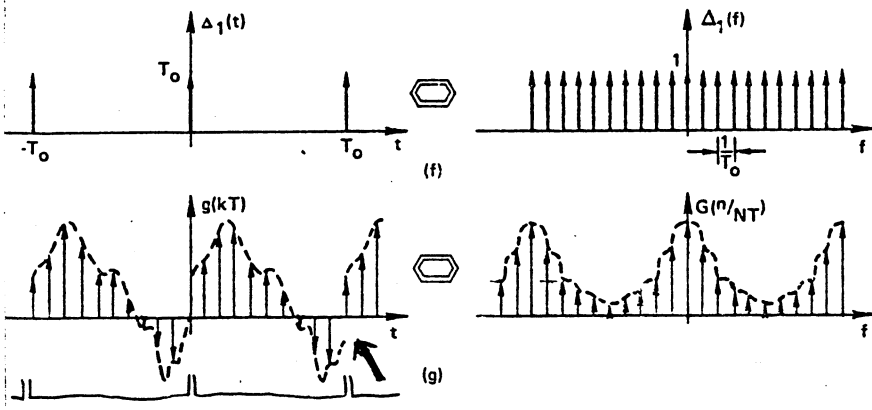
Hier wordt vaak tegen gezandigd; achteraf filteren helpt niet!
 power slecht apparaat goed apparaat (voorbeeld: scanner conversie)

Eindige meetduur:



Dus: precieze periode analyse vereist lange meetduur
 (hoboist houdt zijn 440 Hz stemfrequentie lang aan)

Frequentie - bemonstering:

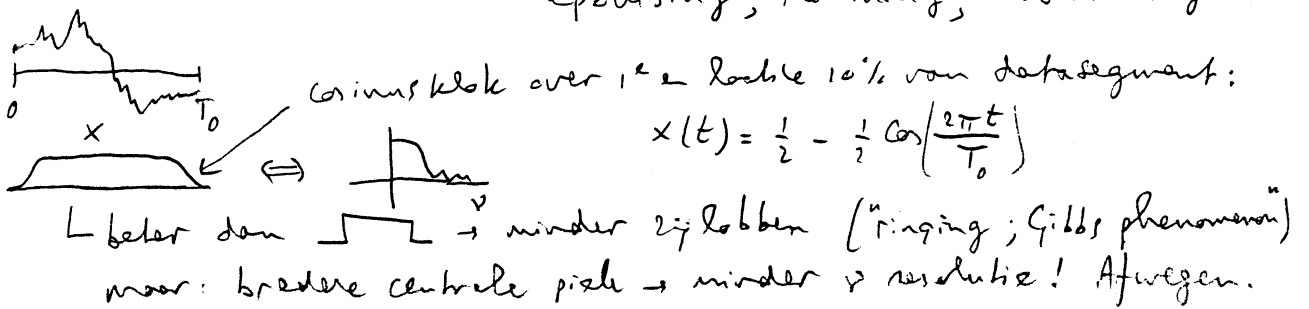


Frequentie sampling om $\Delta t = 1/T_0$ (zie vorige blz) impliceert ongeveer herhaling in meet domein met periode T_0 . Aan de randen van het eindeloos herhaalde segment breekt "lekkage" op als T_0 .

met de periode van $f(t)$ is; de randen van $\text{rect}(t/T_0)$ leveren nog sine plingelingen als ze niet uitgevildt zijn.

Derhalve meettechnieken, met zorg toe te passen:

- filter signaal hoog-frequent voor bemonstering } geen aliasing;
- bemonster voldoende snel
- meet zo lang mogelijk - goede resolutie in ν ;
- doe iets aan de randen: spoolkern, windowing, tapering, apodizing, Hanning, Coswinding



Voorbeelden data bewerking:

spektrallijn

- school naar continuum, draai spectrum om;
- gebruik cos window als er ruis op continuum zit;
- voeg links en rechts veel nullen toe, om de ν -resolutie te verhogen

spektrum

- school naar continuum
- gebruik cos window naar continuum

Rö burst

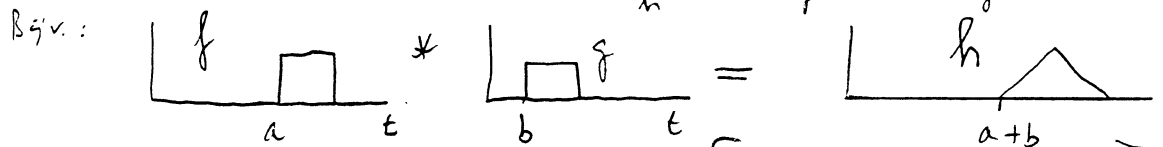
- voeg links en rechts veel nullen toe

2.3.7 Discrete Convolution, correlatie

Convolutie:
$$h(k) = \sum_{i=0}^{N-1} f(i) g(k-i)$$

NB: - sample afstanden f_i, g_i moeten gelijk zijn

- zwaarteklijven vallen op: $\langle t \rangle_h = \langle t_f \rangle + \langle t_g \rangle$



Berekening doorformulering via FFT: $\left[\begin{array}{l} f \rightarrow F \\ g \rightarrow G \end{array} \right] \xrightarrow{H} G \times F \xrightarrow{H} f \xrightarrow{h}$
 meestal met bepaling $\langle t_g \rangle$ in
 meet domein, shift en opp. normalisering $[/G(0)]$ in F domein.

Correlatie:
$$C_{fg}(k) = \sum_{i=0}^{N-1} f(i) g(k+i)$$

en: $\hat{C}_{ff} =$ power spectrum van f

evenzo: "cross power spectrum": $\hat{C}_{fg}(\nu)$

coherentie spectrum: $\sqrt{\hat{C}_{fg} \cdot \hat{C}_{fg}^*} / \sqrt{\hat{C}_{ff} \cdot \hat{C}_{gg}}$

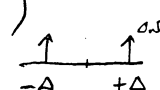
faseverschil spectrum: $\arctg \left[\frac{\text{Im}(\hat{C}_{fg})}{\text{Re}(\hat{C}_{fg})} \right]$

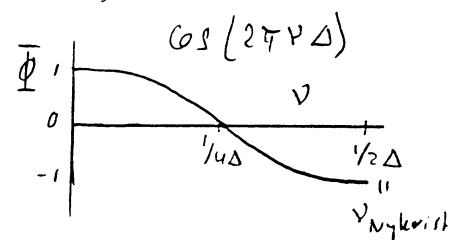
zie voor (onduidelijk) voorbeelden: Edmonds + Webb, Polar Phys. 22, 276

2.3.8. Ruis filters

Ruis in meetsignalen vaak onderdrukt met lineaire filters,
 dus convoluties \rightarrow beter bekijken in F domein:

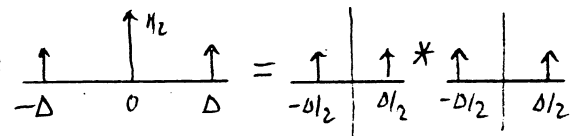
voorbeeld 1:
$$p(k) = \frac{1}{2} (f_{k-1} + f_{k+1})$$

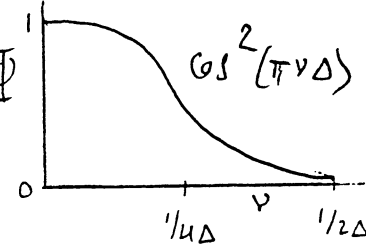
is convolutie met: 



Dus: midden frequenties verzwakt, maar hoge niet;
 fase sprong over π voor $\nu > 1/4\Delta$ fase in meetdomein.

voorbeeld 2 $\varphi(k) = \frac{1}{4} (f_{k-1} + 2f_k + f_{k+1})$

is convolutie met: 

Φ 

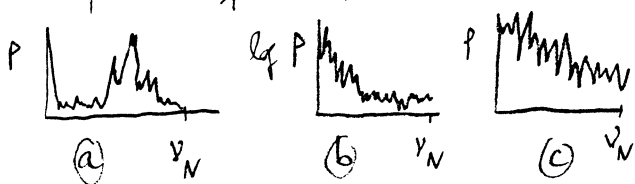
laat laagfrequent door, hoogfrequent niet } goed filter
 geen aliasing, geen fase draaiing } ("Hanning")

voorbeeld 3 $\Phi(v) = \begin{cases} 1 & |v| \leq \Delta \\ 0 & \text{and elsewhere} \end{cases} \rightarrow \varphi(k) = \text{sinc } \tau$

dus afkappen frequenties \rightarrow uitblijfsingen in meetdomen

Meest voorkomende φ, Φ hangt natuurlijk af van signaal en ruis.

Typische power spectra:



- wat voor signalen hoorden hierbij?
- wat is de achtergrond van (a)?
- wat is er fout in (c)?

Het beste filter is het "optimum filter":

reële lineaire filters
 random ruis, niet met signaal gecorreleerd
 kardiaal-integraal zin

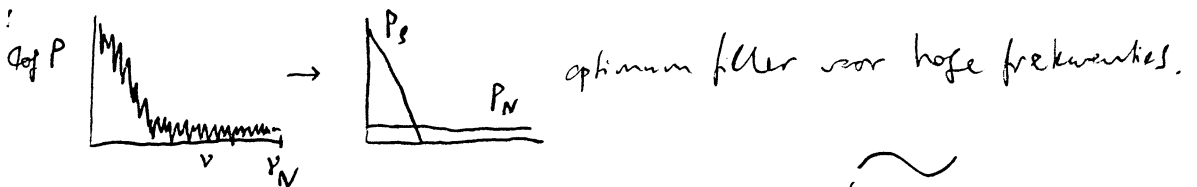
$$\Phi(v) = \frac{P_s(v)}{P_s(v) + P_N(v)}$$

met P_s = signaal power, P_N = ruis power.

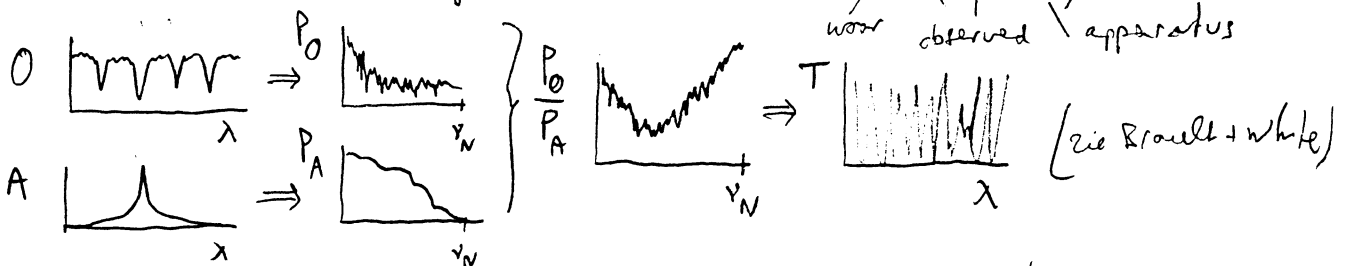
Afleiding, veel duidelijke voorbeelden: Brautt + White 1971 A&A 13, 169

Dus: probeer P_s en P_N te vinden, en gebruik dit filter.

Voorb:



Filteren is vooral nodig bij de convolutie: $T = \left(\frac{\tilde{O}}{\tilde{A}} \right)$

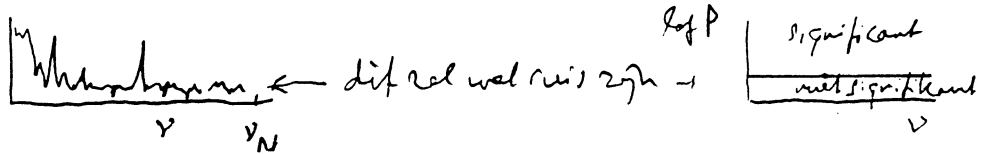


door deling met \tilde{A} wordt hoog-frequentie ruis opgetreken tenzij gefilterd.

Ook problemen met nullen van \tilde{A} ! (Nullen wel nullig om A te vinden)

2.3.9 Significantie van powerspectra

Hoe significant zijn pieken in powerspectra? Vraag vaak essentieel!

Naief: $\frac{\epsilon}{P}$  $\frac{\epsilon}{P}$

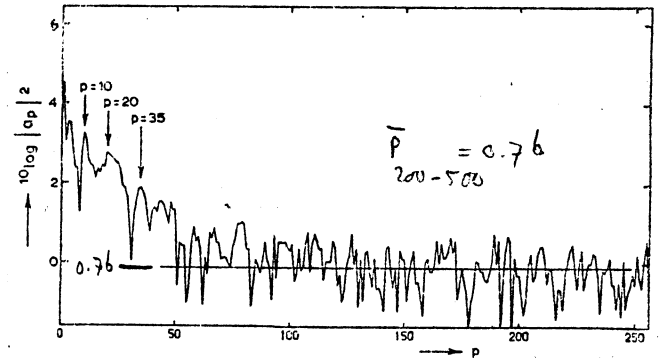
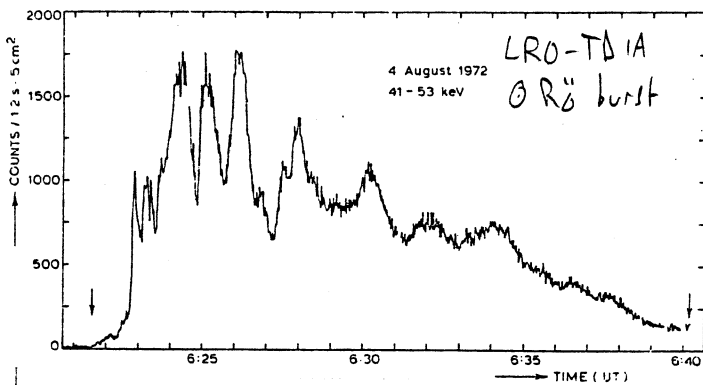
goed: alles goed uitgewerkt naar onlesbaar in communicatietheorie:
 - Middleton, 1970, An Introduction to Statistical Communication Theory
 - Rice, 1954, Selected Papers on Noise and Stochastic Processes, Dover

Toepasbare uitwerkingen:

- Kaye, 1976, A&A 47, 449:

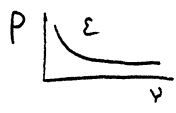
Poisson verdeelde ruis } \rightarrow willekeurig verdeelde ruis in signaal bereik:
 Normaal verdeelde ruis } (niet met gecorreleerde ruis)

fout in power is: $\frac{\epsilon(\nu)}{P(\nu)} \approx \sqrt{2x - x^2}$ met $x = \frac{P(\text{groter } \nu)}{P(\nu)}$



$P = |a_p|^2 = 10^2$ heeft $\frac{\epsilon}{P} = 0.12$, $P = 10^4$ heeft $\frac{\epsilon}{P} = 0.012$; gemiddelde pieken reëel.

Algemeen: $x \ll 1$ (links, meestal): $\frac{\epsilon}{P} = 1.4\sqrt{x}$; $\epsilon = 1.4 \sqrt{P_{\text{groot}} \cdot |a|}$



- Groth, 1975, Ap. J. Suppl. 29, 285

grafieken voor confidence levels, ook voor in-deling meerdere metingen

ook: voor $x \ll 1 \rightarrow \epsilon = \text{variancie} \rightarrow P \pm 2\epsilon$ is 68% confidence interval.

Verder vaak: meetreeks in delen splitsen, periodogrammen van de delen vergelijken. Maar: dat helpt niet tegen aliasfouten: consequent een verkeerde piek hoeft niet significant te zijn!

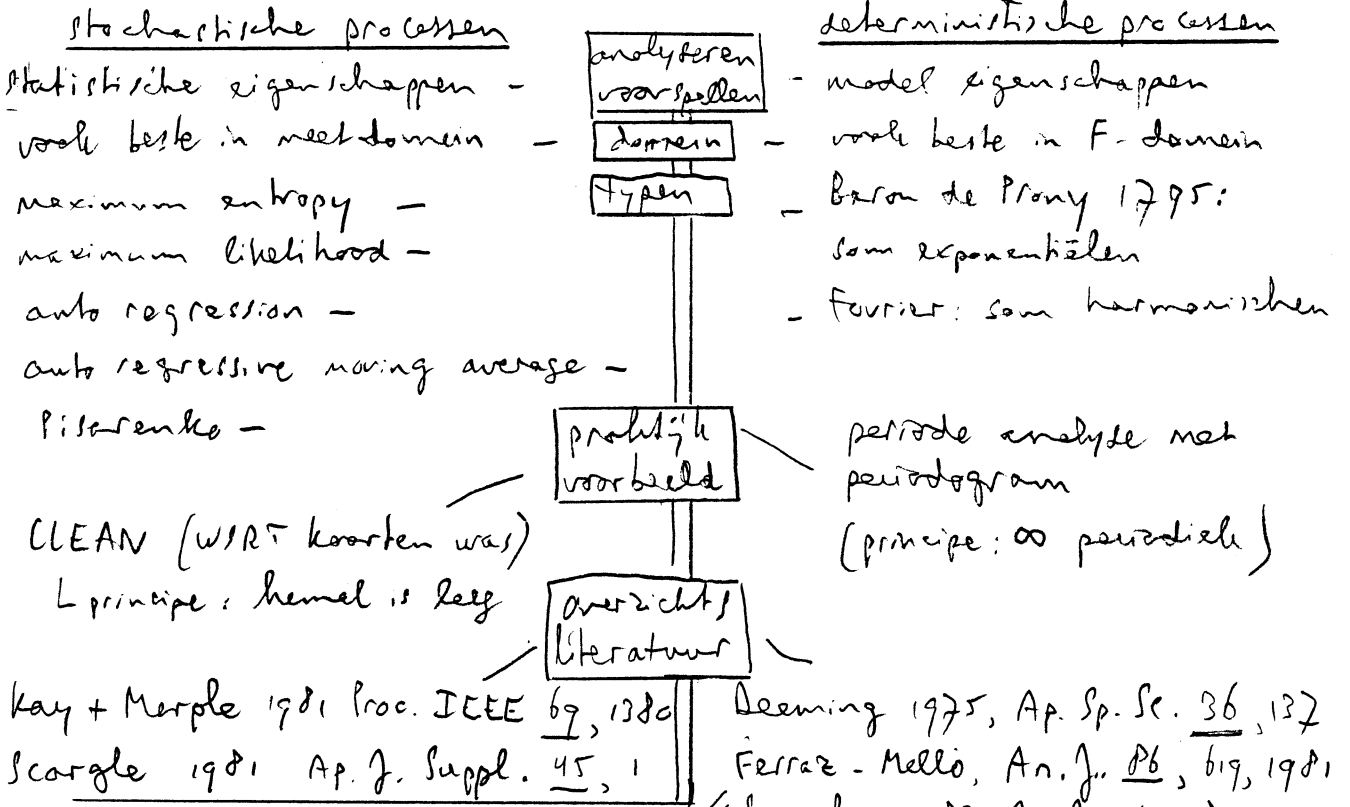
Algemeen: al - dan - niet significant zijn van pieken in powerspectra heeft samenhang tot aardige wiskundige - niet discussies.

2.3.10 Tijdserie - analyse algemeen

FFT periodogram als hiervoor alleen voor equidistante
 aan een gesloten reëlen, en veronderstelt ∞ periodieke signalen.
 Vragen - wat te doen met onregelmatige bemonstering?

- betere afschakelingen dan periodogram?
 L(oops!) $\equiv \frac{\log P_v}{v}$

Pas op: twee gans gescheiden gebieden van
 uitvoerige literatuur, heel vaak verward (en verworrend):



hier: golven \rightarrow model = s. uitdoen \rightarrow periodogram analyse.
 Algemeen: bemonstering niet equidistant w | $\uparrow\uparrow \uparrow \uparrow \uparrow\uparrow\uparrow \uparrow$
 DFT van "observation window" $w(t)$ is de "window functie": t

$$W(v) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{2\pi i v t_j}$$

met $F_{obs}(v) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N f(t_j) e^{-i 2\pi v t_j}$ DFT voor oneffen sampling
 ($j \rightarrow t_j$)

feldt (Deeming): $F_{true}(v) = F_{obs} * W$ ($F_{true} \equiv$ CFT ∞ lang)

das $W(v)$ toont wat rare sampling tot gevolg heeft in periodogram,
onafhankelijk van de data $f(t)$ zelf.

Maar: statistische eigenschappen periodogram veranderen met w .
 Scargle (1982) voert gemodificeerd periodogram in:

$$P(\nu) = \frac{1}{2} \left[\frac{\left[\sum_j f(t_j) \cos 2\pi\nu(t_j - \tau) \right]^2}{\sum_j \cos^2 2\pi\nu(t_j - \tau)} + \frac{\left[\sum_j f(t_j) \sin 2\pi\nu(t_j - \tau) \right]^2}{\sum_j \sin^2 2\pi\nu(t_j - \tau)} \right]$$

$$\text{met } \tan(2\pi\nu\tau) = \frac{\sum_j \sin 2\pi\nu t_j}{\sum_j \cos 2\pi\nu t_j}$$

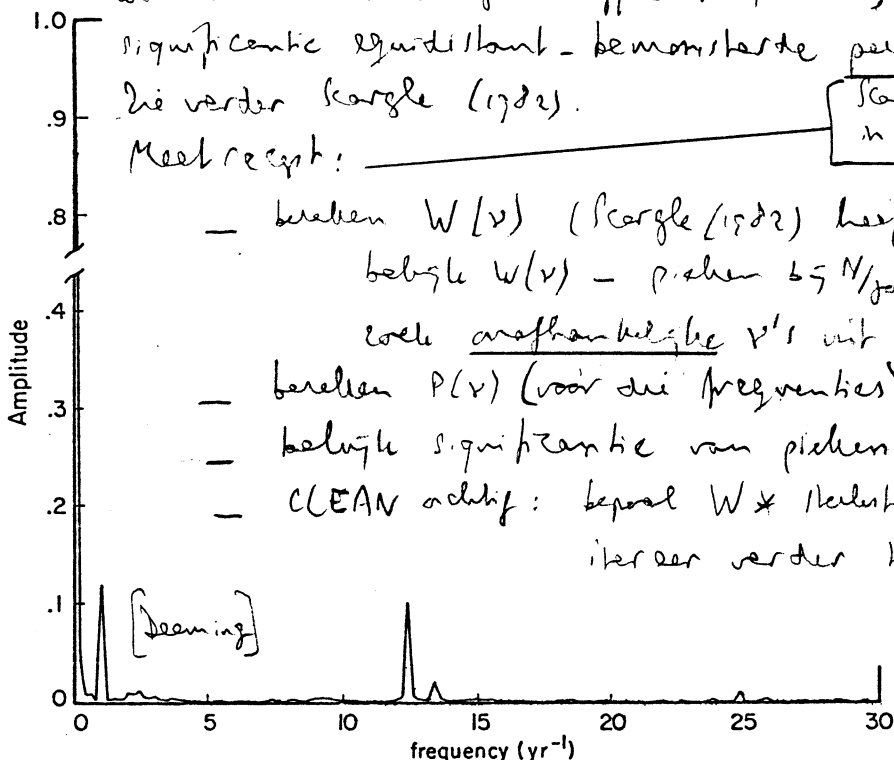
wat weer de ruis eigen schappen heeft die Groth (p.20) gebruikt voor
 significantie equivalent - benadrukte periodogrammen.

Zie verder Scargle (1982).

Meer recept:

Scargle (1982) en Ferraz-Mello voorhanden
 in SOLIB routines PERIOD (Rob v. Gent)

- bereken $W(\nu)$ (Scargle (1982) heeft ook gemodificeerde versie)
 belangrijke $w(\nu)$ - pieken bij N/jaar , N/dag , ..., $N.50/\text{sec}$?
 ook afhankelijke ν 's uit - bijv. nulpunten $w(\nu)$;
- bereken $P(\nu)$ (voor die frequenties) als boven;
- belangrijke significantie van pieken met formules Scargle;
- CLEAN actief: bepaal $W \times$ kleinste pieke; haal die eruit;
 itereer verder tot er geen pieken meer zijn.



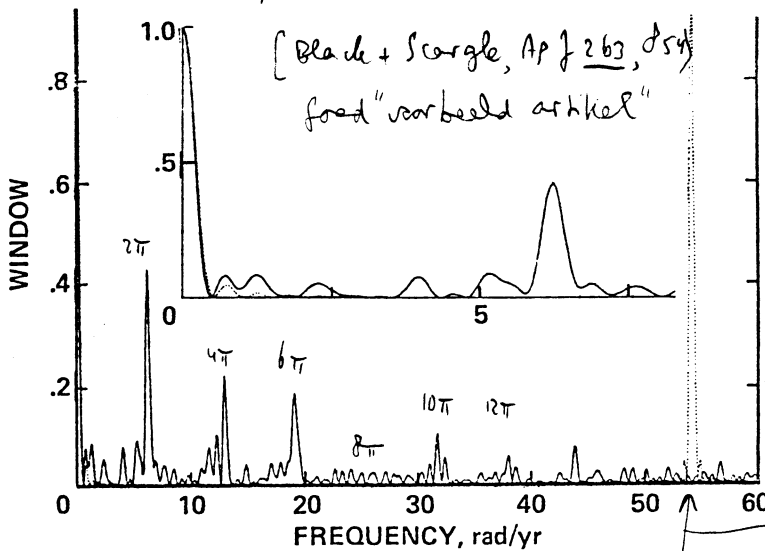
$W(\nu)$ voor langdurig
 QSO monitor project

Fig. 2. Power spectral window obtained for photometric observations of 3C345 by Kinman. Note the clean central peak, the appearance of three smaller peaks at periods of one year, one synodic month, and one calendar month, and the very low 'noise' level at other frequencies.

dit moet verdeeld
 door de seizoenen
 en de jaren

want er werken tijd allocatie burocraten

want \odot in de weg
 want \oplus in de weg



[Blake + Scargle, Ap J 263, 1984]
 goed "voorbeeld artikel"

planeet zoeken;

parallel
 eigenbeweging } 12 jaar
 monitoren

$$T = 12 \text{ jaar} \quad \Delta = 0.112 \text{ jaar}$$

$$N = 107$$

$$2\pi(2\nu/N) = \frac{2\pi}{\Delta} = 56.0 \text{ rad/jaar}$$

FIG. 4.—The classical spectral window for the 107 samples of the USNO study of G96-45. The dotted line is the (sinc^2) window which would obtain if the data were evenly spaced with the same average spacing as the actual observations. The strong alias peak at about 54 rad yr^{-1} is absent in the real window, but the pseudoalias peaks at multiples of 2π , due to the annual nature of the samples, are evident. In the inset, one can see that the near sidelobes of the real window are somewhat larger than those for even spacing, but the resolution (width of the main lobe) is essentially the same.

dit niet - equivalent is niet zo erg

typisch voor parallel program

2-3-11 Image processing

Image processing heeft ook een uitgebreide literatuur, meer militair dan astronomisch, het duurt maar in radioastronomie (Bracewell, Ann. Rev. maar ook ook optisch belangrijke worden. (17, 113))

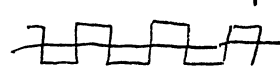

- grote arrays: dit is groot voor computer - splits in delen en transformeer apart. Referentie in Brigham p. 196-197
- images gedigitaliseerd als pixels - Hadamard of Walsh transformatie is een betere keuze:  ipk sinusoidale. heeft vergelijkbare eigenschappen als FT;
 - convolution theorema etc (zie boek Bracewell)
 - ook "fast" algoritme, net als FFT; in ACULIB.
- Stochastische modellen hier vaak belangrijk - maximum entropy methoden voor power estimation etc.

Image restoratie met modelleren versmeerder

Restoratie werkt ook met bekende versmeerder - e.g. apparaatprofiel.

Onbekende versmeerder kunnen soms gemodelleerd worden,

vooral als ze achtig zijn - ~~af~~achtig in F-domein.

Bij de vermenigvuldiging in F-domein blijven nullen nul - uit globale vormfunctie kan precieze afwijking gevonden worden.

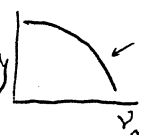
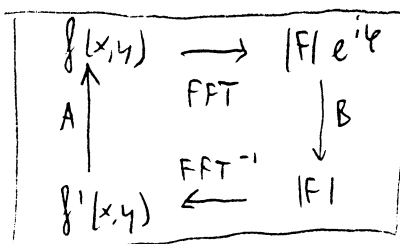
Kelias niet voor seeing: heeft MTF:  $e^{-(v/v_0)^{1.67}}$ (Woolf, Ann. Rev. 20, 367)

Image restoratie voor seeing door iteratie

Seeing levert vooral fase versterking. Kun je uit gemeten modulus $|F_{obs}|$ de oorspronkelijke informatie $f(x,y)$ terugvinden?

In zekere mate wel, met Gerchberg-Saxton algoritme:



begi- met een gok, vaak vaak ($\sim 10^3$) rond;

bij B: pas F-domein voorwaarden toe

(|F| moet $|F|_{obs}$ benaderen; hoge v : ruis)

bij A: pas met domein voorwaarden toe

(geen intensiteiten < 0 of imaginair;

beeldsymmetrie of vorm valt te raden...)

- vind "sensordigite" $f(x,y)$, vaak $a > 0$ etc, met de gegeven $|F_{obs}|$.

Werkte heel fraai in voorbeeldstudie - maar in de praktijk?

III WAARNEMINGEN NIET-OPGELOSTE BEWEGINGEN

3.1 Lijnverbreding

3.1.1 "Behende" verbredingen

- Thermische Doppler verbreding $\left[\Phi(\Delta\nu) = \frac{1}{\sqrt{\pi} \Delta\nu_D} e^{-\left(\Delta\nu/\Delta\nu_D\right)^2} \right]$ (II, 4)
 gauss
 Mikulas 1^o druk p. 250

$\frac{\Delta\nu_D}{\nu_0} = \frac{\Delta\lambda_D}{\lambda_0} = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{2RT}{\mu}} = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{2kT}{m}} = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{2kT}{AMU \cdot m}} = 4.3 \cdot 10^{-7} \sqrt{T/A}$
 L atomen met school $c=12$ (AQ p. 31)

hele halfwaardebreedte $FWHM = 2\sqrt{\ln 2} \Delta\nu_D = 1.665 \Delta\nu_D$
 Typische θ waarde: $A=50, T=5000 \text{ K} \rightarrow \Delta\lambda_D = 22 \text{ m\AA} = 2.2 \text{ pm}$

- Dempingsverbreding — stralingsdemping $\gamma_{RAD} = 1/\tau$
 L botsingsdemping γ_{coll}
 - lineair sterk γ_5
 - van der Waals γ_6
 - kwadratisch sterk γ_4
 Resonantie lijnen: $\approx \sum A_{i\ell} \neq f(z)$
 andere lijnen: $\sum_{i\ell} A_{i\ell} + \sum_{i\ell} A_{i\ell}$ en $f(z)$
 typische waarde: 10^8 s^{-1}
 altijd verwaarloosd, soms heel fout.

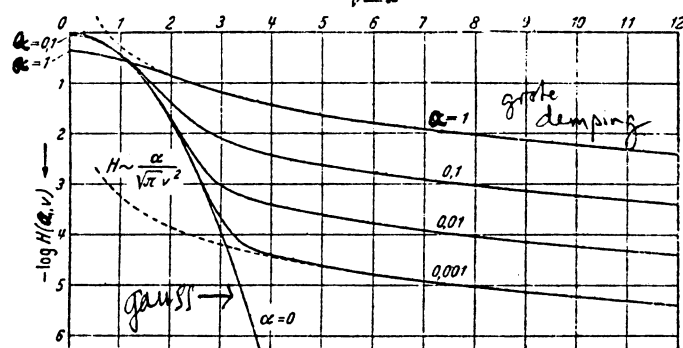
Hecht behend; formalismen nog onduidelijk; theorie niet af.
 Vast simpelweg: $\gamma_{coll} \approx 3 \times \gamma_6$ (waar dat kan ook van deeltjes $f_{rotte} \propto N_H$, neemt snel naar buiten af. representatie correcte liggen)
 Typische waarde: $\sim 10^9 \text{ s}^{-1}$ in diepe fotosfeer.

$\Psi(\Delta\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{\gamma/2}{\Delta\omega^2 + (\gamma/2)^2}$ met $\gamma = \gamma_{RAD} + \gamma_{coll}(h)$
 $\gamma = \gamma_5 + \gamma_6 + \gamma_4 + \dots$
 tellen op want quadratisch; FT = $e^{-|a|}$

NB: hier $\gamma =$ hele halfwaardebreedte in cirkelfrequentie ω .
 Vast ook: halve halfwaardebreedte, ν ipv ω .

NB2: Botsings verschuiving wordt bijna altijd verwaarloosd.
 Terrecht? Theorie nog erg slecht.

Samen: $\Psi * \Psi \equiv H(a, \nu) = \frac{a}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-y^2}}{(\nu-y)^2 + a^2} dy$ Voigtfunctie



$a = \gamma / (4\pi \Delta\nu_D) = \frac{\lambda^2}{4\pi c} \gamma / \Delta\lambda_D$
 $\nu = \Delta\omega / \Delta\omega_D = \Delta\nu / \Delta\nu_D = \Delta\lambda / \Delta\lambda_D$
 oppervlak: $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ in ν , $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ in λ , $\frac{1}{\sqrt{\pi} \Delta\nu_D}$ in ν .
 BOLIB heeft $H(a, \nu)$ routine

3.1.2 Onbekende verbredingen

Vormfunctie lijn extinctie coefficient: $l(\Delta v) = l(v_0) \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi} \Delta v_D} H(a, v)$ (III, 1)

thermische & dopplerverbreiding erin via Δv_D en γ , respectievelijk.

Maar: waargenomen spectrallijnen zijn niet zo breed
dan die je berekent met deze $l_v(z)$

→ invoering "fudge factors": "turbulentie" (Struve, 1930)

in twee soorten:

microturbulentie: versmearing $l(\Delta v)$ met extra gauss:

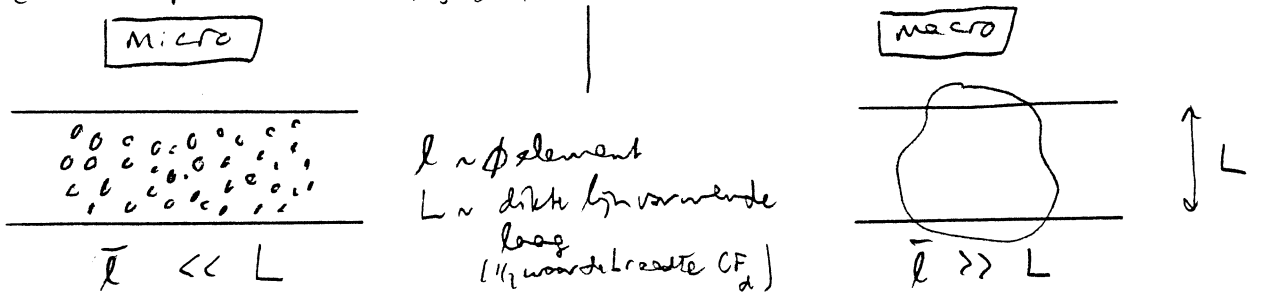
$$l_2(\Delta v) \equiv l_2(v_0) \cdot \left[\varphi(\Delta v) * \frac{1}{\sqrt{\pi} \frac{v_0}{c} \xi_\mu} e^{-\left(\frac{\xi}{\xi_\mu}\right)^2} \right]$$

$$= l_2(v_0) \frac{1}{\sqrt{\pi} \Delta v_D} H(a, v) \text{ met } \Delta v_D \equiv \frac{v_0}{c} \sqrt{\frac{2kT}{m} + \frac{v_0^2}{c^2} \xi_\mu^2}$$
 (III, 2)

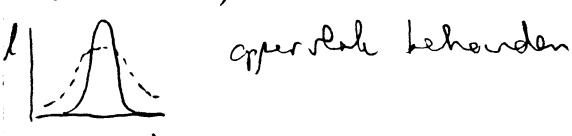
macroturbulentie: versmearing uitbreidend lijnprofiel met gauss:

$$I_0(\Delta v) = I_0(\Delta v) \text{ berekend} * \frac{1}{\sqrt{\pi} \beta} e^{-\left(\Delta v / \beta\right)^2} \text{ met } \beta = v_0 \frac{v_M}{c}$$
 (III, 3)

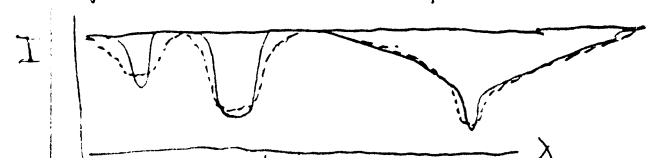
Beide ad-hoc, impliciete aanname: stochastisch bewegingsveld met normale verdelingen, geen afhankelijkheden van T of ρ (anders geen convoluties), gesplitst in de uitrekenen van mogelijke schalen:



instantaan, voor 1 punt (x, y, z) wordt $l(z)$ versmeerd:



→ lijnprofiel verandert van vorm, en voor lijnen op plateau voorwaarde van oppervlakte



instantaan, voor 1 punt op oppervlakte (x, y, c) wordt hele lijnprofiel verhevoren

I maar convolutie over oppervlakte en tijd, met gaussische verdeling snelheden, levert.

convolutie
{ vorm ronder
oppervlakte behouden

Effect van micro turbulentie hangt af van lijnterkte:

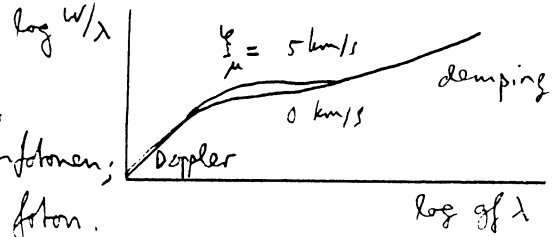
- hele zwakke lijnen:

Dopplertek in frekwentie \rightarrow

$\tau_l(\tau_c, \nu) \ll 1$, ook voor $\lambda = \lambda_0$.

aanslag \uparrow meest met continuümfotonen;

terugval \downarrow levert ontsnappend foton.



