

1. Visuele dubbelsterren

1.1 definitie en parallax

Vaak staan twee sterren vlak bij elkaar in het gezichtsveld van een teleskoop. Naarmate het lichtopvangende vermogen en de hoekvergroting van de telescopen groter werd, werden meer van zulke paren ontdekt. Staan de twee sterren ook in werkelijkheid dicht bij elkaar, zodat ze om elkaar heen draaien, dan wordt van een visuele dubbelster gesproken. Een visuele dubbelster is dus een fysische dubbelster. Tot deze groep behoren ook de astrometrische dubbelsterren (zie sectie 2), de bedekkingsveranderlijken (sectie 3) en de spektroskopische dubbelsterren (sectie 4). Staan de twee sterren alleen schijnbaar bij elkaar (vrijwel op dezelfde gezichtslijn, maar met sterk verschillende afstanden t.o.v. de aarde dan wordt van een optische dubbelster gesproken.

Voor 1800 dacht men algemeen, dat er geen fysische dubbelsterren bestonden en heeft men getracht parallaxen te bepalen met behulp van de optisch gedachte dubbelsterren. Immers als één van de componenten zeer ver ( $\infty$  ver) weg staat, dan is de halve lange as (in hoekmaat) van het - tengevolge van de aardbeweging ontstane-positie ellipsje van de andere component (zie fig. 1b) een maat voor de afstand van deze component. Met behulp van fig. 1a is:

$$\begin{aligned} \angle \odot S_1 \odot + \underbrace{\angle S_1 \odot Q}_{\text{}} &= \angle S_1 \odot Q \\ \angle \odot S_1 \odot + \underbrace{\angle S_1 \odot S_2' + \angle S_2' \odot Q}_{\text{}} &= \angle S_1 \odot S_2 + \angle S_2 \odot Q \\ \angle \odot S_1 \odot &= \angle S_1 \odot S_2 - \underbrace{\angle S_1 \odot S_2'}_{\text{}} \\ \angle \odot S_1 \odot &= \underbrace{\angle S_1 \odot S_2}_{\text{}} - (\underbrace{\angle S_1 \odot S_2 - \angle S_2' \odot S_2}_{\text{}}) \\ \pi &= \pi_{\text{obs}} + \pi_{\text{achtergr.}} \end{aligned}$$

of wel  $\pi_{\text{obs}} = \pi - \pi_{\text{achtergrond}}$  (1-1)

waarin  $\pi$  de werkelijke parallax van ster  $S_1$  is en  $\pi_{\text{obs}}$  de waargenomen parallax is.

Soms bleek de heldere component van een "optische" dubbelster een negatieve waarde voor  $\pi$  te hebben. Als er geen waarnemingsfouten in het spel zijn moet dan de zwakkere component dichter bij staan dan de heldere. Dit duidt op zeer grote variaties in de lichtkracht van de sterren.

Is de hoekafstand  $\rho''$  van de componenten van een fysische dubbelster in boogseconden bekend dan geldt voor de op het hemelvlak (= vlrk door één van de componenten gezichtslijn) geprojecteerde afstand van de componenten  $\rho(\text{AE})$

$$\rho(\text{AE}) = \frac{\rho''}{206265} \kappa(\text{AE}), \quad (1-2)$$

waarin  $z(\text{AE})$  de afstand van de dubbelster is tot de waarnemer in astronomische eenheden. Is ook de parallax van de dubbelster  $\pi''$  in boogsekonden bekend, dan is

$$z(\text{AE}) = \frac{206265}{\pi''} \quad (1-3)$$

zodat

$$\rho(\text{AE}) = \frac{\rho''}{\pi''} \quad (1-4)$$

## 1.2 waarnemingsmethoden en nut

Nog steeds worden veel visuele waarnemingen aan visuele dubbelsterren verricht met behulp van een mikrometer. Met dit instrument worden van de zwakkere komponent de afstand  $\rho$  (in boogsekonden) en de positiehoek  $\theta$  (gemeten van de N- naar de E-richting, zie fig.2) ten opzichte van de heldere komponent (geplaatst in het assenkruis van de mikrometer) gemeten. De meest eenvoudige mikrometer bestaat uit twee kruisdraden, waarvan de een ten opzichte van de andere // verschoven kan worden ( $\mathcal{K}_2$  in fig.2; positie van  $\mathcal{K}_2$  kan zeer fijn ingesteld en zeer nauwkeurig afgelezen worden;  $\mathcal{K}_1$  kan tegelijkertijd met  $\mathcal{K}_2$  roteren in het fokale vlak van de teleskoop; rotatiehoek ook fijn instelbaar en nauwkeurig afleesbaar). Eerst wordt bij samenvallende kruisdraden  $\theta$  bepaald; dan worden de kruisdraden over exakt  $90^\circ$  gedraaid en  $\mathcal{K}_2$  // zichzelf verschoven totdat die door B gaat ( $\mathcal{K}$  blijft door A gaan). Rechthoekige coördinaten van B ten opzichte van A (zie fig.2a) kunnen bepaald worden met de formules.

$$\left. \begin{aligned} \Delta x &= \rho \sin \theta = \Delta \alpha \cos \delta \\ \Delta y &= \rho \cos \theta = \Delta \delta \end{aligned} \right\} \quad (1-5)$$

Uit dergelijke metingen kan de schijnbare relatieve baan (=s.r.b.) bepaald worden. Deze baan is de projectie van de ware relatieve baan (w.r.b.) van de zwakkere komponent B ten opzichte van de heldere komponent A op het hemelvlak. In 1.3 zullen methodes gegeven worden, waarmee elementen van de w.r.b. (waar nodig in het vervolg aangegeven met een subscript w) bepaald kunnen worden uit de s.r.b. (elementen zo nodig aangegeven met een subscript s). Uit de periode  $P$ , de halve lange as van de ware/baan (=a) en de parallax  $\pi$  kan met behulp van de 3e wet van Kepler de som van de massa's van de componenten berekend worden. Immers

$$\frac{M_A}{M_\odot} + \frac{M_B}{M_\odot} = \frac{a^3(\text{AE})}{P^2(\text{jr})} \quad (1-6)$$

[bij gebruik van andere eenheden moet (4-30) toegepast worden]



of met (1-4)

$$\mathcal{M}_A / \mathcal{M}_\odot + \mathcal{M} / \mathcal{M}_\odot = \left( \frac{a''}{\pi''} \right)^3 \mathcal{P}^{-2}$$

of

$$\log (\mathcal{M}_A / \mathcal{M}_\odot + \mathcal{M} / \mathcal{M}_\odot) = -2 \log \mathcal{P} + 3 \log a'' - 3 \log \pi'' \quad (1-8)$$

Slechts van ongeveer 40 systemen zijn  $\pi$  en  $a$  redelijk goed bekend ( $\approx 20$  met  $\pi \geq 0''.1$  en  $\approx 20$  met  $0''.05 \leq \pi < 0''.1$ ). Van nog 25 systemen is  $\pi$  onzeker terwijl de ~~w.r.b.~~<sup>a''</sup> goed bekend is.

Terwijl visueel (dus met dradenmikrometer) dubbelsterren zijn waar te nemen tot hoekafstanden van  $0''.2$  kunnen fotografisch alleen wijdere paren ( $\rho \geq 2''$ ) waargenomen worden. Luchtonrust in en voor de kijker veroorzaakt op de fotografische plaat een cirkelvormig sterbeeldje. De diameter hangt ook nog af van de helderheid van de ster. Daar de fotografische methode zeer vaak in de astro-metrie wordt gebruikt zal in sectie 2.1 hierop nader worden ingegaan.

Bij de interferometrie kunnen hoekafstanden tot  $0''.05$  gemeten worden (zie sectie 10).

### 1.3 de ware relatieve baan

5.5.6

Met behulp van de  $\rho$  en  $\theta$  metingen kan de ~~schijnbare~~ relatieve baan  $\left[ = \text{srb} = \text{projektie van ware relatieve baan} (= \text{wrb}) \right]$  getekend worden door door de punten zo goed mogelijk een ellips te tekenen. Hieruit kan de  $w r b$  bepaald worden. Dit is mogelijk doordat bij projekctie onveranderd blijven:

- 1) de periode  $\mathcal{P}$
- 2) het tijdstip van doorgang door het periastron  $t_p$
- 3) de verhouding van twee lijnstukken, die evenwijdig lopen of in elkaars verlengde liggen. Hierdoor verandert bijv. de excentriciteit  $e$  niet
- 4) het midden  $C$  van de ellips
- 5) toegevoegde assen blijven toegevoegd

#### 1.3.1 bepaling van de dynamische elementen

Vooreerst zullen  $\mathcal{P}$ ,  $t_p$  en  $e$  (dynamische elementen genaamd) bepaald worden uit de grafische voorstelling van zowel  $\Delta x$  als  $\Delta y$  tegen de tijd (time-displacement curves, zie fig. 3) [Bij de spektroskopische dubbelsterren zal de grafiek van  $\Delta z$  (loodrecht op hemelvlak) tegen de tijd een belangrijke rol spelen en o.a. ook  $\mathcal{P}$ ,  $t_p$  en  $e$  verschaffen (zie sectie 4.2); het voordeel hier is dat twee grafieken (nl. <sup>toe</sup> van  $\Delta x$  en  $\Delta y$ ) ter beschikking staan]

Stel door de punten  $(\Delta x, t)$  is zo goed mogelijk een kromme getekend. Door de extrema ervan worden twee lijnen  $n$  en  $\ell$  (zie fig.3)// de tijdas getrokken en een lijn  $m$  midden tussen  $n$  en  $\ell$ .

De kromme wordt ten opzichte van  $m$  gespiegeld en over een  $1/2$  fase langs de tijdas verschoven (onderbroken lijn in fig.3). Het snijpunt op de kortere (steilere) tak van de originele kromme heeft betrekking op het periastron. Het middelste van de drie snijpunten op de lange tak van de originele kromme heeft betrekking op het apastron. Immers:

- het punt voor het periastron moet op de steilste tak van de originele kromme liggen, omdat in het periastron de baansnelheid het grootst is. De hellingen  $\frac{d\Delta x}{dt}$  stellen nl. geprojecteerde snelheden voor en op grond van 3) blijven verhoudingen van snelheden bij projectie gelijk.
- de punten voor periastron en apastron moeten  $1/2$  fase uit elkaar liggen en
- deze punten moeten respectievelijk op gelijke afstanden van  $n$  en  $\ell$  liggen. ( in fig.3:  $AA' = PP'$  )

Het is duidelijk dat nu  $\varphi$  en  $t_P$  bepaald zijn. Om  $e$  te vinden bedenke men dat voor de verhouding van de baansnelheden in periastron en apastron ( $v_P$  resp.  $v_A$ ) in een ellipsbaan geldt:

$$\frac{v_P}{v_A} = - \frac{(1+e)}{(1-e)} \quad (1-9)$$

Op grond van 3) is nu ook

$$\left(\frac{d\Delta x}{dt}\right)_P / \left(\frac{d\Delta x}{dt}\right)_A = - \frac{(1+e)}{(1-e)},$$

zodat

$$e = \frac{\left(\frac{d\Delta x}{dt}\right)_P + \left(\frac{d\Delta x}{dt}\right)_A}{\left(\frac{d\Delta x}{dt}\right)_P - \left(\frac{d\Delta x}{dt}\right)_A} \quad (1-10)$$

#### 1.3.2 methode van Zwiers voor de bepaling van de elementen van de w.r.b.

In fig.4a bevindt de komponent A zich steeds in de oorsprong. De van de s.r.b. baanellips is zo goed mogelijk door de door  $\rho$  en  $\theta$  bepaalde posities van komponent B getekend. Bij voldoende punten B kan de periode goed geschat worden. Het midden van de ellips C wordt gevonden door een aantal // koorden midden door te delen en het midden van de zo gekonstrueerde toegevoegde middellijn te bepalen (stippellijnen in fig.4a). CA snijdt de s.r.b. in  $P$ , de projectie van het periastron  $P_w$  van de w.r.b.;  $t_P$  is nu ook te bepalen/schatten.  $CP_S$  is de projectie van de halve lange as van de w.r.b. De projectie van de halve korte as van de w.r.b.,  $b$ , wordt gevonden door bij  $CP_S$  de toegevoegde middellijn in de s.r.b. te konstrueren (in fig.4a onderbroken koorden// $CP_S$  middendoordelen). Op grond van



punt 3) is nu

$$e = \frac{CA}{CP_S}$$

De hulpcirkel is de cirkel rondom de w.r.b. De projectie van deze cirkel op het hemelvlak is de hulPELLIPS. Deze kan uit de s.r.b. verkregen worden door de aan  $CP_S$  toegevoegde koorden te verlengen met de faktor

$$\frac{1}{\sqrt{1-e^2}} = \frac{a}{b} \quad (1-11)$$

(NB:  $e$  is al bekend! zie ook fig.6, waarin  $\frac{GD}{BD} = \frac{a}{b}$ )

Konstrueer nu een cirkel met als middelpunt C, die de hulPELLIPS in 4 punten snijdt. Hierdoor worden (zie de stippellijnen in fig.4b) de richtingen van de lange en korte as van de hulPELLIPS bepaald. De lijn door A// lange as van de hulPELLIPS is de knopenlijn = snijlijn baanvlak met <sup>hemel</sup> koordvlak, door A. De lange as van de hulPELLIPS is getekend aan de middellijn van de hulpcirkel, die weer getekend is aan de lange as,  $a''$ , van de w.r.b.

$$\cos i = \frac{\text{korte as hulPELLIPS}}{\text{lange as hulPELLIPS}} \quad (1-12)$$

waarbij  $i$  = hoek tussen hemel- en baanvlak.  $i$  is dus nu ook bepaald. De snijpunten van de knopenlijn met de w.r.b. heten de knopen. De positiehoek  $\Omega$  is de hoek in het hemelvlak tussen de N-richting en de knopenlijn (zie fig.5a).  $\Omega$  is dus uit de figuur af te lezen.  $\omega$  is de hoek in het baanvlak van de knoop met de kleinste positiehoek  $\Omega$  gemeten in de bewegingsrichting tot het periastron. (fig 5)

Deze hoek  $\omega$  wordt in projectie gezien als  $\lambda$  (te meten!, zie fig.5a)

Met behulp van boldriehoeksmeting kan worden afgeleid

$$\text{tg } \lambda = \text{tg } \omega \cos i \quad (1-13)$$

met behulp waarvan  $\omega$  bepaald kan worden.

De resultaten van dit soort werk kunnen als volgt worden samengevat: In totaal zijn op het ogenblik ongeveer 60 000 visuele dubbelsterren bekend (Naar schatting is zeker 60% van de sterren een komponent van een meervoudig stelsel). De perioden zijn vaak zeer lang:  $100^d$  tot enkele  $1000^{en}$  jaren. Er zijn slechts ongeveer 200 systemen met  $P < 100$  jaar.  $a$  varieert van 1 tot 100 AE met een gemiddelde van 10 AE. De gemiddelde  $e \approx 0.5$ .

### 1.3.3 berekening van de waargenomen grootheden

De volgende baanelementen zijn nu bekend

de dynamische elementen  $P$ ,  $t_p$  en  $e$

de geometrische elementen  $a''$ ,  $i$ ,  $\Omega$  en  $\omega$

als de parallax,  $\pi''$ , ook bekend is dan is  $a$  (AE) =  $\frac{a''}{\pi''}$

De  $\rho$  en  $\theta$  waarden kunnen nu voor elk waarnemingstijdstip, met behulp van de formules voor de ellips en de perkenwet uitgedrukt

worden in deze elementen.