\rightarrow lijnprofiel $\approx \varphi \rightarrow$ oppervlakte behouden bij wijziging $\frac{v}{\mu}$.

Alle schoofgrootten leveren versmoring profiel \rightarrow oppervlakte meet aantal absorpties, breedte meet totale bewegingsveld.

- middelsterke lijnen; kern ondoorzichtig; fotonen ontsnappen pas uit top fotosfeer, waar S_{φ} vlak loopt \rightarrow lijndiepte blijft gelijk als ν_D verandert; breedte verandert wel want vleugel nog doorzichtig: bredere ν_D levert extra mogelijkheid voor absorptie.

Oppervlakte en breedte nemen beide toe met $\frac{v}{\mu}$.

- sterke lijnen: dempingvleugels ondoorzichtig en overheersen; veranderen niet als Dopplerkern wijzigt.

Turbulentie, zo ingevuld, meet verrekil tussen berekeningen met (II, 3)

en werkelijke profielen. Bevat dus alle fouten: verwarlozing

bewegingen; verwarlozing in hooftgrootten; fouten in γ ;

foute aanname LTE, CRD; fout atmosfer model; fouten in

waargenomen profielen (bijv. straalbreedte, oppervlakteprofiel breedte) etc

Dus onuitwisbare matrixfactor, voolte ten onrechte alleen aan bewegingen toe te schrijven.

Is er echte fysieke turbulentie?

Dynamische viscositeit: herstellende kracht $F = \mu \frac{\partial v_x}{\partial x}$ $\xrightarrow{\text{afreuking}}$

Maxwell verdeling + Boltzmann vgl. (zie lang, AF, II H₂ 163, p. 222 - 227):

voor H atomen: $\mu \approx 5.7 \cdot 10^{-5} \sqrt{T}$ g cm⁻¹ s⁻¹

Reynoldsgotal: $R = \rho v l / \mu$

\rightarrow fotosfeer $\rho \approx 10^{-5}$, $v \approx 1$ km/s, $l \approx H_p \approx 100$ km, $\mu \approx 10^{-3}$

dus $R \approx 10^{10}$

Bij $R \approx 10^3$ is er al zeker turbulentie. Dus fysieke turbulentie is er zeker ook. Hoeveel?

Vergrouting parameter ruimte: vooral in fitten zonne lijnen bijten ξ_{μ} en ξ_M voldoende aanpassingsvrijheid te geven. Verschillende vormen van verschillende lijnen en midden - rond verloop vereisen meer parameters:

- dropte afhankelijkheid

ξ_{μ} is lokale versmoring $l(z) \rightarrow \xi_{\mu}(z)$.

ξ_M is versmoring hele profiel - toch soms z -afhankelijke grootten, i.e. verschillend voor lijnen uit verschillende lagen.

- hoeksafhankelijkheid

isotropie hoef je ook niet te verwachten (granulatie en oscillaties zijn anisotroop). Hoe voer je anisotropie in?

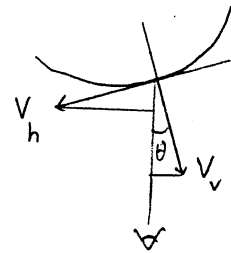
Meest gangbaar: stel horizontale en verticale snelheidsverdelingen verschillend, alle gaussisch, en bewegingen \downarrow gecorreleerd:

$$N(v_{v,h}) dv \equiv \frac{1}{\sqrt{\pi} \xi_{v,h}} e^{-\left(\frac{v_{v,h}}{\xi_{v,h}}\right)^2} dv$$

dan, met $v(\theta) = v_v \cos \theta + v_h \sin \theta$,

$N(v_{\theta}) = N(v_v) \times N(v_h)$ is ook weer gauss,

met middelbare snelheid $\xi^2(\theta) = \xi_v^2 \cos^2 \theta + \xi_h^2 \sin^2 \theta$



Gray (1976, "The observation & analysis of stellar photospheres", II, 216) heeft een "radial-tangential" model: geen menging, maar beweging is of vertikaal, of horizontaal. Basis: granulatieflois. De twee verdelingen, alle weer gaussisch, tellen dan op:

$$N(v_{\theta}) dv = \frac{a_v}{\sqrt{\pi} \xi_v \cos \theta} e^{-\left(\frac{v_v / \xi_v \cos \theta}{\xi_v}\right)^2} + \frac{a_h}{\sqrt{\pi} \xi_h \sin \theta} e^{-\left(\frac{v_h / \xi_h \sin \theta}{\xi_h}\right)^2}$$

met a_v en a_h de betreffende fracties oppervlakte zijn die zo bewegen.

Zowel ξ_M als ξ_{μ} kunnen zo hoeksafhankelijk zijn.

Sterren, met alleen flux profielen, hebben minder parameters nodig dan de zon. In hun profielen zit ook nog: rond verwaaiing van het continuum, midden - rond verloop spleetvormig, (differentieel) rotatie, afwijkingen van bolvorm, niet-afgeleide stervre gebieden, zeemansplitsing, ...

3.1.3 Meetmethoden onopgeloste bewegingen zon

zwakke lijnen geven totale snelheidsveld; verder damping onbelangrijk, excitatie in LTE voor Fe I, Ti I lijnen etc.

Wel goede S/N nodig, precieze continuumlocatie.

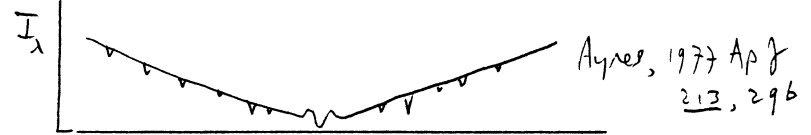
Fourier methode (Kurten, Hozy, de Jager 1974 Solar Phys. 30, 321):

in zekking $d_\lambda(\lambda) \approx I_\lambda(\bar{\lambda}) - d_\lambda^{obs} = I_{\lambda}^{comp}(\bar{\lambda}) * f_{Dop}(\bar{\lambda}) * a(\lambda)$

dit bereken profiel met alleen thermische en damping-verbreding (H(a(z), v(z))), deconvoluer waargenomen profiel door mee en met instrument profiel spectrograaf -> snelheidsverdeling f(v) dv, maar zonder enige kennis van de schalen.

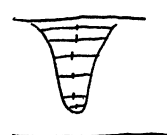
Toepassing (Gurtovenko et al, Nice 1975, II Hb 215): meestal niet-gaustisch, maar staat van hoge inwaartse snelheden.

zwakke lijnen op H & K



De uitgebreide velden van H & K hebben ruime kans lambda om zwakke blends -> geschikt voor bepaling diepte afhankelijkheid (afname dx tot Ca II lijnen impliceert afname z)

bisectors

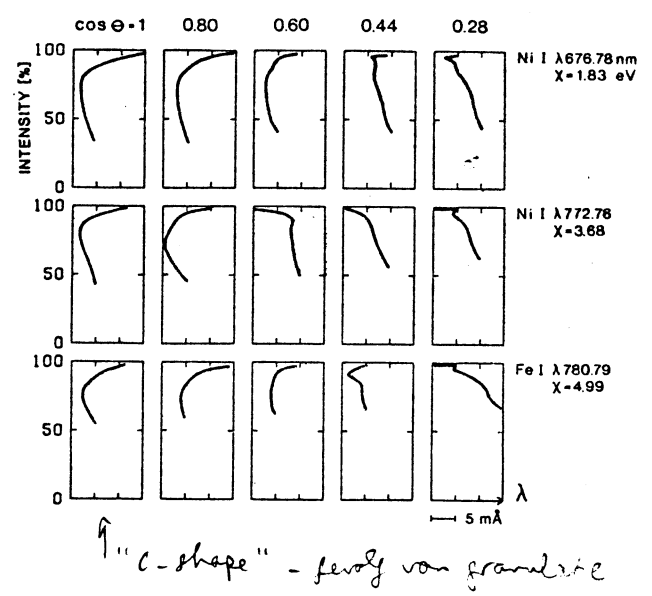


ξ_μ en ξ_M onderstellen symmetrisch profiel; -> asymmetrie geeft extra informatie.

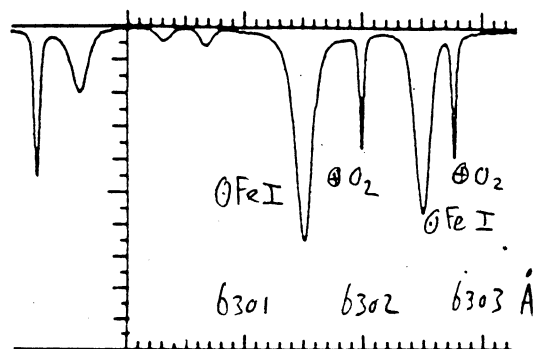
beschrijving met "bisector": verbindingskromme middens verbindingslijntjes gelijke I_x.

(Dravins, 1982, Ann. Rev. 20)

lijkt in combinatie met absolute dx meting, bju:



"c-shape" - gevolg van granularie



hellere zwakke lijnen geven lambda(t) referentie

Bij voorkeur gebruik van lijnen met Lande factor g=0 -> geen B vervorming
Bju. Fe I 5576.1 Å

3.1.4. Meetmethoden onopgeloste bewegingen sterren

- zwakke lijnen, zwakke blends H & K, bisectors, b302 β_2 referentie:
 beginnen ook in sterren gemeten te worden. goede spectrograaf
 en hoge S/N nodig: ESO Condo Echelle Spectrograaf (CAT & 3.6 m).

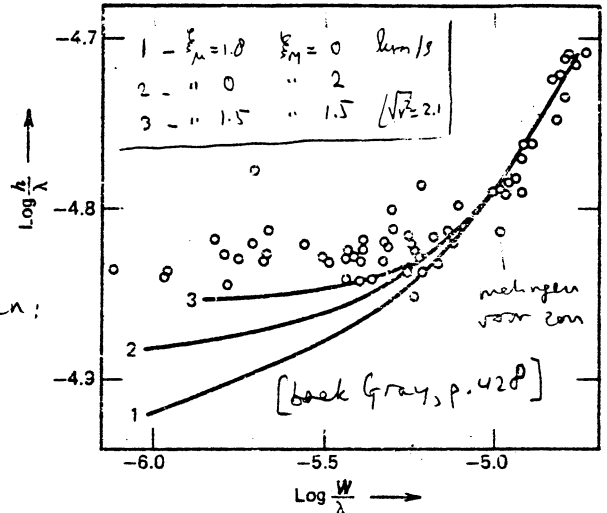
lijnbreedte correlatie

Huang, v. d. Haavel (1963, BAN 17, 148)

ξ_{μ} verandert helfswaardebreedte h en
 equivalente breedte W ; ξ_M alleen h
 → groetkromme achtijve verpeljing
 voor veel lijnen met theoretische krommen:

Rechts; alle drie gelijkt want dempingstak

links; krommen schalen naar $\sqrt{\frac{\xi_{\mu}^2}{M} + \frac{\xi_M^2}{M}}$
 want Poppler tole



Beter nog: 1/4 en 3/4 breedtes ipv. 1/2 breedtes h .

Maar: voor breedte meting goede profielen nodig → behijte & fit profielen
 (slechte spectrograaf geeft alleen goede W - behouden bij convolutie)

Vraag: waarom normaling h en W met λ ?

bepaling / eliminatie rotatie

Sterren: lijn-profiel $\leftarrow \left\{ \xi_{\mu}(h, \theta), \xi_M(h, \theta), v_{rot}(\varphi), I^c(\theta), I_{\lambda}(\theta) \right\}$

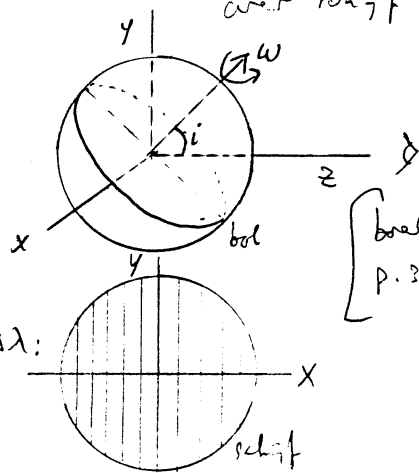
over rechth. geintegreerd

rotatie draaiingsas in vlak yz

$$\vec{v} = \vec{R} \wedge \vec{R}$$

$$v_z = x R \sin i$$

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda}{c} v_z = \frac{\lambda R \sin i}{c} x$$



[boek Gray, II, 216
 p. 372 ff

dez. strips met dezelfde x hebben dezelfde $\Delta\lambda$:

(effektie van differentie rotatie)

Grootste $\Delta\lambda$: $\Delta\lambda_R = \frac{\lambda R \sin i}{c} R_x = \frac{\lambda}{c} v \sin i$

met v de equatoriale rotatie snelheid (km/s).

Uitbreedende flux: $F_{\nu} = \int I_{\nu} \cos \theta d\omega$ { uitbreijde opp. op bol: $dA = R_x^2 d\omega$
 is op rechth: $dx dy = dA \cos \theta$

$$\rightarrow F_{\nu} = \iint \left(\frac{I_{\nu}}{R_x^2} \right) dx dy \quad \text{over hele rechth.}$$

dus, als $R(x,y;\lambda) \equiv I_\lambda(x,y)/I_c(x,y)$ 't lokale intensiteits profiel is, gezien vanuit z , geldt voor 't lijn profiel gemiddeld λ de flux F de flux

$$F(\lambda)/F_c = \frac{\iint R(x,y;\lambda) I_c(x,y) dx dy}{\iint I_c(x,y) dx dy}$$

Algemeen: uitbreiden door veel-punts integratie - dan alles inbegrepen.

Merkei mogelijke splitsingen:

- ringeltes equivalent in $\mu = \cos \theta$ (Abt, 1957 Ap.J. 126, 503)
- " " " $1/\mu$ (White, 1968, Ap.J. 152, 217)
- " " " $\ln(1/\mu)$ (Lites, 1972, thesis)
- " gelijke geprojecteerde breedte (Loderblom, 1980, thesis)
- " gelijke flux F_c (Browning, 1981, thesis - heb ik)
- " gelijke geprojecteerde oppervlakte (Browning - beste)

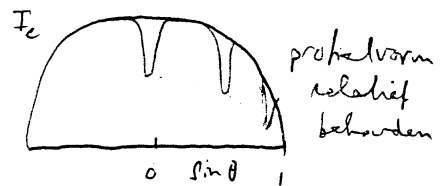
Afweging precisie vs rekentijd

Convolutie

Stel dat het relatieve intensiteitsprofiel $R(x,y;\lambda)$ niet in vorm verandert met x en y , alleen voor het veld verdundt in rotatie, dan geldt:

$$F(\lambda)/F_c = R(\lambda) * G(\lambda)$$

dus convolutie van intensiteitsprofiel met rotatieverbreidingsfunctie G .



Met de convolutie van verzwaaiing veranderd door:

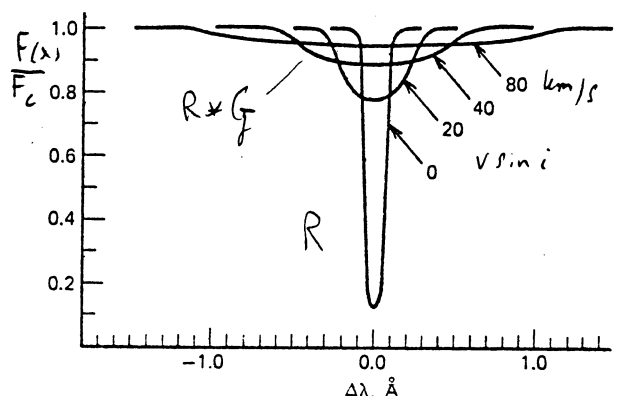
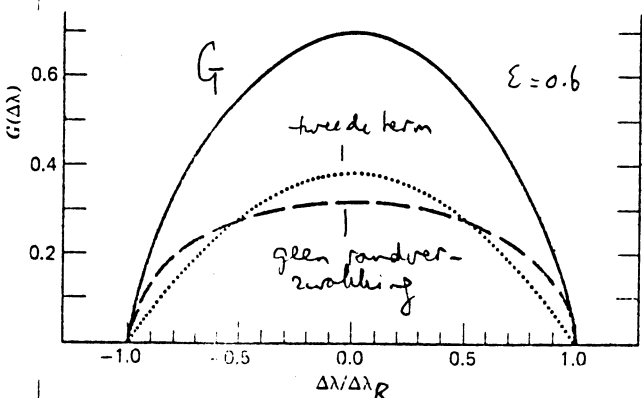
$$I_c(\mu) = I_0(1 - \epsilon + \epsilon \mu)$$

geldt (unsöld p. 508-511; Gray p. 373-377):

λ	ϵ
4000	0.83
6000	0.55
8000	0.41

$$G(\Delta\lambda) = \frac{2(1-\epsilon)[1 - (\Delta\lambda/\Delta\lambda_R)^2]^{1/2} + \frac{1}{2}\pi\epsilon[1 - (\Delta\lambda/\Delta\lambda_R)^2]}{\pi\Delta\lambda_R(1-\epsilon/3)}$$

als $\epsilon = 0$ (geen randverzwaaiing) ellips: $G(\Delta\lambda) = \frac{2}{\pi\Delta\lambda_R} [1 - (\Delta\lambda/\Delta\lambda_R)^2]^{1/2}$

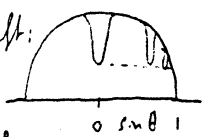


Hoe goed is de aanname $R \neq R(x,y)$?

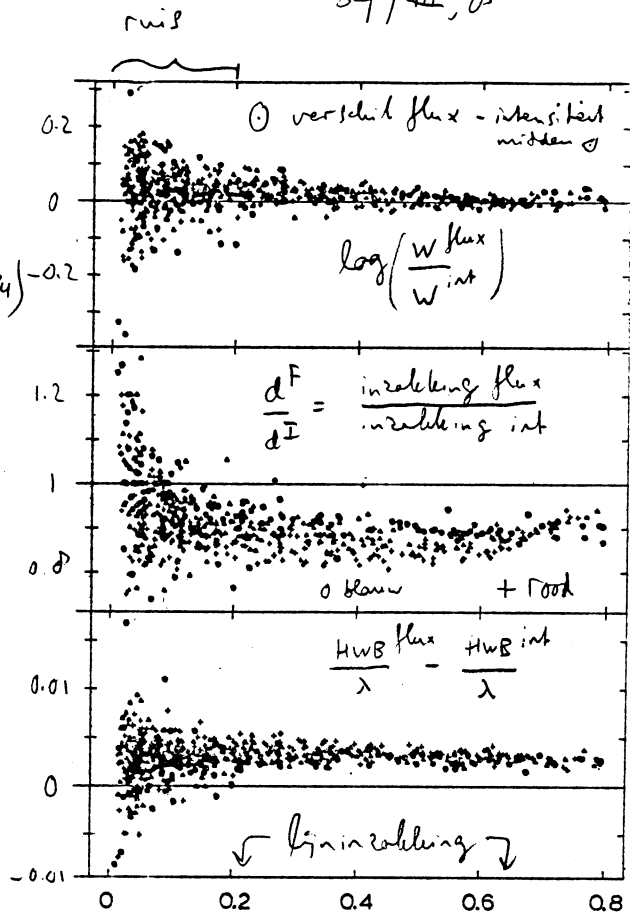
○: indicatie uit vergelijking aflezen voor zonsmidden (Mungfraupoch) en flux (Sacramento Peak) → (Rutten + y) Zalm, 1974
 \sim convolutie: $W^F \sim W^I$, $d^F < d^I$, $HWB^F > HWB^I$
 voorspelde d^F/d^I als convolutie geldt: 0.90
 waargenomen: 0.7 - 0.8, vooral rode lijnen sterker verzwaakt. Aanname dus fout.

$R(x,y,z)$ verandert wél over schijf:

- LTE (goede benadering) heeft:
- $\int_{\mu} \int_{\theta} \left\{ \begin{array}{l} \text{hoogte, dus } \theta \\ \text{hoek, dus } \mu \end{array} \right\}$ afhankelijk.



Snel draaiende sterren voelen R niet
 - alleen continue roodverzwakking.



Fourier - domein analyse

(boek Gray; Smith + Gray 1976 PASP 88 809)

- beter want:
- vormen beter te onderscheiden in F domein, zie figuur
 - S/N schaling duidelijker door $\int_{\mu} \int_{\theta}$ karakter → filteren verbeterig
 - gegeneraliseerde convolutie aanname:

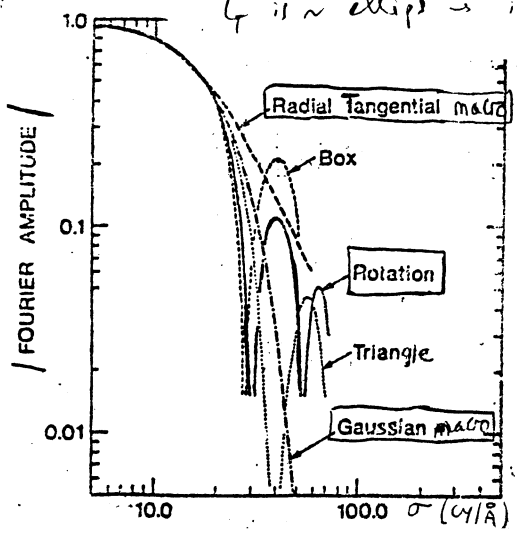
$$D \equiv I - \frac{F(\lambda x)}{F_c} \equiv R(\lambda x) * G(\lambda x) * M(\lambda x) * A(\lambda x)$$

rotatie ($v \sin i, \epsilon$)
beoord. apparaatprofiel

macro-turbulentie (\int_{μ}^{rot} , \int_{θ}^{tan})

beoord. intensiteitsprofiel, met isotrope, niet z-afhankelijke \int_{μ} , met model

dus $\tilde{D} = \tilde{R} \times \tilde{G} \times \tilde{M} \times \tilde{A}$
 \tilde{D} gemeten; \tilde{R} en \tilde{A} bekend; van \tilde{G} en \tilde{M} zijn de vormen bekend.
 \tilde{G} is \sim ellips → in FT nullen; \tilde{A} is gauss, geen nullen

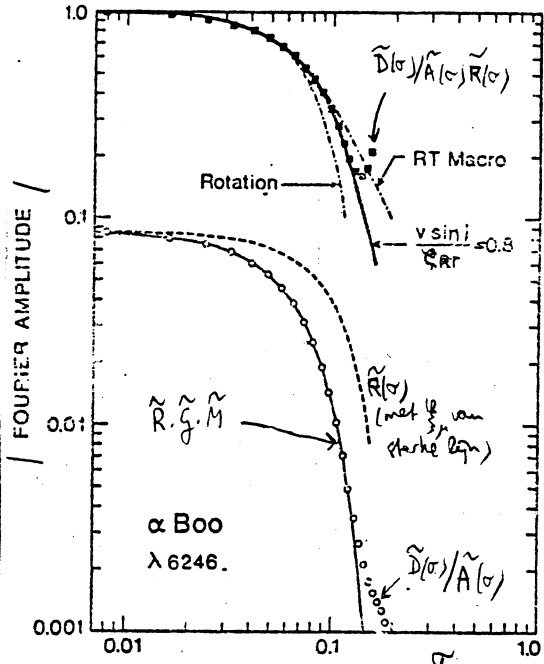
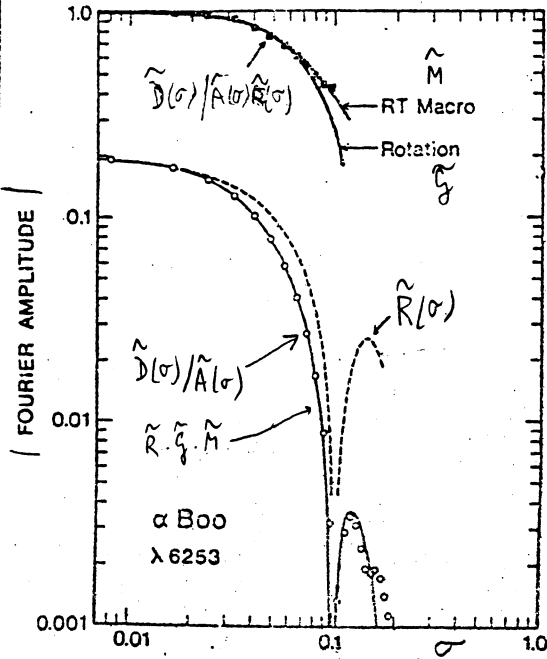


- alleen verbreding → even is |F.A.| voldoende info.
- windowing heeft niet: lijn inbreuking
- dubbellogaritmisch: alle schaalfactoren zijn verschuivingen → vormen vergelijkbaar door op elkaar schuiven, en convolutie = verschuiving.

- onderscheid sterke - zwakke lijnen
 F
 boxachtig → nullen gaussachtig → geen nullen

sterke lijn

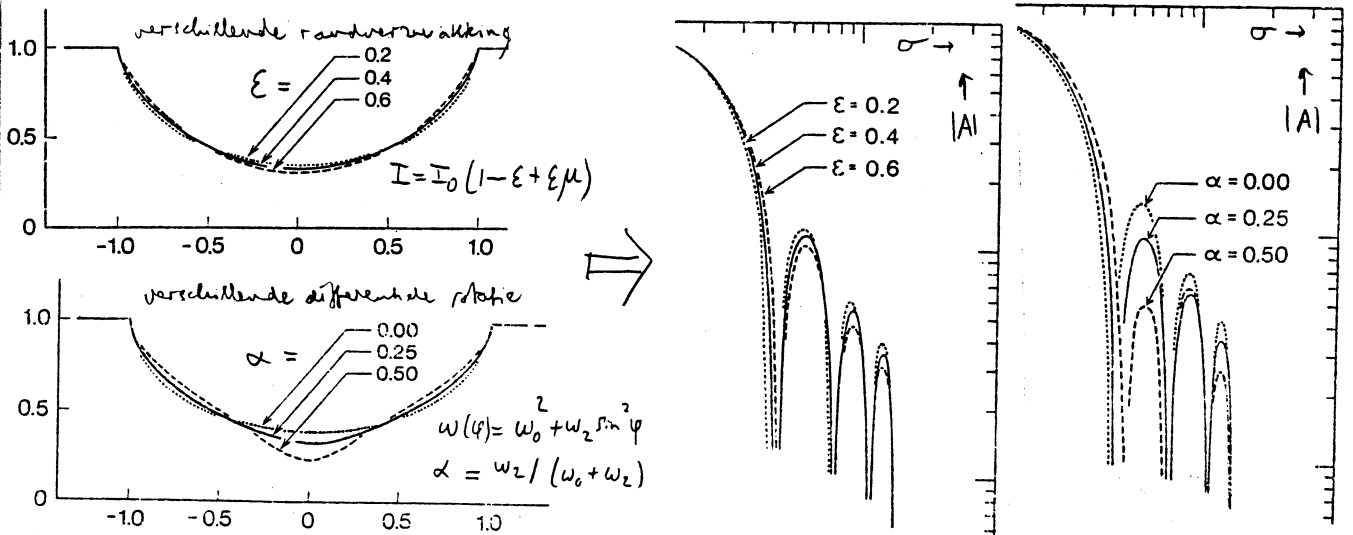
zwakke lijn



o o o : met $A(\lambda)$ geobserveerde waarnemingen \tilde{D}/\tilde{A} .

Par daaraan bestemd model $R(\lambda) \Rightarrow \tilde{R}(\sigma)$ aan aan; constraints: w_2 moet goed zijn; plaats 0 en 100 links, wegens Σ van sterke lijn \Rightarrow $g \approx \frac{1}{3} \mu$ levert: $\blacksquare \blacksquare \blacksquare$ (boven) = $\tilde{D} / (\tilde{A} \cdot \tilde{R})$. Par daaraan vorm \tilde{M} er/af \tilde{R} aan. Hier oopelling met mengsel rechts = dunne lijn door o o o voor \tilde{A} .

Differentiele rotatie (Gray, 1977, Ap. J. 21, 198)



b snelsterende ($v \sin i \approx 200 \text{ km/s}$) \Rightarrow $\alpha \approx 0$: niet differentieel?

Asymmetrie

Ebbels 1970, Ap. J. 224, 105: uitbreiding voor exponderende atmosferen:

$V_{\text{rot}}(\tilde{z}) \rightarrow$ asymmetrie \rightarrow imaginaire termen in $\tilde{D} = \tilde{R} \times \tilde{g} \times \tilde{E} \times \tilde{A}$

met \tilde{E} de expansie functie \rightarrow expansie/welheid

3.1.5 Resultaten lijnverbreiding zon

Klassiek: Holweger et al. 1970 A&A 70, 577:

veel Fe I profielen atomen $\rightarrow W_\lambda$; vindt die $\frac{1}{2} \mu$ die minste spreiding geeft in plot $W_\lambda - z$, met z de abundantie van Fe die die W_λ reproduceert (spreiding \rightarrow slechte of woorden).

Belijde paar profielvormen $\rightarrow \frac{1}{2} \mu$.

Resultaat:	verticaal	horizontaal	
$\frac{1}{2} \mu$	1.0 km/s	1.6 km/s	→ anisotropie. (benaming $\frac{1}{2} \mu(z)$ met z niet uitgerolten)
$\frac{1}{2} M$	1.63	2.14	

Meer: klassieke analyses versloppen

NLTE afwijkingen isotopie evenwicht in andere vorm $T_e(z)$

(Rutten + Kottik, 1982, A&A 115, 104); echte LTE lijn zoals Mg I 4571

(intercombinatielijn \rightarrow botsingsgedomineerd \rightarrow LTE exacte) vraagt

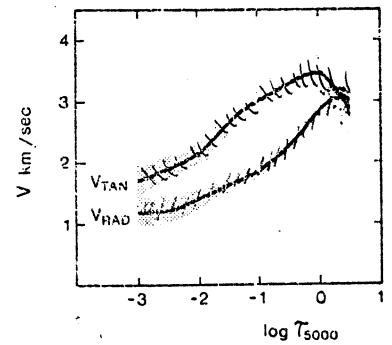
andere $\frac{1}{2} \mu(h)$ (Athole + Conran, 1973, SP 30, 31). Dus aanrechtbaar.

Zwakte lijnen: Vooral werk Gurtovenko c.s. Kiev:

Zwakte lijnen op H & K:

{ Ayal 1977 Ap. J. 214 905 $\rightarrow \frac{1}{2} \mu$ vert = 1.6 km/s
 { Gurtovenko, Shennova, Rutten 1981: als \rightarrow dispersie contributiefuncties.

Beste: { deconvolutie met berekende profielen
 { controle met responsefuncties } nog te doen



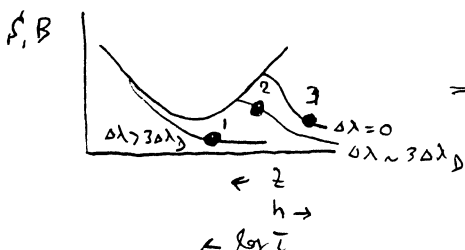
Sterke lijnen: als deel van gedetailleerde NLTE aanpassingen:

doorgang, benaming $\frac{1}{2} \mu(z)$ met z , zowel $\frac{1}{2} \mu$ horizontaal als $\frac{1}{2} \mu$ verticaal, en $\frac{1}{2} \mu$ hor $>$ $\frac{1}{2} \mu$ ver. Voorbeeld: likes (Herris 1972) voor Fe I.

Review: Confield + Beckers, Nice Collog. 1975, b.b. II Hb 215).

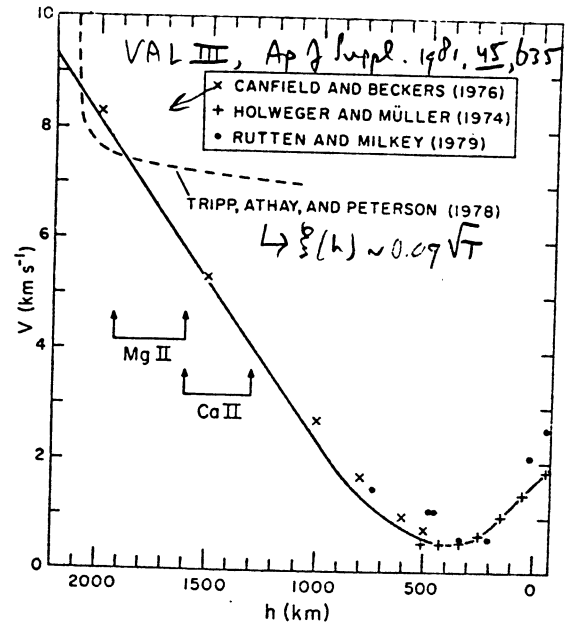
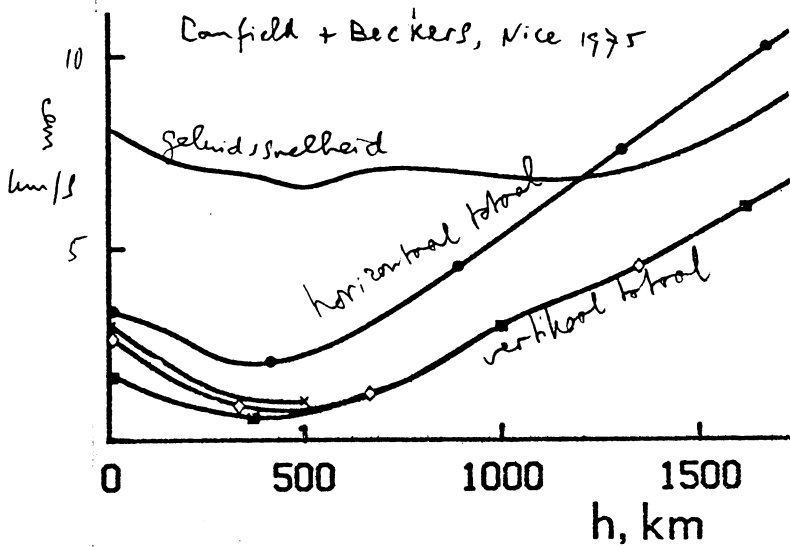
Simulatie: complete redistributie \rightarrow partiële redistributie: grote gevoeligheid voor $\beta^l(\Delta v)$ voor aangenomen $\Delta \lambda_D(z)$ (en voor vraag of turbulente bijdrage redistribueert) \rightarrow onzekerheid toegenomen.

E.g. Ca II H & K



v -afhankelijkheid β^l hangt sterk af van $\Delta \lambda_D$. Bij adoptie "old" model wel/geen fluxbias nog veel minder redistributie \rightarrow meer monochromatische verstrooiing \rightarrow sterkere v afhankelijkheid?

Standard modellen:



chromosfeer

kan met spectraal verdichtingen ($\int \rho dv$) - in lang niet gedaan.

UV: welke lijnen Si II, Si III \rightarrow ver. Tripp et al, 1978, Ap. J. 220, 314.

$\int \rho dv \sim c_s \sim 0.1 \sqrt{T}$. Steile gradienten T werken gevoelig door
 Problem - inhomogeneïteit overheersend. Deel 500-1500 km slecht bekend.