Zo blijkt:

$$\operatorname{tg}(\theta - \Omega) = \pm \operatorname{tg}(v + \omega) \cos i, \quad (1-14)$$

$$\text{en } \rho = r \cos(v + \omega) \sec(\theta - \Omega), \quad (1-15)$$

waarin  $v$  met behulp van fig.6 en onderstaande formules gedefinieerd is.

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} v = \frac{1+e}{1-e} \operatorname{tg} \frac{1}{2} E \quad (1-16)$$

$$M = E - e \sin E \quad (1-17)$$

$$M = 2\pi(t-t_p) \mathcal{P}^{-1} \quad (1-18)$$

en  $r$  (zie fig.5b en AB in fig.6) met

$$r = a(1 - e \cos E) \quad (1-19)$$

Kombinatie van de formules (1-14) t/m (1-19) levert

$$\theta = \theta(a, \omega, i, e, \mathcal{P}, t_p, t) \quad (1-20)$$

$$\text{en } \rho = \rho(a, \omega, i, e, \mathcal{P}, t_p, t) \quad (1-21)$$

Ook  $\Delta x$  en  $\Delta y$  kunnen in de bovengenoemde elementen uitgedrukt worden. Dat dit mogelijk is blijkt uit fig.5b, waaruit met (1-14) en (1-15) volgt dat

$$AB'' = \rho \cos(\theta - \Omega) = r \cos(v + \omega) \quad (1-22)$$

en

$$BB'' = \rho \sin(\theta - \Omega) = r \sin(v + \omega) \cos i \quad (1-23)$$

$\Delta x$  en  $\Delta y$  blijken nu als volgt geschreven te kunnen worden:

$$\Delta x = g_1 \xi + g_2 \eta \quad (1-24)$$

$$\text{en } \Delta y = g_3 \xi + g_4 \eta, \quad (1-25)$$

waarin

$$\xi = \frac{r \cos \theta}{a} = \xi(e, \mathcal{P}, t_p, t) \text{ en } \eta = \frac{r \sin \theta}{a} = \eta(e, \mathcal{P}, t_p, t)$$

en

$$g_n = g_n(a, i, \omega, \Omega), \quad n=1,2,3 \text{ of } 4.$$

N.B.: de functies  $g_n$  zijn alleen afhankelijk van de geometrische elementen, de functies  $\xi$  en  $\eta$  van de dynamische elementen en de tijd.

#### 1.4 methode der differentieële korrekties

##### 1.4.1. methode der kleinste kwadraten - voorbeeld met drie onbekenden.

Stel  $O(t)$  zijn (in de tijd variabele) gemeten grootheden op tijdstippen  $t=1, \dots, n$  ( $n \geq 3$ ),  $C_1(t)$  de als eerste approximatie (uit een voorlopige set van elementen  $p, q$  en  $r$ ) berekende grootheden voor dezelfde tijdstippen.

Stel een tweede approximatie kan geschreven worden als

$$C_2(t) = C_1(t) + a_1(t) \cdot \Delta p + b_1(t) \cdot \Delta q + c_1(t) \cdot \Delta r, \quad (1-26)$$

Stel  $\Delta p_0$ ,  $\Delta q_0$  en  $\Delta r_0$  zijn de "beste" (nog te bepalen) korrekties op  $p$ ,  $q$  en  $r$ . De konstanten  $\Delta p_0$ ,  $\Delta q_0$  en  $\Delta r_0$  kunnen met de methode der kleinste kwadraten bepaald worden. Daartoe worden de volgende verschillen opgemaakt

waarin  $a_1(t) = \frac{\partial C_1(t)}{\partial p}$      $b_1(t) = \frac{\partial C_1(t)}{\partial q}$      $c_1(t) = \frac{\partial C_1(t)}{\partial r}$



$$O(1) - C_2(1) = O(1) - C_1(1) - a_1(1) \cdot \Delta p_0 - b_1(1) \cdot \Delta q_0 - c_1(1) \cdot \Delta r_0 = \Delta_1(O - C_2) \quad (1-27)$$

$$O(n) - C_2(n) = O(n) - C_1(n) - a_1(n) \cdot \Delta p_0 - b_1(n) \cdot \Delta q_0 - c_1(n) \cdot \Delta r_0 = \Delta_n(O - C_2)$$

Volgens het principe van de kleinste kwadraten moet nu

$\sum_1^n \Delta_m^2(O - C_2)$  minimaal zijn, d.w.z.

$$\frac{\delta(\sum \Delta^2)}{\delta(\Delta p_0)} = 0, \quad \frac{\delta(\sum \Delta^2)}{\delta(\Delta q_0)} = 0 \quad \text{en} \quad \frac{\delta(\sum \Delta^2)}{\delta(\Delta r_0)} = 0 \quad (1-28)$$

d.w.z. er moet aan de volgende drie normaalvergelijkingen voldaan zijn:

$$\begin{aligned} \left[ \sum a_1^2(t) \right] \Delta p_0 + \left[ \sum a_1(t) b_1(t) \right] \Delta q_0 + \left[ \sum a_1(t) c_1(t) \right] \Delta r_0 &= \sum a_1(t) \Delta_t(O - C_1) \\ \left[ \sum b_1(t) a_1(t) \right] \Delta p_0 + \left[ \sum b_1^2(t) \right] \Delta q_0 + \left[ \sum b_1(t) c_1(t) \right] \Delta r_0 &= \sum b_1(t) \Delta_t(O - C_1) \\ \left[ \sum c_1(t) a_1(t) \right] \Delta p_0 + \left[ \sum c_1(t) b_1(t) \right] \Delta r_0 + \left[ \sum c_1^2(t) \right] \Delta r_0 &= \sum c_1(t) \Delta_t(O - C_1) \end{aligned} \quad (1-29)$$

als  $\Delta_t(O - C_1) = O(t) - C_1(t) =$  bekend

N.B. er zijn evenveel normaalvergelijkingen als konstanten (onbekenden)

#### 1.4.2 differentiële correcties

In 1.3.3 is aangegeven hoe  $\theta$  en  $\rho$  berekend kunnen worden uit een set baanelementen. Met behulp van het bovenstaande is het nu mogelijk om verbeteringen  $\Delta a$ ,  $\Delta \Omega$ ,  $\Delta \omega$ ,  $\Delta i$ ,  $\Delta e$ ,  $\Delta \mathcal{P}$  en  $\Delta t_P$  op deze baanelementen te vinden. Immers analoog aan (1-17) geldt voor elk waarnemingstijdstip  $t$  ( $n \geq 7$ )

$$\Delta \theta_t(O - C_2) = \Delta \theta_t(O - C_1) - \frac{\delta \theta_1}{\delta \Omega} \Delta \Omega - \frac{\delta \theta_1}{\delta \omega} \Delta \omega - \frac{\delta \theta_1}{\delta i} \Delta i - \frac{\delta \theta_1}{\delta e} \Delta e - \frac{\delta \theta_1}{\delta \mathcal{P}} \Delta \mathcal{P} - \frac{\delta \theta_1}{\delta t_P} \Delta t_P \quad (1-30)$$

$$\Delta \rho_t(O - C_2) = \Delta \rho_t(O - C_1) - \frac{\delta \rho_1}{\delta a} \Delta a - \frac{\delta \rho_1}{\delta \omega} \Delta \omega - \frac{\delta \rho_1}{\delta i} \Delta i - \frac{\delta \rho_1}{\delta e} \Delta e - \frac{\delta \rho_1}{\delta \mathcal{P}} \Delta \mathcal{P} - \frac{\delta \rho_1}{\delta t_P} \Delta t_P \quad (1-31)$$

De partiële afgeleiden zijn alle te berekenen uit de  $\theta_1$  en  $\rho_1$  functies (1-20) en (1-21) voor de eerste set van elementen. Hierdoor zijn ook de verschillen  $\Delta \theta_t(O - C_1) = \theta_0(t) - \theta_{C_1}(t)$  en  $\Delta \rho_t(O - C_1) = \rho_0(t) - \rho_{C_1}(t)$  bekend. Voorede nieuwe elementen  $a_2 = a_1 + \Delta a$ ,  $\Omega_2 = \Omega_1 + \Delta \Omega$ , enz zal in het algemeen gelden

$\sum [\Delta \theta(O - C_2)]^2 < \sum [\Delta \theta(O - C_1)]^2$  en  $\sum [\Delta \rho(O - C_2)]^2 < \sum [\Delta \rho(O - C_1)]^2$ ,  
zodat een betere overeenstemming tussen waarnemingen en theorie verkregen wordt.

Soms is  $\sum \Delta^2$  niet klein genoeg te krijgen. Met behulp van statistische methodes is dan wel eens een rimpel (sinus) op de ellips gevonden - triple of multiple systeem!

Het spreekt vanzelf dat de methode der differentiële correcties ook toegepast kan worden op  $\Delta x$  en  $\Delta y$  [zie (1-24) en (1-25)]

## 2. Astrometrische dubbelsterren

### 2.1 definitie en methodiek

In de astronometrie is het soms mogelijk om het massacentrum van een visueel dubbelstersysteem te vinden. Immers in de astrometrie worden absolute posities van sterren gemeten. Voor het geval dat het massacentrum van een dubbelster systeem niet ten opzichte van de zon beweegt zal de verbindingslijn van de twee componenten steeds door dat <sup>→ eenzelfde punt als de hemel</sup> punt moeten gaan. Zodra absolute banen rondom het massacentrum bekend zijn, zijn absolute massa's te berekenen.

Absolute bewegingen van in aanmerking komende objecten worden in de astronometrie vaak fotografisch bepaald. Op de fotografische plaat behoren dan naast het beeldje van het te onderzoeken object ook enkele referentiesternen te staan. Referentiesternen zijn sterren waarvan de posities in de loop van enkele honderden jaren niet veranderen of waarvan de eigenbewegingen ten opzichte van een absoluut <sup>(G)</sup> koördinatenstelsel bepaald kunnen worden.

Om kleine hoekafstanden nog op de fotografische plaat te kunnen meten zijn kijkers met lange brandpuntsafstanden nodig. Bovendien moet een groot veld goed afgebeeld worden (minimale koma bijv.) Een lenzenkijker is hiervoor nog het meest geschikt. Zeer bekende astrometrische kijkers zijn de omstreeks 1900 gebouwde refraktoren van de Yerkes sterrewacht ( $F = 19.37$  m;  $\varnothing = 102$  cm) en van de Spruce sterrewacht ( $F = 10.93$  m;  $\varnothing = 61$  cm; 1 mm op de plaat  $\approx 18''87$ ). De fotografische platen moeten in alcoholbaden voorgeweekt worden (en dan natuurlijk weer gedroogd) om spanningen in de emulsie laag te elimineren. Anders treden bij het ontwikkelen en fixeren verschuivingen in de emulsielaag op. Tegenwoordig kunnen al meetnauwkeurigheden van  $0.1\mu$  op de plaat (grote eisen aan meetmachine) bereikt worden.

## 2.2 de heliocentrische posities en banen

### 2.2.1 de beweging van het massacentrum

In het algemeen kan voor de positie van het massacentrum Z van de componenten van A en B geschreven worden: *(zie figuur 2)*:

$$\vec{z}_Z = \frac{M_A \vec{z}_A + M_B \vec{z}_B}{M_A + M_B}, \quad (2-1)$$

zodat

$$\ddot{z}_Z = \frac{M_A \ddot{z}_A + M_B \ddot{z}_B}{M_A + M_B}. \quad (2-2)$$



Volgens Newton geldt:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_A \ddot{\vec{z}}_A &= -G \mathcal{M}_A \mathcal{M}_B \frac{\vec{z}_A - \vec{z}_B}{|\vec{z}_A - \vec{z}_B|^3} \\ \mathcal{M}_B \ddot{\vec{z}}_B &= -G \mathcal{M}_A \mathcal{M}_B \frac{\vec{z}_B - \vec{z}_A}{|\vec{z}_B - \vec{z}_A|^3} \end{aligned}$$

$$\mathcal{M}_A \ddot{\vec{z}}_A + \mathcal{M}_B \ddot{\vec{z}}_B = 0 \quad (2-3)$$

Substitutie in (2-2) levert:

$$(\mathcal{M}_A + \mathcal{M}_B) \ddot{\vec{z}}_Z = 0$$

zodat

$$(\mathcal{M}_A + \mathcal{M}_B) \dot{\vec{z}}_Z = \text{konst}_1 \times t + \text{konst}_2 \quad (2-4)$$

Ten opzichte van een vast aan de zon gekoppeld referentiesysteem (aanvullend, dat de zon geen eigen beweging heeft, of dat die te verwaarlozen is) kan dus voor de positie van Z geschreven worden

$$\left. \begin{aligned} x_z &= c_x + \mu_x \cdot t \\ y_z &= c_y + \mu_y \cdot t \end{aligned} \right\} \quad (2-5)$$

waarin  $(c_x, c_y)$  de coördinaten van Z zijn bijv. voor het jaar 1900 en

$\mu_x$  en  $\mu_y$  de componenten van de eigenbeweging van Z in het hemelvlak ten opzichte van een absoluut coördinatenstelsel.

$(x, y)$  worden de heliocentrische coördinaten van Z genoemd. Deze worden gemeten op de fotografische plaat ten opzichte van een aantal referentiesternen. Fig. 19 geeft de heliocentrische weg van Barnard's ster ( $\alpha_{1950} = 17^h 55^m.4$ ;  $\delta_{1950} = +4^\circ 33'$ ;  $V = 9^m.54$ ; M5V;  $v_{\text{syst}} = 108 \pm 2.5 \text{ km/sek}$ ;  $\mu = 10''31 \text{ jaar}^{-1}$ ;  $\pi = 0''552 \pm 0''001$ ) ten opzichte van drie referentiesternen, waarvan de positieveranderingen over 10 000 jaar ook in de figuur zijn aangegeven.

### 2.2.2 de massaverhouding

Uit (2-3) volgt:

$$\mathcal{M}_B \frac{d^2 x_B}{dt^2} = -\mathcal{M}_A \frac{d^2 x_A}{dt^2}$$

zodat

$$\frac{\ddot{x}_A}{\ddot{x}_B} = -\frac{\mathcal{M}_B}{\mathcal{M}_A} \quad \text{en} \quad \frac{\dot{x}_A}{\dot{x}_B} = -\frac{\mathcal{M}_B}{\mathcal{M}_A} \quad \text{en} \quad \frac{|x_A|}{|x_B|} = \frac{\mathcal{M}_B}{\mathcal{M}_A},$$

waaruit volgt  $\frac{a_A}{a_B} = \frac{\mathcal{M}_B}{\mathcal{M}_A}$ , als  $a_A$  en  $a_B$  de halve lange assen van de ware banen van de componenten A resp. B rondom het massacentrum zijn. (2-6)

Voor de massaverhouding  $B \equiv \frac{\mathcal{M}_B}{\mathcal{M}_A + \mathcal{M}_B}$  kan nu geschreven worden

$$B = \frac{\mathcal{M}_B}{\mathcal{M}_A + \mathcal{M}_B} = \frac{|x_A|}{|x_A| + |x_B|} = \frac{a_A}{a_A + a_B} = \frac{a_A}{a} \quad (2-7)$$

De massaverhouding is vaak beter bekend dan de som van de massa's. Voor de laatste moet nl. de parallax goed bekend zijn (zie (1-8)).