NB: $c_s = \sqrt{\frac{\gamma k T}{m} \frac{N + N_e}{N}}$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{ionen} \\ \text{electronen} \end{array} \right.$

N dichtheid zware deeltjes } $c_s = \sqrt{\frac{\gamma k T}{m_H}}$
 geen ionisatie $\rightarrow N > N_e$ } $= 0.12 \sqrt{T} \text{ km/s}$

[thermische snelheid $f_0 = \sqrt{2kT/m} = 0.13 \sqrt{T/A}$]

O als *

La C Pech flux
 Atlas (Beckers
 et al 1976)

met O als *
 teleskoop

(f = 5 mm cilinder)

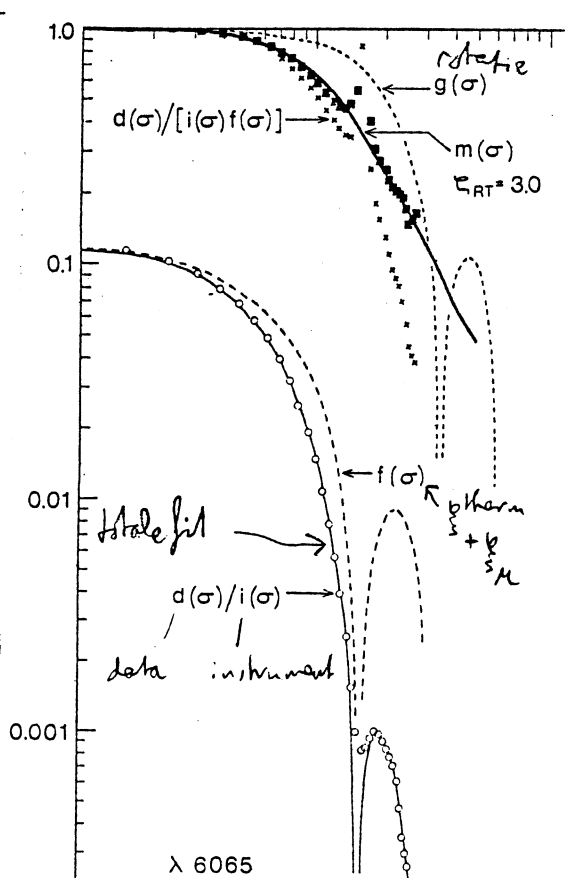
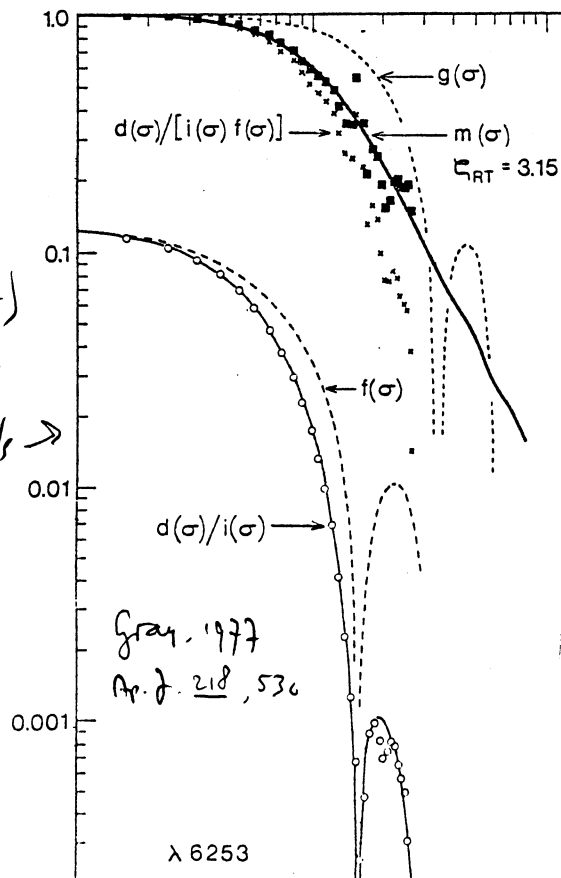
$\rightarrow \int \rho dv = 0.5 \text{ km/s}$

$\int \rho dv \sim 3.1 \text{ km/s}$

dat scheelt
 een klein beetje

met I_2 analyse.

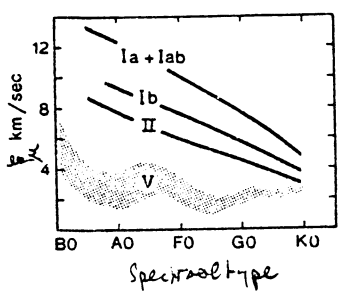
Reden?



3.1.6 Resultaten lijnverbreding sterren

microturbulentie :

(review Gray, 1978, Solar Physics 59 193)



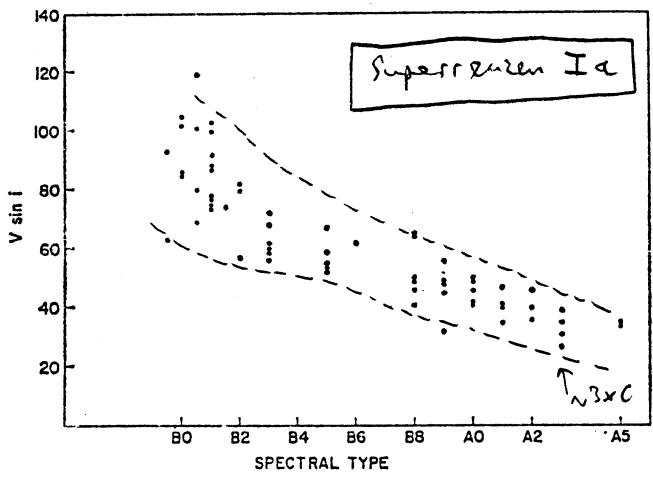
- veel spreiding: per klasse minstens ± 3 km/s. Onduidelijk of die spreiding inherent is voor gelijke sterren, of alleen veel fouten - dit zijn groeikromme waarden; nauwere waarden zijn vaak lager (MTE, betere γ , betere f_{osc} etc).
- β sterren: te weinig lijnen voor groeikromme \rightarrow profielanalyse. breedte: 5-15 km/s, soms superreuzen - 40 km/s.

Dus: - toename ξ_{μ} met helderheid

- chrome ξ_{μ} met T_{eff} , minimum - maximum voor A5 - B5 bij hoofdreekssterren.

macroturbulentie :

probleem scheiding rotatie - ξ_M .

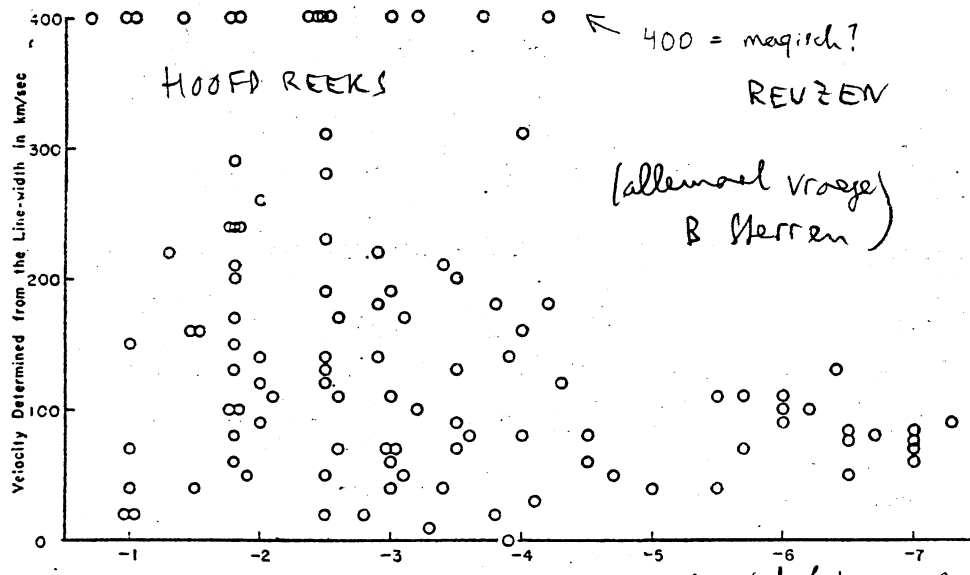


Bij grote lichtbrecht niet veel spreiding per spectraal klasse - niet alleen rotatie want verdeling als richtingen random: dan 0 - maximum gespreid.

Mogelijk ondergrens = ξ_M , spreiding erboven = (kleine) rotatie. Wel: $\sim 3 \times c_s$!

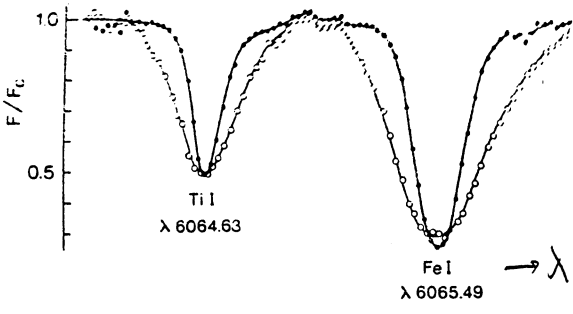
(Rosenbluth, 1970, Ap. J. 159, 107)

(Huang + Kruse, 1954, Ann. d. Astrophys., 17, 85)



$M_v \geq -4$ = hoofdreeks: enorme spreiding, tot op 20: allemaal rotatie, weinig ξ_M .

$M \leq -5$ = reuzen: minder spreiding en geen hele kleine waarden \rightarrow vername ξ_M ?

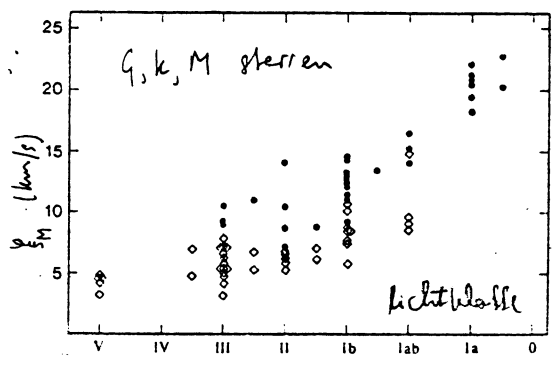


toename ξ_M met helderheid hier evident.

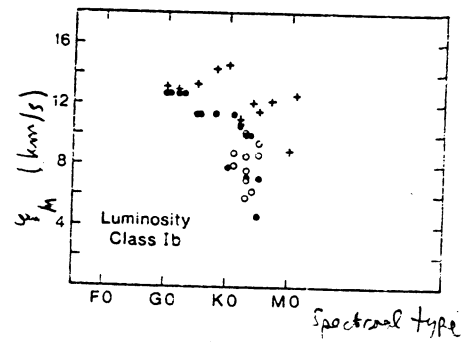
--- = α Ari = k2 III

---o--- = ϵ Peg = k2 Ib (superreuzen)

(Gray)




← inversaal vername met lichtbracht
 $v_{sun} \propto L$
 maar flinke spreiding →



Met de Fourier deconvolutie techniek van Gray (p.39) is dit patroon bevestigd, met roge aanwijzingen voor voorkeur voor "red-tang" anisotropie model, en ook $\frac{v_{sun}}{v_{rot}}$ tot 30 km/s voor O sterren, na afname van het rotatieprofiel.

Discussie

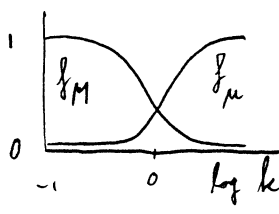
- Hoe slecht en onfysisch bepaald zijn micro- en macroturbulente zijn bij sterren zoals de trife indicatie van niet-thermische energie reservoir in of onder de fotosfeer - waar een klein beetje voldoende is voor grote niet-thermische effecten naar buiten. Wakenkende corona/massaverlies theoretici gebruiken voorafgenomen fotosferische "turbulentie" als justificatie voor aanname mech. flux.
 - de snelheden zijn vaak \gg geluidssnelheid! Bijv: ondergrens 2° ligging van je papina ligt globaal bij $\approx 3 \times c \approx \sqrt{\frac{5}{3} RT_{eff}}$ → "supersone turbulentie" -!
 - toename $\frac{v_{sun}}{v_{rot}}$ en $\frac{v_{sun}}{v_{rot}}$ met lichtbracht en T_{eff} : toenevend effect van stralingsdruk?
 - correlatie met convectie? Dat verwacht men algemeen: als "turbulentie" gevolg is van hamerende convectieballen. Maar; geen scheidingstype in $\frac{v_{sun}}{v_{rot}}$ voor convectie afhandelt (F0 hoofdreeks - G0 superreuzen; vroeger niet, later wel) en niet minder turbulentie in metalkarme sterren die kleinere v_{conv} hebben.
 - correlatie met chromosfeer indicatoren? De Wilson-Bappu breedte van de Ca II H en K emissiepijken  wordt vaak als maat voor chromosferische turbulentie genomen - maar correlatie van deze breedte met lichtbracht voor alle spectraaltypen is veel scherper dan de (ξ, M_V) verbanden van Kjørtner.
- Andere gangbare verklaring voor Wilson-Bappu breedte is weerspiegeling temperatuur stijging naar chromosfeer, en de correlatie komt dat $\tau(T_{min})$ niet van M_V afhangt. Nog niet gangbare verklaring van Loran + Seaverly: breedte bepaald door in chromosfeer uitwaaiende magnetische fluxbuizen
- In alle geval - geen duidelijke correlatie $\left\{ \frac{v_{sun}}{v_{rot}}, \frac{v_{sun}}{v_{rot}} \right\}$ als chromosferische indicatoren, strijdig met gangbare beeld van chromosfeer verhitting door in top convectieve zone opgewekte turbulente-achtige akoestische energie flux.

3.1.7 Andere beschrijvingen

Micro-macro "velocities" (betere naam dan "turbulentie") zijn ad-hoc definitie van wiskosten - wat op tussenliggende schalen? Fysischer aanpak!
 → "mesoturbulentie"

* filters de Jager 1972 SP 25, 71; Vermeu + de Jager 1979 Akr + Sp. Sc. 61 (29)

Ontwikkel wilkeurig ongespecificeerd snelheids veld in four. errees in lek: golfgetal $k = 2\pi/\lambda$, l de golfleengte in de gezicht/richting, optische schaalhoogte h ($nH = RT/\mu g =$ dichtheids schaalhoogte).
 Middel per lek over halvebol faren (n middeling over Δt en $\Delta x \cdot \Delta y$) →



meting van micro- of macroturbulentie is dan bepaling van filterfunctie voor gegeven lek; ieder is met 'n stoort gevoelig voor de ander, in het midden een gat.

Mits je de energieverdeling $P(k)$ die kent of aanneemt (b.v.

kolmogoroff: $P(k) = k^{-5/3}$) kun je restaureren.

Als je aanneemt dat $P(k)$ die gepikt is $\sim \delta(k - k_0)$ kun je uit voorfenomen

verhouding ξ_M / ξ_μ de schaalgrootte l halen. Met die aanname:

$l_0 \sim$ bootlen (= & grond); $l_{supragant} \sim 0.5 R_* (I_a^+)$, $0.3 R_* (I_a)$, $0.05 R_* (I_b)$;

micro + macro voorfenomen voor δ Gabeis helemaal gevoelig voor polarisatie.

* random processen theoretici proberen micro/macro te vervangen door meer fysische beschrijving; alle schaalgroottes toegestaan in turbulent-achtige atmosfeer; random beweegsveld.


— Reidelberg groep (review Traving in IAU Collog 51, 1979, bib. XL 55).

Markov proces: overgang $v, I \rightarrow v', I'$ voor $z \rightarrow z + \Delta z$ alleen afhankelijk van bestanden zelf, niet $\partial v / \partial z$ etc. Dan voor gegeven snelheidsverdeling (Gaussisch) $\langle v^2 \rangle = \langle \sigma^2 \rangle$ en correlatie lengte - spectrum l (exponentieel) is berekening bij-precieel mogelijk.

Omzetting $(\xi_\mu, \xi_M) \leftrightarrow (\sigma, l)$ 1-1 dechtig mogelijk:

$$\sigma^2 \approx \xi_\mu^2 + \xi_M^2 \quad l/H \approx \xi_M^2 / \xi_\mu^2$$

— Nice groep (review Frisch + Frisch, Nice Collog II Hb 215):

Kubo-Andersen proces $v_{||}$  { kies op dieptes, random getrokken uit Poisson verdeling, een waarde van $v_{||}$ uit een Gauss verdeling

Onderlinge verdeling: Fair et al. 1976 A&A 46. 44. verschil.

* golven

Ipv aanname stochastische processen als Markov, Kubo-Anderson
 lijkt beschrijving verbreding door golven zweller - die zijn er in elk geval
 Dus beschrijving van de faser, met Fourier ontwikkeling, uitbreiden:

kinematische modellen (Durant, 1979, A&A 73, 173; 1980, A&A 89, 80)

neem radiaal melheidsveld met melheidsamplitude:

$$u(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} u_k(z) \cos(kz - \omega_k t + \varphi_k) dk$$

dan $l_\lambda(z) = l_{\lambda_0}(z) \cdot H(a, v)$, $v = |\Delta\lambda - \lambda_0 u(z)/c| / \Delta\lambda$ thermisch

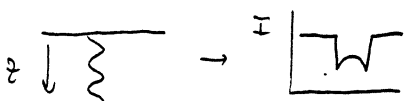
en die moet in opl. transport vergelijking:

$$I(0) = \int_0^{\infty} k(z) S(z) e^{-\int_0^z k(z') dz'} dz$$

de faser veranderde
 welke lijnen $\rightarrow I \approx l(\Delta\lambda)$

Resultaten, van nauwkeurigheid, verschillend voor soorten golven:

1 golf



dubbelfeitel want extreme dragen
 meeste bij.

Me: middeling over oppervlakte en tijd \rightarrow over alle representaties:

lopende golven



middeling voor punt (x, y) over Δt geeft al
 alle fasen $\varphi(k)$. Extra middeling over $\Delta x, \Delta y$

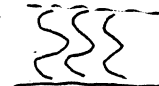
doet er niet meer toe. Als dit bijdrage tot δ_μ geeft is deze onafhankelijk
 van de resolutie (in tegenstelling tot (e.g. Gray): $\mu = \text{klein}$, $M = \text{groot}$ in x, y)

staande golven

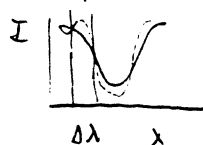


reflectie nu φ constant over Δt , maar
 nog wel verschillend over x, y .

coherente staande
 golven



een versmearing over fasen \rightarrow gemiddeld profiel betekent golf uit
 (met responsiefunctie versmearing). Pas op met derde resolutie $\Delta\lambda$:



golf te meten



niet te meten

Conclusie: coherente staande golven als zodanig te herkennen,
 lopende niet te onderscheiden van random staande.

dynamische modellen (Cram et al. Ap. J. 234, 768; Cram Ap. J. 247, 239)

Als er golven zijn gaan door fluctuaties in P en T mee gepaard.

Dere neemenen → "dynamische" ipv. "kinematische" modellen.

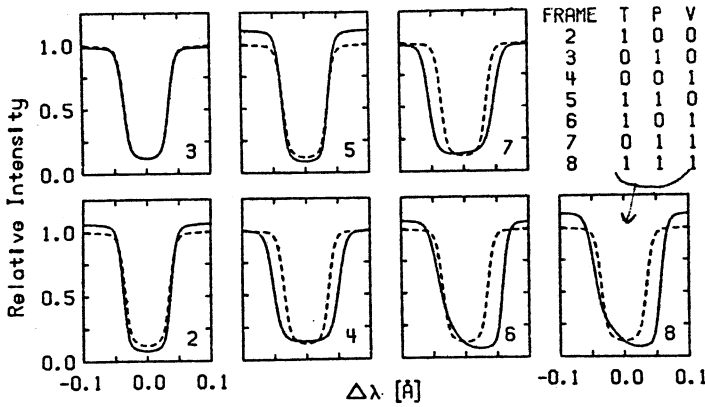
Bijv. golf $P = \bar{P}(\lambda) \left[1 + \frac{\Delta P}{\bar{P}} \cos(kz - \omega t) \right]$ isotherm: $\frac{n+1}{n} = 1$
 $T = \bar{T}(\lambda) \left[1 + \frac{1}{1+n} \frac{\Delta P}{\bar{P}} \cos(kz - \omega t) \right]$ adiabatisch: $\frac{n+1}{n} = \gamma$ (Cram)
 $v = C_s(\lambda) \frac{n}{1+n} \frac{\Delta P}{\bar{P}} \cos(kz - \omega t)$

en transportvgl. $\frac{\partial I}{\partial z} = -k I + j$; $k = \bar{k} + \delta k$ fluctuaties
 $j = \bar{j} + \delta j$ uitbreiden

Riferent: $I(\lambda)$ uitbreiden voor alle realisaties, dan middelen

Cram: aanvure micro-analogie: middel over $\delta k, \delta j$, dan transport

Voorbeelden:



golven als \uparrow zijn, per combinatie, voor welke Fe I lijn.

---: eerder golf

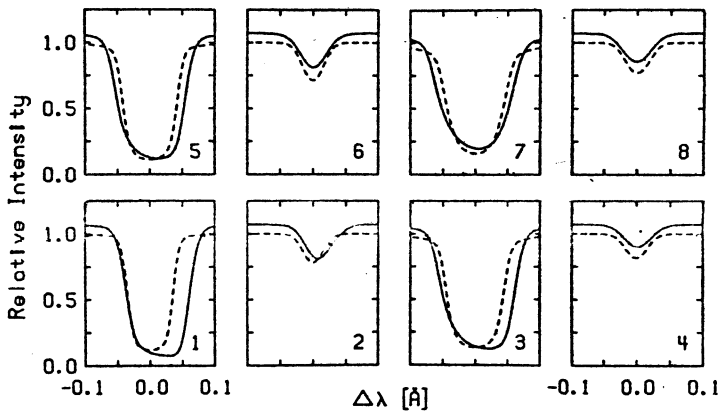
4 = "microturbulente"

3 → ΔP alleen niet veel effect

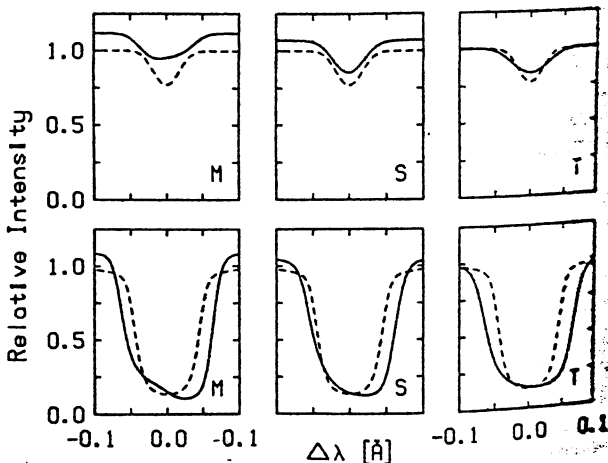
2 = ΔT alleen wel veel effect

Continuum: (zake H^- is $f(T)$)
 Ne, N_4, O_4

lijn: Fe I niet-dominante
 ionisatie top → via (zake
 is δ of gevoelig voor T



- 1 Fe I 0 eV
 - 2 " "
 - 3 " 4.5
 - 4 " "
 - 5 Fe II 0 eV
 - 6 " "
 - 7 " 4.5 eV
 - 8 " "
- hier T, P, v alle drie
 verschillende lijnen
 negeeren heel
 verschillend
 → goede diagnostiek



lijn δ } drie verschillende modellen model:
 M = monofrequente golf δ boven
 S = middelen over amplitude, fase, richting
 T = echt "turbulente" model

lijn Δ } Conclusie: lijn verbreding kan
 gevoelig zijn van zeer uiteenlopende
 oorzaken → meer info nodig

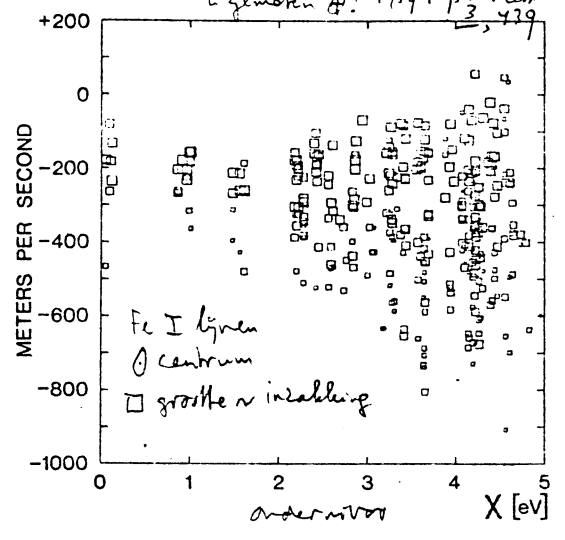
3.2 Lijnverschuiving

Direkte meting $\Delta\lambda$ lastig, want
 - veel blend
 - lab. λ 's vaak slecht

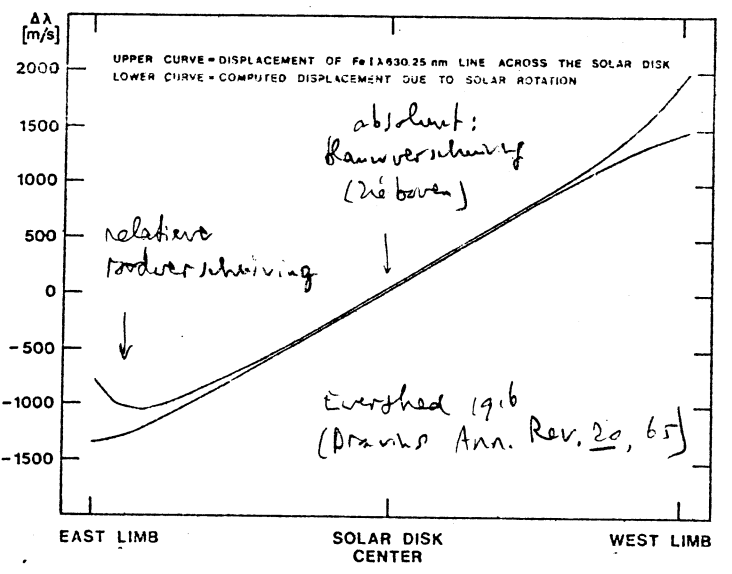
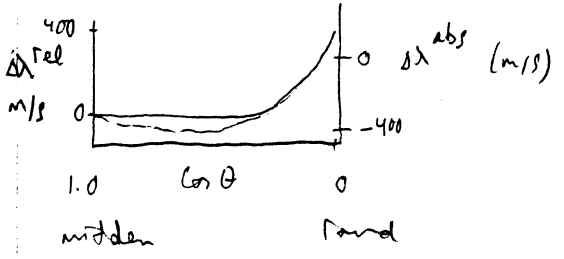
na correctie $\Delta\lambda$
 $V_R = c \cdot (\lambda_{Sun} - \lambda_{Lab}) / \lambda_{Lab} = 2.12 \times 10^{-6} c$, Pound + Rebka
 gravitatie (rood)verschuiving
 (g/g_0)
 gemeten op! 1959 Phys Rev Lett 3, 439

Hier (Dravins, 1982, Ann. Rev. 20, 63) goede λ_{lab} 's met nieuwe energienivo's

\rightarrow Mittler: $\approx 400 \text{ m s}^{-1}$ blauwverschuiving
 toename bij tijdwakke
 Jewell (1996): (excitatie-energie)
 \rightarrow diepere lagen meer blauwversch.
 Recent: Fe II $\approx 800 \text{ m s}^{-1}$



① Mittler - Rand differentiaal, dus makkelijker; vanaf Jewell (1996) vaak gemeten, als Einsteins SR-test (niet AR - Mercurius, afwijking, time delay)



Sterren

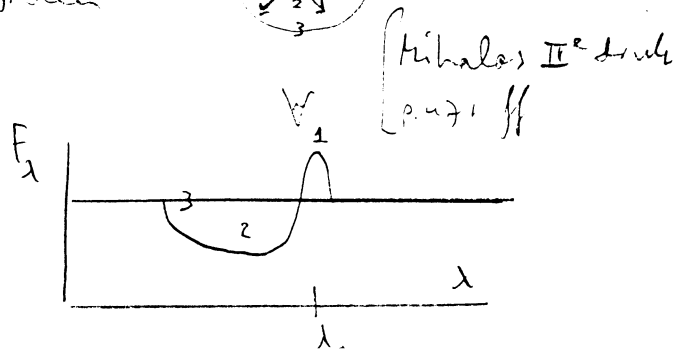
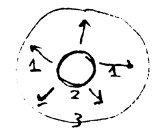
Veel oude metingen, zie Dravins voor referenties. Maar precisie $\approx 1 \text{ km/s}$, en V_{rad} zwaartepunt niet bekend.

Modif voor differentieel meting \mathcal{P} : $\approx 0.1 \text{ km/s}$. Kant ervan (ESO CES, etalon's, FTIS (Fourier Transform Spectrometer \approx Michelson interferometrie))

Absoluut: met Hipparcos goede V_{rad} 's te bepalen voor clusters. (inverse "moving cluster" problem)

Extrem: hete sterren

Stervinden \rightarrow P Cygni profielen
 atmosfeer doorzichtig
 emissie vooral voor ℓ ($\Delta\lambda = 0$):
 voor lokale \vec{v}
 \rightarrow lokale V_{rad} bepaalde laag
 (wat voor vorm?)

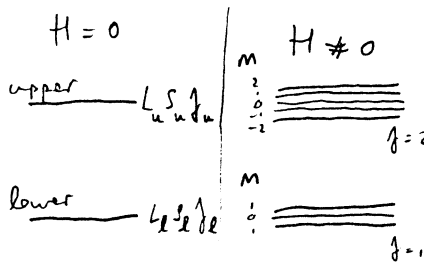


3.3 Lijn splitsing

3.3.1. Zeeman splitsing

zie: White, Introduction to Atomic Spectra, 1934, XV Fig 19, p. 149 ff

van Klüber, in Lanthelid, Solar Physics, 1967, IV A 409, p. 255 ff

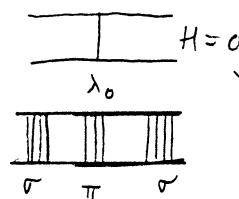
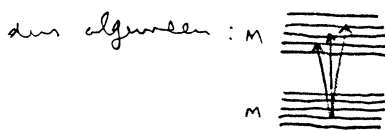


leen veld: ontvoording - $2j+1$ niveaus vallen samen

Wel veld: $2j+1$ m-niveaus, op afstand $\Delta E = c \cdot g \cdot H$

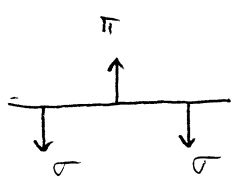
g : Lande factor. Tabel: Beckers AFCLRpaper 37, 1969

Selectieregel (nooit $\Delta j = 0, \pm 1$; $\Delta S = 0$; $\Delta L = \pm 1$): $\Delta m = 0, \pm 1$



π : lijn $\Delta m = 0$ voor elke andere m_i
 σ : lijn $\Delta m = \pm 1$ voor elke andere m_i
 ($\pi \equiv p =$ parallel) dus allerlei
 ($\sigma \equiv s =$ senkrecht) mogelijkheden:

"Normaal" Zeemantr. plot: $\left\{ \begin{array}{l} g_l = 0 \rightarrow \text{voor } 3 \\ g_l = g_u \end{array} \right.$



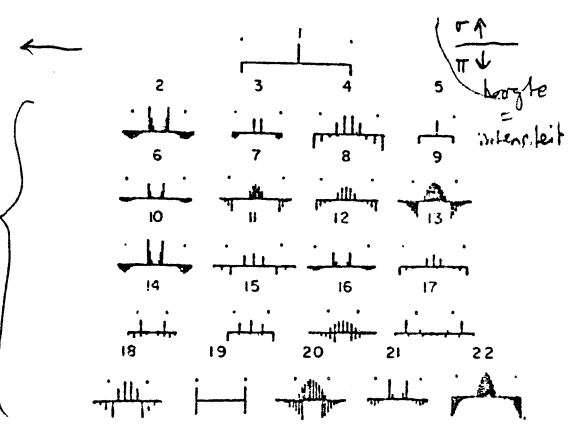
$\Delta E = c \cdot g \cdot H$

$\Delta \lambda = c \cdot g \cdot H \cdot \lambda^2$

\uparrow in IR meten!

(HWB_{lijn} $\sim \Delta \lambda, \sim \lambda$)

"Anomaal" Zeemanpatroon

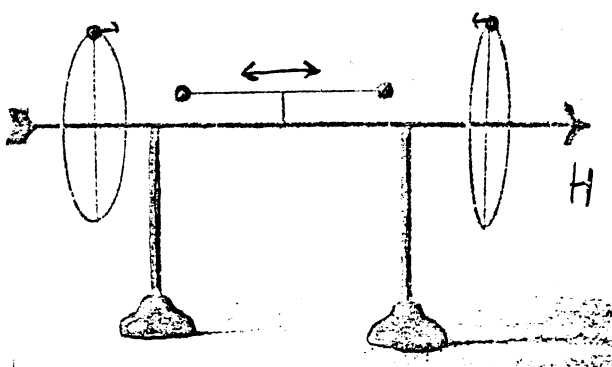


Polarisatie

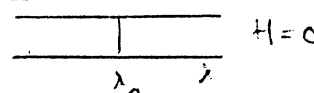
Simple model (van Zeeman, in meeting en eikenhout, voor Koning Royal Society):

Mogelijke beweging: parallel, ofwel $\perp H$

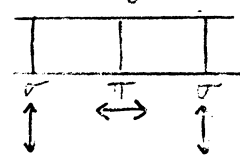
$\Delta v \pm$ als $\Delta J \perp$



levert aanschuwendijk:



Bijk. boezicht op veld: transversaal Zeeman-eff.



Bijk. langz. veld:

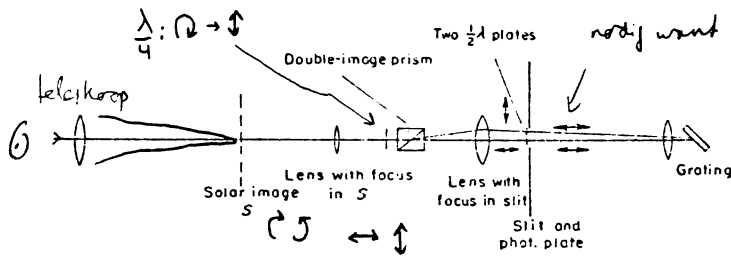
longitudinaal Zeeman-effekt

en scheef: ewalke $\pi \leftrightarrow$
 elliptische $\sigma \curvearrowright$

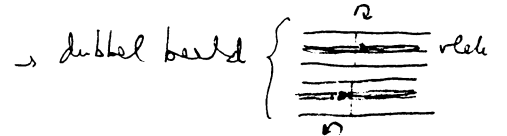
Zeeman effect in moleculen: theorie uitgewerkt door Schadee 1978 JASRT 19, 517

3.3.2 Meting lijnsplitsing zon

Allelei voorie apparatuur, hier naar summer:



rooster spectrograaf is zelf polarisator



bijv. Brants + duwaan, Jac. Peck

Zeeman triplet doorgaans niet opgelost: met kleine verschillen in lijnsymmetrie

voor π en σ gesplitste spectra: $\sigma - \pi =$ en π .

(Stokesmeter = vektor magnetograaf)

Probleem rustige zon: onopgelost veld \uparrow en \downarrow cancel elkaar.

Truc Stenflo 1972: paar lijnen lage, hoge landé factor $g \rightarrow$ flux buizen $\sim 1.5 \text{ kgauss}$

Ook te zien in infrarood, uit wel-gesplitste Zeeman triplet, dan $\propto \lambda^2$.

3.3.3 Meting lijnsplitsing sterren

Normaal Zeeman triplet
 onverradigde lijn
 uniform magnetveld H
 lijnprofiel $I^0(\Delta\lambda)$ afgeven van splitsing
 meestal gelijke (in wel/niet magnetische gebieden)

$$I_{\lambda}^H \equiv \begin{matrix} \sigma & \uparrow & \pi & \sigma \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \end{matrix} * I^0(\Delta\lambda)$$

$$I_{\pi} = 0.5 \sin^2 \theta$$

$$I_{\sigma} = 0.25 (1 + \cos^2 \theta)$$

$$\Delta\lambda = 1.4 \cdot 10^{-7} g \lambda H \text{ (in km/s)}$$

Dus convolutie. { Robinson 1980 ApJ 239, 961; Robinson et al. 1980 ApJ. 236, L115
 Marcy, 1982 PASP 94, 512 en IAU Symp. 102 (Zürich)

θ onbekend; kies $\bar{\theta}$; vgl. soortgelijke lijnen met grote/kleine g ; deconvolueer eerste met laatste \rightarrow patroon $\Leftrightarrow \frac{1}{1-A} + A \cos 2\pi \Delta\lambda \sigma$

Dus: vindt cos \approx FT $\rightarrow \Delta\lambda \rightarrow H$.

Gray (preprint; ApJ. 1983-1984?): bezelen $I^0(\Delta\lambda) \rightarrow$ gebruik veel lijnen

$\rightarrow D(\lambda) \equiv I^0(\lambda) * I(\lambda) * M(\lambda) * Z(\lambda)$ voor lijnen met grote g

gemeten	model	gemeten	bepalen voor	L_p vindt $\sqrt{A \cdot H}$
		instrument	macrotrub.	
		profiel	* rotatie	
			Zeeman triplet	(ie $g \approx 2-3$)
			* verdeling in H	
			lijnen met $g \approx 0$	
				$A = 0.5 \times (1 + \cos^2 \langle \theta \rangle)$

Toepassing: dwerfen vroeger dan $G6V: H \approx 0$

dwerfen later dan $G6V: H \approx 1.9 \text{ kgauss}$, allemaal.

oppervlaktebedekkingsfractie van veld.

IV WAARNEMINGEN OPGELOSTE BEWEGINGEN

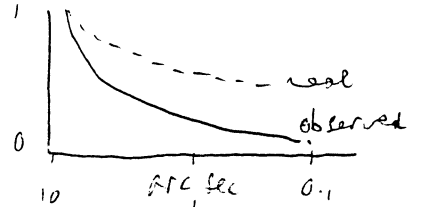
4.1 Systematische snelheidsvelden zon

4.1.1 Cellulaire structuren

* granulatie reviews { Wittmann, Kiepenhauer-Collmann 1979, Freiburg
Baker + Campbell, Nice coll. 1975, II Ab 215 }

Ontdekt Nasmyth 1862; noie uitlicht opnamen Janssen 1885 (verz.)
Grootte $\sim 1'' \approx$ vermeerdering laatste seing \rightarrow goede test voor telescopie, en
veel gekraakel over restoratie: modulatie transfer

Bijv. geen Mercurius of moan overgang voor
{ bepaal straallichtprofiel, etc.

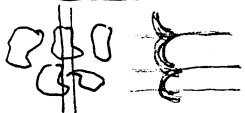


of: buiten straalprofiel \rightarrow ballast tot duiver:

Stratoscope (Schwarzschild), Stratosph. tot Obj. (Russen), Spectrostratoscope (Dütl.)

Morfologie

heldere cellen, donkere lanen, niet omkeerbaar



spleet spectrum

opvulde door cellen bezet: 47%

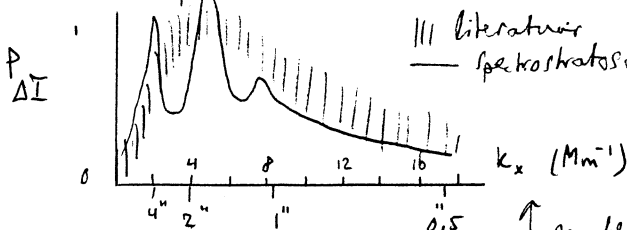
$\phi: 1'' = 1150 \text{ km}$, gaussische verdeling, rms $\Delta\phi = 0.4$

$\sim 4 \times 10^6$ granulen op hele zon.

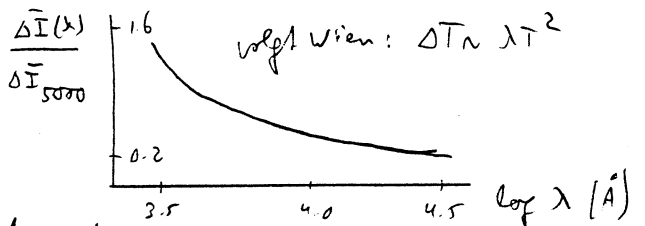
Intensiteitsverdeling contrast bij $5000 \text{ \AA} = 23\%$, rms $\Delta I = 10.5\%$

(Met forse, nog onrechtbare, correcties voor straallicht en seing).

Power spectrum $\Delta I(x)$:



λ afhankelijkheid



↑ speckle interferometrie;
nog vermogen bij 0.3 (Ap J. 196 221)

Snelheden

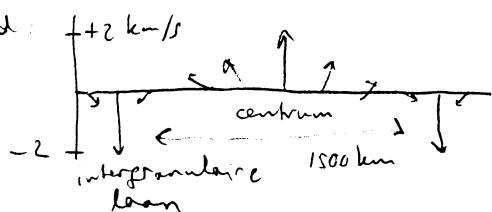
eigenbewegingen $< 0.1 \text{ km/s}$, \rightarrow ronden supergranulatie cel

radiale snelheden gemengd met veel sterkere signaal \sim oscillatie

\rightarrow identif. in Fourier domein. Tijdsreeksen alleen (i. punt) onvolledige

\rightarrow mehf tijdsreeksen van rij posities en identif. in ω

Beeld:

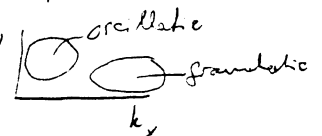


\rightarrow convectie cel,

helder centrum rijt

donkere randen dalen

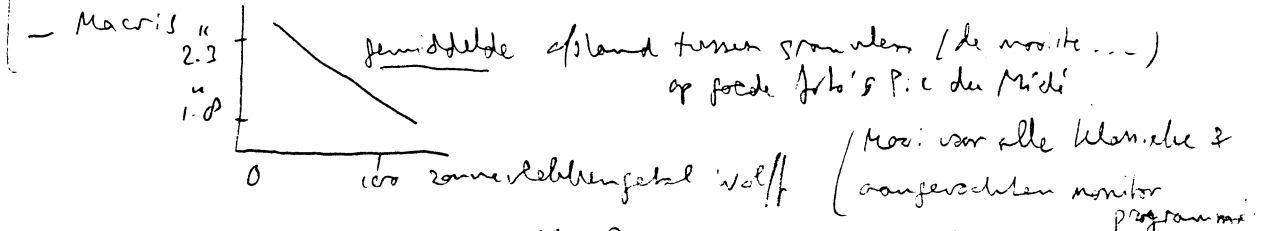
faseverschil snelheid - intensiteit $\sim 40^\circ$



- evolutie - granulen algemeen gevormd uit splitsproducten vorige;
 blijven 5 à 10 minuten herkenbaar; verdwijnen: door splitsing in
 enkele delen, of als ring (vortex?) die opbreedt $\text{O} \rightarrow \text{O} \rightarrow \text{O}^{\circ}$

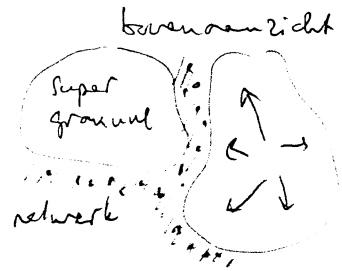
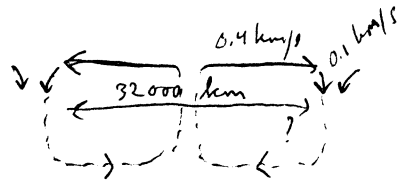
- verdere eigenschappen variatie met activiteitscyclus?

Aanwijzingen: - verandering profiel $\text{Ca II } \lambda 8500$ (Livingston + Holweger, 1972
 Ap J 252, 375)
 (later: toch constant, maar Fe I lijnen veranderen met activiteit)



* Supergranulatie chromosferisch snelheidspatroon ontdekt door
 Hart (1954) in vergetelheid; doorighton, Simon & Noyes in beroemde
 dubbelontdekking met 300" oscillatie in 1962 (methode: vier escalators →).
 (1962 Ap. J. 135 474) doorsnede:

morfologie
 15 Mm
 ~ diepte $\text{He}^+ \text{He}^{++}$
 ionische



Blykt: randen van bewegings cellen zijn chromosferisch netwerk,
 al bekend sinds Reselanders (spectroheloproef) in $\text{Ca II } H, K, H_{\alpha}$ (1879)
 Chromosfeer: boven netwerk ritte de spikulen in bosjes

(25 km/s ↑; 10^{-6} s fotosfeer)

In $\text{Ca II } H, K$ zie je heldere punten ("floculi", "nottes") die de toppen
 van fluxbuizen markeren, $\phi \sim 0.2$, $H \sim 1.5$ kGauss; in netwerk.

Fotosfeer: netwerk niet te zien, alleen snelheidspatroon.

Erosie: netwerk levensduur $\sim 20^h$? Snelheidspatroon > 1 dag?

Bij zilvere velden en rand vlekken geen netwerk ("maat")

* giant cells (verwacht: ~ 300 000 km = diepte convectieve zone)

Niet definitief aangetoond → p.m.

* Meridionale stromingen ditto p.m.

4.1.2 Oscillaties

Zich snel ontwikkelend onderzoeksterrein, vooral helioseismologie

Literatuur: vooral conferenties (Krim IAU 66: Sol. Phys. 22)

Overzicht, ingedeeld naar periode

PERIODE	METHODE	OPP. AMP	ONTDEKKING	STATUS	AARD	
$10^s - 100^s$	$\Delta \lambda_D(x, t)$	1 Mm	?	Deubner 1975	?	geluidsgolven
5^m	$\Delta \lambda_D(t)$	R_\odot	5-100 m 0.1-0.4 m/s	Birmingham 1979 Follet Zuidpool 1980	+	p modes: $n = 15-35, l = 0-4$
5^m	$\Delta \lambda_D(x, t)$	30 Mm	30 km (200 m/s)	Heighton 1960 Deubner 1975	+	p modes: $n = 0-12, l = 100-200$
$10^m - 60^m$	$\Delta \phi$	SCLERA	0.007, 4 m/s	Hill + Stebbins 1976	?	g modes?
$2^h 40^m 0.3^s$	$\Delta \lambda_D$	$R_\odot/2$	10 km, 1 m/s	Severny 1976	+	g mode (?)
12^d	Δ afplatting	2 km		Dicke 1976	-	-
$25^d, 31^d$	10 cm flux	Ottawa		Hughes 1981	?	?
11^j	$\Delta \lambda_D(x, t)$	3 m/s, tang.		Howard + Banke 1980	+	torsie trilling
$> 10^j$	ΔR_\odot	transits, eclipsen	0.1	[zie IAU Highlight 6 89]	?	?

In dit college de periodes $< 1^d$; summier overzicht voor nemingen

4.1.2.1. Kort-periodieke oscillaties

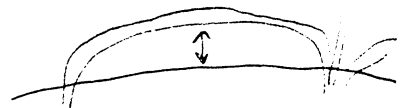
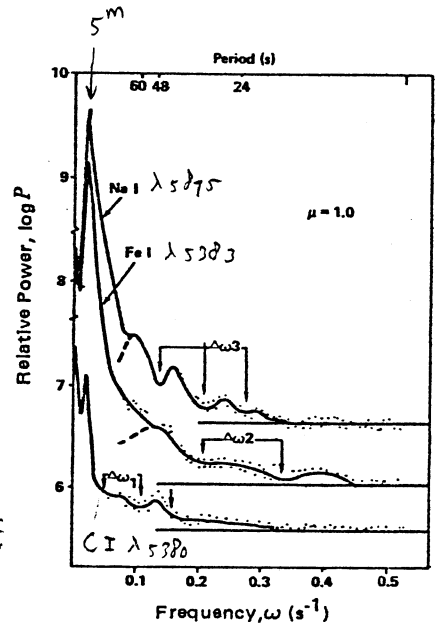
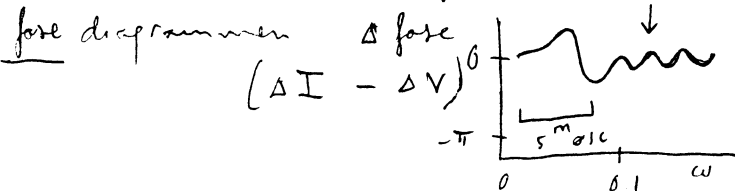
periode $< 100^s$. Lettig voor te nemen: $\sim 1''$,
 $\uparrow \rightarrow$ golfhoogte $\lesssim 700$ km voor geluidsgolven.

Dus $\lambda_{\text{golf}} \sim$ hele periode in bijdrage functie,
 en $\Delta \lambda$ middelt weg; afzwelling $\sim 10^3$ of meer.
 \rightarrow meet veel fouten en middel in power \rightarrow
 hoge picke in 5^m oscillaties. Singers gevuld van
 kort-periodieke golven?

Deubner 1976: Singers = golven passen wel/niet in CF.

Durrant 1979: nee, Singers = golven passen wel/niet
 in spleten x-meter.

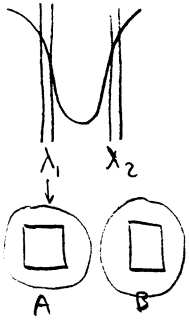
Deubner + Endler nu (nog niet uit): minima zijn ook te zien in



dus patroon van sturende golven. Reflectie van fluxbuizen "canopy"?

4.1.2.2 Vijf-minuten oscillatie - grote l; geschiedenis.

- Ontdekking: Plaskett, 1954, MNRAS 114 251: bewegingen van granulen over deelt voor ander snelheidsveld, met golfpatroon: horizontale periode $\sim 5''$, amplitude $\sim 0.5 \text{ km/s}$, heliumvul vergeten, tot heighton: aanhouding in Varenna 1960, p. 321.
 Artikel: Heighton, Simon en Noyes, 1962, Ap. J. 135 479. Beide aardige verhalen.
 Methode - als bij supergranulatie: ontdekkingen tegelijk:



Spectroheliograf, met beam splitter \rightarrow 2 beelden op 1 plaat. Vlak voor
 uitredespleet twee glasplaten:

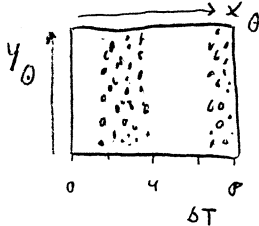
20 heliogrammen centrale deel \odot , \nearrow beeld A = $\lambda_0 - \delta\lambda = \lambda_1$,
 \searrow beeld B = $\lambda_0 + \delta\lambda = \lambda_2$

Dan fotografisch afrekenen: B \rightarrow B' = contact dia, negatief \rightarrow pos. beel.,
 met zorgvuldig $\gamma = 1$ (controle: B + B' op elkaar \rightarrow homogeen grijs).

Dan A + B' op elkaar \rightarrow voor λ_1 en λ_2 identieke helderheidsverschillen
 vallen weg \rightarrow alleen differentieel verschillen tussen λ_1 en λ_2 , dus lijnverschuiving: \vec{v}_{rad}

Vervolgens: $C_0 = A+B'$ voor $t=0$, $C_T = A+B'$ voor $t=T$: $C_0 + C_T =$ "Doppler difference" -
 verandering snelheidspatroon met tijd. Bij heighton c.s. van traverse heliogram $4''$,

met onmiddellijke omkeer scanrichting krijg je dopplerverschilgram $(A+B') + (A+B')'$



waarop verschillende x. posities (scanrichting x, spleet \parallel y) ook verschillen
 in ΔT , oplopen van 0 tot $8''$. Je verwacht een random patroon

grijs bij $\Delta T = 0$, toenemend schubhuur voor grotere ΔT . Verassing: wéér

grijs bij $\Delta T \sim 5''$. Dus oscillatie! Bovendien: Dopplersom gram =

$(A+B') + (A+B')'$ is donker bij $\Delta T = 2.5'' \rightarrow$ hele goede anticorrelatie: alles in
 tegenfase \rightarrow oscillatie = voorwaansde deel totale verticale bewegingsveld.

- 1962 - 1975: hevige discussie. > 50 observaties, > 20 theoretische artikels.

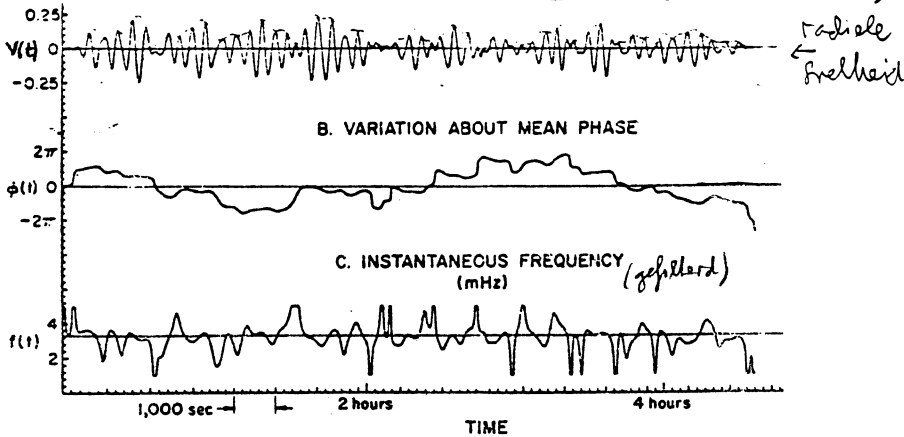
Flinke ruzies over waargenomen eigenschappen: één of meer periodes? ruimtelijke
 eigenschappen: golflijnte (verticaal, horizontaal), coherentielengtes, fase relaties,
 wel/niet voortplanting? - verticaal en/of horizontaal, etc; en over mogelijke
 interpretaties: lopende geluidsgolven, ingevangen geluidsgolven, lopende
 voortkrachtsolven, ingevangen voortkrachtsolven, etc - allerlei debatten.

Al snel bleek dat een belangrijke meetgegevens is de locatie van de oscillatie
 in het 'dispersie' k-w diagram: de verspreidingsfrequentie als
 functie van horizontaal golfgetal k_h en de trillingfrequentie ω (270).

(Redenen komen nog bij theorie). [Achteraf gezien is het evident dat
 alle debatten in dit tijdperk mank gingen van onvoldoende resolutie
 in k_h of in ω . Immers: detail in ω \Rightarrow lange tijdreels nodig;
 detail in $k_h \Leftrightarrow$ sampling over lange afstand nodig. Heighton c.s. hadden
 goede resolutie in k_h maar niet in ω ; doorn ~ 12 jaar voldoende $\Delta\omega$ voor
 onvoldoende Δk_h !]

Eigenschappen van de 5-minuten oscillatie

lange tijdreeks voor één element $\{ \Delta x, \Delta y, \Delta z \}$



(White + Cha, 1973, Sol. Phys. 31 23)
 één net sinusoidal karakter:
 geen volgende bursts van
 oscillatie, maar met hiaten
 en fase sprongen. Erg
 random gedrag.

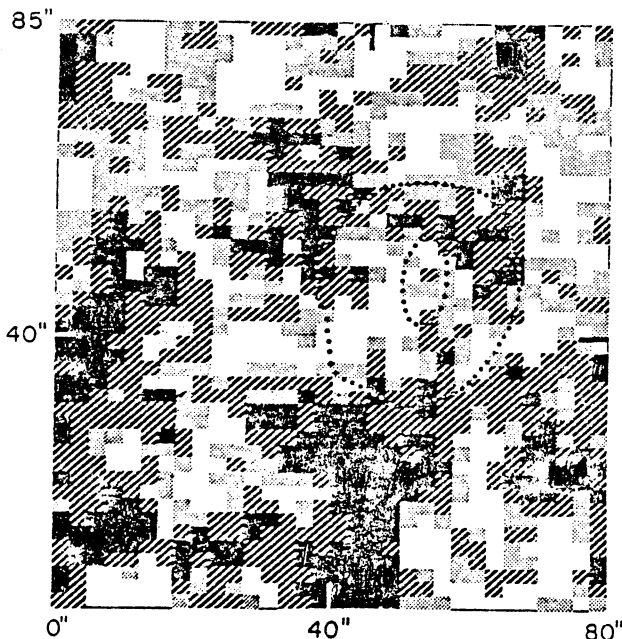
↳ "we doubt the existence
 of more than one eigen-
 frequency [...] and any
 description in deterministic
 functions (n FT) will be
 inadequate" (stod in abstract)

5" x 5" apertuur $\{ \Delta x, \Delta y \}$; lijn. λ 5250 Fe I;

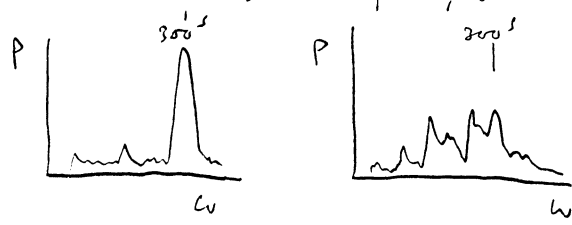
"instantane frequentie" $\equiv \frac{1}{2\pi} \frac{d\phi}{dt}$. Wat is dat voor een sinus?

schalen in x, y; verdeling over oppervlakte

Over Δ trillende element veel gebruikt geweest. Als schaal granulatie had verwachtte mechanisme: ontstaan door hamerende granulatie van eigen helioseismische golfen. Kortdige demonstratie dat $\{ \Delta x, \Delta y \} >$ granulel ≈ 1200 km: Sheeley + Bhatnagar, 1971, Sol. Phys. 10 379, op zijn heighten's: weer Dopplergrammen = helioogrammen in liter. en rechter sleugel afgetrokken; trek twee Dopplergrammen met $\Delta T = 150'$ van elkaar af en tel ze op: 1e geeft grofde verdeling 300' oscillatie $\approx 2000-3000$ km element en de tweede geeft de (langzaam veranderende) granulaire component: ≈ 1000 km. Verdeling over oppervlakte is ook random: plaatje van Rice + Gonzalez, 1973, Sol. Ph. 32, 421

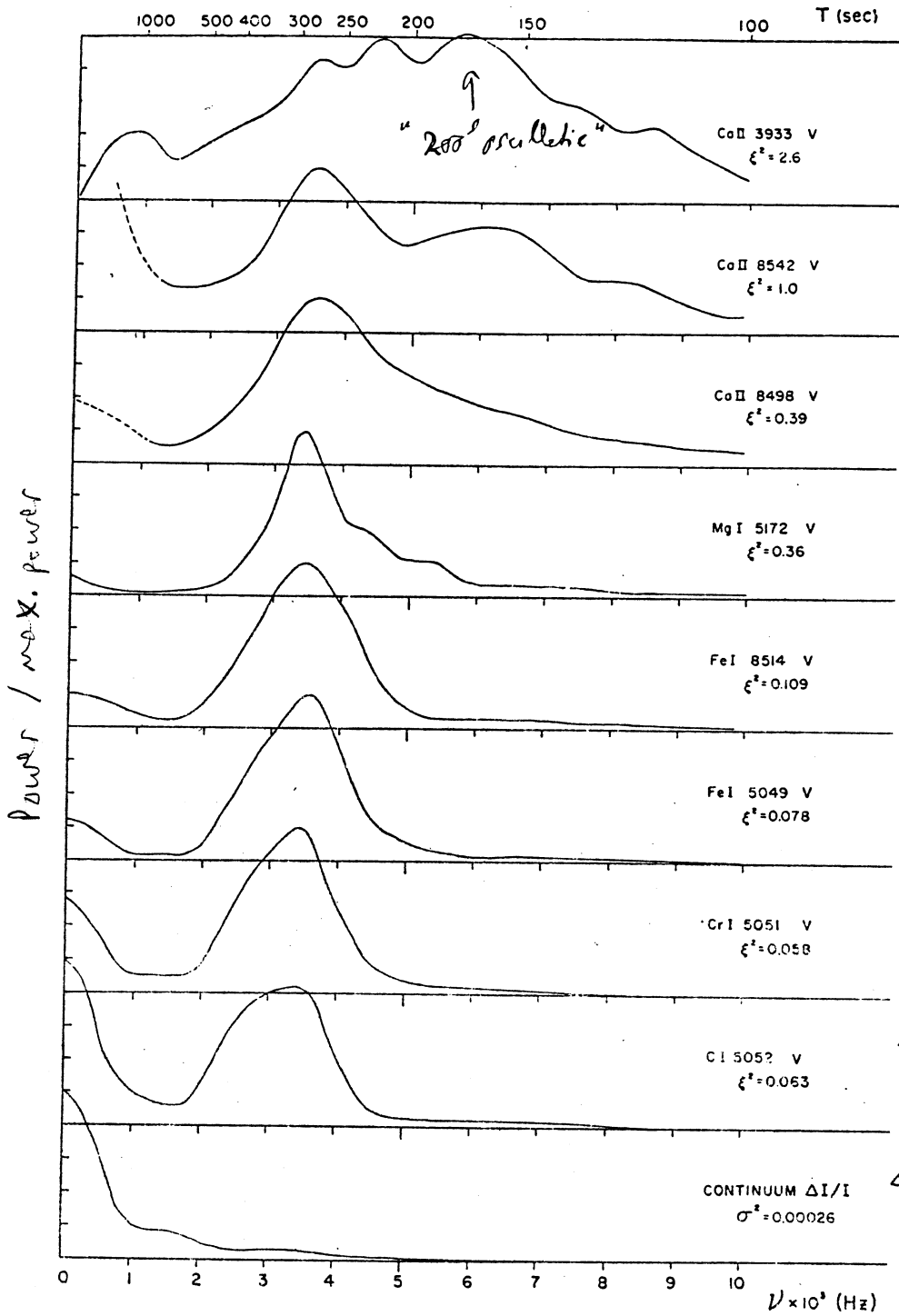


geeft aanwezigheid 300' oscillatie gedurende 42^m waarnemings tijd, per element $\{ \Delta x, \Delta y \} = 1.6 \times 4''$. Blank: kortuit, burst; zwart: meer dan de helft 1/2 tijd oscillatie aanwezig. gefitpeldde cirkels: umbra + penumbra vlak. Zwarte strekjes middenover elkaar corresponderen met met zelf special oppervlakte detail of 20. De individuele powerspectra voor ieder element verschillen ook erg in vorm: soms 1 piek, soms meerdere:



Ook: geen modificatie nabij zonnevlek.

verloop met de diepte



Ca II k_3 ↓ toenemende vormingsdiepte \bar{z}

- Power spectra voor tijdreeksen in vermelde lijnen, van één element {4x, 4y}, gemiddeld.

- geflipelde lijn v: veranderinge supergranulatie (bij Ca II k wafschoude).

- wat is de lijn v piek dieper?

- $\xi^2 = 2 \langle v^2 \rangle =$ middelbare v ^{rod} vgl. met verloop $\frac{v}{\mu}$ verth!
Conclusies?

- hoe verloop periode (τ)?

← heel zwak (eq. breedte = 20 mÅ)

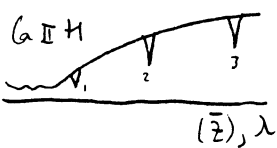
← aanslagpotential onderzoo is 7.7 eV → zeer diep gevormd

← intensiteitsfluctuatie

(Noyes, Nide 1965, p. 299)
= compilatie uit allerlei bronnen

faseverloop met de diepte in de fotosfeer

Canfield + Musman, 1973, Ap. J. 184 L131: meting oscillatie van drie lijnen gesuperponeerd op Ca II H: goede diagnostiek voor v/\bar{z} .



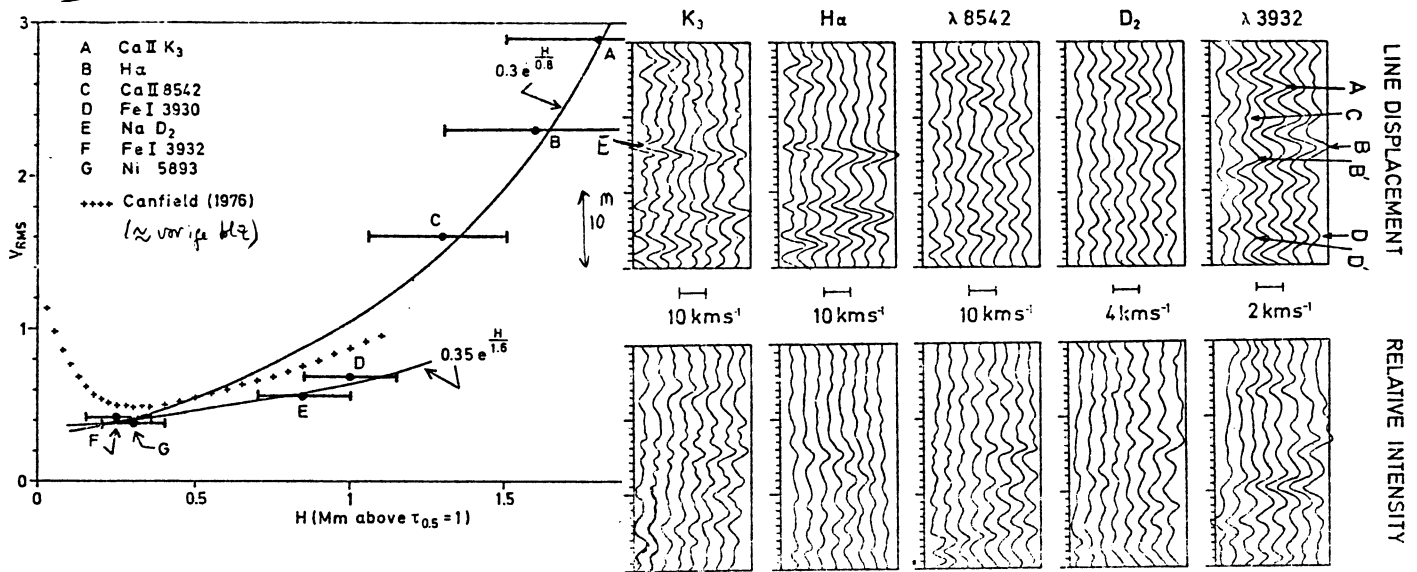
Resultaat: faseveloed omhoog ≈ 100 km/s = erg groot

→ hele fotosfeer bereicht (lyna) in fase mee.

Verder: amplitude neemt met diepte af, maar dichtheid neemt veel sneller toe → energie dichtheid valt met de hoogte vrij snel af.

verloop met de diepte in de chromosfeer

→ dieper



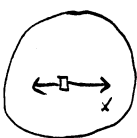
(Cram, Brown + Beckers, 1977, Astron. & Astrophys. 57, 211)

- In hogere lagen nog meer verwarring. Links: vormingshoofden \approx responsafunctie breedten van lijnen, met exponentiële fit van snelheidsamplitude. Rechts: \downarrow tijd $\rightarrow \delta x$
- Tedere tracé is gemiddeld over $\delta x = 0.4$ Mm ($1'' = 0.7$ Mm), totaal 3.2 Mm breed.
- Opvallend: - in chromosfeer gebreken die je dieper niet ziet (E);
- fase-snelheden uit de 'diepe' lijnen: $\rightarrow > 200$ km/s, weer groot maar flinke veranderingen: de vier toppen tussen B en D hebben van B naar D steeds afnemende fase voorgraaf in $\lambda 3932$ op H_α ; ook horizontaal: $\frac{\partial x}{\partial t}$ (BP') veel scherper dan DD'.
- fase verschil (V_s, I): δI loopt $\approx 1/4$ voor op δv , maar weer zig wisselend.
- op grotere hoogte: kleinere fase-snelheden: lopende folven ipv 1 afgehele beweging? \rightarrow Transport

Resolutie: voldoende resolutie

Deubner (1975, aanleiding van Vice - op omhoog; Astron. & Astrophys. 44, 371)

Voornameingen als boven: λ -meter registraties, maar nu scannend over halve zon (niet heel: dan bovoren problematisch) en zo lang mogelijk tijden:



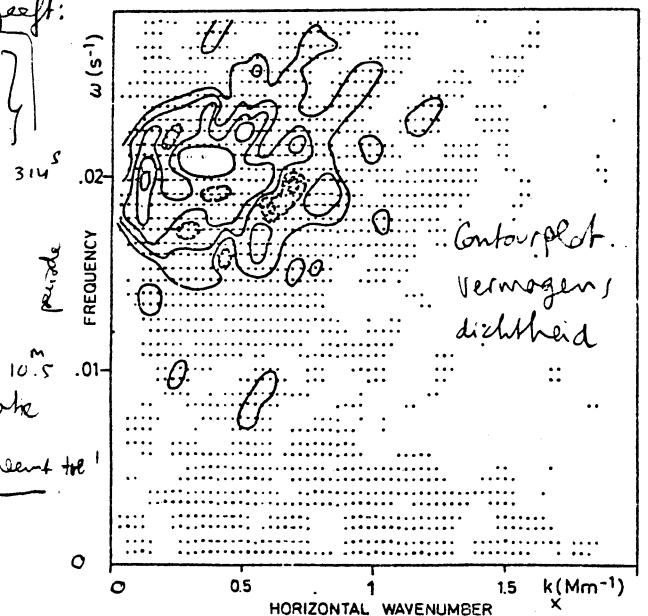
Scan binnen $\nu 60' < 300'$ 2-Dim FT geeft:

Eerst (Capr.): 300" lang, 4" lang
Scanapertuur 2" x 2.5"

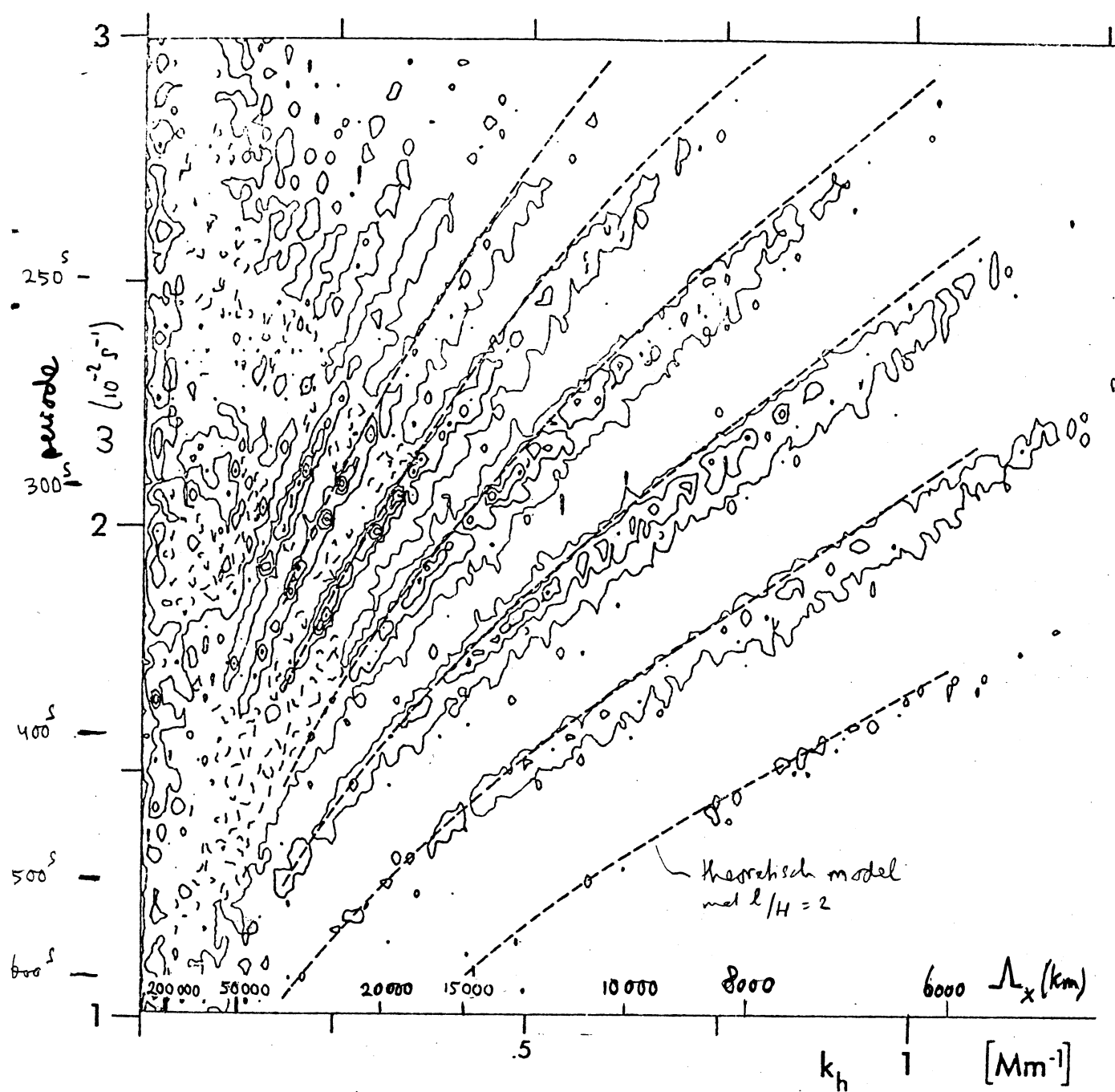
- \rightarrow niet 1-pik bij $\{300', \text{elementgrootte}\}$ maar complexe tijdsstructuur, nu deels opgelost (vgl met vorige powerspectra)
- \rightarrow meeste power voor $k_x < 1$ Mm $\rightarrow \lambda_x > 9''$, of algrootte ≈ 2000 km $>$ granulaat \rightarrow niet granulaat
- \rightarrow ook nog power bij $k_x \approx 0.1 \rightarrow \lambda \approx 13000$ km!
- \rightarrow trilling coherent over scanlengte - want resolutie niet toe!