### 2.2.3 de heliocentrische posities van de componenten van een dubbelster

Voor de positie ten opzichte van het massacentrum kan nu geschreven worden (fig. 2a wordt nu vervangen door fig. 8)

$$\text{voor komponent A: } \left[ \begin{array}{l} -B \Delta x, -B \Delta y \end{array} \right] \quad (2-8)$$

$$\text{en voor komponent B: } \left[ \begin{array}{l} (1-B) \Delta x, (1-B) \Delta y \end{array} \right], \quad (2-9)$$

waarin  $\Delta x$  en  $\Delta y$  de in fig. 2a gedefinieerde grootheden zijn.

Met (2-5) wordt nu de heliocentrische positie

$$\text{van komponent A: } \left\{ \begin{array}{l} x_A = c_x + \mu_x t - B \Delta x \\ y_A = c_y + \mu_y t - B \Delta y \end{array} \right\} \quad (2-10)$$

$$\text{van komponent B: } \left\{ \begin{array}{l} x_B = c_x + \mu_x t + (1-B) \Delta x \\ y_B = c_y + \mu_y t + (1-B) \Delta y \end{array} \right\} \quad (2-11)$$

$\Delta x$  en  $\Delta y$  zijn uit te drukken in de reeds bekend gedachte elementen van de ware relatieve baan [zie 1.3.3 en (1-24) en (1-25)]. Als bovendien goede schattingen voor  $(c_x, c_y)$  en  $(\mu_x, \mu_y)$  bekend zijn, is  $B$  de enige onbekende in de vergelijkingen (2-10) en (2-11). Met behulp van de methode der differentiele correcties kunnen betere waarden voor  $(c_x, c_y)$ ,  $(\mu_x, \mu_y)$  en  $B$  gevonden worden. Aangenomen is, dat de methode der differentiele correcties al toegepast is op de schijnbare relatieve baan.

### 2.3 Sirius (I)

In 1834 vond F.W. Bessel (visuele waarnemingen!) perturbaties in de eigenbeweging van Sirius A (B was nog nimmer gezien). Zes jaar later vond hij hetzelfde voor Procyon. In 1844 stelt hij, dat Sirius en Procyon onzichtbare begeleiders moeten hebben. Twee jaar later (!) wordt Neptunus ontdekt uit perturbaties in de baan van Uranus. In 1862 wordt Sirius B voor het eerst visueel gezien.

Er zijn nog maar weinig foto's van Sirius A en B met referentie sterren erop voor fotografische absolute astrometrie. Het helderheidsverschil van  $10^m$  tussen A en B vereist speciale voorzieningen om te voorkomen, dat het beeldje van B niet overstraald wordt door het overbelichte beeld van A. Dit kan bijv. door een zeshoekig diafragma (zie fig. 10a) voor de objektief lens te plaatsen, waardoor het beeld van A zes "puntig" wordt (fig. 10b). De stand van het diafragma moet zodanig gekozen worden, dat Sirius B in het "dal" tussen twee "punten" komt te liggen. Om het centrum



van het overbelichte en vervormde beeld van A te vinden wordt een objektief tralie (fig. 10a) voor de lens aangebracht. De 1ste en hogere orde beeldjes (spektra) van A (die van B zijn te zwak om zichtbaar te worden) maken een exakte bepaling van het centrum van A mogelijk.

In de jaren 1970 tot 1980 zal de afstand tussen A en B maximaal zijn ( $\approx 11''$ , terwijl minimale afstand  $\approx 3''$ ). Een aantal sterrewachten tracht series van fotografische opnamen van Sirius A en B met referentie sterren te verkrijgen om betere positiebepalingen te krijgen.

In fig. 9b zijn de heliocentrische posities van Sirius A en B van 1870 t/m 1940 gegeven.

#### 2.4 De geocentrische posities

De jaarlijkse beweging van de aarde rond de zon veroorzaakt een schijnbare jaarlijkse elliptische beweging van dichtbijstaande sterren (zie figuur 1b). De halve lange as van de ellips geeft de parallax  $\pi$

$$\pi'' = \frac{1(\text{AE})}{\text{R(parsec)}} \quad (2-12)$$

[zie ook (1-1); 1 parsec = 206265 AE =  $3.085 \times 10^{18}$  cm]

Voor een willekeurig tijdstip, t, geldt (zie fig. 11)

$$\pi(t) = \pi \sin \psi(t)$$

en voor de schijnbare verplaatsingen in de  $\alpha$  en  $\delta$  richtingen:

$$\pi_{\alpha}(t) = \pi P_{\alpha}(t), \quad (2-13)$$

en

$$\pi_{\delta}(t) = \pi P_{\delta}(t), \quad (2-14)$$

waarbij de parallax factoren  $P_{\alpha}$  en  $P_{\delta}$  gegeven worden door

$$P_{\alpha}(t) = \cos \epsilon \cos \alpha \sin \lambda_{\odot} - \sin \alpha \cos \lambda_{\odot} \quad (2-15)$$

$$\text{en } P_{\delta}(t) = \sin \epsilon \cos \delta - \cos \epsilon \sin \alpha \sin \delta) \sin \lambda_{\odot} - \cos \alpha \sin \delta \cos \lambda_{\odot}, \quad (2-16)$$

als  $\epsilon$  = hoek tussen elliptika en equator

en  $\lambda_{\odot}$  = lengte van de zon

Samen met (2-10) en (2-11) zijn nu de geocentrische posities

$$\text{van komp. A: } \left\{ \begin{array}{l} x_A = c_x + u_x t - B \Delta x + \pi P_{\alpha} \\ y_A = c_y + u_y t - B \Delta y + \pi P_{\delta} \end{array} \right\} \quad (2-17)$$

$$\text{en van komp. B : } \left\{ \begin{array}{l} x_B = c_x + u_x t + (1-B)\Delta x + \pi P_{\alpha} \\ y_B = c_y + u_y t + (1-B)\Delta y + \pi P_{\delta} \end{array} \right\} \quad (2-18)$$

Als van een visuele dubbelster schattingen bestaan van

- 1) de dynamische ( $e, P, t_p$ ) - en de geometrische ( $a, \omega, \Omega$  en  $i$ ) elementen (bijv. uit de relatieve baan)
- 2) de positie ( $c_x, c_y$ ), de eigenbeweging ( $\mu_x, \mu_y$ ) en de parallax  $\pi$  alsmede voldoende metingen van punten ( $x_A, y_A$ ) en ( $x_B, y_B$ ) ter beschikking staan dan kan  $\mathcal{B}$  bepaald worden met (2-17) en (2-18). (bedenk dat  $\Delta x$  en  $\Delta y$  te berekenen zijn met (1-24) en (1-25)!) )

Met behulp van de methode der differentiele korrekties kunnen nu betere waarden voor ( $c_x, c_y$ ), ( $\mu_x, \mu_y$ ),  $\pi$  en  $\mathcal{B}$ , aannemende dat de baanelementen van de relatieve baan al met de methode der differentiele korrekties gekorrigeerd zijn. (zie 1.3.3 en 1.4)

In de meeste gevallen is  $\pi$  verwaarloosbaar klein. Van dergelijke astrometrische dubbelsterren is de massaverhouding  $\mathcal{B}$  te bepalen maar geen absolute massa's. Immers volgens (1-8) is  $\pi$  nodig om de som van de massa's te kunnen bepalen.

## 2.5 Niet oplosbare astrometrische dubbelsterren

### 2.5.1 definitie

Een aantal sterren met meetbare  $\mu$  en  $\pi$  (gaat vaak samen, immers van een dichtbijstaande ster zal de eigenbeweging gemakkelijker aantoonbaar zijn) vertonen een niet rechtlijnige beweging langs de hemel na correctie voor de parallaktische beweging. Figuur 12 geeft hiervan een voorbeeld voor de ster Ross 614. Het ligt voor de hand dit toe te schrijven aan een onzichtbare komponent. Het onzichtbaar zijn van deze komponent wordt hier echter niet zoals bij Sirius veroorzaakt door een groot magnitudeverschil, maar door het feit, dat de twee componenten zo dicht bij elkaar staan, dat ze op de fotografische plaat (ja zelfs ook vaak visueel) niet of meestal niet gescheiden te zien zijn, erger nog, dat het resulterende beeldje niet te onderscheiden is van een cirkel (twee sterren op  $\approx 1''$  van elkaar (!) veroorzaken op de fotografische plaat zeker "één cirkelvormig beeldje als  $\Delta m \geq 2$ ).

### 2.5.2 Ross 614, een voorbeeld

Voor Ross 614 is bijv.  $a = 0!987$  ( $\approx 3.90$  AE). Nadat in de periode 1927-1937 de "variabiliteit" in de eigenbeweging van Ross 614 ontdekt was heeft de Sproul sterrewacht van 1938-1950 deze ster uitvoerig onderzocht met als resultaat figuur 12. [Het middelpunt van het uit twee sterbeeldjes opgebouwde lichtcirkeltje wordt fotocentrum genoemd en de opeenvolgende posities van dit fotocentrum de fotocentrische baan]

Op 23 maart 1955 nam Baade onder zeer goede atmosferische omstandigheden een foto van Ross 614 met de 200 inch teleskoop van Mt. Palomar. Voor het eerst werd van Ross 614 een geelongeerd en niet cirkelvormig beeldje op de fotografische plaat zichtbaar. Tegelijkertijd waren de beide componenten visueel gescheiden te zien:  $\rho = 1.19$ ;  $\theta = 36^\circ$  en  $\Delta m \approx 3.5$  mag.

Het (visueel geschatte) magnitudeverschil is van groot belang. Daarmee kan nl. de afstand  $\beta$  van het fotocentrum ten opzichte van het centrum van component A geschat worden (zie fig. 13). Gepostuleerd kan worden, dat

$$\beta = \frac{\ell_B}{\ell_A + \ell_B} = \frac{1}{1 + 10^{0.4\Delta m}} \quad (2-19)$$

waarin  $\ell_A$  en  $\ell_B$  de waargenomen lichtkracht van respectievelijk de componenten A en B is.

Uit fig. 13 volgt dat voor de verhouding van de halve lange as van de fotocentrische ellipsbaan,  $a_{fc}$ , tot die van de relatieve baan geldt

$$\frac{a_{fc}}{a} = B - \beta \quad (2-20)$$

Aangezien in de astrometrie alleen de fotocentrische baan bepaald kan worden moet in (2-17) de  $B$  door  $(B - \beta)$  vervangen worden, zodat voor de geocentrische posities van het fotocentrum geldt

$$\left. \begin{aligned} x_{fc} &= c_x + \mu_x t + \pi P_\alpha - (B - \beta) \Delta x \\ y_{fc} &= c_y + \mu_y t + \pi P_\delta - (B - \beta) \Delta y \end{aligned} \right\} \quad (2-21)$$

Oplossingen worden in suksessieve benaderingen gevonden. Eerst worden zo goed mogelijk schattingen gemaakt van  $(c_x, c_y)$ ;  $(\mu_x, \mu_y)$  en  $\pi$ . Met de nu min of meer bekende  $(B - \beta)\Delta x$  en  $(B - \beta)\Delta y$  worden time displacement curves (zie fig. 3 en 1.3.1) gemaakt zodat de dynamische elementen  $P$ ,  $t_p$  en  $e$  in eerste benadering bekend zijn. Met behulp van b.v. de methode van Zwiers (zie 1.3.2) kan nu  $a_{fc}$  bepaald worden tegelijk met de andere geometrische elementen  $i$ ,  $\Omega$  en  $\omega$ . De methode van de differentiele korrekties (zie 1.4) laat nu betere bepalingen van alle grootheden toe. Zo werd voor Ross 614 gevonden  $a_{fc} = 0.306''$ . De voor Ross 614 gevonden elementen maken een voorspelling van de hoekafstand van het fotocentrum ten opzichte van het massacentrum en de positiehoek ervan voor 23 mrt 1955 mogelijk:  $0.372''$  respectievelijk  $217.5^\circ$ .

$\rho_{fe}$



Baade vond:  $\rho = 1.19''$  en  $\theta = 36^\circ$ , d.w.z. [zie (2-20)]

$$\frac{B_c(t)}{\rho(t)} \frac{0.372}{1.19} = \frac{a_{fc}}{a} = B - \beta = 0.31 \quad (2-22)$$

Uit de waargenomen  $\Delta_m$  volgt  $\beta = 0.04$ , zodat  $B = 0.35$ . Uit de gemeten  $a_{fc}$  en (2-22) is nu ook  $a$  bekend, zodat met (1-7)

$$\mathcal{H}_A + \mathcal{H}_B = 0.22\mathcal{K}_\odot$$

en met (2-6)

$$\mathcal{H}_A = 0.14\mathcal{K}_\odot$$

$$\mathcal{H}_B = 0.08\mathcal{K}_\odot$$

### 2.5.3 Experimentele toetsing van de $\beta$ functie

De twee grootste onzekerheden hierbij zijn de slechts 1 x gemeten  $\rho$  waarde [zie (2-22)] en de waarde voor  $\beta$ . Het verband tussen  $\beta$  en  $\Delta_m$  is in 1970 als volgt experimenteel getoetst. Voor het objektief wordt een tralie geplaatst. Als  $d$  = dikte van de spijlen,  $\mathcal{K}$  = de ruimte tussen de spijlen en  $F$  de fokale lengte van het objektief van de teleskoop, dan geldt voor de afstand,  $\Delta_{0,m}$ , tussen het 0<sup>de</sup> en  $n$ <sup>de</sup> orde beeld

$$\Delta_{0,n} = \frac{n F \lambda}{\mathcal{K} + d} \quad (2-22)$$

(Evenals bij de Sirius waarnemingen (zie 2.3) zijn de  $n$ <sup>de</sup> orde spektra zo klein, dat ze niet te onderscheiden zijn van een sterbeeldje!)

Voor het magnitudeverschil,  $\Delta_{0,n}^m$ , tussen het 0<sup>de</sup> en  $n$ <sup>de</sup> orde beeld geldt:

$$\Delta_{0,n}^m = 5 \left( \log \frac{n\mathcal{K}\pi}{\mathcal{K}+d} - \log \sin \frac{n\mathcal{K}\pi}{\mathcal{K}+d} \right) \quad (2-24)$$

$\mathcal{K}$  en  $d$  worden nu zodanig gekozen dat  $\Delta_{0,1} \approx \rho$  van een waar te nemen dubbelster. Door de spijlen van het rooster een geschikte stand te geven (zie fig.15) kan een 1<sup>de</sup> orde beeld van B (=  $B_1$ ) geheel of gedeeltelijk tot samenvallen gebracht worden met het 0<sup>de</sup> orde beeld van A en tegelijk ook een 1<sup>de</sup> orde beeld van A (=  $A_1$ ) met het 0<sup>de</sup> orde beeld van B. Voor elke traliestand is de afstand tussen A en  $B_1$  (= die tussen B en  $A_1$ ) en het helderheidsverschil  $\Delta_{A,B_1}^m$  en  $\Delta_{B,A_1}^m$  bekend, terwijl de positie van het fotocentrum van de 1<sup>de</sup> elkaar overlappende beeldjes van A en  $B_1$  en van B en  $A_1$  ten opzichte van de centra van A en B te meten zijn. Op deze manier kan  $\beta$  als functie van  $\Delta_m$  en  $\rho$  bepaald worden. Voor de Sproul refraktor is gevonden dat

$$\beta_{\text{exp}} = \beta_{\text{theor}} \quad \text{voor } \Delta_m < 1.0$$

$$\beta_{\text{exp}} < \beta_{\text{theor}} \quad \text{voor } \Delta_m > 1.0$$

en voorts dat

$\beta_{\text{exp}} < \beta_{\text{theor}}$  voor  $\rho < 1''$ ,  
 waarbij  $\beta_{\text{theor}}$  de volgens (2-18) berekende waarden zijn. Figuur  
 14 geeft gedeeltelijk deze resultaten weer.