$1'' = 725$ km = 0.725 Mm ; $R_0 \approx 700$ Mm $\approx 1000''$

$k_x = \frac{2\pi}{\lambda_x}$ $\rightarrow \lambda_x \approx 3 \times \text{algrootte}$



— Nog weer veel betere resolutie: Dender 1977:



Deze: 2 runs van > 7^h ieder, scanlengte 603 Mm ≈ R₀, scan duurt 100^s, en nu gemiddeld over een hele lange spectrografische plaat (↔) zodat golfpatronen onder hoeken uitmiddelen:

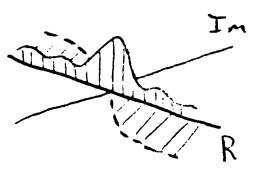
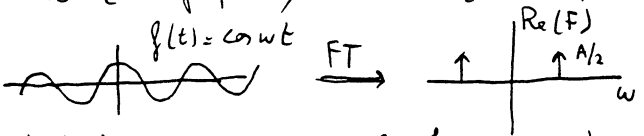
alleen 1 patroon // plaat blijft over. Twee-dimens. veld FFT geeft ↑ figuur. (wat zijn de Nyquist frequenties hier?)
 → vlakke golffronten, vs georiënteerd.

- Conclusies: - zeer karakteristieke structuur - klopt met model: komt nog;
- schalen tot ≥ 200 000 km omvang;
 - het patroon is gelijkt over de hele zon, en gedurende > 7^h - afgeven van fase veranderingen (waarom?)
 - naar grote schalen en lange tijden (Luisander) geen sprake van roeren → SOLERA?
 - veelvoud voor komende periodes en horizontale golfgetallen verklaren "random" karakter eerdere waarnemingen met onvoldoende resolutie.

En nog meer resolutie: scheiding +w en -w

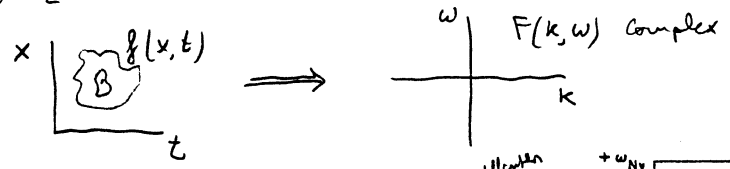
Bij de 1-dim FT zagen we: reëel signaal $f(t) \xrightarrow{FT} F(\omega)$ hermitisch:

en hoewel we FT's roterden met symmetrische bijdragen van -w (teruglopend) en +w (heenlopend) delen:



betreft we in de praktijk wegens hermitische aard alleen bereik $[\omega = 0 - \omega = \omega_{Nyquist}]$

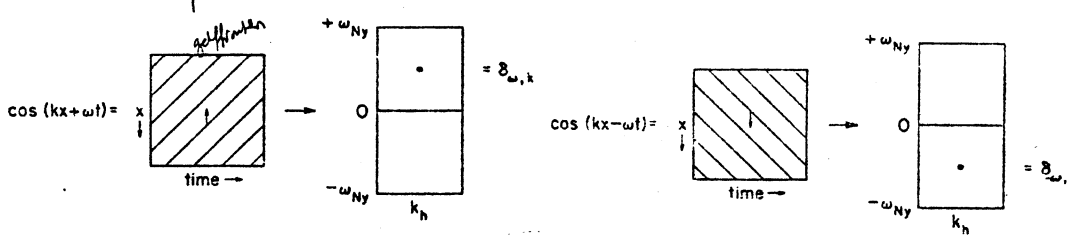
Nu 2-dim FT:



Nu: halve vlak voldoende, Bijv: kwadranten $(+k, +\omega)$ en $(+k, -\omega)$ of $(+k, +\omega)$ en $(-k, +\omega)$

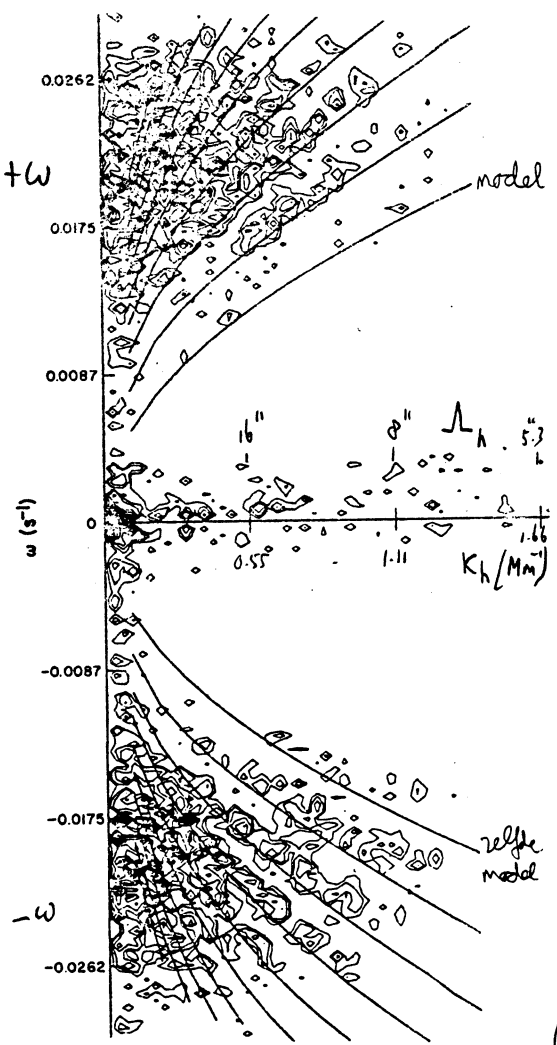
Schematisch:

links: voortplanting $\rightarrow -x$
rechts: voortplanting $\rightarrow +x$



beschreven als $\pm \omega$.

met: resultaat samen = staande golf: 2 δ -pieken als boven $\{\pm \omega\}$
Maar als amplitude's, k en ω 's niet gelte zijn zijn beide kwadranten nodig.



Resultaat voor de 2m, met scanrichting oost-west:

splitting: $(k, +\omega) \neq (k, -\omega)$.

De lijnen, voor 'n theoretische beschrijving, zijn in beide plaatsen gelte. De ruggen van vermogen liggen boven blauwverschoven (grotere |ω|), beneden roodverschoven. Oorzak: drift van hele golfpakket, drift snelheid in westelijke richting, telt op bij ene richting, telt af bij andere \rightarrow splitting.

Drift snelheid = relatie van de 2m.
(We zullen zien dat de relatie van de 2m knoemt als functie van de diepte in de 2m bepaald kan worden.)

(Rhodes, Dambler, Ulrich, 1979, Ap. J. 227 629)

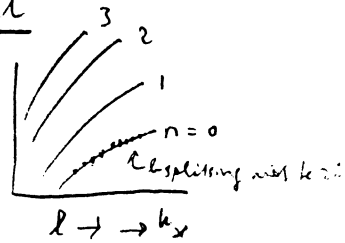
4.1.2.3 Vijf - minuten oscillatie - midden l

In k-w diagrammen twee harmonische reeksen:

n = aantal knopen staande golf radiaal

l = aantal knopen staande golf random zen (komt nog)

met $\lambda = \frac{2\pi}{k_x} \approx 2\pi R_0 / \sqrt{l(l+1)}$



Trellingen van kleinere l worden dieper gevormd; resolutie linker kant dus meest interessant, vooral rotatie splitsing. Waar nemingen (nog niet uit) van Duvall + Harvey set geven veelbelovend.

L Nature 1982 negatief

4.1.2.4 Vijf - minuten oscillatie - kleine l

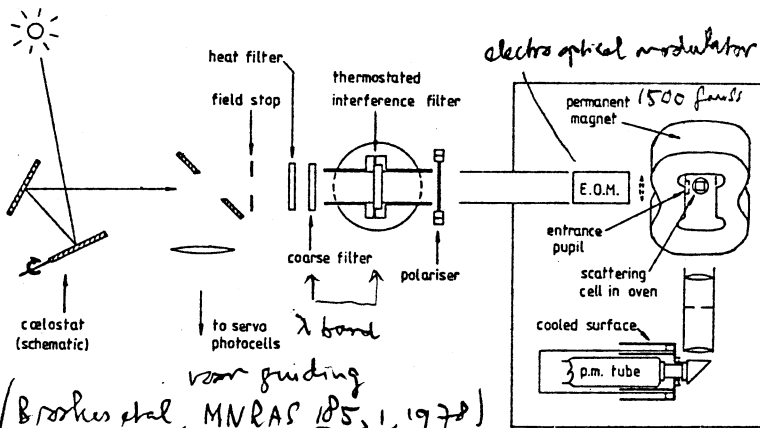
Dit is het rich snelst ontwikkelende domein; praktische interesse voor seismologie, wegens relatie of diep steken. Hier waar nemingen.

Probleem: kleine amplitude -> zeer preciese vrad meting nodig.

Voordeel: lage l -> middeling over hele zon of grote delen mogelijk -> veel grotere amplitude's van hoge l modes en van granuletic worden weffenniddeld. Wel probleem deing -> ongelijke verpog linker- en rechter rand van de schijf - met 2 km/s zeer sterke signaal!

Tot dusver: metingen hele zon - vrad en intensiteit, fluctuaties.

Metingen vrad moete met resonantie cel:



cel met $\left\{ \begin{matrix} Na \\ k \end{matrix} \right\}$ damp in oven in magnetveld. Balijh (2 v) verbrooid licht afwisselend: ijs-voelertjes in zemen-gesplitste. Na of k bij - zonnenspectrum

$v_{rad} = f \left(\frac{I_0 - I_n}{I_0 + I_n} \right)$

(Brooketal, MNRAS 185, 1, 1978)

Birmingham groep: k cellen - netwerk station rond de aarde

Nice groep: Na cel op zuidpool in australe zoner

lange tijden (>> 24h) continue meten -> hoge resolutie Δω.

Groot netwerk wordt nu opgezet; plannen voor ballon op zuidpool en voor satelliet (ESA - SOHO); wellicht participatie LRO (Hoging).

Metingen intensiteit SMM bevat (te) een flux-montor (ACRIM)

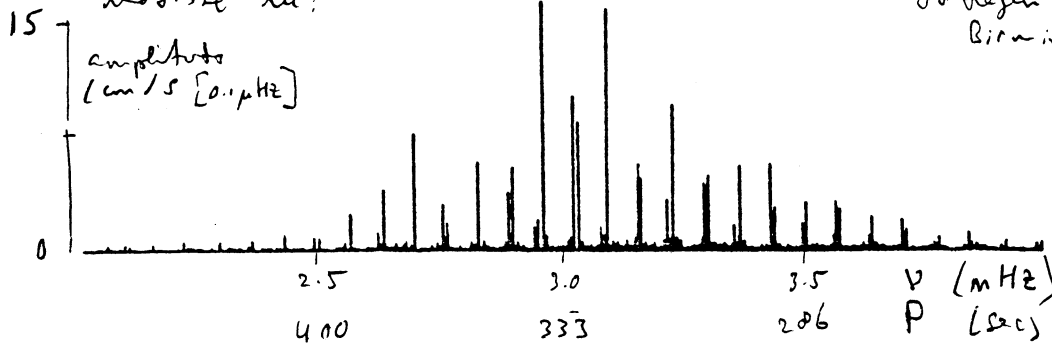
die 10 maanden F0 heldt bijgehouden -> power spectrum opzet deze modes ook te bevesten.

Resultaten Vrad: ontdeking 5^m lage- ℓ modes hele zon: Claverie et al.

(1979, Nature 282, 591); zuidpool metingen: Nature 1980, 288, 541;

noordste nu:

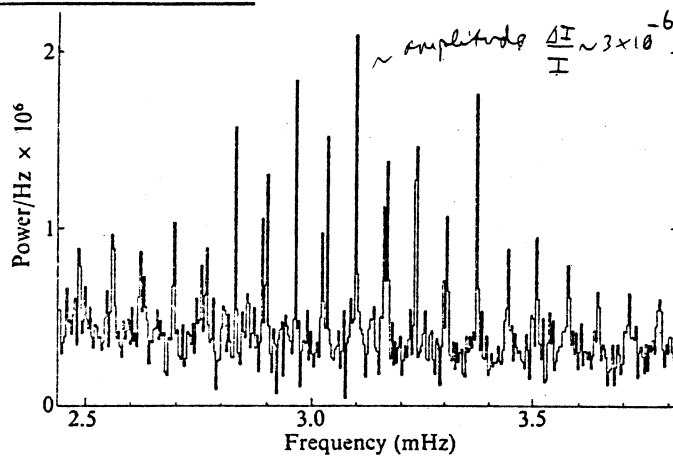
80 dagen Tenerife + Hawaii:
Birmingham groep (1981)



(nog niet in druk;
hier uit SOHO proposal

Nog meer en felerkeel: brede pieken (= coherentiegraad), precieze identificatie n, ℓ modes; rotatie splitsing waargenomen?

Resultaten ΔI ACRIM (Woodard + Hudson, Nature 1983, 305, 589)



- meer nu, maar betere resolutie: 290 dagen meetduur.
- { ℓ, n } identificatie ok (komt nog)
- geen rotatie splitsing (?)
- breedte \rightarrow coherentie duur $\sim 2d$
 \rightarrow random excitatie? (komt nog)
- systematische verschillen in ν met Birmingham - deze beter?

4.1.2.5 Periode 10 - 60 min: Stanford

De 5^m modes zijn stonde geluidsgolven; modes met $P \geq 10^m$ zijn interessanter want dat zijn gravitatie golven (komt nog); beter voor seismologie.

Power spectra zuidpool, Birmingham, ACRIM nog te veel ruis voor $\nu < 1$ mHz

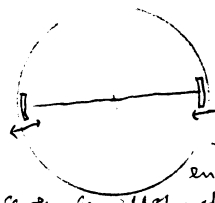
Mitchell: Salathe + Scherrer (preprint Nature) gebruiken power spectra gemeten te Stanford (komt nog: zie 2^e 40^m periode \rightarrow) en maken deze schoon met CLEAN-achtige methode; vind hoogste pieke, bepaal ν ,

haal P. nu met die ν uit data; respect. 20 aliaspieken van

window functie verwijderd \rightarrow 17 pieken; identificatie in combinatie {n, ℓ } gravitatie golven lijkt mogelijk. Zal nog wel aangevochten worden!

4.1.2.6 Perodes 10-60 min; SCLERA

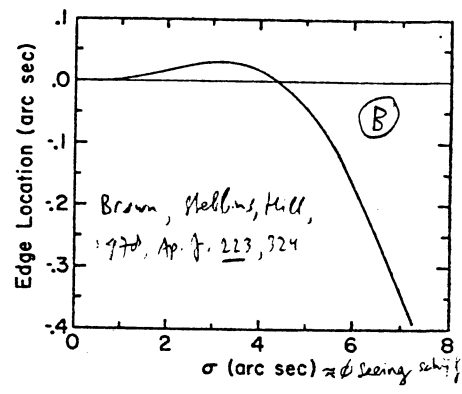
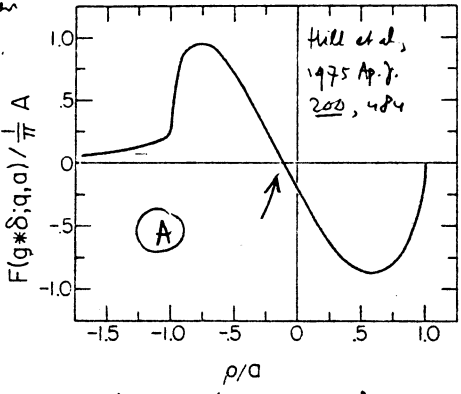
Overzicht + referenties in Hill + Candell, 1979, MNRAS, 186, 327. SCLERA dient voor 'experimental relativity' - vindt oscillaties in diameter ϕ onverwacht. Rare, geometrisch zeer preciese telescoop, met "Finite Fourier Transform Edge Definition" (FFTD):



Twee splaten scanner ieder een raandrand.

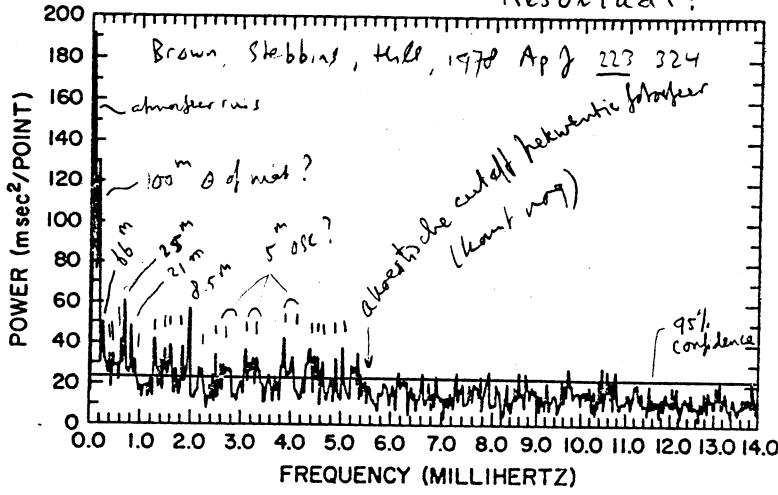
Sinusoidal scannerloop en keuze scaninterval

geven fereillstijpmethode over raand. Gevonden signaal wordt ge-FFT-d \rightarrow conclusie = vermenigvuldiging. Signaal = (A): nuldoorgang is "raand". Er omheen linear \rightarrow

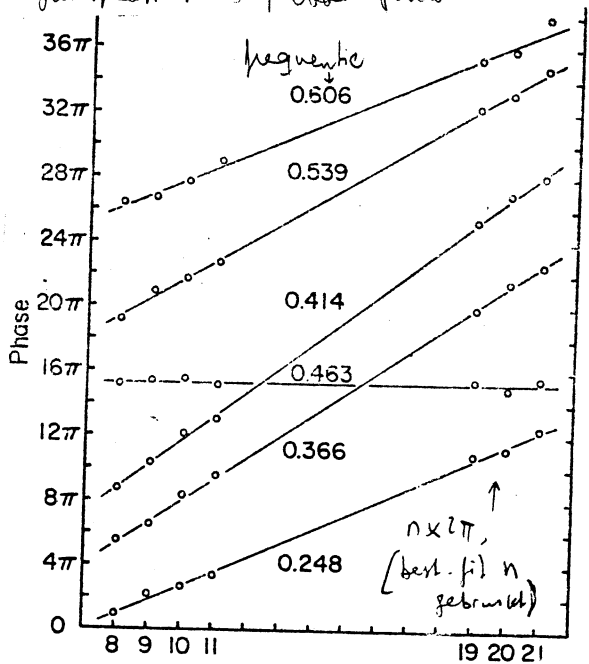


foed voor gevoels. Afstand randen wordt interferometrisch gemeten. Voordeel: door waging wordt sterke randafval afgezwakt \rightarrow minder gevoelig voor zijing (B): FFTD velt vorm randafval meer dan beweging van de raand \rightarrow meet verandering randverwaking.

Resultaat:



Veel fijn structuur = allemaal significant? Hill denkt van wel! Justificatie: blijkbaar fasebehoed:



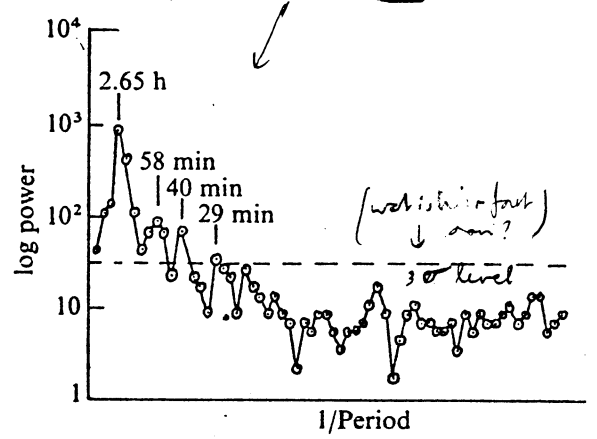
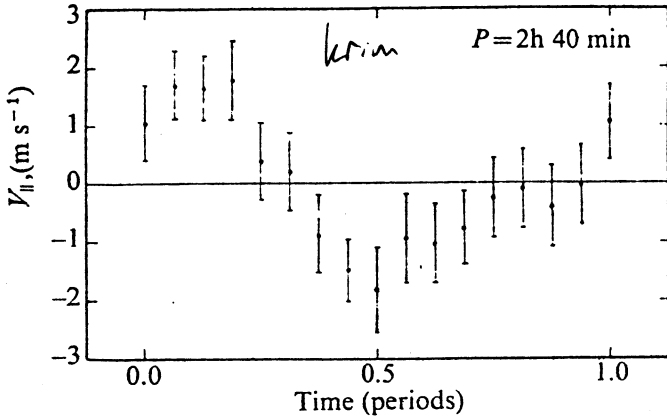
Veel discussie opgewekt. Hill (als leermeester Dichte voor hem over afplating ϕ) blijft repliceren (maar stopt nog steeds geen nieuwe waarnemingscampagnes).

- alle perodes zijn niet gevonden in snelheden (Fossil met Na resonantievat), in intensiteit (temperatuur; zowel diep - Gunglton - als hoog - Becher + Ayres: Ca II H, K), in de samenstelling (verbeter door fotometrie van Uranus en Neptunus).
- atmosferische effecten: nog hevige discussie.
- Swan + Worden: supergranulen transporteren over de raand \rightarrow $\sim 100^m$ signal = supergranulatie? Conclusie: metingen blijven onbetrouwen.
- nieuwere metingen Hill: solar phys 82 pg 1983: ~ 70 pieken in (400-500 μ Hz).

4.1.2.7 Periode $2^h 40^m 00.3^s$

Ontdekking: Levernay et al. 1976 Nature 257, 87 (krim)

en "tegelijk" (maar niet heus): Bowles et al. 1976, Nature 259, 92
 met k resonantiecel op Pic du Midi:

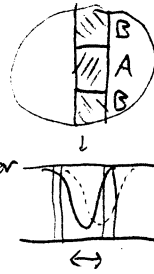


krim: "magnetograaf" signaal dopplerverandering tussen A & B:

$g = 0$ nulheidslijn, NS strip versnijd rotatie;

f wordt α gemoduleerd; splaten worden met Doppler compensator op gemiddelde profiel gehouden (v_{rot}^0 correctie etc.)

α verschild I_{52} voor wel/niet gepolariseerd $\rightarrow \Delta V (A-B)$



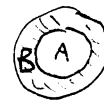
Resultaat niet power spectra (te ruisrijk) maar "superposed epoch".

probeer sinusen diverse v en fase \rightarrow beste kleinste-kwadraten fit \rightarrow ampl.

lang niet geloofd! amplitude slechts 1 m/s ; $160^d = 1/9^d$ dus elias window, geen theoretische reden waarom deze er is en geen andere.

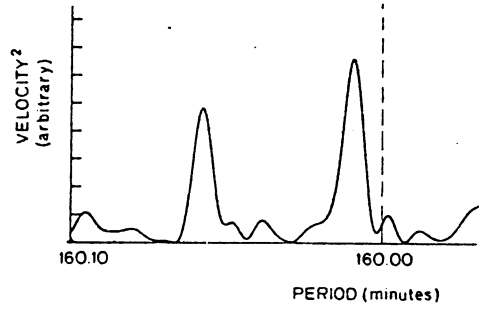
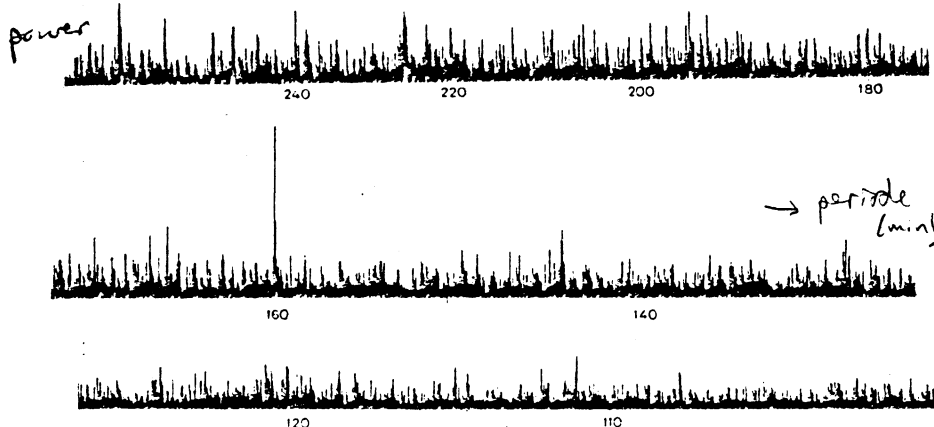
Sindsdien: voortnemingen te Stanford (Scherrer et al. Nature 277 635, 1979)

met dezelfde techniek, met ring / centrale schijf \rightarrow rechte kring, fase krim = fase Stanford.



Bovendien ook serie door Nice groep op de zuidpool (Grec et al. Nature 288, 541)

6 jaar data Stanford + krim samen: (Scherrer + Wilson, 1983 SP 82 37)



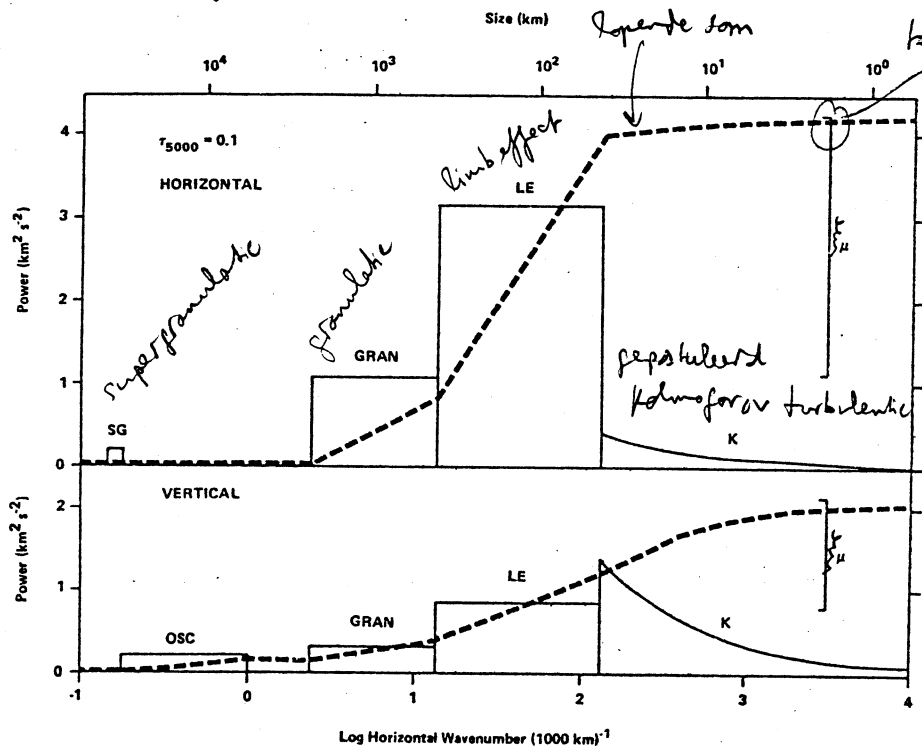
Daarnaast: $2^h 40^m$ ook waargenomen in:

- intensiteit + polarisatie op cm radiostraling;
- intensiteit $\times 1.65$ infrarood ($\frac{\Delta I}{I} \sim 2 \times 10^{-4}$)

dit niet $1/9^d = 160^d 00$;
 breedte picke $\approx 1 \text{ maal}$
 dat \rightarrow lang coherent \rightarrow
 over hele 6 jaar!

4.2 Opgeloste versus onopgeloste bewegingen zon

Hoeverel van $\{\xi_\mu, \xi_M\}$ wordt verblevend door granulatice + oscillaties?
 Nordlund (IAU Coll. 51 17 1979) heeft gedetailleerd numeriek model van ^{granulatice} convectie en vindt dat hale uit-thermische lijnverbreiding voor fotosferische lijnen door granulatice wordt gegeven.
 Empirisch werk komt nog hevige discussie over grootte granulatice eenheden en wijze van eliminatie van 5^m oscillatie en atmosfeer (Keil, Ap J 1979-1980 vs. Mathig + andere Freiburgers - A&A 1980-1983, voorlopige (en andere) conclusie Reherd (Das*, p.39):



Limb effect (zie terug) w. granulatice;
 osc alleen vert. hoed (unit) alev. hich;
 naar ↔ q modes zijn best mogelijk!
 Conclusie: met SOT resolutie (1" ~ 100 km) moet + meeste wel goed te zien zijn

4.3 Systematische snelheidsvelden in sterren

Granulatice meetbaar met lijnverbreidingen en bisectoren; zie terug.
Oscillaties ACRIM detectie 5^m modes in $\Delta I/I$ zeer veelbelovend voor seismologie andere sterren. Fotometrie: nauwkeuriger voor sterren dan voor de zon: puntbronnen, atmosfeer monitoring door meting vergelijkbare sterren, etc.
 Eerste poging (Denburger + J. Starck 1983 A&A 126 216) laat zien fereare Wolraven fotometrie met de huidige 92 cm ESO kijker goed is voor $\Delta I/I \sim 5 \times 10^{-5}$ per mode in 4 nachten.
 Zon (ACRIM) 3×10^{-6} maar voorspelling voor wat vroegere hoofdrede sterren is $\sim 1 \times 10^{-5}$. Dus: w. goed te doen voor vroege F sterren, teleskoop ≥ 1 meter, duur $\geq 10^d$.

V THEORIE EN INTERPRETATIE: GOLVEN

5.1 Inleiding en overzicht

* Energie reservoirs

Energieflux die door fotosfeer moet lopen om chromosfeer + corona + zonnewind te onderhouden: $F_{mech} \approx 10^{-3} F_{rad}$

($F_{rad} = 3.0 \times 10^{33}$ erg/s)

Mogelijke sub atmosferische reservoirs:

rotatie: niet groot: opp. rotatie $\rightarrow 2.5 \cdot 10^{42}$ erg totaal

$\rightarrow 2.5 \cdot 10^{42} / 4 \cdot 10^{30} = 20000$ jaar, wel: differentiele rot./dynamo;

magnetisch veld: flux buizen ~ 1.5 kG; $B^2/8\pi = p_g$ reeds in fotosfeer;

convectie: levert golfopwekking; ordent magnetisch veld;

pulsatie: belang hangt af van drijf mechanisme.

Hier zullen we alleen de laatste twee reservoirs bekijken.

* Energie transport

F_{mech} is klein beh. uit groot reservoir diep, naar grote toever hoog.

Hoe transport plegen subatmosferisch \rightarrow hoge atmosfeer?

Traditioneel: geluidsgolven

klassiek onderwerp:

Nu: golven in/van flux buizen "golf-verhitting vid corona"

Hier andere vraagstelling: "golf-diagnostiek yk inwendige".

Energie inhoud/transport (voor d'n neg) minder belangrijk:

eerst golfeigenschappen zelf (\approx lineaire theorie).

* soorten golven

Drie kern-drijvende krachten bij evenwichts verstoring:

gasdruk $\vec{\nabla} p$

\rightarrow geluidsgolven

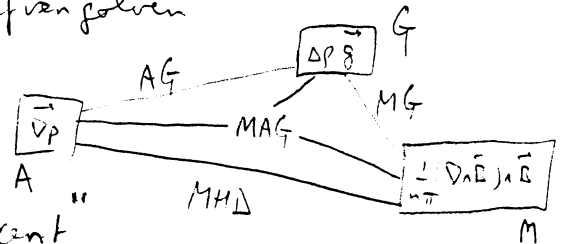
zwaartekracht $\Delta p \vec{g}$

\rightarrow ("inwendige") zwaartekrachtsgolven

Lorentz kracht $\frac{1}{4\pi} (\nabla \cdot \vec{B}) \cdot \vec{B}$

\rightarrow Alfvén golven

Mengvormen: alle combinaties



Drie typen: lopend / staand / evanescent

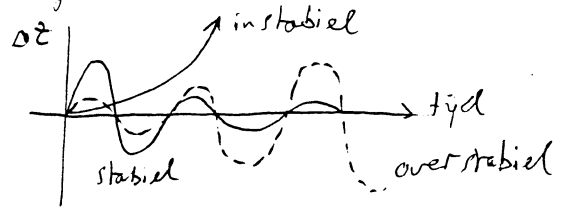
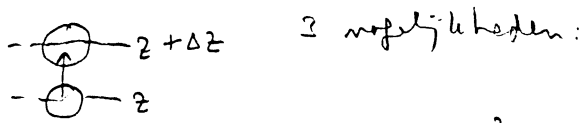
In dit hoofdstuk eerst de aandrijf mechanismen, dan lineaire theorie vereenvoudigde gevallen, dan resultaten voor sterren.

5.2 Aandrijfmechanismen

5.2.1 Convectorie: stabiliteit

5.2.1.1 Convectorie instabiel

* Heete bel gas stijgt een stukje; wat gebeurt er?

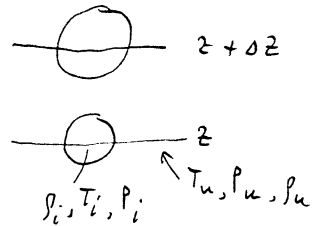


(NB: van nu af aan z omhoog \vec{g})

* klassieke test: Schwarzschild criterium

$$\begin{cases}
 T_i(z) > T_u(z) & \text{(heete bel)} \\
 P_i(z) = P_u(z) & \text{(druk evenwicht)} \\
 P_g = \rho RT / \mu & \text{(gas wet; } \mu = \text{gemiddelde deeltjes massa)} \\
 \mu_i(z) < \mu_u(z) & \text{(meer ionisatie \to meer vrije elektronen)}
 \end{cases}$$

$\rho_i(z) = \frac{\mu_i P(z)}{R T_i(z)} < \rho_u(z) = \frac{\mu_u P(z)}{R T_u(z)} \rightarrow$ opwaartse kracht $(\rho_i - \rho_u) \vec{g}$
 \rightarrow heete bel stijgt een stukje.



Instabiliteit (bel stijgt verder) als $T_i(z) + \Delta z \frac{dT_i}{dz} > T_u(z) + \Delta z \frac{dT_u}{dz}$
 dus als: $\frac{dT_i(z)}{dz} > \frac{dT_u(z)}{dz} \rightarrow \left| \frac{dT_i(z)}{dz} \right| < \left| \frac{dT_u(z)}{dz} \right|$ meer steile T-curve in bel.

Voor adiabatische opstijging (\rightarrow geen stralings dissipatie):

$$\left| \frac{dT_i}{dz} \right| = \left| \frac{dT}{dz} \right|_{ad} = (1 - 1/\gamma) \frac{T}{P} \left| \frac{dP}{dz} \right| \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{uit adiabaatgl. } P \rho^{-\gamma} = c \\ \gamma = C_p / C_v = 5/3 \end{array} \right.$$

terwijl bij stralings evenwicht, kan te nemen voor de omgeving, geldt:

$$\left| \frac{dT_u}{dz} \right| = \left| \frac{dT}{dz} \right|_{re} = \frac{3\pi F \bar{k}_R}{16 \sigma T^3} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{uit diffusie benadering: } \frac{\partial^2 B}{\partial z^2} = 0 \text{ voor } z > z_0 \\ \text{geldt in sterinwendige (Michalasi II p. 49 ff)} \end{array} \right.$$

\rightarrow Schwarzschild criterium voor instabiliteit:

$$\left| \frac{dT}{dz} \right|_{ad} < \left| \frac{dT}{dz} \right|_{re} \rightarrow \text{convectorie} \quad \text{(z.g. Michalasi II p. 106!)}$$

Gebruikelijke notatie: $\nabla_{ad} < \nabla_{re}$ met $\nabla = \frac{d \log T}{d \log P} = \frac{d \ln T}{d \ln P} \cdot \frac{dr}{dr} = - \frac{P}{\rho g T} \frac{dT}{dr}$

$$\nabla_{re} = \frac{3\pi F \bar{k}_R P}{16 \sigma T^4 \rho g} \quad \left. \begin{array}{l} dT/dr = -\rho g \\ \text{(hydrostat. ev.)} \end{array} \right\}$$

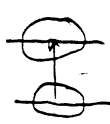
$$\nabla_{ad} = 1 - 1/\gamma = 0.4 \text{ voor ideaal 1-atomig gas} \\
 \equiv 1 - 1/\Gamma \text{ met } \Gamma \equiv \left(\frac{d \ln P}{d \ln \rho} \right)_{ad} \text{ voor echt gas, met } \left\{ \begin{array}{l} \text{ionisatie} \\ \text{stralingsdruk} \end{array} \right.$$

Formules voor Γ in Unsöld (p. 56).