## 2.6 de empirische massa-lichtkracht-wet (MLW), (I)

### 2.6.1 de massa's

De experimentele  $\beta$  ( $\Delta m$ ) relatie heeft tot herziening van enkele  
 massaverhoudingen geleid. Zo blijkt voor Ross 614  $\beta = 0.32$  te  
 zijn, waardoor  $M_A = 0.15 M_{\odot}$  en  $M_B = 0.07 M_{\odot}$ . (zie Figuur 18a Tabel 1)

De tot nu toe bepaalde massa's kunnen gebruikt worden voor de  
 MLW als de absolute bolometrische helderheden van de componenten  
 ook bepaald kunnen worden (zie 2.6.2)

### 2.6.2 de absolute bolometrische magnitudes

Om makkelijk met de theorie te kunnen vergelijken wordt in de  
 empirische MLW de absolute bolometrische magnitude,  $M_{\text{bol}}$ , uitgezet  
 tegen de massa. Deze grootte is gekoppeld aan de totale energie  
output,  $L$  (in erg/sek), zoals in (2-38) is aangegeven. Aannemend,  
 dat er geen interstellaire absorptie is, wordt de absolute licht-  
sterkte,  $L_{\Delta\lambda}$  (lichtsterkte van ster meestal in visuele golfgebied,  
 zoals net buiten de dampkring van de aarde te meten, indien ster op  
 10 parsec staat), bepaald met

$$L_{\Delta\lambda} = \ell_{\Delta\lambda} \left( \frac{z}{10} \right)^2, \quad (2-25)$$

als  $\ell_{\Delta\lambda}$  de net buiten de aardse dampkring gemeten lichtsterkte is  
 in hetzelfde hierboven bedoelde golflengtegebied en  $z$  de afstand  
 van de ster in parsecs is. Met de definitie van magnitude

$$m = 2.5 \log \ell + \text{konstante} \quad (2-26)$$

en (2-12) wordt (2-25):

$$M = m + 5 + 5 \log \pi + A, \quad (2-27)$$

waarin  $A$  een term is, die corrigeert voor interstellaire absorptie,  
 $m$  kan in verschillende kleurenbanden [bijv.: U, B, V, R en I, zie  
 3.8] gemeten worden.

Daar voor een groot aantal sterren  $m_V$  goed bekend is, maar niet  
 $m_{\text{bol}}$  dus ook niet  $M_{\text{bol}}$  is de bolometrische correctie,  $BC$ , geïntro-  
 duceerd, die als volgt gedefinieerd is:

$$\left. \begin{aligned} M_{\text{bol}} &= M_V + BC \\ \text{of } m_{\text{bol}} &= m_V + BC \end{aligned} \right\} \quad (2-28)$$

(N.B. soms wordt de bolometrische correctie gedefinieerd door

$$M_{\text{bol}} = M_V - BC !))$$

Als voor een paar sterren het verband tussen BC en bijv. het spektraaltype gevonden is, dan kan voor een groot aantal sterren de BC geschat worden uit het spektraaltype, dus ook de  $m_{bol}$  en eventueel met (2-27) ook  $M_{bol}$ . In fig. 17a zijn schematisch energiedistributies voor drie types van sterren getekend. De  $m_V$  heeft nu betrekking op de door de optiek en het V filter (zie fig. 17b) doorgelaten energie, terwijl  $m_{bol}$  betrekking heeft op de over alle  $\lambda$ 's uitgestraalde energie. Met (2-28) kan dus voor BC geschreven worden:

$$BC = 2.5 \log \frac{\int_0^{\infty} r_{\lambda}(V) \mathcal{F}_{\lambda} d\lambda}{\int_0^{\infty} \mathcal{F}_{\lambda} d\lambda} + \text{konst} = \text{indien er geen (2-29a)}$$

$$\text{interstellaire absorptie is} = 2.5 \log \frac{\int_0^{\infty} r_{\lambda}(V) \kappa_{\lambda} d\lambda}{\int_0^{\infty} \kappa_{\lambda} d\lambda} + \text{konst} \quad (2-29)$$

Hierin is  $r_{\lambda}(V)$  dat deel van het licht, dat uiteindelijk bijdraagt tot de intensiteitsmeting bij de golflengte  $\lambda$  in het zichtbare golflengtegebied (V)

[ $r_{\lambda}$  wordt o.a. bepaald (zie 3.8) door de reflectie/doorlating van de optiek van de kijker en van het meetinstrument en door de gevoeligheidsfaktor van de fotocel/de fotografische plaat/het oog]

Voorts is  $\mathcal{F}_{\lambda}$  de monochromatische flux (stralingsstroom) aan de oppervlakte van de ster = de energie, die per tijdseenheid door  $1 \text{ cm}^2$  steroppervlak in alle richtingen van de om die ene  $\text{cm}^2$  geslagen halve bol stroomt in een golflengtegebied ter grootte van  $1 \text{ cm}$  bij de golflengte  $\lambda$ .

De totale flux,  $\mathcal{F}$ , is gegeven door

$$\mathcal{F} = \int_0^{\infty} \mathcal{F}_{\lambda} d\lambda \quad (2-30)$$

Met deze grootte kan de effektieve temperatuur,  $T_{\text{eff}}$ , van een ster gedefinieerd worden, zijnde de temperatuur van een zwart lichaam, waarvoor de totale flux even groot is, zodat

$$\mathcal{F} = \sigma T_{\text{eff}}^4 \quad (2-31)$$

als  $\sigma$  de konstante van Stefan-Boltzmann is ( $= 5.6687 \times 10^{-5} \text{ erg cm}^{-2} \text{ graad}^{-4} \text{ sek}^{-1}$ )

$$\left[ \sigma = \frac{a \cdot c}{4}, \text{ zie (6-20)} \right]$$

N.B. de stralingsintensiteit,  $I_{\lambda}(\psi, \varphi)$  is richting afhankelijk [ $\psi$  = hoek met de normaal en  $\varphi$  de azimutale hoek (zie fig. 16) en wordt uitgedrukt in erg per  $\text{cm}^2$  loodrecht op de richting  $(\psi, \varphi)$ ,



per sek, per sterad en per  $\Delta\lambda = 1$  bij de golflengte  $\lambda$ . Dit betekent dat gedurende  $dt$  sek door een oppervlakje  $ds$  aan de oppervlakte van een ster in een ruimtehoek  $d\omega$  rondom de richting  $(\psi, \varphi)$  in het golflengtegebiedje  $d\lambda$  rondom  $\lambda$  een energie  $dE_\lambda$  stroomt gegeven door

$$dE_\lambda = I_\lambda(\psi, \varphi) \cdot (ds \cos \psi) dt \cdot d\lambda \cdot d\omega \quad (2-32)$$

Voor  $F_\lambda$  kan nu geschreven worden

$$F_\lambda = \int_{\text{halve bol}} I(\psi, \varphi) \cos \psi d\omega \quad (2-33)$$

of met substitutie van  $d\omega = \sin \psi d\psi d\varphi$

$$F_\lambda = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} I(\psi, \varphi) \cos \psi \sin \psi d\psi d\varphi \quad (2-34)$$

Voor het geval dat  $I(\psi, \varphi)$  niet van  $\varphi$  afhangt wordt (2-35):

$$F_\lambda = 2\pi \int_0^{\pi/2} I(\psi) \cos \psi \sin \psi d\psi \quad (2-36)$$

Voor de op aarde te meten monochromatische flux,  $f_\lambda$  ( $\text{erg cm}^{-2} \text{sek}^{-1}$ ), kan nu geschreven worden

$$f_\lambda = (R/z)^2 F_\lambda \quad (2-37)$$

De totale energie output per seconde van de ster  $\mathcal{L}$  ( $\text{erg sek}^{-1}$ ) is

$$\mathcal{L} = 4\pi R^2 \sigma T_{\text{eff}}^4 \quad (2-38)$$

[zie ook (6-16)]

Het is duidelijk dat

$$\frac{L_{\text{bol}}}{\mathcal{L}} = \text{konstant} \quad (2-39)$$

zodat

$$M_{\text{bol}} = -2.5 \log \mathcal{L} + \text{konst} \quad (2-40)$$

en

$$M_{\text{bol}} = M_{\text{bol}_\odot} + 2.5 \log \frac{\mathcal{L}_\odot}{\mathcal{L}} \quad (2-41)$$

### 2.6.3 bepaling van de bolometrische korrekcie

In fig. 17a is schematisch  $F_\lambda$  als functie van  $\lambda$  gegeven voor drie types van sterren. Dergelijke krommen zijn te verkrijgen door in nauwe  $\lambda$  gebiedjes ( $1-10 \text{ \AA}$ ) de fluxen bij verschillende  $\lambda$ 's te meten. In de meeste gevallen zal een  $f_\lambda$  gemeten worden (2-25), in sommige gevallen ook  $f_\lambda$  (absoluut), zodat als van deze sterren ook nog de hoekdiameter  $R/z$  (zie sectie 10) bekend is de  $F_\lambda$  met (2-37) als functie van  $\lambda$  bepaald kan worden.

De aardse dampkring laat geen straling met  $\lambda < 3000 \text{ \AA}$  door en slechts zeer gedeeltelijk straling met  $\lambda > 10\mu$ . D.w.z. alleen van sterren die weinig energie uitstralen bij  $\lambda$ 's  $< 3000 \text{ \AA}$  en  $\lambda$ 's  $> 10\mu$  kan een redelijke benadering voor  $m_{\text{bol}}$  vanaf de aarde bepaald worden. Dit zijn de sterren met spektraaltypen later dan

F5 en vroeger dan M. Voor de andere sterren zijn aanvullende metingen buiten de aardse dampkring nodig.

De BC's kunnen ook via modellen van sterren berekend worden. Als nl. van een ster de  $T_{\text{eff}}$  en de versnelling van de zwaartekracht in de buitenste lagen,  $g$ , bekend zijn (zie 2.7.2 ) kan een theoretisch model van de atmosfeer van die ster gemaakt worden o.a. aannemende dat de ideale gaswet geldt en dat de atmosfeer in hydrostatisch evenwicht is (zie ). Voor elke  $\lambda$  is nu  $\mathcal{F}_\lambda$  te berekenen, zodat met (2-29) de BC is te bepalen. De invloed van het V kleurenfilter op  $r_\lambda$  wordt in fig. 17b schematisch weergegeven. De bolometrische correctie van de zon wordt aangenomen (aangenomen waarde schommelt tussen  $-0.07^m$  en  $-0.11^m$ ; advies: gebruik  $BC_\odot = -0.09^m$ ). De konstante in (2-29) kan bepaald worden door vergelijking met een via een zonsmodel berekende BC.

Dat de schatting van de BC niet eenvoudig is blijkt o.a. uit tabel I. De verschillen in  $M_{\text{bol}}$  voor de componenten van Ross 614 tussen de 1971 en 1959 bepalingen blijken  $0.7^m$  te zijn.

#### 2.6.4 de massa-lichtkracht-wet

Fig. 18 laat enkele punten van de empirische MLW zien. Deze figuur is ontleend aan een publikatie steunend op 1959 resultaten. De 1971 resultaten zijn met open cirkeltjes aangegeven. De 1959 resultaten lieten een splitsing in drieën toe. Voor heldere hoofdreekssterren ( $M_{\text{bol}} < 7$ ) zou gelden:

$$L_{\text{bol}} \sim M^4 \quad \text{of} \quad (2-42)$$

$M_{\text{bol}} = 4.6 - 10.0 \log M$   
voor de rode dwergen ( $7 < M_{\text{bol}} < 12$ ):

$$L_{\text{bol}} \sim M^2 \quad \text{of} \quad (2-43)$$

$$M_{\text{bol}} = 6.4 - 5 \log M$$

en voor  $M_{\text{bol}} > 12$  wellicht

$$L_{\text{bol}} \sim M \quad (2-44)$$

In sectie 4.5 zal de MLW weer ter sprake komen. Een betere benadering voor de empirische MLW is ( zie fig. 33 )

$$M_{\text{bol}} = 4.4 - 9.2 \log M \quad \text{of} \quad (2-45)$$

$$L_{\text{bol}} \sim M^{3.68}$$

Tabel I Gegevens van enkele visuele- en astrometrische dubbelsterren

	$\alpha$ (1900)	$\delta$	Sp	$\mu$ ( $\mu$ /jaar)	$m_V$	$\pi''$	$M_V$	$M_{bol}$	P(j)	a''	a(AE)	$\frac{M_A + M_B}{M_\odot}$	$\beta$	$\frac{M_A}{M_\odot}$	$\frac{M_B}{M_\odot}$
Sirius	06 24.3	-02 44	A A IV	1.33	1.5	0.377	1.4	1.2	50.09	7.50	19.9	3.14	0.30	2.20	0.94
			B D A		8.3		11.2								
Procyon	07 34.1	+05 29	A F5 IV-V	1.25	0.3	0.287	2.6	2.6	40.65	4.55	15.9	2.43	0.268	1.78	0.65
			B -		10.8		13.1	12.4							
$\zeta$ Her	16 37.5	+31 47	A G0 IV	2.9	0.105	3.0	2.9	2.9	34.4	1.37	1.88	0.35	1.22	0.66	0.66
			B KO		5.6		5.5								
85 Peg	23 56.9	+26 33	A G3 V	5.8	0.081	5.4	5.2	5.2	26.27	0.83	1.56	0.44	0.87	0.69	0.69
			B -		8.9		8.4	7.3							
$\theta^2$ Eri	04 10.8	-07 49	B DA	9.6	0.204	11.2	10.8	10.8	248	6.89	0.63	0.31	0.435	0.195	0.195
			C M5e		11.1		10.1								
			D M4		10.0		8.7								
Fu 46	17 09.2	+45 50	B M4	10.4	0.155	11.3	9.1	9.1	13.12	0.71	0.56	0.445	0.31	0.25	0.25
			B M4		10.4		9.1								
Kru' 60	22 24.4	+57 12	A M4	9.8	0.254	11.8	9.6	9.6	44.6	2.41	9.5	0.43	0.374	0.27	0.16
			B M6		11.4		10.6								
L 726-8	01 34.0	-18 28	{ A M6e	3.36	0.365	15.3	12.7	12.7	25	2.13	5.8	0.30	(.5)	0.15	0.15
			{ B M6e		13.0		13.2								
Ross 614	06 24.3	- 2 44	{ A dm5.5e	0.99	0.370	15.35	12.68	12.68	200	5.57	5.57	0.079	0.44	0.044	0.035
			{ B dm5.5e		12.95		13.18								
Ross 614	06 24.3	- 2 44	{ A M5e	0.991	0.249	13.3	11.1	11.1	16.5	0.98	3.9	0.22	0.32	0.15	0.07
			{ B M5e		14.8		13.0								
Ross 614	06 24.3	- 2 44	{ A M2e	0.991	0.251	13.3	10.5	10.5	"	0.98	3.9	"	0.31	0.14	0.08
			{ B M2e		14.8		12.3								



Uitbijters in fig.18 zijn de witte dwergen Sirius B, Procyon B en  $O^2$  Eridani B. Voordat de experimentele  $\beta$  ( $\Delta m$ ) relatie (zie 2.5.3) bekend was lag  $\zeta$  Her A beduidend boven de gemiddelde lijn en werd "overluminous" voor zijn massa genoemd. 85 Peg B echter lag toen nog beduidend te laag en werd "underluminous" voor zijn massa genoemd.

## 2.7 Sirius,(II)

### 2.7.1 de $T_{\text{eff}}$ van Sirius

Substitutie van (2-28) en (2-37) in (2-41) geeft

$$BC = -M_V + M_{V\odot} + BC_{\odot} - 5 \log R/R_{\odot} + 10 \log T_{\text{eff}\odot} - \log T_{\text{eff}} \quad (2-46)$$

$M_{V\odot}$ ;  $BC_{\odot}$ ;  $R_{\odot}$  en  $T_{\text{eff}\odot}$  zijn momenteel redelijk goed bekend (resp:

$+4.^m87$ ;  $-0.^m11$ ;  $6.96 \times 10^{10}$  cm en  $5780^{\circ}\text{K}$ ). Zodra nu  $M_V$  en  $R/R_{\odot}$  van een ster bekend zijn kan voor die ster met behulp van (2-46) de BC als functie van  $T_{\text{eff}}$  berekend worden. Dit is bijv. voor Sirius het geval ( $R/R_{\odot} = 1.76 \pm 0.04$ , zie sectie 10). In fig.20 is deze relatie BC ( $T_{\text{eff}}$ ) voor Sirius getekend (het gearceerde gebied wordt bepaald door de fout in  $R/R_{\odot}$ ). Tevens is in fig.20 het verband tussen BC en  $T_{\text{eff}}$  gegeven volgens de modellen. De bovenste en onderste lijn geven de begrenzingen voor deze relatie aan voor allerlei verschillende modellen (variaties in  $g$ , in metaalinhoud). Volgens tabel I is voor Sirius  $M_V = 1.^m40$ . Volgens fig.20 zou dan  $T_{\text{eff}} \approx 10750^{\circ}\text{K}$  moeten zijn. Dit is echter aan de hoge kant voor Sirius (zie sectie 10). Metingen wijzen op  $T_{\text{eff}} \approx 10380^{\circ}\text{K}$ ,  $\pm 180^{\circ}\text{K}$ , d.w.z.  $M_V \approx 1.^m5$ . Dit kan alleen als Sirius A zelf een dubbelster is. Voor de onbekende component C zou  $M_V = 4.^m$  moeten zijn, d.w.z. Sirius C zou bijvoorbeeld een F7 ster moeten zijn. F7 hoofdreeks sterren hebben een massa van  $\approx 1.3M_{\odot}$ . Dus zou (zie tabel I) Sirius A een massa moeten hebben ongeveer gelijk aan die van de zon. Hier is een interessant onderzoekgebied. Sirius A is nl. een zogenaamde metaalrijke ster. Veel metaalrijke sterren blijken dubbel te zijn.

### 2.7.2 de $g$ van Sirius

Zodra de massa en de straal van een ster bekend zijn, kan  $g$  met behulp van

$$\mathcal{L}/\mathcal{L}_{\odot} = (R/R_{\odot})^2 \times g/g_{\odot} \quad (2-47)$$

berekend worden. Met  $g_{\odot} = 2.74 \times 10^4 \text{ cm/sec}^2$ ,  $R/R_{\odot} = 1.76$  en

$\mathcal{L}/\mathcal{L}_{\odot} = 2.20$  volgt voor Sirius

$$g = 1.96 \times 10^4 \text{ cm/sec}^2$$

of

$$\log g = 4.29$$

Is echter  $\mathcal{N}_{\text{Sirius A}} = \mathcal{N}_{\odot}$  dan zou

$$g = 8.9 \times 10^3 \text{ cm/sec}^2$$

of

$$\log g = 3.95 \text{ moeten zijn.}$$

Een goede bepaling van  $\log g$  langs andere weg is zeer gewenst. De profielen van de waterstoflijnen in het spectrum van B en A sterren zijn afhankelijk van  $g$ . Tot nu toe is echter uit dergelijke onderzoekingen nog geen bindende bepaling voor de  $g$  van Sirius gevonden. voor 2.8 zie bl.22a

### 2.9 sekulaire veranderingen in de eigenbeweging

Een niet versnelde beweging van een ster zal voor een waarnemer in een draaiend koördinatenstelsel een versnelde beweging lijken te hebben. Het draaiende koördinatenstelsel wordt hier bepaald door de verbindingslijn zon - ster.

Voor de versnelling van een bewegend massapunt in een draaiend koördinatenstelsel geldt in poolkoördinaten:

$$a_z = \ddot{z} - z \dot{\varphi}^2, \quad (2-47)$$

waarbij  $-z \dot{\varphi}^2$  de centrifugale versnelling is

en

$$a_{\varphi} = z \ddot{\varphi} + 2 \dot{z} \dot{\varphi} \quad (2-48)$$

waarbij  $2\dot{z}\dot{\varphi}$  de Coriolisversnelling is.

[N.B.:  $a_z \neq \frac{dv_z}{dt}$  en  $a_{\varphi} \neq \frac{dv_{\varphi}}{dt}$ , immers

$$\left[ \frac{dv_z}{dt} = \ddot{z} \text{ en } \frac{dv_{\varphi}}{dt} = z \ddot{\varphi} + \dot{z} \dot{\varphi} \right]$$

Als  $z$  in parsecs,  $\varphi$  in radialen en  $t$  in jaren uitgedrukt wordt ziet de waarnemer een centrifugale versnelling van

$$+ z \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \text{ parsecs/jaar}^2 \quad (2-49)$$

en een Coriolisversnelling van

$$- 2 \frac{dz}{dt} \frac{d\varphi}{dt} \text{ parsecs/jaar}^2$$

of

$$- 2 \frac{dz}{dt} \frac{d\varphi}{dt} \frac{1}{z} \text{ radialen/jaar}^2$$

of

$$\Delta\mu (" / \text{jaar}^2) = -206265 \times 2 \times \frac{dz}{dt} \frac{d\varphi}{dt} \frac{1}{z} \quad (2-50)$$

Nu is  $\frac{1}{z(\text{psc})} = \pi''$  [ zie (1-3) en (2-12) ]

$$\frac{d\varphi}{dt} (\text{rad/jaar}) = \frac{\mu(''/\text{jaar})}{206265}$$

$$\text{en} \quad \frac{dz}{dt} (\text{psc/jaar}) = \frac{v_{\text{rad}} (\text{km/sek})}{4.74 \times 206265}$$

omdat 1 parsec = 206265 AE

1 rad = 206265 boogseconden

1 AE/jaar = 4.74 km/sek,

zodat (2-50) wordt:

$$\Delta\mu (''/\text{jaar}) = - 2!05 \times 10^{-6} v_{\text{rad}} \cdot \mu \cdot \pi \quad (2-51)$$

Voor Barnard's ster (zie bl.9) zijn  $\mu$ ,  $\pi$  en  $v_{\text{rad}}$  zeer groot.

Met (2-51) volgt hieruit:

$$\Delta\mu = + 0!00125 \pm 0!00003$$

Om deze waarde te kunnen meten zijn op de Sproul sterrenwacht van 1916- 1919 en van 1938-1961 zo'n 3500 platen opgenomen om de werkelijke verplaatsingen van Barnard's ster zo goed mogelijk te bepalen. De moeilijkheid hierbij is, dat de eigenbewegingen van de referentie/hiervoor ook bepaald moeten worden. Dit zou idealiter kunnen geschieden tegen een achtergrond van melkwegstelsels. In het onderhavige geval is het statistisch gedaan met 24 andere referentiesternen. Figuur 19 laat het resultaat zien. Uit deze metingen kon worden afgeleid:

$$\Delta\mu = 0!00121 \pm 0!00003 !$$

(2-51) kan herschreven worden als

$$v_{\text{rad}} = -4.88 \times 10^5 \frac{\Delta\mu''}{\mu'' \cdot \pi''} (\text{km/sek}), \quad (2-52)$$

zodat uit de waargenomen  $\Delta\mu$  volgt

$$v_{\text{rad}} = - 104 \pm 2.6 \text{ km/sek.}$$

Het toepassen van (2-52) wordt belangrijk bijv. bij witte dwergen, waarbij Einstein <sup>(voord=)</sup> verschuivingen verwacht kunnen worden. Voor van Maanen's ster ( $\alpha_{1950} = 0^h 46^m 5^s$ ;  $\delta_{1950} = +5^{\circ} 09'$ ;  $V = 12^m 4$ ; DF;  $\mu = 2!949 \text{ jaar}^{-1}$ ;  $\pi = 0!234 \pm 0!004$  is de geschatte massa  $0.68 M_{\odot}$  en de geschatte straal  $\frac{1}{78} R_{\odot}$ . Hieruit volgt een Einsteinverschuiving van + 34 km/sek. Op de Sproul sterrenwacht is materiaal vanaf 1937 voor deze ster bewerkt met als resultaat

$$\Delta\mu = 0!00023$$

Formule (2-52) levert

$$v_{\text{rad}} = 160 \pm 45 \text{ km/sek}$$

Direkte waarnemingen van  $v_{\text{rad}}$  geven: + 238 km/sek (1926); + 21 tot + 216 km/sek (1954); + 54 km/sek (1967); - 50 km/sek (alleen neutrale ijzerlijnen). Haal uit je winst! Betere directe bepalingen van  $v_{\text{rad}}$  zijn hard nodig!

sterren



2.8 empirische bepaling van de BC

Formule (2-46)

$$BC = -5 \log R/R_{\odot} - [M_V + 10 \log T_{\text{eff}}] + [M_V + BC_{\odot} + 10 \log T_{\text{eff}_{\odot}}]$$

kan gebruikt worden om de BC empirisch te bepalen, zodra van een ster  $R/R_{\odot}$ ,  $M_V$  en  $T_{\text{eff}}$  bekend zijn. In veel gevallen zal  $R/R_{\odot}$  niet bekend zijn. Combinatie van (2-46) en (2-47) geeft dan

$$BC = -2.5 \log M/M_{\odot} - [M_V + 10 \log T_{\text{eff}} - 2.5 \log g] + [M_V + BC_{\odot} + 10 \log T_{\text{eff}_{\odot}} - 2.5 \log g_{\odot}] \quad (2-53)$$

Het is duidelijk, dat astrometrische dubbelsterren een belangrijke rol zullen kunnen spelen bij een dergelijk onderzoek, immers voor de componenten ervan zijn zowel de parallax als de massa's vaak redelijk goed bekend.

In eerste instantie zullen verschillen in BC met behulp van (2-53) nauwkeurig bepaald kunnen worden door twee componenten met elkaar te vergelijken, die bijv. dezelfde kleurindex (R-I) en dezelfde profielen voor de H lijnen hebben (dit betekent gelijke  $T_{\text{eff}}$  en  $g$ ).

Langs deze weg kan wellicht het verschil in de MLW van de dwergen van de Hyaden en van de veldsterren (zie figuur 33) verminderd/geëlimineerd worden.

### 3. Bedekkingsveranderlijken

#### 3.1 definitie en notaties

Bedekkingsveranderlijken zijn dubbelstersystemen, waarvan de componenten niet met telescopen te scheiden zijn. Het dubbelkarakter wordt verraden door helderheidsvariaties ontstaan door dat de componenten elkaar beurtelings geheel of gedeeltelijk bedekken. Hiervoor is nodig, dat het baanvlak min of meer loodrecht op het hemelvlak staat.

Volgende notaties zijn gebruikelijk:

$R_1$                     straal van de grotere component  
 $R_2$                     "       "       " kleinere       "       } (dus altijd:  $R_1 > R_2$ )

$r_1 = R_1/a$  }  
 $r_2 = R_2/a$  }        waarin  $a$  de halve lange as van de ware relatieve baan  
                   }        ( $a$  is dus de eenheid, waarin de stralen uitgedrukt worden)

$k = r_2/r_1$            (dus altijd:  $0 < k \leq 1$ )

$\mathcal{K}_1$  gemeten lichtkracht van de grotere component,  
 $\mathcal{K}_2$        "       "       "       " kleinere       "       } ( $\mathcal{K}_1 < \mathcal{K}_2$  is mogelijk)

$i =$                     met als eenheid de som van de lichtkrachten van  
                           beide componenten dus:  $\mathcal{K}_1 + \mathcal{K}_2 = 1$                     (3-1)  
                           (evenals bij vis.D.S.en, zie bl.5)  $i^2$  hoek tussen hemel-

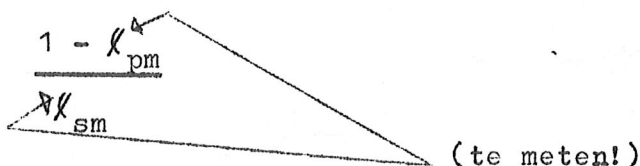
en baanvlak  
 In fig. 21a is schematisch een lichtkromme weergegeven, terwijl in fig. 21b is aangegeven welke posities de componenten op de verschillende tijdstippen kunnen hebben. *De afstanden van de componenten zijn zodanig gekozen dat* De situatie bij het primaire minimum wordt transit (kleinere ster voor grotere), die bij het sekundaire minimum okkultatie (kleinere ster achter grotere) is, genoemd.

M.b.v. fig. 21 kan voor de te meten intensiteit tijdens het prim. min.,  $\mathcal{K}_{pm}$ , en die tijdens het sekundaire minimum,  $\mathcal{K}_{sm}$ , geschreven worden

$$\mathcal{K}_{pm} = \mathcal{K}_2 + \mathcal{K}_1 (1 - k^2) = 1 - k^2 \mathcal{K}_1, \quad (3-2)$$

$$\text{en } \mathcal{K}_{sm} = \mathcal{K}_1,$$

waaruit volgt:

$$k^2 = \frac{1 - \mathcal{K}_{pm}}{\mathcal{K}_{sm}} \quad (3-4)$$


(te meten!)

### 3.2 de randverzwakking (CLV) <sup>65</sup> van z<sub>on</sub> en sterren

Formule (3-4) geldt echter niet in de praktijk, daar bij de afleiding aangenomen is, dat de helderheidsverdeling over de schijven ( $\pi R_1^2$  en  $\pi R_2^2$ ) homogeen is. Dit is in werkelijkheid niet het geval. In het zichtbare golflengtegebied is de intensiteit van de continue straling in het centrum (zoals gezien vanuit de waarnemer) groter dan die aan de rand. Dit verschijnsel heet randverzwakking en zal aangeduid worden met CLV (centre to limb variation). Voor het in formule brengen van de CLV wordt een hoek  $\psi$  in gevoerd zijnde de hoek gevormd door de verlengde straal vanuit het midden van de ster naar het waarnemingspunt met de lijn waarnemingspunt - waarnemer. (zie fig. 21, maar ook fig. 16 en het N.B. in sectie 2.6.2).