Bijv: gedeeltelijk geïoniseerd H: $\Gamma = 1.1 \rightarrow \nabla_{ad} = 0.1$ (kleiner wegen recombine)

5.2.1.2 Convectief stabiel

* Bewegingsvgl. voor bal die adiabatisch stijgt:



$$z+dz \text{ in bal: } \Delta p_i = \Delta z \cdot \left(\frac{dp}{dz}\right)_{ad} = \Delta z \cdot \left(\frac{dp}{dz}\right)_{ad} \left(\frac{dp}{dz}\right)_{ad} = \Delta z \left(\frac{dp}{dz}\right)_{ad} \frac{dp}{dz}$$

$$z \text{ } \left. \begin{array}{l} \text{adiabatische vgl: } p = c \cdot \rho^\Gamma \rightarrow \left(\frac{dp}{dz}\right)_{ad} = \frac{p \Gamma}{z} \equiv c_s^2 \\ \text{hydrost. ev: } \frac{dp}{dz} = -g \rho \end{array} \right\}$$

L drukvermindert ("Boveri's 13")
met c_s geluidssnelheid

$$\Delta p_u = \frac{dp}{dz} \cdot \Delta z$$

$$\Delta p_i = -\frac{g \rho}{c_s^2} \Delta z$$

$$\rightarrow \text{opwaartse kracht} = g(\Delta p_u - \Delta p_i) = g \Delta z \left[\frac{dp}{dz} + \frac{g \rho}{c_s^2} \right] = \rho \frac{g^2 \Delta z}{\Delta t^2}$$

$$\text{dus } \frac{d^2 \Delta z}{dt^2} \equiv -N^2 \Delta z \quad \text{met } N^2 = -\frac{g}{\rho} \frac{d\rho}{dz} - \frac{g^2}{c_s^2} = -g \left[\frac{d \ln \rho}{dz} + \frac{g}{c_s^2} \right]$$

golfvgl. met oplossing $\Delta z(t) = a e^{iNt} + b e^{-iNt}$

Normale trilling als $N^2 > 0$; frequentie $N =$ Brunt-Väisälä frequentie
De golven zijn interne gravitatiegolven

L want: "op"waartse kracht $g \Delta \rho$ is terugdrijver
 L want: gradient in ρ , met sprong in ρ zoals bij opp. grav. golven

* Verband N^2 - Schwarzschild criterium:

$$N^2 = -g \left[\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dz} + \frac{g}{c_s^2} \right] = g \left[\frac{1}{\rho} \left(\frac{\mu}{RT} g \rho + \frac{1}{T^2} \frac{p \mu}{R} \frac{dT}{dz} \right) - \frac{g}{c_s^2} \right]$$

L met $\rho = p \mu / RT$ en $dp/dz = -g \rho$


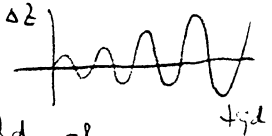
$$= g \left[g \frac{\rho}{\rho} + \frac{1}{T} \frac{dT}{dz} - \frac{g}{c_s^2} \right] = g \left[\frac{(\Gamma-1)g}{c_s^2} + \frac{1}{T} \frac{dT}{dz} \right]$$

$$= \frac{g}{T} \left[\frac{dT}{dz} - \left(\frac{dT}{dz}\right)_{ad} \right] \quad \left(= \frac{\Gamma-1}{\Gamma} \frac{g \mu}{RT} = -\frac{1}{T} \left(\frac{dT}{dz}\right)_{ad} \right)$$

dus: $N^2 > 0$: golven $\leftrightarrow \frac{dT}{dz} > \left(\frac{dT}{dz}\right)_{ad} \rightarrow \nabla < \nabla_{ad}$: geen convectie
 $N^2 < 0$: geen golven $\leftrightarrow \nabla > \nabla_{ad}$: convectie (NB: $\frac{dT}{dz} < 0$)

5.2.1.3 Convectief overstabil

hierboven adiabatische opstijging aangenomen. Stralingsdissipatie kan door horizontale energie uitwisseling speciaal geval veroorzaken:


 bal stijgt door $\nabla > \nabla_{ad}$; straalt meer $\rightarrow \rho$ neemt toe \rightarrow zakt weer \rightarrow oscilleert, mogelijk met toenemende amplitude Δz
 (tot niet-lineaire effecten de groei stoppen). 

[Oorspronkelijke voorstelling door Cowling, met horizontaal B veld als herstellende kracht; stralingsverlies geeft extra \downarrow versnelling; \rightarrow Rfien golven (Fred voor zonnevlekken? Cowling 1976 MNRAS 177 407)]

5.2.2 Convectieve golfvoordrijving

* overstabiliteit in top convectieve zone waar $\nabla > \nabla_{ad}$.
 zie vorige blz; G golven, en M golven bij horizontaal B veld.

* doorschietende convectie / hamerende granulen

Boven- en onderzijde convectieve zone: $\nabla_{re} < \nabla_{ad}$: stabiel.

Omkering opwaartse kracht + wrijvingsdissipatie \rightarrow remming van doorschietende bel. Hoog ver loopt die door? Bovenzijde sterke stralingsdissipatie want optisch dun (bouffon); onderzijde extra uitdrijving convectieve regime door "overshoot".

Zie Moore in O as *; probleem: waarom komt G preferente schalen $\approx 10^3$ km (granulatie) en 3×10^4 km (supergranulatie)?

G-golf opwekking:

$$|V_{golf}| \sim |V_{bel}| \rightarrow F \sim \rho V_{bel}^2 \frac{N_{BV}}{H} \quad (\text{O as *}, p. 275)$$

amplitude | granulatie: 1 km/s \sim groepssnelheid \sim schaalhoogte \sim golfenlengte

M-golf opwekking: langzame convectieve bewegingen kunnen fluxbuis golven opwekken; geluidsgolven rechter (spruit, O as *).

Twee soorten: Alfvén golven en compressie modes die buis vervormen.

Fluxen: $F_1 = \rho V_{bel}^2 \begin{cases} V_A \\ V_s^2 V_A^2 / (V_s^2 + V_A^2) \end{cases} \sim 10^9 \text{ erg/cm}^2 \text{ s}$
 van buis in granulatie

L van "sausage" mode $\left\{ \begin{matrix} \uparrow \\ \downarrow \end{matrix} \right.$; link etc: V_A

hoeveel blijft van deze flux over in corona? Twee effecten:

- sterke toename $V_A = B / \sqrt{4\pi\rho}$. zo drastisch dat diskontinuu;

\rightarrow sterke 'interne' reflectie aan sprong in brekingsindex:

transmissie $\uparrow \frac{F_2}{F_1} = \left(\frac{2A_1}{A_1 + A_2} \right)^2 \sim 4 \frac{V_A^{(1)}}{V_A^{(2)}} \sim 10^{-3}$

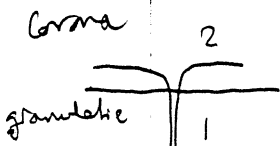
- uitwoaien fluxbuis: flux constant langs buis

$\rightarrow B \cdot A = c \rightarrow A \cdot V_A \sim 1/\sqrt{\rho}$ met A oppervlakte doorsnede.

disp: $F_2 = F_1 \frac{A_1}{A_2} 4 \frac{V_A^{(1)}}{V_A^{(2)}} \sim F_1 \sqrt{\rho_2/\rho_1} \sim 10^5 \text{ erg/cm}^2 \text{ s}$
 in corona

{ monopool }
 { sausage } mode heeft minder reflectie ($V_s \sim \sqrt{T}$), waar is lastiger om te sloan dan hogere orde modes zoals { dipool } link etc.

Tonson: loop-resonantie pikken uit dit aanbod de golven die 4 beste in de loop passen.



* Turbulente emissie (highthill)

Lawaai van stroomnetten → turbulente stroming geeft A golven.

Energie productie: ϵ (erg cm⁻³ s⁻¹) ≈ turbulente energie ρv^2 per tijd, dus draad l/v maal efficiëntie factor $(kl)^{2n+1}$

n = orde multipool:

$n=0$ monopool

$n=1$ dipool

$n=2$ quadrupool

$n > 2$ verwaarloosbaar



niet mogelijk: turbulente kolken
veranderen niet van plaats of volume.

wél: alleen vormverandering

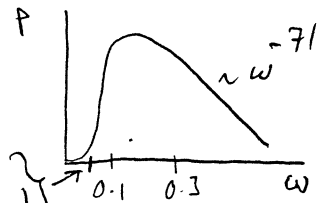
andere $(kl)^{2n+1} \rightarrow 0$

$L_{\text{geff}} = \frac{\omega}{v_s} \approx \frac{v/l}{v_s}$

dus $\epsilon = \frac{\rho v^3}{l} \left(\frac{v}{v_s}\right)^{2n+1} = \frac{\rho v^3}{l} \left(\frac{v}{v_s}\right)^5 \sim \rho v^8$ (Oas*, p. 290)

(→ $F \approx 10^7$ erg/cm²s voor θ naar erg meter)

Spectrum:



(Kolmogorov)
 $v(l) \sim l^{1/3}$

A cutoff ω
(kontrog; $\sim N_{\text{Dv}}$)

→ kort-periodische: $P \lesssim 100^{\text{p}}$
dus juist θ (nog) niet voorgenomen deel

[Dit is 't klassieke mechanisme voor homogene golfverhitting van coronas.
Menglengte theorie → $v \sim \left(\frac{g}{T} \nabla\right)^{1/2} \rightarrow F \sim g_{\text{eff}}^{-1} T_{\text{eff}}^{15}$ (Renzu, de Hoore);
deze welke variatie door HR diagram is niet waargenomen; wél verschillende coronas voor dezelfde g_{eff} & T_{eff} (Eimlein) - en corona $\theta = \Sigma$ loops (Skylab).]

Opwekking M-golven door turbulente fast belyc omhel door zik monopool-

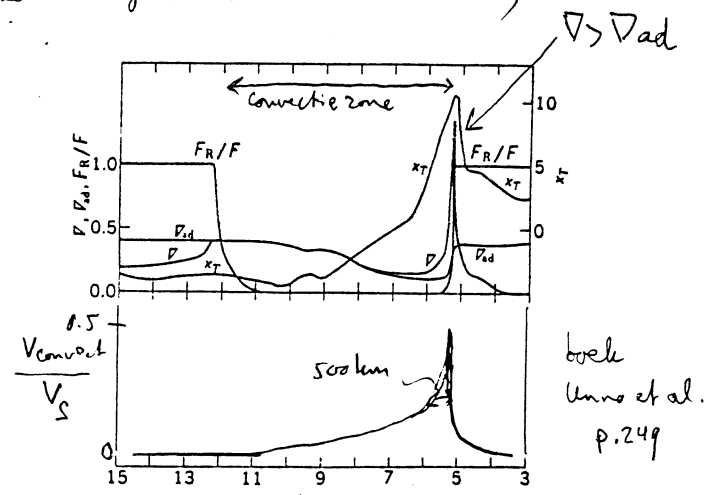
en dipool emissie → $\epsilon \approx \frac{\rho v^3}{l} \frac{v}{v_s}$. (Oas*, p. 293).

voor v moet $< v_A$ → daarom vooral compressie convectieve bewegingen
van de vorige bladzij (Spruit, Oas*, p. 400).

Verloop flux door HR diagram: $F = \epsilon \cdot l \approx \rho v^4 / v_A \sim \rho T B^{-1}$ (Oas*, p. 293)
(per cm² fluxbus in convectieve zone)

* Lokale convectieve opwekkingen

Standaard menglengte theorie geeft →
H-ionische geeft een sterke piek in
 $k_T = \left(\frac{\partial \ln k}{\partial \ln T}\right) \rho$ is grote k vereist sterke
gradient ∇ voor energietransport
→ $\nabla \gg \nabla_{\text{ad}}$ vlak onder oppervlakte.
Door pieken dus ook v_{bel} , dus
eenv. overstabiele onderdrukking als
uphill-achtige mechanismen.



boek
Uno et al.
p. 249

(Ando + Osaki, 1975, PASP 27, 581)

* K mechanisme ("Eddington-valve")

Baker + Lippinhehn: 1962, 25 of Ap 54 114

P constant } $k_R =$ (Rosseland) gemiddelde extinciefficient
 T neemt toe } neemt toe zodat H

grotendeels is geïoniseerd.
 (verderop nog hotter door He^+),

T constant } altijd toename k_R
 P neemt toe } recombinatie

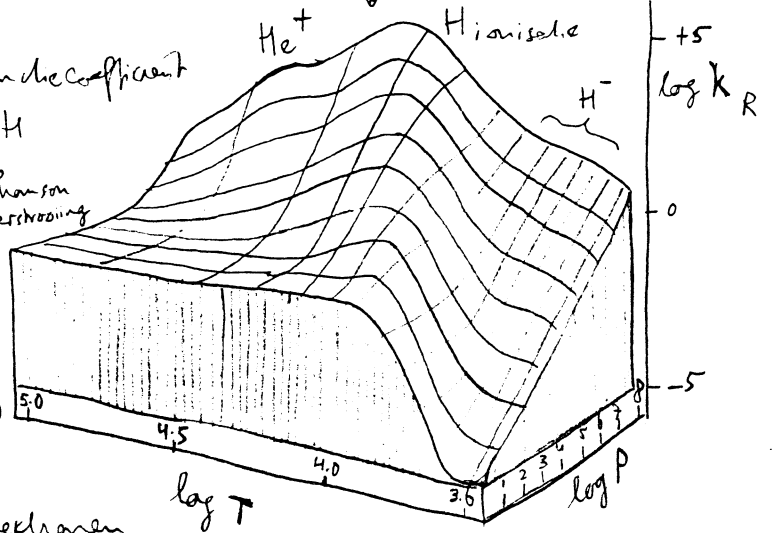
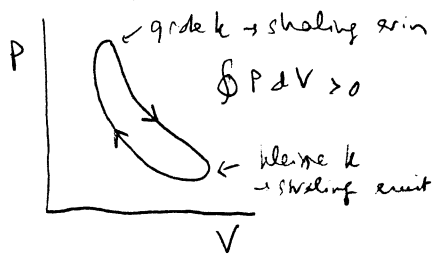
($H \rightarrow H^-$, $H^+ \rightarrow H$, $He^+ \rightarrow He$, $He^{++} \rightarrow He^+$)

behavie hiervoor (hoge T, lage P)

waar Thomson verstrooiing van elektronen
 overheerst (Waarom doet zoveel vrije elektronen?).

Dus - bij gedeeltelijke ionisatie H (He^+), voor sterren met forse F_{RAD} :
 toename T en/of P \rightarrow grotere $k_R \rightarrow$ meer absorptie: verdere T stijging \rightarrow expansie
 \rightarrow koeling \rightarrow lagere $k_R \rightarrow$ meer straling doorgelaten \rightarrow samenrekking etc.

Zo: energie uit straling halen, en opbrengt zodat cyclus wordt versterkt:



Vooral belangrijk in net bij efficiënte konvectieve zone, anders F_{RAD}/F_{total} te klein.
 \rightarrow vooral in Cepheiden (reuzen), en door opwekking radiale & lage harmonische pulsaties.

In sterren als de zon vooral in top konvectieve zone (sterf), en zeventiende
 oscilatie hoge-orde harmonischen (weinig massa in het spel).

(Verschil Cepheiden - RR Lyrae zit in massa's. zie Christy, 1966, Ap. J. 144 108
 en eerder voor analyse RR Lyrae. Resultaat: door $He^+ \rightarrow He^{++}$ zone doet het
 meest; H ionisatie zone geeft extra fasevertraging van lichtsumme)

* konvulsie aandrijfmechanismen

betreffende deel 0

- door schuivende konvulsiebelten \rightarrow ? (granulatie?) - oppervlakte
- lichthill mechanisme \rightarrow kort periodieke oscillaties? - net onder oppervlakte
- over stabiliteit superadiaboot } \rightarrow 5^m oscillatie? - buitenste deel konvulsiezone
- K mechanisme } - buitenste deel konvulsiezone
- Alfvén golven en flux buis golven: vooral loop-plateau bewijzen in top convectieve zone; sterke reflectie.

5.3 GOLVEN IN STERREN

71 / V, 7

5.3.1 Literatuur

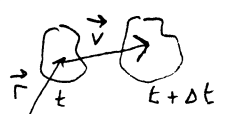
- * Twee recente boeken over trillingen van hele sterren:
 - J.P. Cox, 1980, "Theory of Stellar Pulsation"; bib. IX Ca-203
Heel uitgebreid; zowel radiale als niet-radiale pulsatie. Oke and.
 - Unno, Osaki, Ando, Shibahashi, 1979, "Nonradial Oscillations of Stars". Heel compleet; wat formalistischer. bib. IX Ca-201
- * boeken met hoofdstukken over MAG golven in O atmosfeer:
 - Athay, 1976, "The solar chromosphere and corona. Quiet Sun" chapter X, Bib IV D 404
 - Bray + Loughhead, 1974, "The solar chromosphere", chapt. 6; IV D 372
- * recente reviews: O en a *, hoofdstukken Leibacher + Stein
- * oude maar goede artikels over G-golven:
 - C.O. Hines, 1960, Gen. J. of Physics 38, 1441 (aardatmosfeer)
 - W.A. Whitaker, 1963, Ap. J. 137, 914

5.3.2 Basis

- * aanname: viscositeit verwaarloosbaar; perfecte geleiding; rotatie = 0 ($P < 27^d$); adiabatische verstoringsen

* coördinaten stelsels:

- Euler	} gegeven punt	} tijds afgeleide $\frac{\partial}{\partial t}$ voor vaste (x, y, z)
- lokaal		
- Stokes Lagrange	} voor gegeven (bewegend) element	} afgeleide $\frac{d}{dt}$ of $\frac{D}{Dt}$ etc, meekbewegend
- materieel convectief advechtes totaal substantieel		



$$\text{dus } \frac{d\alpha}{dt} \equiv \frac{\alpha(t+\Delta t) - \alpha(t)}{\Delta t} = \frac{\partial \alpha}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \alpha$$
 (geldt voor α scalar of vector best.)

Lagrange vaak netter voor $\frac{D}{Dt}$; Euler voor meer $\frac{\partial}{\partial t}$.

- * Coupling benadering: Euler perturbatie in lokale zwaartekracht potentiaal verwaarloosbaar - want potentiaal gevolg van hele ster \rightarrow middeling.

5.3.3 Behouds wetten

(e.g. Micholas, 2^e druk, p. 512 ff)

72/V, d

* massabehoud - continuïteits vergelijking



- Euler's voms: "massebehold"

$$\int \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \equiv \oint -\rho \vec{v} \cdot d\vec{S} \text{ voor willekeurig volume } V \text{ om } \vec{r}$$

$$= - \int \nabla \cdot (\rho \vec{v}) dV \text{ divergenstheorie}$$

$$\rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = - \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = - \vec{v} \cdot \nabla \rho - \rho \nabla \cdot \vec{v}$$

- Lagrangiaans: "continuïteit"

$$\frac{d}{dt} (\rho V) = 0 \text{ behoud identiteit "blob"}$$

$$\rightarrow \frac{1}{\rho V} \frac{d}{dt} (\rho V) = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{1}{V} \frac{dV}{dt} = 0$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} &= -\rho \nabla \cdot \vec{v} \\ \frac{dV}{dt} &= V \nabla \cdot \vec{v} \end{aligned} \right\} \text{(V.1)}$$

* impulsbehold - bewegings vergelijking

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla p + \rho \vec{g} + \dots$$

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\nabla p + \rho \vec{g}$$

$$\text{(V.2)}$$

Lorentz $\frac{1}{4\pi} (\nabla \wedge \vec{H}) \wedge \vec{H}$; $\vec{H} = \vec{B}/\mu = \vec{B}$
 Coriolis $2 \vec{\Omega} \wedge \vec{v}$
 Differentiele rotatie $(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}$ $\propto \sin \theta$
 viscositeit $\mu \nabla^2 \vec{v}$ (dan: "Navier-Stokes")
 Jupiter, nabije gravitatiestraler, ...

* energiebehold - warmte vergelijking

v. (V.2)

totale energie = mechanische + inwendige
 L al in impulsbehold: $\frac{d}{dt} (\frac{1}{2} \rho v^2) = -(\vec{v} \cdot \nabla) p + \vec{v} \cdot \rho \vec{g} + \dots$
 inwendige: $\frac{dE}{dt} + p \frac{dV}{dt} = \frac{dQ}{dt}$ 1^e hoofdwet = Lagrangiaanse vorm (per massa-eenh.)
 arbeid compressie \rightarrow toegevoegde warmte \rightarrow

ideaal gas: $dE = c_v dT$
 $P = (c_p - c_v) \rho T$
 $P = (\gamma - 1) \rho E$
 $(\gamma = c_p/c_v; \text{bij ionisatie: } \gamma \rightarrow \Gamma)$

$$\rightarrow \frac{dP}{dt} = \frac{\gamma P}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + (\gamma - 1) \rho \frac{dQ}{dt}$$
 (V.1)

adiabatisch: $\frac{dP}{dt} = \frac{\gamma P}{\rho} \frac{d\rho}{dt}$

$$\frac{\partial P}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) P = \frac{\gamma P}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \rho \right) = -\gamma P \nabla \cdot \vec{v}$$

$$\rho \rho^{-\gamma} = \text{konstant per "blob"}$$
 (V.3)

5.3.4 Geluidsgolven in homogeen gasaanname: - $q = 0$, $H = 0$, $T(x, y, z, t) = T_0$, etc.- evenwichttoestand: $\frac{\partial \vec{v}_0}{\partial t} = \vec{v}_0 = 0$, $\frac{\partial p_0}{\partial t} = \frac{\partial p_0}{\partial t} = \nabla p_0 = \nabla p_0 = 0$ etc- kleine verstoring:

$$p = p_0 + p_1, \quad \text{met } p_1 \ll p_0$$

$$\rho = \rho_0 + \rho_1, \quad \rho_1 \ll \rho_0$$

$$\vec{v} = \vec{v}_1, \quad |\vec{v}_1| \ll c_s \quad (M = v/c_s \ll 1)$$

lineariseer: $\mathcal{O}(|x_i|)^2 = 0 \rightarrow (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = (\vec{v}_1 \cdot \nabla) \vec{v}_1 = 0$ etc.

bewegingsvgl:	$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = -\nabla p_1$	} $\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = -\rho_0 \nabla \cdot \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = \Delta p_1 = c_s^2 \Delta p_1$	
continuïteitsvgl:	$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} = -\rho_0 \nabla \cdot \vec{v}_1$		} $\frac{\partial^2 \vec{v}_1}{\partial t^2} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla \cdot (c_s^2 \frac{\partial \rho_1}{\partial t}) = c_s^2 \Delta \vec{v}_1$
ad. warmte vgl:	$p_1 = \frac{\gamma p_0}{\rho_0} \rho_1$		
geluidssnelheid	$c_s^2 \equiv \gamma p_0 / \rho_0$		3 identieke bronvrije zelfvergelijkinge
laplace operator	$\Delta \equiv \nabla^2 (= \sum \frac{\partial^2}{\partial x_i^2})$ (div grad)		

Oplissing voor cartesische coördinaten (vd Blij - v. Tiel, p. 33A)plaats - tijd separatie: $p_1(x, y, z, t) \equiv g(x, y, z) \cdot f(t)$ levert $\frac{1}{g} \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} = \frac{c^2}{g} \Delta g$ leden variëren onafhankelijk $\rightarrow \equiv -\omega^2$

$$\rightarrow \begin{cases} \partial^2 f / \partial t^2 + \omega^2 f = 0 \rightarrow f(t) = a e^{i\omega t} + b e^{-i\omega t} & \text{tijd deel} \\ \Delta g + \omega^2 / c_s^2 g = 0 \rightarrow \text{separatie voor } x, y, z \rightarrow g_1(x) g_2(y) g_3(z). \end{cases}$$

$$\text{levert } \frac{\partial^2 g_1}{\partial x^2} + k_x^2 g_1 = 0 \rightarrow g_1(x) = a_1 e^{ik_x x} + b_1 e^{-ik_x x} \text{ etc.}$$

samen:

$$p_1 = p_0 R e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} \pm \omega t)}$$

$$v_1 = c_s M e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} \pm \omega t)}$$

$$p_1 = p_0 \Gamma e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} \pm \omega t)}$$

met $\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)$

$$k^2 = |\vec{k}|^2 = \omega^2 / c_s^2$$

$$\text{met } R = \left| \frac{p_1}{p_0} \right| = M; \quad P = \gamma M. \quad \text{Dus alles ok als } M \ll 1. \quad \text{zelfgetal (V.5)}$$

voor $kx = 2\pi$ een hele golf $\rightarrow x = \lambda$ golflengte; $k = 2\pi/\lambda$ zelfgetalvoor $\omega t = 2\pi$ een hele golf $\rightarrow t = P$ periode; $\omega = 2\pi/P = 2\pi \nu$ hoofdfrequentie

* geluids golf eigenschappen

$$\frac{\rho_1}{\rho_0 R} = \frac{P_1}{P_0 Z} = \frac{v_1}{c_s M} = x \quad ; \quad i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$$

Compressie golf

- lokale golf

Op één tijdstip $t = t_0$: ρ_1 volgt in fase met $\vec{u} \cdot \vec{r} = c$,
loodrecht op \vec{k} en \vec{v} ($\vec{k} \parallel \vec{v}$ - se na)

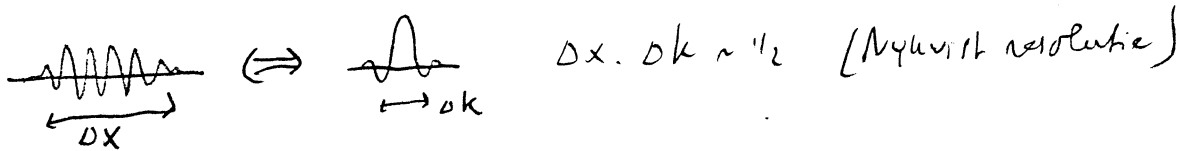
- fase snelheid = golf top voortplantings snelheid

reem golf in \vec{x} : $\vec{v} = (\dot{x}, 0, 0)$, $\vec{k} = (k_x, 0, 0)$

Opp. van gelijke fase: $k_x x - \omega t$ constant $\rightarrow x = \frac{\omega}{k_x} t + c$
 \rightarrow fase snelheid $v_f = \omega/k \equiv c_s$

- groepsnelheid = golfkruin voortplantings snelheid

Echte signalen nooit monochromatisch \rightarrow golfpakketjes:



Hoe snel gaat 't golfpakketje, i.e. de omhullende?

Fourier modulatorie theorema: omhullende \Leftrightarrow verschuiving

$$\text{dus: } e^{i[(\vec{k} + \delta\vec{k}) \cdot \vec{r} - (\omega + \delta\omega)t]} = e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} e^{i(\delta\vec{k} \cdot \vec{r} - \delta\omega t)}$$

dus groepsnelheid $v_g = \frac{\partial\omega}{\partial k}$ golf omhullende

Als de golfamplitude energie dichtheid impliceert, is dit de voortplantings snelheid van de energie = pakhetje golfkruin

- dispersie relatie $|\vec{k}|^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2}{c_s^2}$ (I.6)

"diagnostisch" k - ω diagram:

- gearceerd: lopende golven

- grenslijn: $k_y = k_z = 0$

golven in x richting;

lange periodes alleen voor grote λ_x

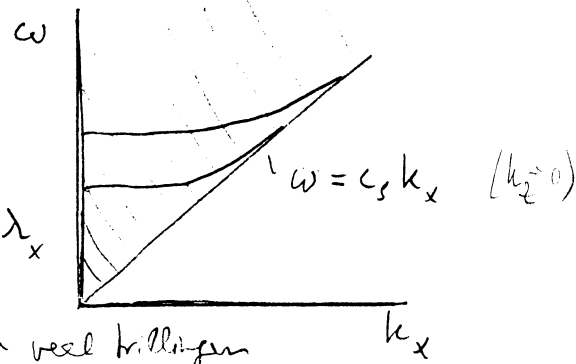
- niet-gearceerd: periode te groot

voor de golflengte, c_s te klein om veel trillingen

in lokale Δx te passen. Oplossingen alleen als

$k_y^2 < 0$ of $k_z^2 < 0 \rightarrow$ imaginair \rightarrow exponentieel $\left\{ \begin{array}{l} \text{groei} \\ \text{afval ipv golf} \end{array} \right.$

- herinner: voor vaste $k_y^2 + k_z^2$: $\omega = \sqrt{c_s^2 k_x^2 + c}$



* oplossing voor bol coördinaten

[Sferische harmonischen: vd Blij + v Tiel p. 337; Jackson chapt. 3; Mathews + Walker (XIV B 2.9) chapt. 8; MacRobert (XIV B 1.77) p. 7-70 + p. 121-124; etc. etc.]
 ↳ (hier)

Voor vlakke lege geometrie hadden we: $\rho = \sum A e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} \pm \omega t)}$
 dus ontwikkeling in orthonormaal stelsel van Fourier-reeks termen. L want lineaire dvgln: $\rho = \sum \rho_l$.


Na bol geometrie:
 zelfvergelijking $\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 \rho$ (homogene hyperbolische lineaire 2'nde dvgl)

tijd-ruimte separatie: $\rho(x, y, z, t) \equiv g(x, y, z) \cdot f(t)$

substitue
 deling door $f \cdot g$ } $\rightarrow \frac{1}{g} \frac{d^2 f}{dt^2} = \frac{c^2}{g} \Delta g \equiv -\omega^2$ want onafhankelijke variatie

$\Delta g + k^2 g = 0$ ($k^2 = \omega^2/c^2$)
 (Helmholtz vgl.; voor $k^2 = 0$: Laplace vgl.) $\left. \begin{array}{l} \frac{d^2 f}{dt^2} + \omega^2 f = 0 \rightarrow f(t) = A e^{\pm i\omega t} \\ t\text{-deel (V.7)} \end{array} \right\}$

In bolcoördinaten:

 $\left. \begin{array}{l} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{array} \right\} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial g}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial g}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 g}{\partial \varphi^2} + k^2 g = 0$
 (vd Blij + v Tiel p. 99)

separeren naar de drie variabelen: $g \equiv R(r) \cdot \Theta(\theta) \cdot \Phi(\varphi)$

substitue
 deling door $R \cdot \Theta \cdot \Phi$ } $\frac{1}{r^2 R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{r^2 \Theta \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \frac{1}{r^2 \Phi \sin^2 \theta} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = -k^2$

vermenigvuldig met $r^2 \sin^2 \theta \rightarrow$ 3^e term LHS hangt alleen af van φ
 1+2^e term LHS hangen alleen af van r en θ

dus onafhankelijkte $\rightarrow \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} \equiv -m^2 \rightarrow \Phi = e^{\pm im\varphi}$
 φ -deel (V.8)

kerf erin, voor r, θ deel; vermenigvuldig met r^2

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{\Theta \sin^2 \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} = -r^2 k^2$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{f(r)} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{f(\theta)} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{f(\theta)} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{f(r)}$

separeren naar r en θ :

Θ : $\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \Theta \equiv \text{konstante} \times \Theta \equiv -l(l+1) \Theta$ (V.9)

R: $\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \left(k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) R = 0$ (V.10)

Oplissing radiale deel

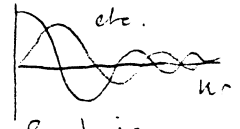
vervang $R \equiv u/\sqrt{r}$ in (V.10):

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} + \left[k^2 - \frac{(l+1/2)^2}{r^2} \right] u = 0$$

dit is de Bessel vgl. $x^2 y'' + xy' + (x^2 - m^2)y = 0$ met $x \rightarrow kr$, $m \rightarrow l+1/2$.

Oplissing: som van Bessel functies $J_{l+1/2}(kr) / \sqrt{r}$ worden aangeduid voor "sferische Bessel functies";

(Abramowitz + Stegun, hapt. 10); waar we later 4 radiale deel hier verder onbenoemd omdat een ster toch niet homogeen is.



Oplissing l deel: vervang $\cos \theta = x$ in (V.9):

$$(1-x^2) \frac{d^2 \Theta}{dx^2} - 2x \frac{d\Theta}{dx} + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] \Theta = 0$$

(dit is de toevoeging)

"Toegevoegde Legendre vgl". Oplissingen: "Toegevoegde Legendre functies":

$$P_l^m(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{dit is de afgeleide van Legendre} \\ \text{polynoom } P_l(x) = \frac{1}{2^l n!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2-1)^l \end{array} \right.$$

(= 0 voor $|m| > l$)

Totale oplossing dus:

$$\psi(r, \varphi, \theta, t) = \begin{bmatrix} e^{+i\omega t} \\ e^{-i\omega t} \\ \text{tijd} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{+im\varphi} \\ e^{-im\varphi} \\ \text{azimutueel} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_l^m(\cos \theta) \\ \text{latitudoonaal} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_{l+1/2}(kr) / \sqrt{r} \\ \text{radiaal} \end{bmatrix}$$

met [...] = iedere lineaire combinatie termen toegestaan

dus:

$$\psi(r, \varphi, \theta, t) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} A_{mn}(r, l) e^{\pm im\varphi} P_l^m(\cos \theta) e^{\pm i\omega t}$$

$$\equiv \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} B_{mn}(r, l) Y_l^m(\theta, \varphi) e^{\pm i\omega t} \quad \left(\begin{array}{l} \text{radiale} \\ \text{deel} \\ \text{onbenoemd} \end{array} \right)$$

ontwikkeling in bolharmonischen, met

$$Y_l^m(\theta, \varphi) \equiv (-1)^m \left[\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \right]^{1/2} P_l^m(\cos \theta) e^{\pm im\varphi}$$

$$= \frac{1}{2^l l!} \left[\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \right]^{1/2} e^{im\varphi} (-\sin \theta)^m \frac{d^{l+m} (\mu^2-1)}{d\mu^{l+m}} \quad (V, 12)$$

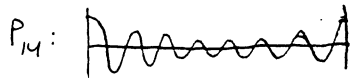
met $\mu = \cos \theta$.

Deze "genormeerde sferische harmonische bolfuncties" vormen een totaal orthogonaal systeem; analoog van Fourier-ontwikkeling voor bol coördinaten.

How zien de Y_l^m eruit?

$m=0$ $e^{im\varphi} = 1 \rightarrow Y_l^0 = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos\theta)$

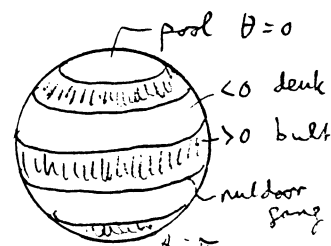
P_l heeft l nullen tussen $\cos\theta = -1$ en $\cos\theta = +1$;



$\cos\theta = \mu = -1$ $\mu = +1$

De nullen liggen symmetrisch rond $\mu = 0$ ($\theta = 1/2\pi$ - evenaar) \rightarrow breedte cirkels

$l+1$ zones van wisselende polariteit; $k_h^2 \equiv l(l+1)/r^2$; $\lambda_h = \frac{2\pi R_1}{\sqrt{l(l+1)}}$



"zonale" harmonischen graad l

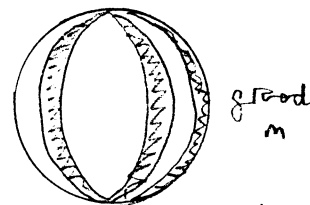
$m=l$

$Y_l^m = c \cdot \sin^l \theta \cdot e^{-il\varphi} = c \cdot (A \cos l\varphi + B \sin l\varphi) \sin^l \theta$

Dit is 0 voor $\theta = 0$ ($\theta = \pi$ (polen))

$\tan l\varphi = -A/B$

$\left\{ \begin{array}{l} l \text{ grote cirkels} \rightarrow 2l \text{ sectoren} \\ \text{sinusappelpartjes} \end{array} \right.$



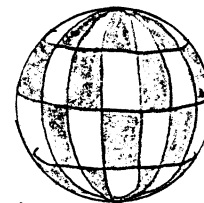
"sectorale" harmonischen

$0 < m < l$

kombinatie \rightarrow ruitjes patroon

l grenslijnen: $|m|$ azimutueel

$l-|m|$ latituudoel



"tesselerde" harmonischen

NB 1.

rotatie assenkwal

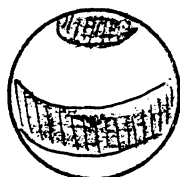
$Y_l^m(\varphi, \theta) = \sum_{m'=-l}^l c_{mm'}^l Y_l^{m'}(\varphi', \theta')$

dit nieuwe ontwikkeling is weer Y met dezelfde l waarde;

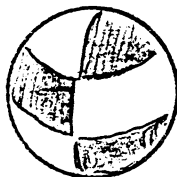
als er rotatie symmetrie is rond willekeurige as degenerereert de

m -ontwikkeling. Alle eigenfrequenties ω_l van gegeven l en verschillende m vallen dan samen.

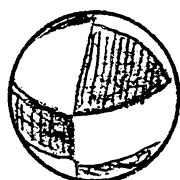
$k_h^2 = k_x^2 + k_y^2$



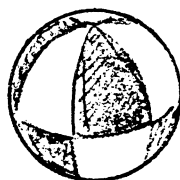
$m=0$



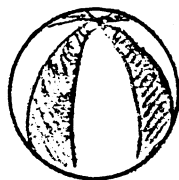
$|m|=1$



$|m|=2$



$|m|=3$



$|m|=4$

(Rotatie v.d. bol \rightarrow voorkeur as \rightarrow schepping m -degeneratie \rightarrow ω splitsing)

Fig. 12.1. Illustrations of spherical surface harmonics $Y_l^m(\theta, \phi)$ with $l = 4$. (Muns et al.)

5.3.5 AG-golven in isotherme atmosfeer

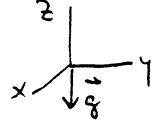
* Isotherme atmosfeer:

(horizontal)

- $\nabla T_0 = 0$

- $\nabla P_0 = \rho_0 \vec{g}$ (uit 5.2 voor $\vec{v}=0$): $\frac{\partial P_0}{\partial z} = -\rho_0 g = -\rho_0 \frac{\gamma}{c_s^2} g \equiv -\rho_0/H$

$H = \text{druk schaalhoogte} = \frac{c_s^2}{\gamma g} = RT/\mu g$ (hier: $= H_p$).

-  x en y zijn gelijkwaardig $\rightarrow k_h^2 = k_x^2 + k_y^2$ als moet

* Lineairiseer de behoudswetten

$\neq 0$ wegen stratificatie

continuïteit: $\frac{\partial \rho_1}{\partial t} = -\rho_0 \nabla \cdot \vec{v} - \vec{v} \cdot \nabla \rho_0$

beweging: $\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \rho_1 \vec{g} - \nabla P_1$ $\vec{v} \equiv (v_h, v_z)$

$\vec{g} = (0, g)$

warmte: $\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \rho_0 = -\gamma \rho_0 \nabla \cdot \vec{v}$

Samenvoeging geeft inhomogene golfvgn. in ρ_1, P_1 en \vec{v} . Bijv. voor \vec{v} :
differentieer bew. vgl. naar t , elimineer $\frac{\partial \rho_1}{\partial t}$ en $\frac{\partial P_1}{\partial t}$, neem samen:

$\frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2} = c_s^2 \Delta \vec{v} - (\gamma - 1) \vec{g} \cdot \nabla \vec{v} - \nabla (\vec{v} \cdot \vec{g})$ waarbij: \vec{g} deel

* oplossing voor verticale beweging: $\vec{v} = (0, v_z)$ $i(k_z z - \omega t)$

$\frac{\partial^2 v_z}{\partial t^2} = c_s^2 \Delta v_z - \gamma g \frac{\partial v_z}{\partial z}$; probeer $v_z = e$

\rightarrow dispersierelatie: $\omega^2 = c_s^2 k_z^2 + i \gamma g k_z$ vierkwadr. vgl.

dus: $k_z = -i \frac{\gamma g}{2 c_s^2} \pm \frac{1}{c_s} \sqrt{\omega^2 - \omega_a^2}$ met $\omega_a \equiv \gamma g / 2 c_s$

en $v_z = e$ $i \left[\pm \frac{z}{c_s} \sqrt{\omega^2 - \omega_a^2} - \omega t \right]$ $\frac{z}{2H}$ $i \left[\pm \frac{z}{c_s} \sqrt{\omega^2 - \omega_a^2} - \omega t \right]$
 $= e \cdot e$ $(\frac{z}{2H}, 13)$

* gevolg: - amplitude neemt \uparrow toe $\sim e^{z/2H} \sim \sqrt{\rho_0(z)}$. \leftarrow leest: $\frac{1}{2} \rho_0 v^2$ konstant
 (merk: na enkele schaalhoogtes $v_z \sim c_s \rightarrow$ niet lineair!)

- $\omega > \omega_a$: lopende vlakke golf

- $\omega < \omega_a$: aperiodische $\left\{ \begin{array}{l} \text{aansluiting} \\ \text{afname} \end{array} \right.$ met $z \left\{ \begin{array}{l} \text{als energiebron} \uparrow \\ \text{als energiebron} \downarrow \end{array} \right.$

"Evanescente" golf. Wel golf in t , met
 overal dezelfde fase: hele atmosfeer
 beweegt mee op en neer (verstoring is
 te langzaam \rightarrow geen fasevertraging)

* oplossing voor willokeurige $\vec{v} = (v_h, v_z)$:

Afleiding dispersie relatie (zie Hines of Whitaker):

Substitueer in gelineariseerde behoudswetten:

$$\frac{P_1}{\rho_0 P} = \frac{\rho_1}{\rho_0 R} = \frac{v_h}{X} = \frac{v_z}{Z} \equiv e^{i(k_h x + k_z z - \omega t)}$$

levert dispersie relatie met complexe goedgebalden k_h en k_z .

Op grond van v_z (vorige blz) verwachten we: $\text{Im}(k_z) = \frac{\gamma g}{2c_s^2}$

→ stel $\frac{P_1}{\rho_0 P} = \frac{\rho_1}{\rho_0 R} = \frac{v_h}{X} = \frac{v_z}{Z} \equiv e^{\frac{z/2H}{Z}} e^{i(k_h x + k_z z - \omega t)}$
 expliciet k_h, k_z

Dat levert de polarisatie relaties:

$$\begin{cases} P = \gamma \omega^2 \left[k_z - i \left(1 - \frac{\gamma}{2}\right) \frac{g}{c_s^2} \right] \\ R = \omega^2 k_z + i(\gamma - 1) g k_h^2 - i \frac{\gamma}{2} \frac{g \omega^2}{c_s^2} \\ X = \omega k_h c_s^2 \left[k_z - i \left(1 - \frac{\gamma}{2}\right) \frac{g}{c_s^2} \right] \\ Z_1 = \omega (\omega^2 - k_h^2 c_s^2) \quad (\text{Im. al eruit}) \end{cases} \quad (\text{V}_3, 14)$$

voor erbij in:

$$\omega_a \equiv \frac{\gamma g}{2c_s}$$

$$\omega_g \equiv \frac{g}{c_s} \sqrt{\gamma - 1}$$

$$\omega_g < \omega_a \text{ want } \gamma < 2; \quad \gamma = 5/3 \rightarrow \omega_g = 0.9 \omega_a$$

en de dispersie relatie, in diverse bewerkingen ($k^2 = k_h^2 + k_z^2$):

$$\begin{cases} (\omega^2 - \omega_a^2)^2 \frac{\omega^2}{c_s^2} - \omega^2 (k_h^2 + k_z^2) + \omega_g^2 k_h^2 = 0 & (a) \\ \omega^4 - \omega_a^2 \omega^2 - c_s^2 k^2 \omega^2 + c_s^2 k_h^2 \omega_g^2 = 0 & (b) \\ k_h^2 = \frac{(\omega_a^2 - \omega^2) \omega^2 / c_s^2 + \omega^2 k_z^2}{\omega_g^2 - \omega^2} & (c) \\ k_z^2 = (\omega_g^2 - \omega^2) k_h^2 / \omega^2 - (\omega_a^2 - \omega^2) / c_s^2 & (d) \\ \omega^2 = \frac{1}{2} \left[\omega_a^2 + c_s^2 k^2 \pm \sqrt{(\omega_a^2 + c_s^2 k^2)^2 - 4 c_s^2 k_h^2 \omega_g^2} \right] & (e) \end{cases} \quad (\text{V}_3, 15)$$

De imaginaire delen van de amplitudes P, R, X en Z zijn faseverschuivingen: b.v. $X = \text{Re}(X) + i \text{Im}(X) \equiv |X| e^{i\varphi}$

$$\rightarrow v_h = |X| e^{i\varphi} e^{\frac{z/2H}{X}} e^{i(k_h x + k_z z - \omega t)} = |X| e^{\frac{z/2H}{X}} e^{i(k_h x + k_z z - \omega t + \varphi)}$$

$$\varphi = \arctan \left(\frac{\text{Im}(X)}{\text{Re}(X)} \right) \quad (\text{V}_3, 16)$$

* allerlei eigen schappen

- ω_g $\omega_g \equiv \frac{g}{c_s} \sqrt{\gamma-1}$ en $N_{BV}^2 = \frac{g^2}{c_s^2} (\gamma-1) + \frac{g}{T} \frac{dT}{dz}$ (p. 67)

dit ω_g = Brunt-vaisälä frequentie in isotherme atmosfeer
 was cutoff frequentie: $\omega > \omega_g$ geen gravitatiegolven

verder: $\omega_g < \omega_a$ want $\gamma < 2 \rightarrow 2\sqrt{\gamma-1}/\gamma < 1$

$\gamma = 5/3 \rightarrow \omega_g = 0.98 \omega_a$ dus vrijwel gelijk

(niet in niet-isotherme atmosfeer: dan $\frac{dT}{dz}$ in N^2)

stel $\omega_a = \omega_g$, voer in $L^2 = k_h^2 c_s^2$, werk $\frac{d^2}{dz^2}$ (V.15 d) om:

$$k_z^2 = \frac{1}{\omega^2 c_s^2} (\omega_g^2 - \omega^2) k_h^2 c_s^2 - \frac{1}{\omega^2 c_s^2} (\omega_a^2 - \omega^2) \omega^2$$

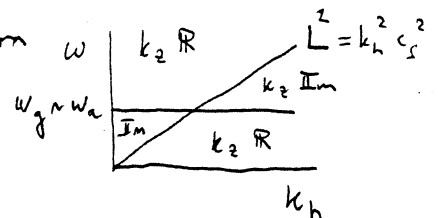
$$\approx \frac{1}{\omega^2 c_s^2} (\omega^2 - \omega_g^2) (\omega^2 - L^2) \quad (V.17)$$

dit k_z^2 reëel als $\begin{cases} \omega > \omega_g & \text{en} & \omega > L \\ \omega < \omega_g & \text{en} & \omega < L \end{cases}$

dit globaal diagnostisch diagram

als op p. 74, maar nu

met de ω + tweede gebied



- $\omega_g < \omega < \omega_a$: (V.15 d) $\rightarrow k_z^2 < 0$ voor alle $k_h \rightarrow$ evanescente golf in z
 horizontaal: $\omega \equiv \omega_a \rightarrow k_h^2 = -\omega^2 |k_z^2| / (\omega_g^2 - \omega_a^2) > 0 \rightarrow$ alle k_h
 $\omega \downarrow \omega_g \rightarrow k_h^2 \rightarrow \infty$

dit compleet k-w diagram:

blank: $k_z^2 < 0$ evanescent
 (wel golf k_h, ω : alle 2 deinst mee)

\\\\: "fast mode" lopende golf;
 (grav. gemodificeerde) A-golven;
 + in vgl. (V.15 e) ($P \equiv$ pressure)

////: "slow mode" lopende golf;
 (akoust. gemodificeerde) G-golven; - in vgl. (V.15 e).

---: loci voor vaste k_z (V.15 b) \rightarrow hyperbolen;

{ bovenste heeft $\omega^2 = \omega_a^2 + k_z^2 c_s^2$ voor $k_h = 0$
 { onderste heeft $(\omega_g^2 - \omega^2) \sim k_z^2 / k_h^2$ (V.15 d) \rightarrow dicht bij ω_g voor $k_h = 0$ }
 pijlen: verschuiving loci bij benaamde k_z

/: scheve grens: P gebied: $\omega^2 = L^2 = k_h^2 c_s^2$
 G gebied: $\omega^2 = (\frac{\omega_g}{\omega_a})^2 k_h^2 c_s^2$ } $k_z = 0$ hor. zittende golven
 "hamb waves"

* : twee wortels ω voor gegeven k_h, k_z (V.15 e)
 dus vrijwel gelijk

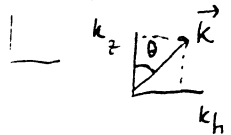
* fase snelheid

$$v_f^2 \equiv \omega^2/k^2 = \frac{1}{2} \left[\frac{\omega_a^2}{k^2} + c_s^2 \pm \sqrt{\left(\frac{\omega_a^2}{k^2} + c_s^2\right)^2 - 4c_s^2 \sin^2 \theta \frac{\omega_g^2}{k^2}} \right] \quad (\text{V.18})$$

in P-gebied: $v_f \geq c_s$, en $v_f \downarrow c_s$ als $\omega \uparrow$

in G-gebied: $v_f < c_s$, en $v_f = 0$ voor $\theta = 0^\circ, 180^\circ$:

(gravitatie golven kunnen niet ↓ voortplanten)
(want "bellen" veranderstellen ↔ info-uitwisseling)



* groepsnelheid

$v_g \equiv \frac{\partial \omega}{\partial k}$ (zie terug - snelheid versterking = modulatie golf)
schrijf vgl. (V.15b) als $\Delta = 0$, dan $\frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{\partial \omega}{\partial \Delta} \frac{\partial \Delta}{\partial k} = -\frac{\partial \Delta}{\partial k} / \frac{\partial \Delta}{\partial \omega}$:

$$v_{g_h} = \frac{c_s^2 (\omega^2 - \omega_g^2) k_h}{\omega (2\omega^2 - \omega_a^2 - c_s^2 k^2)} \quad v_{g_z} = \frac{c_s^2 \omega^2 k_z}{\omega (2\omega^2 - \omega_a^2 - c_s^2 k^2)} \quad (\text{V.19})$$

met teken noemer = teken wortel hierboven en (V.15e)

In P-gebied: $v_{g_i} = \alpha^2 k_i$

in G-gebied: $v_{g_h} = \alpha^2 k_h$ want $\omega^2 < \omega_g^2$; $v_{g_z} = -\alpha^2 k_z$ } beide $|v_g| < c_s$

Dus g-golven die omhoog lopen (dat kan alleen schief),
transporteren energie omlaag

* P-gebied

linksboven in k-w diagram

$\omega \gg \omega_a$: (V.15) $\rightarrow \omega^2 = c_s^2 k^2$ zuivere geluidsgolven

rechts { snelheden: (V.18) & (V.19) reduceren tot $v_f = c_s$; $v_{g_i} = \frac{c_s^2}{\omega} k_i$
Polarisatie relaties (V.14): $q, k_x^2 \ll \omega^2$
→ alle imaginaire termen verwaarloosbaar
→ p, P, v_h, v_z in fase: longitudinale trilling richting \vec{k} .
Isotrop; amplitude's $X/Z = k_x/k_z$.

* E-gebied

k_z imaginair, k_h vrij. \vec{P} imaginair, \vec{Z} reëel (zie V.14),
dus drukvariaties en snelheidsvariatie 90° uit fase.

* G-gebied

rechts onder

$$k_h^2 \gg \omega_g^2/c_s^2 \quad (\text{V.15a}) \rightarrow \omega^2 = \frac{k_h^2}{k_h^2 + k_z^2} \omega_g^2 = \sin^2 \theta \omega_g^2 \quad (\text{V.20})$$

is dispersie relatie voor pure interne g golven

$\omega \leq \omega_g$; $\theta = 0, \pi$ mag niet; sterke anisotropie

(NB: zee golven zijn anders: k_z imaginair ipv $k_z \equiv k_z + i \frac{\gamma g}{2c_s^2}$)

* golfgetal diagrammen (zie Hines) als samenvatting.

Tot de vier naar ω opgelost voor gegeven k_h . Nu k_h versus k_z per ω :
 Dispersie vergelijking in meer andere omschrijving (V. 15):

$$\frac{(\omega_g^2 - \omega^2) k_h^2 - \omega^2 k_z^2}{(\omega_a^2 - \omega^2) \omega^2 / c_s^2} = 1$$

P gebied: $\omega > \omega_a > \omega_g$: $-\alpha^2 k_h^2 - \beta^2 k_z^2 = 1 \rightarrow$ ellipsen

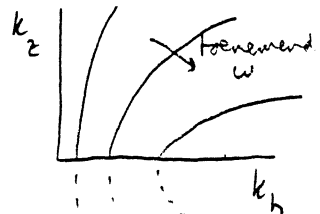
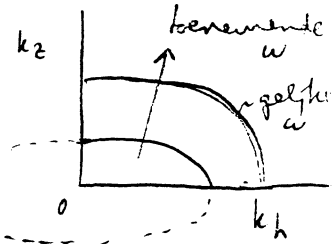
$\omega \gg \omega_a$: $\frac{k_h^2}{\omega^2/c_s^2} + \frac{k_z^2}{\omega^2/c_s^2} = -1$ cirkels

G gebied: $\omega < \omega_g < \omega_a$: $+\alpha^2 k_h^2 - \beta^2 k_z^2 = 1 \rightarrow$ hyperbolen

$\omega \sim \omega_g$: $k_z \ll k_h$

$\omega \downarrow 0$: $k_z \gg k_h$

(Eigentlich zie dit oppervlakken)
 immers, $k_h \equiv (k_x, k_y)$.

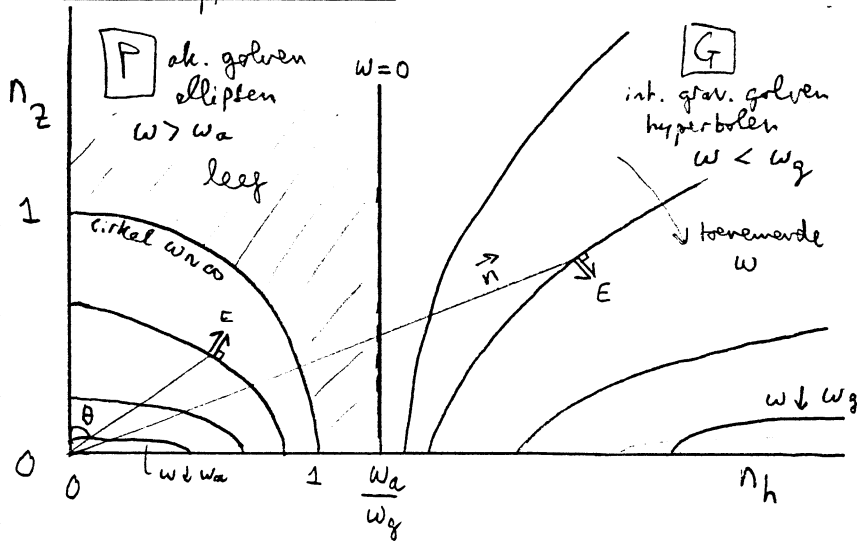


Maak met genormeerde golfgetallen:

("brekings"-) index $n_h \equiv \frac{c_s}{\omega} k_h$, $n_z \equiv \frac{c_s}{\omega} k_z$, $\vec{n} = \frac{c_s}{\omega} \vec{k}$
 $|\vec{n}| = \sqrt{n_h^2 + n_z^2}$

$$\rightarrow \frac{\omega^2 - \omega_g^2}{\omega^2 - \omega_a^2} n_h^2 + \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_a^2} n_z^2 = 1$$

"Index" oppervlakken met vaste ω worden:



fase snelheid

$v_f \equiv \omega/k = c_s/n$
 $\geq c_s$ voor P; $< c_s$ voor G

groepsnelheid / energie stroom

$\vec{v}_g = \partial \omega / \partial \vec{k}$
 kan truster ook ongefieven;
 wijzigt $\vec{n} \parallel \vec{k}$ met ω oppervlakte;
 $\vec{v}_g \perp$ indexopp, voor $\partial \omega > 0$.

Geluids golven (P): fase, energie vrijwel \parallel ; alle richtingen; kleine n_z voor $\omega \downarrow \omega_a$.

Int. grav. fatic golven (G): grote hoek als $n_z > 0$; niet vertikaal; kleine n_z voor $\omega \uparrow \omega_g$

Fase loopt omhoog \leftrightarrow energie loopt omhoog!

Extremen: $\omega = \infty \rightarrow n_h^2 + n_z^2 = 1$ cirkel pure P golven, $\vec{v}_f \parallel \vec{v}_g$

$\omega = 0 \rightarrow \frac{-\omega_g^2}{-\omega^2} n_h^2 + 0 \cdot n_z^2 = 1 \rightarrow n_h = \omega_a / \omega_g$ voor alle n_z
 verticale rechte pure G golven

$\omega \downarrow \omega_a$: krimpende ellips; $\omega \uparrow \omega_g$: \rightarrow verschuivende, plattere hyperbool

5.3.6 MAF golven (p.m.)

Lorentzkracht erbij in bewegingsvgl. levert golfvgl:

$$\frac{\partial^2 \vec{v}_i}{\partial t^2} = c_s^2 \Delta \vec{v}_i - (\gamma-1) \vec{g} \cdot \nabla \vec{v}_i - \vec{\nabla} (\vec{v}_i \cdot \vec{g}) - \frac{1}{4\pi\beta_0} H_0 \wedge (\nabla \wedge (\nabla \wedge (\vec{v}_i \wedge \vec{H}_0)))$$

De dispersievgl. is 6^e orde in k en in ω ! Complicaties zijn:
 extra herstellende kracht \rightarrow extra golfmoden } allerlei mogelijkheden.
 \vec{H} is een vector \rightarrow extra projecties

Splitting levert (Mchellan + Winterberg 1968 Solar Phys. 4, 401;
 samenvattingen in boeken Bray + Loughhead, Athay)
 [Alfvén snelheid $c_A = H_0 / \sqrt{4\pi\beta_0}$; $\vec{H} // z$ as genomen]:

magneto-akustische golven ($g=0$, homogeen gas; $\rho = \rho_0$, overal):

$$\omega^4 - (c_s^2 + c_A^2) k \omega^2 + c_s^2 c_A^2 k_z^2 = 0 \quad \text{en} \quad \omega^2 - c_A^2 k_z^2 = 0$$

$$v_g^2 = \frac{1}{2} (c_s^2 + c_A^2) \pm \frac{1}{2} \sqrt{(c_s^2 + c_A^2)^2 - 4c_s^2 c_A^2 \cos^2 \theta}$$

(Kouverse golven)
 (= Alfvén punt)
 "slow mode" & "fast mode"
 $v_g < \min(c_s, c_A)$; $> \max(c_s, c_A)$

magneto-gravitate golven ($g \neq 0$).

Bovendien benadering (\sim "gegeneraliseerde" WKB methode):

neem ρ_0 lokale constant, ρ_0 alleen meegenomen in β_0, \vec{g}

(lood als $k_z \gg 1/2 H$):

$$\omega^4 - \omega^2 [(c_s^2 + c_A^2) k^2 + i g k_z] + g^2 (\gamma-1) (k^2 - k_z^2) + c_s^2 \frac{(\vec{H}_0 \cdot \vec{k})^2}{4\pi\beta_0} k^2 + i g \gamma \frac{H_z (\vec{H}_0 \cdot \vec{k})}{4\pi\beta_0} = 0 \quad \text{en} \quad \omega^2 = \frac{(\vec{H}_0 \cdot \vec{k})^2}{4\pi\beta_0}$$

levert weer fast + slow modes

Alfvén mode

Ook weer: complexe ampl. fact's \rightarrow termen $e^{\Phi(z)}$ voor exponentieel afnemende ((groeiende)) amplitudo's. Ook "wave steepening":

$$c_s = \sqrt{\frac{RT}{\mu}} \sim \sqrt{T} \quad \rightarrow \text{in fotosfeer-chromosfeer: } c_s \sim 10 \text{ km/s (Hiaitake } \gamma+1)$$

$$c_A = H_0 / \sqrt{4\pi\beta_0} \sim \frac{1}{\sqrt{\rho}} \quad \rightarrow \text{in fotosfeer-chromosfeer voor snelle toename met } z. \rightarrow \text{eerder schok, niet-lineaire effecten, dissipatie.}$$

Magnetveld verder "pro memoria" gelaten; fluxbuis golven: zie terug.

5.3.7 Dissipatie

Dissipatie tot dusver verwaarloosd. We blijven verwaarlozen:

- schok dissipatie ($v \ll c_p$) - goed in sterren, niet voor corona,
- viscositeit, geleiding.

Wel belangrijk: stralings dissipatie. Term $-\nabla_{\text{rad}} \cdot \vec{F}$ moet in energievgl.

De klassieke benaderingen zijn:

optisch dik: diffusie benadering $\frac{\partial^n B}{\partial \tau^n} = 0$ voor $n \geq 2$ (Mihalas p.49) 1978
 $\rightarrow \vec{F}_v(\tau, \mu) \approx B_v(\tau) + \mu \frac{dB_v}{d\tau}$
 $f_v \approx B_v \approx 3k_v$ ($K = \frac{1}{2} \int \mu^2 I d\mu$)

en:

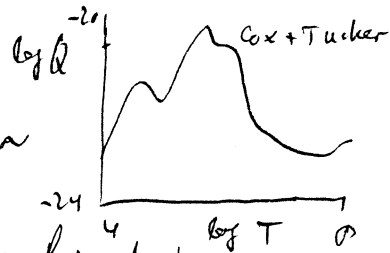
$$F \approx -\frac{4\pi}{3k_p} \nabla B = -\frac{4\pi}{3k_p} \frac{dB_{\pm}}{dT} \nabla T$$
 ($B_{\pm} = \sigma T^4 = (B d\lambda)$)

Goet fout als verstoringen optisch dun worden, dus bij hoge frequenties als golflengte \ll vrije weglengte fotonen. Klassiek: Herinvendige

optisch dun Newton'se koelings benadering:

Op z'n minst: $\nabla \cdot F = Q(T) n_e^2$ met $Q(T) \sim$
 Bevat allerlei excitatie/ionisatie verliezen etc.

Goet fout als verstoringen optisch dik worden; lage frequenties



beide: Eddington approximatie: $f = 3k$; $\nabla \cdot H = k(B - f)$ recht voor $\tau \ll 1$!

Afgeleid voor isochroon stralingsveld (zie diffusie ↑), maar is ook goede benadering voor optisch dunne omstandigheden (Kunze + Spiegel, 1966: PAJ 18 25)

$$\vec{F}_{\text{rad}} = -\frac{4\pi}{3k_p} \nabla f$$

met $f = \frac{\sigma}{\pi} T^4 + \frac{c_p}{4\pi k} \left(\frac{dT}{dt} - \nabla_{\text{ad}} \frac{T}{p} \frac{dp}{dt} \right)$ gemiddelde interne τ

Deze wordt vaker gebruikt voor golfberekeningen seismologie + atmosfeer.

Volg mee er: Mihalas + Mihalas 1983 Ap. J. 273. 355 (net niet)

(Blijftbaar schrijven drie een boek "Radiation hydrodynamics"!)

geluidsgolven } met inbegrip van tijdsafhankelijkheid
 Eddington benadering } en dynamische eigenenschappen van \vec{F}
 \rightarrow uitgebreide dispersie vgl. met gedempte geluidsgolven
 en Herk - gedempte stralings - diffusie golven.

5.3.8 Trilholtes (O as a *, p. 266 ff)

Een echte ster is niet homogeen of isotherm: c_s , w_a en w_g veranderen; dus verlopen de grenzen in de diagnostische diagrammen. Behyke alleen T afhankelijkheid (veroorloos variatie μ, γ):

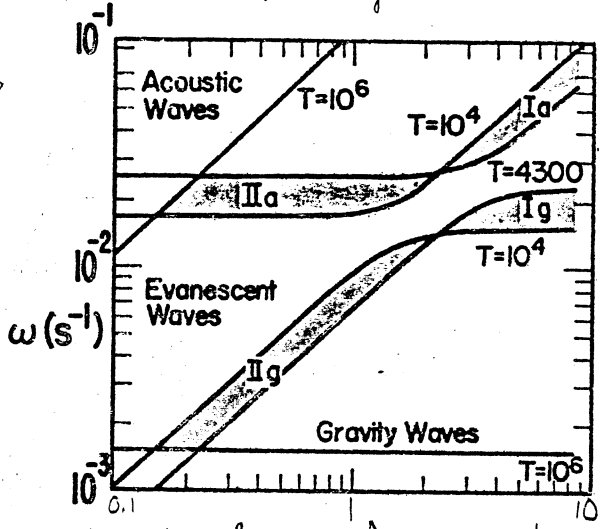
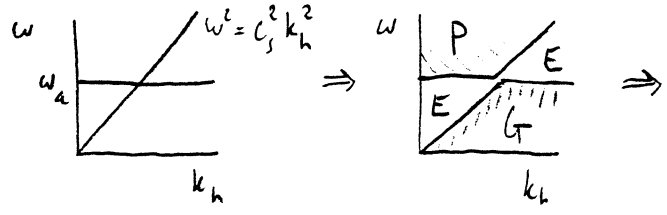
$$c_s = \sqrt{\gamma P/\rho} = \sqrt{\gamma RT/\mu} \sim \sqrt{T}$$

$$w_a = \sqrt{g/\rho c_s} = g/2 \sqrt{\gamma \mu/RT} \sim 1/\sqrt{T}$$

$$w_g \Rightarrow N_{BV}^2 = \frac{g^2}{c_s^2} (\gamma - 1) + \frac{g}{T} \frac{dT}{dz} = \frac{g}{T} \left[\frac{dT}{dz} - \left(\frac{dT}{dz} \right)_{ad} \right]$$

} tegengesteld
} ongeveer selzke behoeve in convectie zone

We nemen de vereenvoudigde grenzen p.do: $N_{BV}^2 \approx w_g^2 \approx w_a^2$, dan:



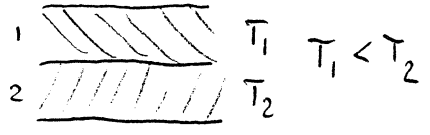
met grens waarden voor 0 atmosfeer (Heibacher + Stern, 1974 Ann. Rev. As. Ap. 12)

λ_h uit: $\lambda_h = \frac{2\pi}{k_h} \left(= 2\pi \frac{R_0}{18(R+15)} \right)$

Een golf die een grens naar 't E-gebied ontmoet zal spiegelen. k_h (Mm⁻¹)

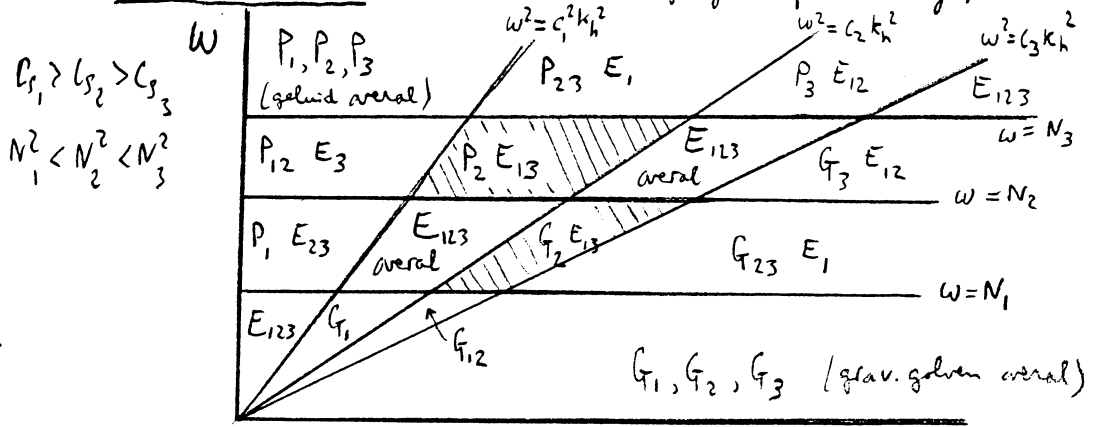
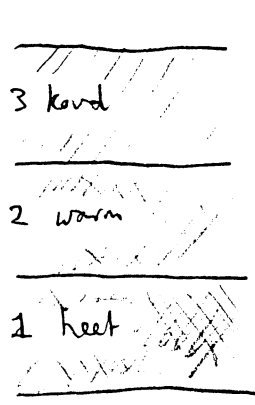
Voorbeelden:

- T-stijping: geluidsgolven in laag 1 stuiten op kettere laag 2. Door c_s groter \rightarrow refractie weg van z-as (snellius). Als $c_s = v_{gh} \rightarrow$ op grenslijn Lamb golven: reflectie
- T-daling: geluidsgolven in laag 2 stuiten op koudere laag 1. Door is w_a groter. Als $w_a \gg w \rightarrow$ reflectie.



Idem voor gravitieke golf reflectie van Lamb-golven grens en N_{BV}^2 maximum. Bij reflectie van boven in onder komt sturende golf-opsluiting!

Voorbeeld:



gevaerd: golf opsluiting in laag 2, k_h verspreide P en G \rightarrow sturende golven

5.3.9 Rotatie

Roterende bol heeft voorkeursas \rightarrow voor elke l $2m+1$ fijnstructuur-frequenties. Bovendien verscheid Euler-Laprange coördinaten:

voorrennen met vast window \rightarrow hier (2m) draait er één heen.
 $\rightarrow \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}_1$ met $v_0 \neq 0$, dus $\vec{v} \cdot \vec{\nabla}(\dots) \neq 0$ in basisvgh.

Bijvoorbeeld: beweegingsvpl. bevat nu

$$(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = \underbrace{(\vec{v}_0 \cdot \nabla) \vec{v}_0}_{-v_0^2/r : \text{centripetale versnelling}} + (\vec{v}_1 \cdot \nabla) \vec{v}_0 + (\vec{v}_0 \cdot \nabla) \vec{v}_1 + (\vec{v}_1 \cdot \nabla) \vec{v}_1$$

$L \approx 0$ ($\sigma_{v_1}^2$)

Verwaarloos v_1/r , v_0/r^2 termen (centripetale versn., coriolis versn.), neem alleen rotatie snelheid $\vec{v}_0 = \partial\varphi/\partial t (r)$ en gradient $\partial\dot{\varphi}/\partial r$ mee:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} &= \frac{\partial\rho}{\partial t} + \dot{\varphi} \frac{\partial\rho}{\partial\varphi} \quad (\text{Laprange} \leftrightarrow \text{Euler overgang}) \\ \text{met (I.11): } \frac{\partial\rho}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \left[\sum B Y_l^m e^{\pm i\omega t} \right] = i\omega\rho \\ \frac{\partial\rho}{\partial\varphi} &= \frac{\partial}{\partial\varphi} \left[\sum A P_l^m e^{i\omega t + \frac{i}{2}m\varphi} \right] = im\rho \end{aligned} \right\} \frac{d\rho}{dt} = i(\omega + m\dot{\varphi})\rho$$

dus de oude vorm weer terug n.a.s $\omega^{obs} = \omega$ ^{geen rotatie} $- m\dot{\varphi}$

Maximale splitting:

$$e^{\pm im\varphi} \quad |m| \leq l \rightarrow m = \pm l : \Delta\omega^{obs} = \omega_{n=l} - \omega_{n=l} = 2l\dot{\varphi} \approx 2k_h v_{rot}$$

Aanrakenwelyk: [Rhodes et al. 1979, Ap.J. 227, 629]

Dopplerverandering voor mee lopende (+m) golf en tegenin lopende golf (-m), in horizontale richting:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = \pm \frac{v_{rot}}{v_{gh}} = \pm v_{rot} \frac{k_h}{\omega} \rightarrow \Delta\omega^{obs} = 2\Delta\omega = 2k_h v_{rot}$$

Dit is dus de splitting tgv. Euler-Laprange overgang. In meedraaiend stelsel is er ook splitting, maar kleiner: $\sim v_0/r$, v_0/r^2 termen: (die geven dan aan dat er een voorkeursrichting is).