Een vaak gebruikte substitutie is:  $\mu = \cos \psi$  (3-5)

Alleen in het geval van de z<sub>on</sub> kan de CLV gemeten worden. Een goede benaderingsformule is:

$$i_\lambda = \frac{I_\lambda(\psi)}{I_\lambda(0)} = \frac{I_\lambda(\mu)}{I_\lambda(\mu=1)} = a_\lambda + b_\lambda \cdot \mu + c_\lambda \left[ \frac{1 - \mu \ln(1 + \mu^{-1})}{1 - \mu \log\left(1 + \frac{1}{\mu}\right)} \right] \quad (3-6)$$

Een veel gebruikte (~~groffe~~) benaderingsformule is:

$$i_\lambda = 1 - u_\lambda (1 - \mu), \quad (3-7)$$

waarin  $u_\lambda$  de randverzwakkingscoëfficiënt genoemd wordt

Fig. 23a geeft voor de z<sub>on</sub> voor  $\lambda = 6000 \text{ \AA}$  de CLV volgens (3-6), terwijl fig. 23b CLV's geeft voor  $u_\lambda = 0$  (geen randverzwakking),

$u_\lambda = 0.55$  (benadering voor  $\lambda = 6000 \text{ \AA}$ ) en  $u_\lambda = 1$  (randintensiteit = 0, d.w.z. maximale verzwakking).

In onderstaande tabel worden enkele waarden van  $u_\lambda$ ,  $a_\lambda$ ,  $b_\lambda$  en  $c_\lambda$  voor de z<sub>on</sub> met elkaar vergeleken.

Tabel II Randverzwakkingscoëfficiënten voor de z<sub>on</sub>

$\lambda$	$u_\lambda$	$a_\lambda$	$b_\lambda$	$c_\lambda$
4500	0.73	0.541	0.594	-0.430
5000	0.65	0.675	0.494	-0.555
6000	0.55	0.781	0.390	-0.557
7000	0.47 <sub>5</sub>	0.862	0.306	-0.546



Een goed gemeten CLV bij een golflengte bij zon of ster kan reeds informatie verschaffen over het temperatuurverloop in de fotosfeer van de zon of die ster.

Immers indien voor de intensiteit van de onder een hoek  $\psi$  uittredende straling geschreven kan worden (theorie steratmosferen)

$$I_{\lambda}^{-}(\psi) = \int_0^{\infty} B_{\lambda}(\tau_{\lambda}) e^{-\tau_{\lambda} \sec \psi} \sec \psi d\tau_{\lambda} \quad (3-8)$$

dan kan, als (3-6) geldt, bewezen worden dat

$$B_{\lambda}(\tau_{\lambda}) = a_{\lambda} + b_{\lambda} \tau_{\lambda} + c_{\lambda} E_2(\tau_{\lambda}) \quad (3-9)$$

$$E_2(\tau_{\lambda}) = \text{tweede exponentiële integraal} = \int_1^{\infty} \frac{e^{-\tau_{\lambda} x}}{x^2} dx$$

$$B_{\lambda}(\tau_{\lambda}) = \text{Planckfunctie}$$

$$\tau_{\lambda} = \text{optische diepte, zie de formules (6-4) t/m (6-5) in 6.}$$

Daar nu  $B_{\lambda}$  bij elke  $\tau_{\lambda}$  bekend is ( $0 < \tau_{\lambda} < 1$ ) is  $T(\tau_{\lambda})$  ook bekend.

Met de waargenomen  $I_{\lambda}(\psi)$  en (2-36) kan  $\mathcal{F}_{\lambda}$  berekend worden, zodat met (2-30) ook  $\mathcal{F}$  en met (2-31) tenslotte  $T_{\text{eff}}$  gevonden kan worden.

Zoals reeds in 2.6.3 gezegd (zie ook *modellen van*) kunnen bij *steratmosferen gekonstrueerd worden voor verschillende combinaties van  $T_{\text{eff}}$  en  $g$*  zekere  $T_{\text{eff}}$  en  $g$  modellen ~~gekonstrueerd worden van sterren.~~ Voor deze modellen kan de CLV voor elk punt van de sterschiif als functie van  $\lambda$  en  $T_{\text{eff}}$  *(en ook  $g$ )* berekend worden. Deze niet in  $\mu$  lineaire CLV's kunnen dan zo goed mogelijk benaderd worden door de lineaire randverzwakkingsformule (3-7), zodat  $u_{\lambda}(T_{\text{eff}})$  relaties afgeleid kunnen worden. Fig. 24 geeft een voorbeeld van zo'n relatie voor hetere sterren. Modellen van verschillende "modellenmakers" zijn gebruikt.

Voor sterren is het zeer moeilijk om zelfs een schatting van de lineaire randverzwakkingscoëfficiënt  $u_{\lambda}$  te krijgen. De analyse van de lichtkromme van een bedekkingsveranderlijke (zie 3.6) is een mogelijkheid. In de toekomst kan wellicht de optische interferometrie ook inlichtingen verschaffen (zie sectie 10).

### 3.3 theoretische lichtkrommen

Om bijv. een betere benadering voor  $k$  te vinden dan met (3-4) zal bij transit de positie van de kleinere component t.o.v. de grotere en de randverzwakking van de grotere component in rekening gebracht moeten worden.

Bij okkultatie zal de manier waarop de kleinere component achter de grotere verdwijnt en de randverzwakking van de kleinere component in rekening gebracht moeten worden. Daartoe worden in de praktijk de functies

$$u_1 \quad \text{tr} \quad \text{en} \quad (3-10)$$

$$u_2 \quad \text{ok} \quad (3-11)$$

ingevoerd zijnde de frakties van het licht, die van de grotere resp. kleinere component verduisterd worden.

I.h.a. geldt

$$u_m \quad f = u_m \quad f ( r_1, r_2, (u_\lambda)_m, i, \omega, e, \mathcal{P}, t_p, t ) \quad (3-12)$$

(m = 1 of 2)

Voor de lichtkracht  $\mathcal{L}$  van het systeem op enig tijdstip tijdens transit kan geschreven worden [zie (3-1)]:

$$\mathcal{L} = (1 - u_1 \quad \text{tr} \quad f) \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 = 1 - u_1 \quad \text{tr} \quad f \cdot \mathcal{L}_1 \quad (3-13)$$

en tijdens okkultatie:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + (1 - u_2 \quad \text{ok} \quad f) \mathcal{L}_2 = 1 - u_2 \quad \text{ok} \quad f \cdot \mathcal{L}_2 \quad (3-14)$$

De afhankelijkheid van  $f$  van de grootheden  $r_1, r_2, i, \omega, e, \mathcal{P}, t_p$  en  $t$  wordt samengevoegd in één variabele  $p$ , de geometrische diepte genaamd.

$$p = \frac{\delta - r_1}{r_2}, \quad (3-15)$$

waarin  $\delta$  = de op het hemelvlak geprojecteerde afstand van de centra van de 2 componenten.

Voor cirkelvormige banen geldt:

$$\delta^2 = a^2 (\sin^2 \theta \sin^2 i + \cos^2 i), \text{ maar daar } a = 1 \text{ gesteld (zie bl. } \dots)$$

$$\delta^2 = \sin^2 \theta \sin^2 i + \cos^2 i, \quad (3-16)$$

$$\text{waarin } \theta = \frac{2\pi}{\mathcal{P}} (t - t_0), \quad (3-17)$$

en waarin  $t_0$  = het tijdstip van het diepste punt van het primaire minimum is. Volledigheidshalve zij hier opgemerkt, dat uit (3-15) volgt

$$\delta = r_1 (1 + kp). \quad (3-18)$$

f is nu een funktie van p, k en u.

27.

Bewijs, dat bij inwendig raken van de sterschijfjes  $p = -1$  en bij uitwendig raken  $p = +1$ . Bij okkultatie is voor  $p \leq -1$   
 $u^2 f^{\text{ok}} = 1$  voor elke  $u_\lambda$  en  $\ell = \ell_1$ .

In de jaren 1945-1950 zijn tabellen gemaakt van f als funktie van p, k en u en van veel andere funkties nodig bij de analyse van lichtkrommen. De partiële afgeleiden in 3.4 genoemd zijn er voorbeelden van.

Voor een voorlopige set van elementen van een bedekkingsveranderlijke kan p als funktie van de tijd berekend en derhalve ook f bepaald worden. Nu is dus de lichtkracht m.b.v. (3-13) en (3-14) op elk moment te berekenen:  $\ell_{\text{calc}}$ . Zulke lichtkrommen hebben geenszins de vorm zoals aangegeven in fig. 21, maar veeleer zoals aangegeven in fig. 27a.

### 3.4 de methode der differentiële korrekties

Voor een eerste set van elementen zijn de verschillen

$$\Delta \ell (0 - C_1) = \ell_0 - \ell_{C_1} = \ell_{\text{obs}} - \ell_{\text{calc}_1} \quad (3-19)$$

te berekenen. Uit  $\ell = 1 - f_m \ell_m$  [ $m = 1$  of  $2$ , zie (3-13) en (3-14)]

volgt

$$\Delta \ell = -f_m \Delta \ell_m - \ell_m \Delta f_m, \quad (3-20)$$

waarin  $\Delta f_m$  met (3-12) voor elk waarnemingstijdstip bepaald is door (cirkelvormige banen!):

$$\Delta f_m = \frac{\partial f_m}{\partial r_1} \Delta r_1 + \frac{\partial f_m}{\partial r_2} \Delta r_2 + \frac{\partial f_m}{\partial u_m} \Delta u_m + \frac{\partial f_m}{\partial i} \Delta i + \frac{\partial f_m}{\partial \mathcal{P}} \Delta \mathcal{P} + \frac{\partial f_m}{\partial t_0} \Delta t_0, \quad (3-21)$$

*Stel de lichtverste  $\ell_{C_2}$  van een*  
~~Een eventueel betere~~ theoretische lichtkromme kan geschreven worden als

$$\ell_{C_2} = \ell_{C_1} + \Delta \ell, \quad \text{die mogelijk beter over een horizontaal de waarnemingen}$$

waarin  $\Delta \ell$  een funktie is van de nog te bepalen korrekties  $\Delta \ell_m$ ;  $\Delta r_1$ ;  $\Delta r_2$ ;  $\Delta u_m$ ;  $\Delta i$ ;  $\Delta \mathcal{P}$  en  $\Delta t_0$ .  $\mathcal{P}$  en  $t_0$  zijn meestal zo nauwkeurig te meten, dat de laatste 2 termen in (3-21) weggelaten kunnen worden.

De term met  $\Delta u_m$  moet weggelaten worden omdat de factoren

$\frac{\partial \ell_m}{\partial u_m}$  erg klein zijn t.o.v. de andere partiële afgeleiden zodat geen betrouwbare  $\Delta u$ 's verkregen kunnen worden. Analoog aan (1-30) en (1-31)



kan nu voor elk waarnemingspunt geschreven worden:

$$\Delta\kappa(O-C_2) = \Delta\kappa(O-C_1) + f_m \Delta\kappa_m + \kappa_m \frac{\delta f_m}{\delta r_1} \Delta r_1 + \kappa_m \frac{\delta f_m}{\delta r_2} \Delta r_2 + \kappa_m \frac{\delta f_m}{\delta i} \Delta i \quad (m=1 \text{ of } 2). \quad (3-22)$$

Met de methode van de kleinste kwadraten kunnen we nu de correcties  $\Delta\kappa_1$ ,  $\Delta\kappa_2$ ,  $\Delta r_1$ ,  $\Delta r_2$  en  $\Delta i$  gevonden worden. Deze procedure kan desnoods nog eens herhaald worden om de convergentie van het geheel na te gaan.

De bepaling van  $u$  zal in 3.6 nader behandeld worden.

### 3.5 Model van twee gelijkvormige ellipsoiden

Door getijdewerkingen o.a. zijn de componenten van een bedekkingsveranderlijke vaak niet sferisch. De meest eenvoudige benadering hiertoe is om aan te nemen, dat de twee componenten voor te stellen zijn door gelijkvormige ellipsoiden. Stel de halve lange assen zijn  $a_1$  en  $a_2 = ka_1$  en de halve korte assen

$$b_1 \text{ en } b_2 = kb_1$$

dan is de ellipticiteit  $\epsilon$  van de componenten gegeven door

$$1 - \epsilon^2 = \left(\frac{b_1}{a_1}\right)^2 = \left(\frac{b_2}{a_2}\right)^2$$

De projecties op het hemelvlak van deze ellipsoiden zijn twee ellipsen met halve korte assen

$$\beta_1 = b_1$$

en

$$\beta_2 = kb_1$$

en halve lange assen

$$\alpha_1 = a_1 (1 - z \cos^2 \theta)^{\frac{1}{2}} \quad (3-23)$$

en

$$\alpha_2 = ka_1,$$

$$\text{als} \quad z = \xi^2 \sin^2 i \quad (3-24)$$

Aangetoond kan worden dat de verhouding van het oppervlak van de doorsnee van twee ellipsen, waarvan de lange assen op een rechte liggen, tot het oppervlak van één van die ellipsen niet verandert als de afstanden van de punten op de ellipsotrek tot de "lange-assen-lijn" met eenzelfde faktor vergroot/verkleind worden. Wordt voor deze faktor  $\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\beta_2}$  genomen dan ontstaan twee cirkels met stralen  $\alpha_1$  en  $\alpha_2$  [die volgens (3-23) en (3-17) veranderen met de tijd!]

Uit (3-16) en (3-23) volgt

$$\delta = a_1 (1 - z \cos^2 \theta)^{\frac{1}{2}} (1 + kp) \quad (3-25)$$

(NB:  $a_1$  is konstant)

Substitutie van (3-25) in (3-16) levert (cirkelvormige banen!):

$$a_1^2 (1 - z \cos^2 \theta) (1 + kp)^2 = \sin^2 \theta \sin^2 i + \cos^2 i$$

of

$$a_1 (1 + kp) = \sqrt{\frac{\sin^2 \theta \sin^2 i + \cos^2 i}{1 - z \cos^2 \theta}} \quad (3-26)$$

Het linker lid van (3-26) kan gelijk gesteld worden aan het rechter lid van (3-18) aannemende dat de twee componenten sferisch zijn en konstante stralen  $a_1$  en  $ka_1$  hebben. Voor de scijnbare  $\delta, \delta'$ , geldt dan

$$\delta' = a_1(1+kp) = \sqrt{\frac{\sin^2\theta \sin^2 i + \cos^2 i}{1 - z \cos^2\theta}} \quad (3-27)$$

[NB : vergelijking met (3-16) laat zien dat het voor de berekening konstant maken van de stralen tot  $a_1$  en  $ka_1$  (in werkelijkheid variëren de halve lange assen  $\alpha_1$  en  $\alpha_2$ ) gekompenseerd wordt door een in de tijd aangepaste  $\delta$ , nl  $\delta'$ ]

De  $\delta'$  moet gebruikt worden voor de berekening van  $p$  volgens (3-15), als  $r_1$  en  $r_2$  vervangen worden door de konstanten  $a_1$  en  $a_2$ .

### 3.6 bepaling van z en u

Voor de sferisch gemaakte ellipsoiden kan nu een  $u_\lambda$  bepaald worden. Echter moet  $z$  [dus  $\epsilon$ , zie (3-24)] van te voren bekend zijn om de  $\delta'$  als functie van de tijd (zie 3-27) te kunnen uitrekenen. Nu is een voorlopige schatting voor  $z$  mogelijk met behulp van (3-13) en (3-14). Immers hieruit volgt:

$$u_{1f}^{tr} = (1 - \ell)/\ell_1 \quad (3-28)$$

en

$$u_{2f}^{dk} = (1 - \ell)/\ell_2 \quad (3-29)$$

D.w.z. door  $\ell = \ell_{obs}$  te nemen en  $\ell_1$  zowel als  $\ell_2$  gelijk te stellen aan voorlopige schattingen van de lichtkrachten van de twee componenten [ $\ell_1 + \ell_2 = 1$ ! zie (3-1)] kunnen de  $f$  waarden als functie van de tijd uit de waarnemingen geschat worden. Aan de andere kant kunnen de  $f$  waarden voor dezelfde tijdstippen ook berekend worden (of bepaald worden uit tabellen) als functie van  $u, k$  en  $p$ .

NB.:  $p$  is een ~~functie~~ van  $z$  [zie (3-27) en (3-15)]! Voor elk waarnemingstijdstip kan het verschil

$$\Delta = \frac{1 - \ell_{obs}}{\ell_m} - u_{m_f} \quad (m=1 \text{ of } 2) \quad (3-30)$$

opgemaakt worden. Door suksessieve approximatie kan nu een zodanige  $z$  gevonden worden, zodat  $\frac{\sum \Delta}{n}$  zo klein mogelijk is ( $n$  is het aantal waarnemingspunten). Figuur 25 laat zien, dat in het bijzonder voor het sekundaire minimum van SZ Cam  $z = 0.16$  een veel betere overeenstemming geeft tussen

$$\frac{1 - \ell_{obs}}{\ell_m} \text{ en } u_{m_f} \text{ dan } z = 0.089.$$

In fig.26 zijn  $\frac{\Sigma\Delta}{n}$  - alsmede  $\frac{\Sigma\Delta^2}{n}$  - uitgezet tegen u voor verschillende waarden van z rondom 0.16. Er is een z, waarbij de "parabolen"  $\frac{\Sigma\Delta^2}{n}$  (u) een absoluut minimum bereiken. Deze z en de bij het absolute minimum behorende u moeten als de meest juiste waarden ervoor beschouwd worden bij de gebruikte elementen  $k_1, k_2, r_1, r_2$  en i. Met de zojuist gevonden z en u waarden wordt de methode der differentieële korrekties nog eens uitgevoerd. Indien significante korrekties  $\Delta k_1, \Delta k_2, \Delta r_1, \Delta r_2$  en  $\Delta i$  gevonden worden moet de hierboven beschreven procedure herhaald worden. In tabel III worden in 1941 en 1963 gepubliceerde elementen van SZ Cam vergeleken met elementen verkregen in 1970 met de hierboven beschreven procedure.

Tabel III

Enkele gepubliceerde elementen van SZ Camelopardalis

	1941	1963	1970
$k_1$	0.862	0.8697	0.8705
$k_2$	0.138	0.1303	0.1295
$r_1$	0.412	0.4282	0.4344
$r_2$	0.185	0.1828	0.1877
k	0.45	0.4271	0.432
i	76°06'	77°33'	77°06'
e	0.305 <sub>5</sub> (z=0.089)	0.305 <sub>5</sub>	$\epsilon_1 = 0.404$ $\epsilon_2 = 0.417 \dots$
$u_1$	} aangenomen	0.7	0.46
$u_2$		0.5	0.60
$\sqrt{\frac{\Sigma\Delta^2}{n_1}}$	0.00376	0.00299	0.00224
$\sqrt{\frac{\Sigma\Delta^2}{n_2}}$	0.00402	0.00594	0.00199

### 3.7 vervormingen van de lichtkromme

Schematische lichtkrommen zoals fig.21 komen in de praktijk niet voor.

Immers:

- door de CLV verdwijnen de scherpe hoeken (zie fig.27a)
- door de niet-sferische vorm van de componenten worden de rechte stukken tussen de minima bol (zie fig.27b). In de praktijk lukt het vaak deze bolle lichtkrommes te rektificeren met formules als



$$\ell_{\text{rek}} / \ell_{\text{obs}} = a + b \cos 2 \theta \quad (3-31)$$

of

$$\ell_{\text{rek}} / \ell_{\text{obs}} = a + b (\cos^2 \theta + c \cos^4 \theta) \quad (3-32)$$

- c) door het reflectie effect ontstaan er maxima rondom het sekundaire minimum [zie fig.27c: de grotere ster wordt door de kleinere doch hetere ster (komt vaak voor) verhit rondom het "substellaire" punt; vlak voor en na het sekundaire minimum ontstaat daardoor een maximum in de lichtkracht van het systeem. Door dit effect kan soms de helderheid van de zwakkere komponent bepaald worden]
- d) door gasstromingen rondom de componenten kunnen allerlei tijdelijke veranderingen in de lichtkromme ontstaan.
- e) door draaiing of schommeling van de apsidenlijn kan de tijdsafstand tussen primair en sekundair minimum variëren. Verandering van de positie van de apsidenlijn in de ruimte kan veroorzaakt worden door:
- 1) een 3de komponent
  - 2) onregelmatige massaverdeling in de 2 componenten
  - 3) de getijdevervormingen van de beide componenten
- f) tenslotte kan de periode veranderen als gevolg
- 1) van synchronisatie van revolutie en rotatie t.g.v. de getijdekrachten. Dit geldt alleen voor jonge stelsels, bij oudere stelsels heeft de synchronisatie al plaats gevonden
  - 2) van massäuitwisseling (zie *hfdst. 5*) tussen de componenten.

Een (eigenlijk niet hier op zijn plaats zijnd) merkwaardig resultaat zij nog vermeld: De stralen  $r_1$  en  $r_2$  van de beide componenten blijken soms af te hangen van de kleur waarin het stelsel is waargenomen [U, B, V of R bijv.]; zie [Een bevredigende verklaring is hiervoor nog niet gevonden.

### 3.8 fotometrie

#### 3.8.1 definitie en meetinstrument

Het meten van sterhelderheden in bepaalde golflengtegebiedjes wordt fotometrie genoemd. Bij heldere sterren kan de flux ( $f_\lambda$ ) in smalle banden (enkele Å breed) gemeten worden. Indien in die banden geen spektraallijnen aanwezig zijn wordt de flux van het continue spektrum gevonden, zodat energiedistributies (zie fig.17a) bepaald kunnen worden. Het is duidelijk dat deze fluxen dan in  $\text{ergs sek}^{-1} \text{cm}^{-2} \text{Å}^{-1}$  bepaald moeten worden en al gecorrigeerd moeten zijn voor de extinktie van de dampkring (zie 3.8.2). Deze smalbandige fotometrie wordt spektrofotometrie genoemd (zie sekte 4.8).

In deze sekte zal alleen over breedband fotometrie gesproken worden, waarbij de begrenzing van het vrij brede golflengtegebied door een kleurenfilter en de eigenschappen van de kathode van de fotocel of de multiplier bepaald wordt. Het instrument waarin de multiplier geplaatst is heet fotometer.

Hiervan is in fig.28 een zeer schematisch overzicht gegeven. In het fokale vlak van de teleskoop bevindt zich een diafragma (een zo klein mogelijk diafragma wordt tijdens de meting genomen afhankelijk van seeing en scintillatie). Voor het diafragma bevindt zich een wegklapbaar spiegeltje ( $S_1$ ), zodat met okulair  $O_1$  een redelijk groot veld aan de hemel gezien kan worden en het licht van de te onderzoeken ster met behulp van kruisdraden gecentreerd kan worden. Achter dat diafragma bevindt zich een wegklapbaar spiegeltje  $S_2$  waardoor m.b.v. okulair  $O_2$  gecontroleerd kan worden of de ster wel goed in het diafragma staat. Hierachter komt het filter en de multiplier, die de lichtstroom in een elektrische stroom omzet, welke geregistreerd kan worden.

### 3.8.2 de extinktiecoëfficiënt

Het gemeten sterlicht wordt behalve door de afstand van de ster ook nog verzwakt door

- 1) de interstellaire absorptie
- 2) de aardse dampkring
- 3) de reflectie/doorlating van de optiek van de kijker en eventueel ook van de fotometer
- 4) de doorlating van het gebruikte filter
- 5) de gevoeligheidskromme van de kathode van de multiplier

De respectievelijke transmissie-, reflectie- enz. coëfficiënten worden voorgesteld door  $r_1(\lambda)$ ;  $r_2(\lambda)$ ;  $r_3(\lambda)$ ;  $r_4(\lambda)$  en  $r_5(\lambda)$ . In fig.17b zijn de genormaliseerde transmissiekrommen van de U, B en V filters gegeven.

Het is duidelijk, dat de intensiteitsverdeling van het sterlicht in het golflengtegebied, waarin gemeten wordt, ook van belang is voor de intensiteitsmeting. De invloed hiervan wordt gegeven door een faktor  $r_0(\lambda)$ .

De effectieve golflengte, waarbij gemeten wordt, wordt gegeven door

$$\lambda_{\text{eff}}^{\text{obs}} = \frac{\int_0^{\infty} \lambda \cdot r_{0,1,2,3,4,5} \cdot d\lambda}{\int_0^{\infty} r_{0,1,2,3,4,5} \cdot d\lambda} \quad (3-33)$$

waarin  $r_{0,1,\dots,5}$  het produkt is van alle  $r$ 's. die

De effectieve  $\lambda$  van de fotometer + kijker combinatie is

$$\lambda_{\text{eff}}^{\text{fot}} = \frac{\int_0^{\infty} \lambda \cdot r_{3,4,5} \cdot d\lambda}{\int_0^{\infty} r_{3,4,5} \cdot d\lambda} \quad (3-34)$$

Wordt de lichtkracht van een ster op verschillende hoogte gemeten, dan verandert alleen  $r_2(\lambda)$ . Met behulp van figuur 29a kan een en ander in formule worden gebracht. Stel  $I_\lambda$  is de intensiteit van een op een laagje  $dz$  onder een hoek  $\zeta$  met de normaal invallende lichtstraal. In dat laagje zal een hoeveelheid  $dI_\lambda$  geabsorbeerd worden: (zeniths afstand)

$$dI_\lambda = -I_\lambda \kappa_\lambda dz \sec \zeta \quad (3-35)$$

als  $\kappa_\lambda$  de absorptiecoëfficiënt per lengte-eenheid is in de richting van de straal.

Dus:  $\int \frac{dI_\lambda}{I_\lambda} = - \int \kappa_\lambda \sec \zeta dz$ , zodat

$$I_\lambda(\zeta) = I_\lambda(\zeta=0) \cdot e^{-\sec \zeta \int_0^\infty \kappa_\lambda dz} = I_\lambda(\zeta=0) \cdot 10^{-0.4343 \sec \zeta \int_0^\infty \kappa_\lambda dz}$$

Daar  $m = -2.5 \log I + \text{konst}$  geldt:

$$m_\lambda^{OA} = m_\lambda^{BD} + 1.086 \sec \zeta \int_0^\infty \kappa_\lambda dz, \text{ waarbij OA betekent: op aarde}$$

en BD: buiten de dampkring

Substitutie van  $\sec \zeta = X$  (=airmass;  $X \geq 1$ )

en  $1.086 \int_0^\infty \kappa_\lambda dz = k_\lambda$  levert

$$m_\lambda^{BD} = m_\lambda^{OA} - k_\lambda X = (m_\lambda)_{\text{fot}} - k_\lambda X \quad (3-36)$$

Voor  $\lambda$  wordt meestal  $\lambda_{\text{eff}}$  genomen.

Fig. 29b geeft metingen van  $m_X$  van eenzelfde ster bij verschillende zenithafstanden (dus verschillende  $X$ ) in twee verschillende nachten (o en e). De richtingscoëfficiënten van de twee lijnen zijn de  $k_\lambda$ 's voor de twee nachten. De  $k_\lambda$ 's kunnen van nacht tot nacht verschillend zijn daar  $r_2$  van nacht tot nacht kan verschillen.

Fig. 30 geeft schematisch de golflengte afhankelijkheid van de extinktiecoëfficiënt weer. Voor  $\lambda$  is  $\lambda_{\text{eff}}^{\text{fot}}$  genomen. Eigenlijk zou  $\lambda_{\text{eff}}^{\text{obs}}$  genomen moeten worden. Deze hangt echter af van de energiedistributie van de ster [ $r_0$  in (3-35)]. In de vierde kolom van tabel III wordt enigszins aangegeven hoe  $\lambda_{\text{eff}}^{\text{obs}}$  met het spektraaltype varieert. In tabel III worden nl. enkele veel in de breedbandfotometrie gebruikte golflengtegebieden met hun aanduidingen en enkele bijzonderheden gegeven.



Tabel III

Enkele veel gebruikte golflengtegebieden in de fotometrie

Kleur en filter aanduiding	$\lambda$ geb.	$\lambda$ bij max. doorlating v/h filter	$\lambda_{\text{eff}}^{\text{obs}}$ voor de spektraaltypes			gebruikte kleurindex en variatie met spektraaltype			
			B4	A7	K7	C	B4	A7	K7
U	2800-4000	3600	3550	3650	3800	U-B	-0.70	+0.08	+1.20
B	3800-5400	4200	4330	4400	4500	B-V	-0.19	+0.22	+1.24
V	4900-6400	5400	5470	5480	5510	B-V			
R	6200-8800	6600-6800	--	$\approx 7000$	--	V-R	-	-	-
I	8500-12000	10000	--	$\approx 9000$	--	V-I	-2.30	-1.14	+1.18

De afhankelijkheid van  $k$  van de energieverdeling (spektraaltype) wordt in de praktijk gesteld benaderd te kunnen worden door

$$k_{\lambda} = k'_{\lambda} + k''_{\lambda} C, \quad (3-37)$$

als  $C$  de kleurindex is.

$$\left. \begin{matrix} k'_{\lambda} \\ k''_{\lambda} \end{matrix} \right\} \text{ heet de } \left\{ \begin{matrix} \text{eerste} \\ \text{tweede} \end{matrix} \right\} \text{ orde extinktiecoëfficiënt}$$

(3-36) wordt dan met weglating van de aanduiding BD:

$$m = m_X - k' X - k'' C X \quad (3-38)$$

Voor bijv. de B helderheid (zie tabel III) geldt dus

$$B = B_X - k'_B X - k''_B (B-V) X$$

Daar voor  $\lambda > 9000 \text{ \AA}$   $k_{\lambda}$  vrijwel niet meer verandert (zie fig. 30) is  $k''_{\lambda}$  voor  $\lambda > 9000 \text{ \AA}$  zeer klein.

Voor een aantal sterren met "konstante" helderheid zijn de  $U, B, V, R, I$  enz. magnituden met zeer grote precisie bepaald.

Deze sterren kunnen als standaardsterren gebruikt worden om de  $k'_{\lambda}$  en  $k''_{\lambda}$  voor een bepaalde nacht en waarnemingsplaats zo goed mogelijk te kunnen bepalen.

Het kan zijn, dat de zo gevonden magnituden  $U, B, V$  enz. nog gekorrigeerd moeten worden voor de interstellaire absorptie  $[r_1(\lambda)]$ . De hiervoor gekorrigeerde magnituden worden aangegeven met  $U_0, B_0, V_0$  enz. De kleuren (kleurindices)  $(U-B)_0, (B-V)_0, (V-R)_0$  en  $(V-I)_0$  worden intrinsieke kleuren genoemd.