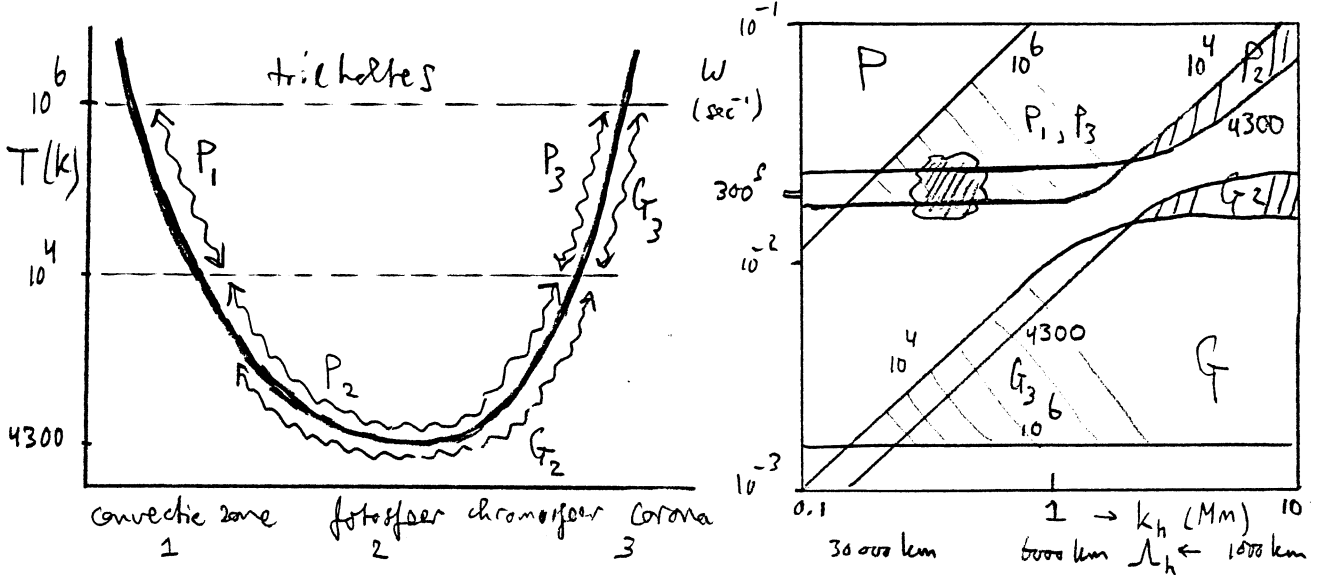
Wolff (1974, Ap.J. 93, 721) moakt veel inferentialer (voor niemand schijnt hem ooit te leren of te geloven...): coriolis kracht + niet-lineaire non-drifting \rightarrow "mode locking" van harmonischen met dezelfde l , verschilden de n . Zie ook Wolff 1976 Ap.J. 205, 612, en Wolff 1979 Ap.J. 227, 943. Best interessant, ook de speculaties!

5.4 Helioseismologie

5.4.1 Trilobes, voortplantings diagrammen

poz. $\delta\tau$: temperatuur gradient \rightarrow spiegelende wand.

Mantel + atmosfeer zon, schematisch:



- top convectie zone: onder heet, boven koud; $N^2 < 0 \rightarrow$ geen G golven
P golven: reflectie onderkant op Lamb lijn 10^6 k; bovenkant op ω_a 10^4 k.
- temperatuur minimum: weerszijden warmer. P golven: reflectie weerszijden op Lamb lijn; G golven weerszijden op N^2 . Alleen grote k_h .
- Grande temp. stijging: onder koud, boven heet; $N^2 > 0$.
P golven: reflectie onderkant op ω_a 10^4 k; bovenkant op Lamb lijn 10^6 k: P_3
G golven: reflectie onderkant op Lamb lijn 10^4 k; bovenkant op N^2 10^6 : G_3
($L\omega = \omega_a/N \cdot c_s k_h$)

De 5 min oscillatie heeft $P = 3000^s$, $\omega = 0.033 s^{-1}$: wolleje.

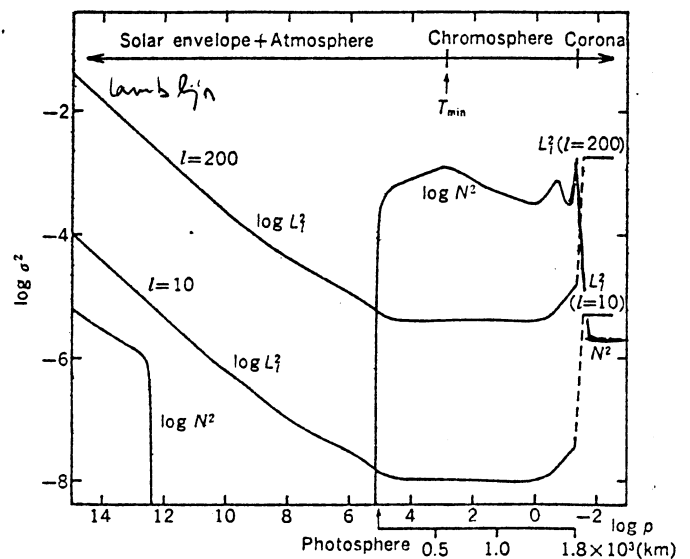
Fotofeer is dan juist evanescent: $\omega < \omega_a^{4300}$. Dus deint mee op en neer, met exponentiële afname. Fotofeer dun \rightarrow tunnelen $P_1 \rightarrow P_3$ mogelijk.

Dit zal met atmosfeer meegenomen worden.

Ando + Osaki introduceerden "voortplantings-diagram" (zonder ω_a^2 : $\sim N^2 = N_{BV}^2$).

Lamb lijn: $\omega^2 = c_s^2 k_h^2 = L^2$ | schuift \uparrow
 $\approx (2\pi\sigma)^2 \approx c_s^2 \frac{l(l+1)}{r^2}$ | voor $l > 1$!

\rightarrow P-holtes hangen van l af.
Waar is de convectie zone?



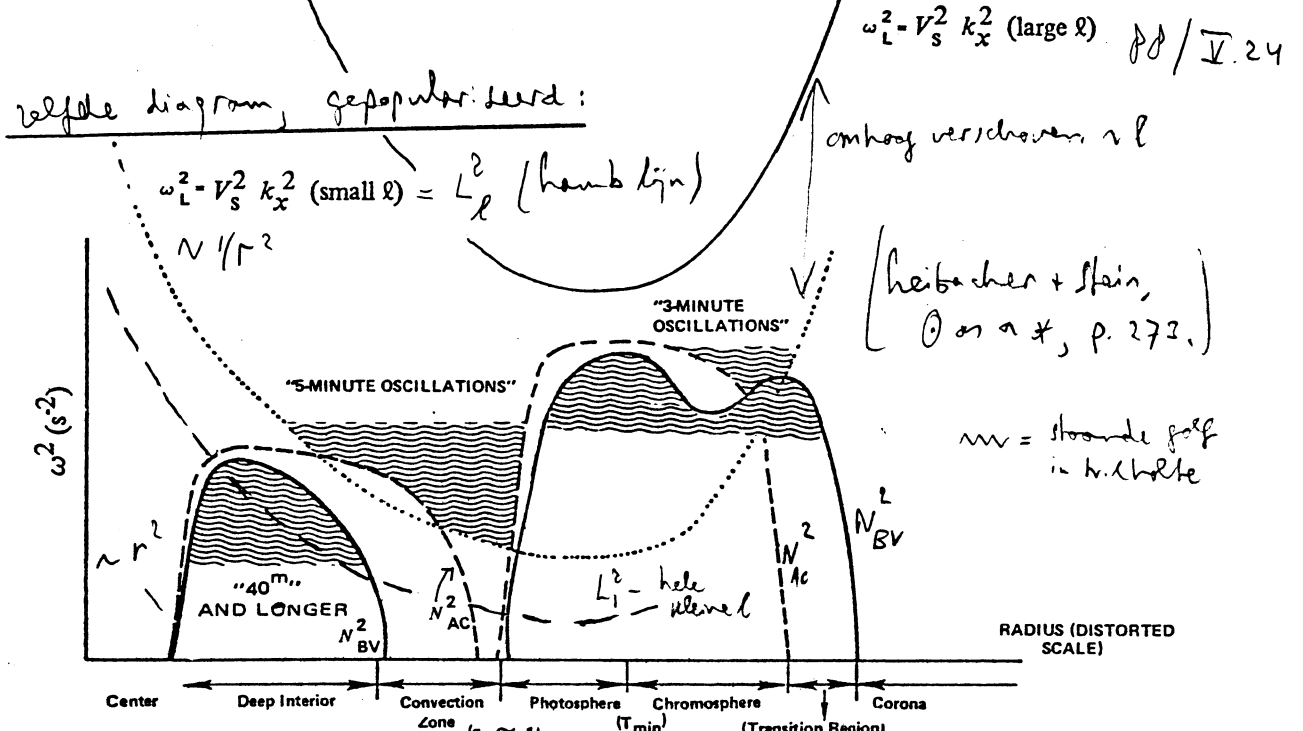


Figure 10-2. Schematic propagation diagram for the Sun (from Ando and Osaki, 1977). The radius axis has been distorted to emphasize the surface layers. Solid line is N_{BV}^2 , dashed line is N_{AC}^2 , and dotted line is $\omega_L^2 = v_s^2 k_x^2$ (Lamb lijn).

Onder N_{BV}^2 : G golven in trillingen; boven $\max\{L_l^2, \omega_a^2\}$: P golven in trillingen.

Centrum zon: $k_h \sim \sqrt{l(l+1)}/r \rightarrow \infty$: Lamb lijn $\sim 1/r^2$

$N_{AC}^2 \sim N_{BV}^2 \sim g = G \frac{M(r)}{r^2} \sim r \rightarrow N^2 \sim r^2$

\rightarrow alleen radiale ($l=0$) golven bereiken centrum; alle andere koaxen erbuiten.

geluids golven steken dieper voor toenemende ω , afnemende k_h .

Convective zone $N_{BV}^2 < 0$ volgens $\frac{dT}{dz} < 0$: $N_{BV}^2 = \frac{g^2}{c_s^2} (\gamma - 1) + \frac{g}{T} \frac{dT}{dz}$

$N_{AC}^2 (= \omega_a^2) = \frac{g^2}{c_s^2} \frac{\gamma^2}{4}$; $c_s^2 = RT/\mu$. $\rightarrow N_{BV}^2 \ll N_{AC}^2$.

Top convective zone: H ionisatie \rightarrow afname ρ ($\equiv P$) en $\mu \rightarrow$ dip in N_{AC}^2 .

Trillingen voor geluids golven; golven grote l beperkt tot buitenste deel.

Atmosfeer: geluids golven trillingen voor grote ω ; g-golf trillingen worden N_{BV}^2 .

Linkerflank: $|dT/dz|$ klein; γ en μ effect \sim gelijc voor N_{AC} en N_{BV} .

Rechterflank: c_s^2 neemt snel toe; $N_{BV}^2 > N_{AC}^2$ want $\frac{dT}{dz} > 0$.

In de corona is dT/dz klein $\rightarrow N_{BV}^2$ ook weer klein, $\sim N_{AC}^2$.

- $P < 1^m$: ω groot - lopen overal, voor kleine l diep stekend. (No ρ) niet waargenomen
- $P \sim 3^m$: P-trillingen chromosfeer, voortgevoerd uit top convective zone
- $P \sim 5^m$: grote l - top convective zone } convergent in fotosfeer
- kleine l - steeds dieper stekend
- $P \sim 10^m$: mengsel mogelijk: G diep, P convective zone, G fotosfeer
- $P \geq 40^m$: G diep. voor zeer kleine l : spiegeling van binnenste $\omega_L^2 = \frac{N_{BV}^2}{N_{AC}^2} c_s^2 k_h^2$
- \rightarrow diep stekend van allenood (behalve $l=0$).

5.4.2 Mode classificatie

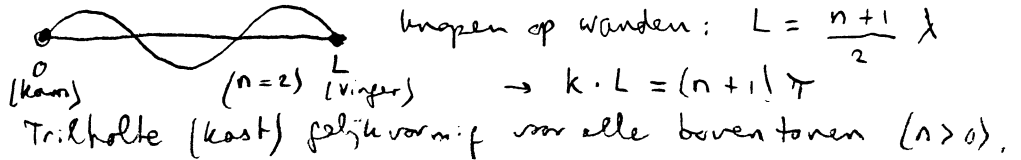
Belharmonische spl. eerder: trilling = $f(t) \cdot R(r) \cdot \Theta(\theta) \cdot \Phi(\varphi)$.

Voor radiale deel varen we nu in: $\omega \quad n \quad l \quad m$

n = aantal knopen ($\vec{v}_z = 0$) in radiale richting.

"Mode" \equiv resonantie = staande trilling, radiaal passend in trilhokke
(i.e. $\Sigma \uparrow$ en \downarrow lopende golven; spiegeling \rightarrow interferentie; etc.)

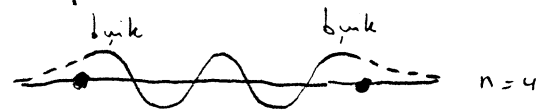
Voorbeeld:



hier: wanden diffuus

exp. afval er buiten niet passen

buiten net binnen "wanden" \rightarrow



$$\int k_z dz = (n + 1/2) \pi$$

Trilhokke hangt sterk van l af: dieper voor kleinere l ,

\rightarrow mode classificatie: $\{n, l, m\}$; ω is dan bepaald.

$E=1$ komt: welke trilhokke - waar wordt de mode ongedreven?

NB: conventionele "lowling" classificatie:

$f = p_0 = (l=0)$ mode ("fundamenteel") - radiaal, diepst-stehend

p_1, p_2 modes: $n=1, 2$ etc, l niet gespecificeerd, geluidsgolven

g_1, g_2 modes: $n=1, 2$ etc, l niet gespecificeerd, int. gravitatiegolven

g_{-1}, g_{-2} modes: $N^2 < 0$, convectie. zie Unno et al. p. 13 ff

Toenemende n betekent toenemende ω voor p golven, dalende ω voor g .

Voorbeeld:

hier netje

solitising;

$\{n, l\}$ indeling

volgende

(Unno et al. p. 117)

knopen

(deze ster heeft geen convectie zone)

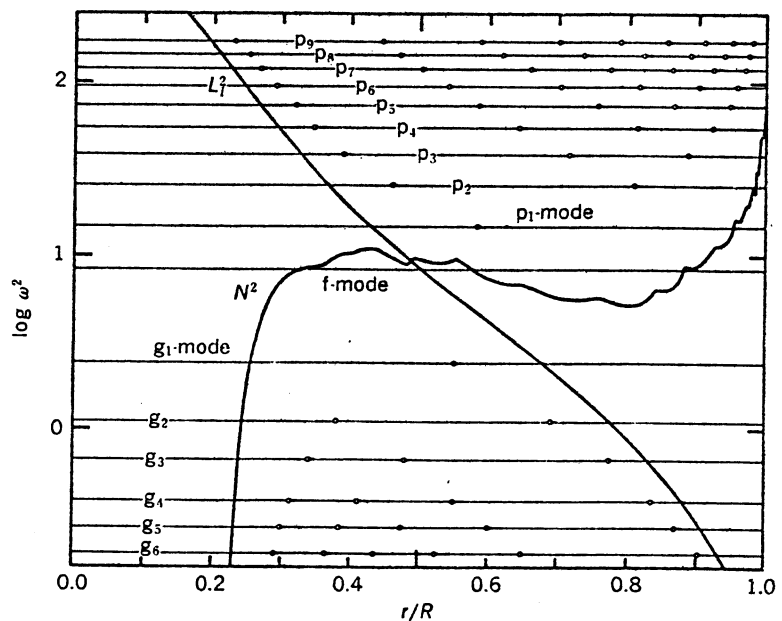
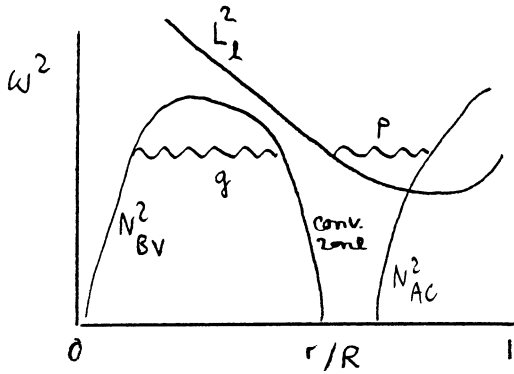
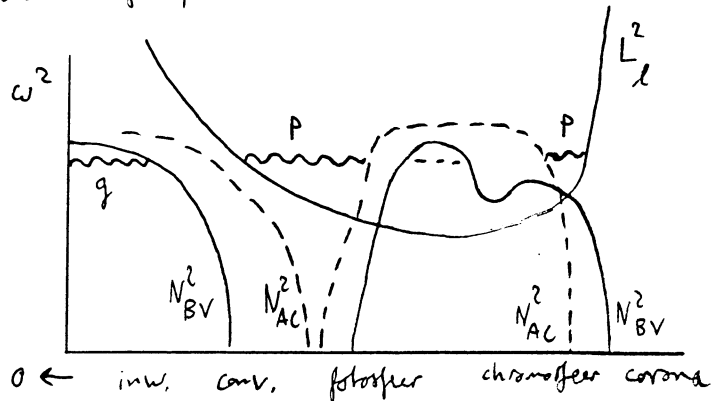


Fig. 16.1. The distribution of eigenfrequencies and that of nodes of the eigenfunctions ξ_r for the ZAMS model of a $10 M_{\odot}$ star in the case of $l = 2$.

Maar dubbel zinnigheden zijn ook mogelijk:



zelfde w, l : 2 holtes



zelfde w, l : 3 holtes. Specieer welke!

NB: Unno et al. produceren voortplantingsdiagrammen met alleen $N^2 \equiv N^2_{BV}$ en L^2_{L1} .

Beter: N^2_{BV} en N^2_{AC} zoals hierboven: schalen alleen in convectieve zone (dT/dz)

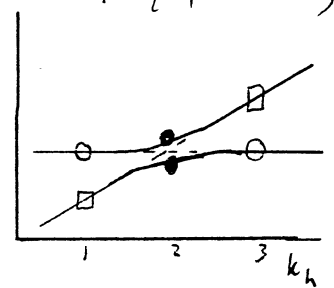
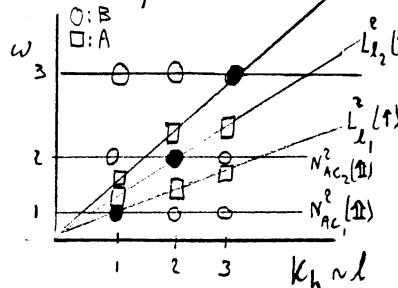
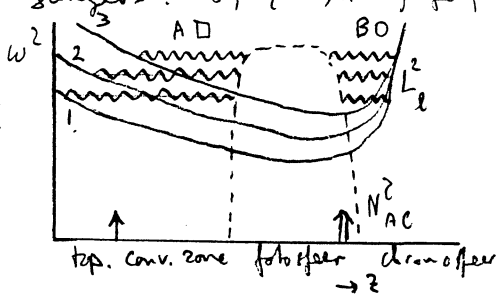
L^2 : $L^2_p = c_s^2 k_h^2$, $L^2_q = \frac{N^2_{BV}}{N^2_{AC}} c_s^2 k_h^2$: schalen alleen in convectieve zone (en daar toch geen g-golven)

[--- in top N^2_{BV} fotosfeer: geen g-golven deze (w, l) want $w^2 > L^2_{L1}$]

[Unno et al. hebben voorbeelden voor jefferen (w, l) mode tijdens evolutie γ ster van g in p verandert; en voeren classificatie scheme in: $k = \{nr. p-knoppen - nr. g-knoppen\}$ als $k < 0$ noemen ze het g-jeff mode, anders p-k modes (p. 123 ff).

Keen analyse berust op "fase diagrammen", afgeleid door benodigende reductie tot Sturm-Liouville theorie (p. 100 ff). De fase diagrammen tonen hoe de fase voor jefferen (w, l) door de ster heen verandert, met onderscheid in g-golf, p-golf, evanescent.]

Hoe beïnvloeden meervoudige trilholtes elkaar? ~ Probleem γ gekoppelde slingers: bij (vrijwel) gelijke w energie overdraagt. Voorbeeld: (2p-zones \uparrow)



A: modes bepaald door L^2_{L1} : / geen koppeling:

B: modes bepaald door N^2_{AC} : — mode lijnen (vaste n) snijden

wel koppeling:

"avoided crossing"

dus: als $\{w, n, l\}$ voor 2 trilholtes \uparrow zelfde vanden zijn, krijg je twee

"pseudo-modes" die beide verschillen in w [zie Unno et al. p. 113 ff].

5.4.3 5^m p-model grote l 0

5.4.3.1 Historie

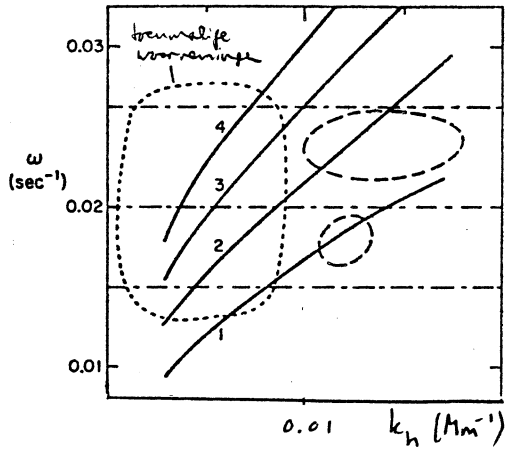
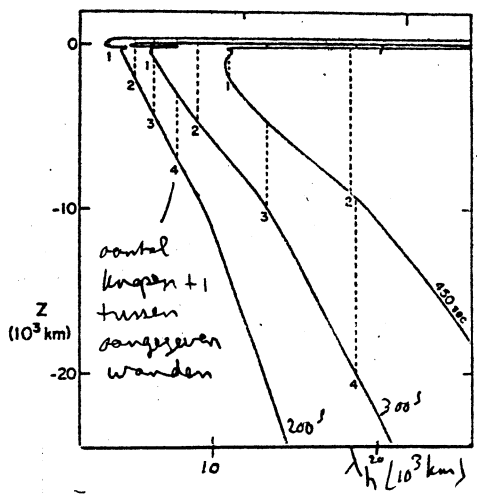
Na ontdekking 5^m oscillatie heighten allerlei getheoretiseer:

AARD	SOORT	SELEKTIE	EXCITATIE
geluidsgolven int. zwaaier.	lopend	fotosfeer filtert	convectieve overshoot
comb: A Γ	staand	5^m aandrijving	Light bulb
Alfvén - MAF Γ	evanescent	trilholte < fotosfeer < chromosfeer	Eddington k super ad. ∇

Dus ruime keus! Overigens: allerlei besprekingen vast nog wel nuttig voor e.g. fluxbuisgolven, grote w golven, G-golven in fotosfeer, etc.
De juiste weg voor de 5^m oscillatie in de rijkte bij is:

* Ulrich, 1970, ApJ. 162, 993: I would like to thank Dr. E. N. Frazier for suggesting that the 5-minute oscillations might be dependent on the subphotospheric layers. I am grateful to Professor R. F. Christy for suggesting that my unexpected result that the oscillations are self-exciting might be more than a numerical error. I wish to thank the Kellogg Laboratory at Cal
"overalsondeeling"

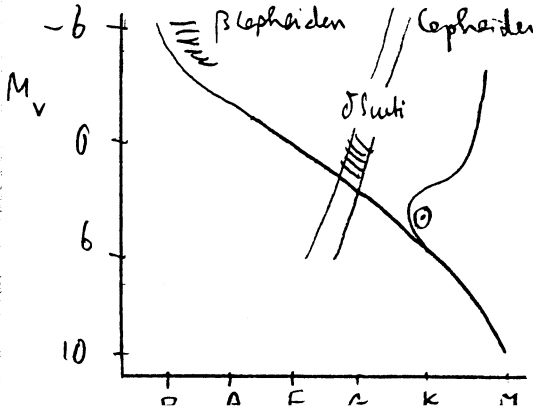
→ basisidee: staande geluidsgolven, zelf versterkend, in trilholte top convectie zone, tussen w_a (boven) en w_b (onder):



+ voorspelling parabolien loci in $k_h - \omega$
[dus: voorspelling details voor voorname: 20 voor het en 20 gebeurt het zelden!]

* Wolff 1972 ApJ. 172, L27: trilholte is driep voor kleine k_h .
→ vlakke lagen geometrie font → bolvorm, 4^m ontwikkeling;
 5^m oscillatie = coherente trilling hele zon, hoge orde l ?


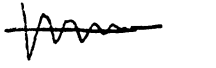
[NB: andere sterren radiale pulsatie ($l=0$): gewone Cepheiden



RR Lyrae
Mira's
maar non-radiale trillingen ($l \geq 1$)
ook (?) in: β Cepheiden sterren
& Sucki - sterren
& Cyg
zie Unwin et al., p. 15 etc.

* Ando + Osaki (1975 PASJ 27, 50. (ook in boek Uno et al.)
 Ando + Osaki 1977 PASJ 29, 221 met atmosfeer: chrom. trillende orb;

Aanpak:

- gelineariseerde behoudsvetten als eerder;
 - stralingsdissipatie met Eddington benadering;
 - ontwikkeling bolharmonischen: $\rho = a Y_l^m(\theta, \varphi) e^{i\omega t}$
- met nu: $\underline{\omega} = \omega_R + i \omega_{Im}$
 $\eta = -\omega_{Im} / \omega_R$ groei/snelheid: $\eta > 0$ 
 $\eta < 0$ 

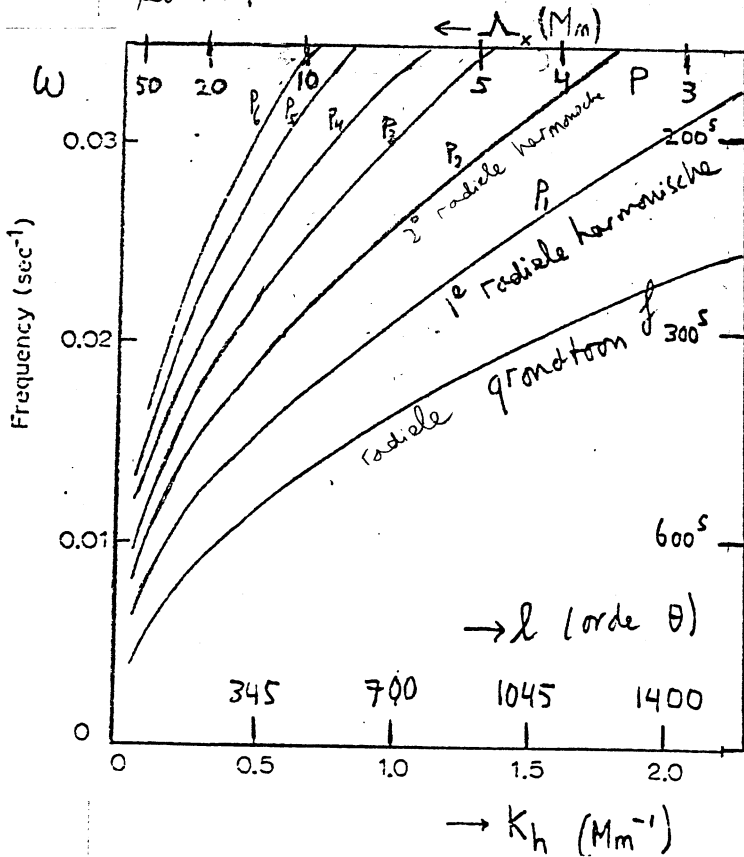
Numerieke oplossing uitwerking u etc. als functie van l:

eigenwaarden probleem \rightarrow staande oscillaties; η bepaalt bestaan.
 Randvoorwaarden: buitenkant - geen lopende golf, geen energiebron;
 binnenkant - binnenste ongestoord.

Rechtste aanname: - model konvectie

- geen interactie trillingen \leftrightarrow konvectie.

levert:



- de discrete punten voor verschillende waarden van l liggen te dicht naast elkaar \rightarrow lijnen per p-orde.
- deze berekening: f niet, P_i wel zelf-exciteerd door overstabiliteit (η)
- k-mechanisme is belangrijkste aandrijfmechanisme - in topdeel konvectie zone (nog onverschoten)
- grootste aanroeisnelheden η liggen \approx gebied maximaal voortgenomen vermogen: voor $P \approx 300^s$, $l = 100 - l = 400$.
- straling/verlies bovenkant geven grootste demping.

beste overeenstemming met Beobner'se metingen (na aanpassing l/H lengte):

$\rightarrow 5^m$ oscillatie \equiv interferentiepatroon zeer veel harmonischen van staande geluidgolven in trillende convectie zone, $n = 0 \sim 20$, $l = 1 \sim 1500$.

Randen van zien (zie terug) gevolg van interferentie tussen $R(n) Y_l^m$.

5.4.3.2 Diagnostieken

* resolutie modes

Afschatting levert parabolvorm ridges $k_h - \omega$ diagram:

$$dT/dz \equiv c^2 = (dT/dz)_{\text{ad}} \quad (\text{met } z \text{ diepte in convectie zone})$$

$$\left. \begin{aligned} \rightarrow T(z) &= (dT/dz)_{\text{ad}} \cdot z \\ -\frac{1}{T} \left(\frac{dT}{dz} \right) &= \frac{(\gamma-1)g}{c_s^2} \quad (\text{p. 67}) \end{aligned} \right\} c_s^2 = (\gamma-1)g z$$

Voor $z \equiv \delta$, met δ de diepte van de onderste reflectie laag, dus de trilhölte diepte: $\omega^2 \equiv L^2 = c_s^2 k_h^2$

$$\rightarrow \boxed{\delta = \omega^2 / (\gamma-1)g k_h^2} \quad (\delta \text{ groter als } k_h = \sqrt{l(l+1)/r} \text{ kleiner})$$

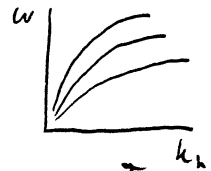
staande trilling: $(n+1/2)\pi = \int_{z=\delta}^z k_z dz = \omega \int_{z=\delta}^z \frac{dz}{c_s} = \frac{2\omega\sqrt{\delta}}{\sqrt{(\gamma-1)g}} = \frac{2\omega^2}{(\gamma-1)g k_h}$

dus $\omega_n^2 = \frac{1}{2}\pi (n+1/2) (\gamma-1)g k_h \approx (n+1/2)g k_h$

Dit zijn de parabolen.

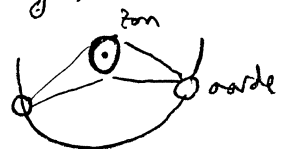
Scheiding in n : $d\omega/dn = \frac{g k_h}{2\omega} = \frac{\omega}{2n}$

Bijv: $n=10$
 $P=5^m$ } $\omega=0.02$, $\Delta\omega=0.001$ vereist
 dat vraagt (Nykivist) $\frac{2}{\Delta\omega} = 3.0$ uur meten.



Scheiding in l : $\frac{dk_h}{dl} \sim \frac{1}{l} \rightarrow$ vereist meetlengte $2r_0$.

Moeilijk! vraagt kunstplaneet:



Breedte ridges:

rog menging in l : ~ 10 l -modes per resolutie element \rightarrow interferentie.

Echte breedte nog niet bekend. Bepoold $Q = \frac{\text{aantal golven}}{\text{golftrein}}$

Breedte $\approx 0 \rightarrow Q \approx \infty$: coherent?

Dan: excitatie mechanisme coherent rond zon?

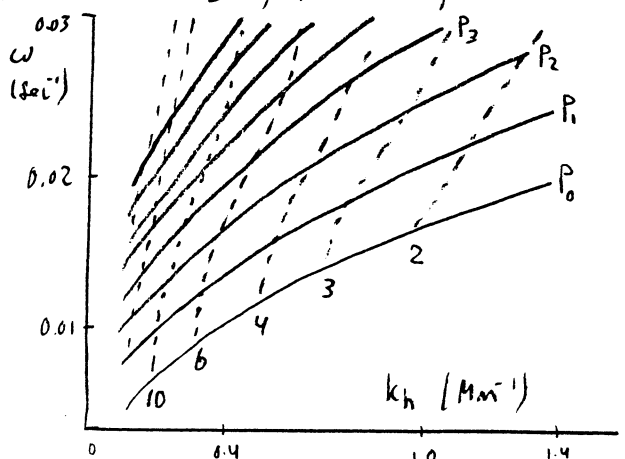
Kloeft niet: scherp-gereguleerde resonator kan random geëxciteerd worden - bijv. door granulen.

* rotatie splitsing

$$\delta = \frac{\omega_n^2}{(\gamma-1)g k_h} z = \frac{1}{2}\pi \left(\frac{n+1/2}{k_h} \right)$$

\rightarrow isopeltijnen zijn "isobaths" (Mm)
 = lijnen gelijke steek diepte.

Dus: links boven meten
 (lengte en ver)



* plaats ridges

staande golven waar $(n + 1/2) \pi = \omega \int_0^{\delta} \frac{dz}{c_s} \rightarrow$ afh. van $\{T, \delta\}$.

Blijkt dat p-mode ridges

in lokale gevoel is - voor dT/dz bovenkant convectie zone

\rightarrow voor goede fit mixing-length parameter $l/H = 2$ nodig

(dat impliciet diepere convectie zone: convectie efficiënter dan voor kleinere meenglengte $\rightarrow \nabla$ kleiner (minder super-adiabatisch) \rightarrow steekt dieper ter aanvulling van radiatief gedeelte)

5.4.3.3 Status

De zeer precieze overeenkomst van de waargenomen p-mode ridges met de theoretisch voorspelde is het succes verhaal van de zonnetycica \approx 1975 - 1980. De keert it van waarnemers:

Q -waarden? Rotatie splitsing? Excitatie - en demping?

Recent: ook ridges voor 200^s p-modes van chromosfeer trillingen (Luc Dame', in press). Modificatie/interactie met fluxbuizen?

Anderen sterren: moeilijk - geen k_h resolutie.

5.4.4. 5^m p-modes kleine l \odot

5.4.4.1 Mode classificatie

Metingen hele zon: geen resolutie l . Dus verwachting:

$\{kens n\} \times \{kens l\} =$ talloze ω waarden mogelijk \rightarrow wortboel.

Maar: Tassoul 1980 Ap. J. Suppl. 43 469; [Vanakarov, 1967, Arch. Zh. 44, 786]

als $l \ll n$ geldt:

$$v_{n,l} \approx (n + l/2 + \epsilon) v_0 - [l(l+1) + \delta] A v_0^2 / v_{n,l}$$

$$v_0 = 1/2 \int \frac{dr}{c_s}; \epsilon, \delta, A \text{ ook constanten}$$

en l is klein omdat hele-zon data hogere k_h trillingen wegmiddelen.

Tweede term \ll eerste $\rightarrow v \approx (n + l/2) v_0$, dus



voor l : n reeks heeft spacing v_0

reken even l vallen samen
reken oneven l ook $\left\{ \begin{matrix} v_0 \\ 2 \end{matrix} \right\}$ verschil

verklaart equidistantie pieken in data (p. 61)

$\left\{ \begin{matrix} \text{Hele zon: } l=1 \text{ grootste } P, l=2,3 \text{ minder; } l>4 \text{ n verwaarloosbaar} \\ + \text{ kleine afwijkingen in } \Delta v_n \text{ van } v_0 \text{ voor kleinere } n \end{matrix} \right.$
 \rightarrow 1:1 identificatie modes is mogelijk.

5.4.4.2 Diagnostiek

lijnspectra op p. 61 zijn als electromagnetische lijnspectra: informatie in plaats lijnen, sterkte lijnen, breedte lijnen, splitsing lijnen. Dus veel. Trilholte staat diepste voor lage l (model onderaan p. 87): bijdrage uit \approx hele zon.

→ rotatie } \odot inwendige
structuur }

5.4.4.3 Status

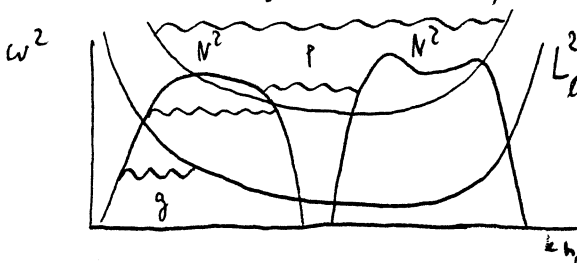
lage l modes zijn nu het front van het onderzoek. Nog geen conclusies - α , rotatie splitsing, v's nog in (verhit) debat. Birmingham netwerk, zuidpool ballon, SOHO → mooie toekomst.
sterren: ACRIM (p. 61) → detectie $I_{\lambda}(t)$.

5.4.5 g-modes

Open gebied. lage l : zijn er zeker in atmosfeer - belangrijk?

lage l : { gras op p. 63 Stanford - Krinn data;
SLEPA data
 $2^h 40^m$?

Intrinsieke waarde, vooral lage l , groot omdat $L^2 = \frac{N^2}{A_{Ac}^2} \zeta^2 K_h^2$
(Lamb lijn) op p. 87 onderaan, naar anderen
verschoven, de bovenzijde vff radiaatieve trilholte naar binnen brengt;



met p-modes + g-modes van $l=1 \dots l=100$
kun je bijdrage functies doen variëren
door zowel de hele zon

VI CONCLUSIE

Terug naar hoofdstuk 1: overzicht + filosofie

"filosofische snelheids velden"

voorheen: - solair hobbyisme ("dermatologie")
- akvatische verhitting corona

nu: - verhitting: + \vec{B} buien: veel leukere dispersie vgl!
massa's nieuwe plasmafysica: nieuw volgebied

komt: - seismologie: diagnostiek \odot en * - inwendige
- ook nieuw volgebied