4 Spektroskopische dubbelsterren4.1 definitie en formules

Vrad.  
↓

P e t o s c w /

Dit zijn dubbelstersystemen (SB) die hun dupliciteit verraden doordat de Fraunhoferlijnen in het spektrum periodiek van plaats veranderen (Dopplerverschuivingen). Als het helderheidsverschil tussen de beide componenten "te" groot is zijn alleen de spektraallijnen van de heldere component zichtbaar en wordt van een enkellijnige spektroskopische dubbelster (SSB) gesproken. Zijn de spektraallijnen van beide componenten zichtbaar dan van een dubbellijnige spektroskopische dubbelster (DSB).

Met behulp van fig. 5b kunnen de snelheidsvariatiën in de gezichtslijnen berekend worden. Stel even dat de component A stilstaat en denk het hemelvlak tijdelijk door A. De loodlijnen vanuit B op het hemelvlak ( $BB' = \Delta z$ ) worden pos./neg. gerekend als vanuit de waarnemer gezien B zich achter/voor het hemelvlak bevindt. Nu is

$$BB'' = r \sin(\omega + v)$$

zodat

$$\Delta z = BB' = r \sin i \sin(\omega + v)$$

zodat

$$\frac{d\Delta z}{dt} = \frac{dr}{dt} \sin i \sin(\omega + v) + r \sin i \cos(\omega + v) \frac{dv}{dt} \quad (4-1)$$

$\frac{dr}{dt}$  en  $r \frac{dv}{dt}$  kunnen berekend worden uit de vergelijking van de

$$\text{ellips: } r = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos v} \quad (4-2)$$

$$\text{en uit de perkenwet van Kepler: } \frac{1}{2} r^2 \frac{dv}{dt} = \frac{\pi a^2 (1-e^2)^{1/2}}{\mathcal{P}} = \text{konst.} \quad (4-3)$$

Immers uit (4-3) en (4-2) volgt:

$$r \frac{dv}{dt} = \frac{2\pi}{\mathcal{P}} a \frac{(1+e \cos v)}{\sqrt{1-e^2}} \quad (4-4)$$

en uit (4-4) en (4-2):

$$\frac{dv}{dt} = \frac{2\pi}{\mathcal{P}} \frac{(1+e \cos v)^2}{(1-e^2)^{3/2}} \quad (4-5)$$

Uit (4-2) en (4-5) volgt nu

$$\frac{dr}{dt} = a \frac{2\pi}{\mathcal{P}} \frac{e \sin v}{\sqrt{1-e^2}} \quad (4-6)$$

Substitutie van (4-6) en (4-4) in (4-1) levert

$$\frac{d\Delta z}{dt} = \frac{2\pi}{\mathcal{P}} \frac{a \sin i}{\sqrt{1-e^2}} \left[ e \sin v \sin(\omega+v) + (1+e \cos v) \cos(\omega+v) \right]$$

of

$$\frac{d\Delta z}{dt} = K \left[ e \cos \omega + \cos (\omega + v(t)) \right] \quad (4-7)$$

$$\text{waarin } K = \frac{2\pi}{P} \frac{a \sin i}{\sqrt{1-e^2}} \quad (4-8)$$

Het hemelvlak dient echter door 't massacentrum gelegd te worden zodat bijv. voor komponent A geldt

$$\frac{d\Delta z}{dt} = K_A \left[ e \cos \omega + \cos (\omega + v) \right], \quad (4-9)$$

waarin

$$K_A = \frac{2\pi}{P} \frac{a_A \sin i}{\sqrt{1-e^2}} \quad (4-10)$$

Analoge formules gelden voor komponent B

Met (2-6) is

$$\frac{K_B}{K_A} = \frac{a_B}{a_A} = \frac{\mathcal{H}_A}{\mathcal{H}_B} \quad (4-11)$$

Daar het massacentrum in het algemeen een snelheid ten opzichte van de zon zal hebben, zal de heliocentrische radiële snelheid,  $\frac{d\zeta}{dt}$ , zijn:

$$v_{rad} = \frac{d\zeta}{dt} = v_{syst} + \frac{d\Delta z}{dt}, \quad (4-12)$$

als  $v_{syst}$  de radiële snelheid van het massacentrum ten opzichte van de zon is.

Voor de geocentrische radiële snelheid,  $v_{rad}$ , geldt:

$$v_{rad} = \frac{d\zeta}{dt} + v_{rev} + v_{rot}, \quad (4-13)$$

waarbij  $v_{rev}$  een korrektie is voor de revolutie van de aarde rond de zon en  $v_{rot}$  een korrektie voor de rotatie van de aarde om zijn as is.

$v_{rev}$  en  $v_{rot}$  zijn voor het tijdstip van waarneming te berekenen.  $v_{syst}$  is te bepalen uit de waarnemingen evenals  $P$ ,  $t_p$ ,  $e$  alsook  $\omega$  en  $a_A \sin i$  en/of  $a_B \sin i$  (zie 4.2). De hoek  $\Omega$  kan alleen uit astrometrische metingen verkregen worden.

## 4.2 bepaling van de baanelementen van een SB

### 4.2.1 eerste benadering

Stel voor elk waarnemingsmoment is  $v_{rev}$  en  $v_{rot}$  berekend dan kan  $\frac{d\zeta}{dt}$  als functie van de tijd verkregen worden uit de waargenomen  $v_{rad}$  [zie (4-13)]. In fig.31 is  $\frac{d\zeta}{dt}(t)$  gegeven voor  $\kappa$  Velorum. Het is duidelijk, dat uit dergelijke figuren de periode te bepalen is.

Daar  $\frac{d\Delta z}{dt}$  maximaal is voor  $\cos(\omega+v)=1$  of  $(\omega+v)=0$  en  $\frac{d\Delta z}{dt}$  minimaal voor  $\cos(\omega+v)=-1$  of  $(\omega+v)=180^\circ$  [de extrema van  $\frac{d\Delta z}{dt}$  worden dus bereikt in de knopen (zie ook fig 5b)!] geldt met behulp van (4-7)

$$\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)_{\max} = v_{\text{syst}} + K_A (e \cos \omega + 1) \quad (4-14)$$

$$\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)_{\min} = v_{\text{syst}} + K_A (e \cos \omega - 1) \quad (4-15)$$

---


$$\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)_{\max} - \left(\frac{d\zeta}{dt}\right)_{\min} = 2K_A$$

of

$$K_A = \frac{2\pi}{\rho} \frac{a_A \sin i}{\sqrt{1-e^2}} = \frac{\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)_{\max} - \left(\frac{d\zeta}{dt}\right)_{\min}}{2} \quad (4-16)$$

NB:  $K_A$  is dus direkt uit de waarnemingen te bepalen.

Een voorlopige schatting van  $v_{\text{syst}} (= v_{\text{syst}}^*)$  wordt verkregen door  $e = 0$  te stellen en dan (4-14) en (4-15) op te tellen:

$$v_{\text{syst}}^* = \frac{\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)_{\max} + \left(\frac{d\zeta}{dt}\right)_{\min}}{2} \quad (4-17)$$

In fig.31 is deze snelheid aangegeven.

$$\text{Stel } v_{\text{syst}} = v_{\text{syst}}^* + \Delta v$$

$$\text{Daar } \frac{d\zeta}{dt} = v_{\text{syst}} + \frac{d\Delta z}{dt}$$

is dus ook

$$\frac{d\zeta}{dt} - v_{\text{syst}}^* = \Delta v + \frac{d\Delta z}{dt},$$

$$\text{zodat } \int_0^{\rho} \left(\frac{d\zeta}{dt} - v_{\text{syst}}^*\right) dt = \int_0^{\rho} \Delta v dt + \int_0^{\rho} \frac{d\Delta z}{dt} dt = \Delta v \cdot \rho + 0.$$

Dat wil zeggen als het linker lid van de bovenstaande vergelijking  $\neq 0$ , dan is

$$\Delta v = \frac{1}{\rho} \int_0^{\rho} \left(\frac{d\zeta}{dt} - v_{\text{syst}}^*\right) dt, \quad (4-18)$$

zodat

$$v_{\text{syst}} = \frac{\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)_{\max} + \left(\frac{d\zeta}{dt}\right)_{\min}}{2} + \Delta v. \quad (4-19)$$

$v_{\text{syst}}$  is nu bekend (ook in fig.31 aangegeven) dus ook  $\frac{d\Delta z}{dt}(t)$ .

Analoog aan (4-14) en (4-15) geldt nu



$$\left(\frac{d\Delta z}{dt}\right)_{\max} = K_A (e \cos \omega + 1)$$

$$\left(\frac{d\Delta z}{dt}\right)_{\min} = K_A (e \cos \omega - 1).$$

$$\left(\frac{d\Delta z}{dt}\right)_{\max} + \left(\frac{d\Delta z}{dt}\right)_{\min} = 2 K_A e \cos \omega \quad (4-20)$$

Uit (4-16) en (4-20) volgt

$$e \cos \omega = \frac{\left(\frac{d\Delta z}{dt}\right)_{\max} + \left(\frac{d\Delta z}{dt}\right)_{\min}}{\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)_{\max} - \left(\frac{d\zeta}{dt}\right)_{\min}} = \frac{\left(\frac{\partial \Delta z}{\partial t}\right)_{\max} + \left(\frac{\partial \Delta z}{\partial t}\right)_{\min}}{\left(\frac{\partial \Delta z}{\partial t}\right)_{\max} - \left(\frac{\partial \Delta z}{\partial t}\right)_{\min}} \quad (4-21)$$

d.w.z.  $e \cos \omega$  is nu ook uit de waarnemingen bekend.

Om  $t_p$  en  $e$  (de periode  $\mathcal{P}$ ) is al bekend uit fig. 31, zie ook fig. 32a) te kunnen bepalen wordt onder de snelheidskromme in fig. 32a de time-displacement-curve (zie 1.3.1 en fig. 3)

$$\int_0^t \frac{\Delta z}{dt} dt = \Delta z + \text{konst. gekonstrueerd. (zie fig. 32b, het nul-$$

punt van  $\Delta z$  wordt bepaald in de 7 eerste regels van blz. 39)

Evenals in fig. 3 wordt de kromme begrensd door twee lijnen  $n$  en  $\ell$  // de tijdas. Op dezelfde wijze als in 1.3.1 aangegeven kunnen de punten  $P$  en  $A$  bepaald worden. De tijdstippen  $t_p$  en  $t_A$  zijn nu bekend en de snelheden op deze tijdstippen worden gevonden door de verticale lijnen door  $P$  en  $A$  door te trekken naar fig. 32a.

Met behulp van (1-10) geldt nu

$$e = \frac{\left(\frac{d\Delta z}{dt}\right)_P + \left(\frac{d\Delta z}{dt}\right)_A}{\left(\frac{d\Delta z}{dt}\right)_P - \left(\frac{d\Delta z}{dt}\right)_A} \quad (4-22)$$

Formule (4-16) geeft nu  $a_A \sin i$ , terwijl met behulp van (4-21) ook  $\omega$  bekend is.

Om nu de op het vlak bepaald door gezichtslijn en knopenlijn geprojecteerde baan te kunnen bepalen worden vooreerst een aantal lijnen // de tijdas in fig. 32b doorgetrokken naar fig. 32c.

Nu geldt

- 1) Op de lijn  $m$  midden tussen  $n$  en  $\ell$  moet het centrum van de geprojecteerde baan liggen.
- 2) Op de lijnen door  $P$  en  $A$  //  $m$  moeten respectievelijk de projectie van het periastron en het apastron liggen.
- 3) De verticale lijnen door de extrema van  $\frac{d\zeta}{dt}$  (fig. 32a) bepalen in fig. 32b de momenten van het passeren van de knopenlijn.

(zie bl 37 bovenaar en figuur 5b)

Op de lijn zo goed mogelijk door de bij die tijdstippen behorende  $\Delta z$  waarden en tegelijkertijd // m getrokken, moeten de knopen van de baan liggen.

(N.B.: de afstanden  $\Delta z$  liggen in het vlak bepaald voor gezichtslijn en knopenlijn; gezichtslijn  $\perp$  knopenlijn!)

Op deze lijn moet ook het massacentrum Z liggen. Vanaf deze lijn moet  $\Delta z$  gerekend worden.

De snijpunten van deze lijnen met de vertikaal tussen fig. 32b en 32c (resp:  $C''$ ,  $P''$ ,  $A''$  en  $Z''$  kunnen opgevat worden als projecties van C, P, A en Z. Daar bij projectie de verhouding van 2 // lijnstukken konstant blijft is

$$e = \frac{C'Z'}{C'P'} = \frac{C''Z''}{C''P''}, \quad (4-23)$$

welke waarde met die van (4-22) moet overeenstemmen.

( $C'Z'$  en  $C'P'$  zijn de projecties van de werkelijke CZ en de halve lange as op het vlak door gezichtslijn en knopenlijn).

- 4) De lijn // m, waarop de projectie van het uiteinde van de halve lange as H zal moeten liggen kan worden bepaald door uit te rekenen hoeveel tijd, ( $t_H - t_P$ ), komponent A nodig heeft om van P naar H te komen.

Voor H geldt nl. [ zie fig.6 en formules (1-17) en (1-18) ] dat  $E = \frac{\pi}{2}$ , zodat

$$t_H - t_P = \frac{\pi}{2} \left( \frac{1}{2} - \frac{e}{\pi} \right). \quad (4-24)$$

Deze afstand kan op de tijdas aangepast worden.

Als  $\omega'$  de projectie is van  $\omega$  en  $\omega''$  die van het komplement van  $\omega$  dan is

$$\left. \begin{aligned} C''P'' &= C'P' \sin \omega' \\ C''H'' &= C'H' \sin \omega'' \end{aligned} \right\} \quad (4-25)$$

als  $C'H'$  de projectie van de halve korte as is. Voor  $i = 90^\circ$  kan  $\omega' = \omega$  en  $\omega' + \omega'' = 90^\circ$  gesteld worden, zodat (4-25) wordt

$$\left. \begin{aligned} C''P'' &= C'P' \sin \omega \\ C''H'' &= C'H' \cos \omega \end{aligned} \right\} \quad (4-26)$$

waaruit volgt

$$\cotg \omega = \frac{C''H''}{C''P''} \cdot \frac{C'P'}{C'H'} = \frac{C''H''}{C''P''} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \quad (4-27)$$

(zie (1-11))  
af te lezen in fig.32

N.B.1. Deze  $\omega$  is alleen dan gelijk aan die met behulp van (4-21) en (4-22) gevonden als  $i \approx 90^\circ$ !

N.B.2. Evenals bij de bedekkingsveranderlijken is  $\Omega$  niet te bepalen.  $\Omega$  kan alleen bij visuele- en astronomische dubbelsterren  
metrische

uit de metingen gevonden worden.

#### 4.2.2 methode der differentieële korrekties

Hierboven zijn eerste benaderingen gevonden voor  $v_{\text{syst}}$ ,  $\omega$ ,  $a \sin i$ ,  $e$ ,  $\mathcal{P}$  en  $t_p$ . Met behulp van (4-12), (4-7), (4-8) en (1-16) t/m (1-18) kan in eerste benadering de radiële snelheid berekend worden.

Weer is [zie (3-19) t/m (3-22), (1-26) t/m (1-31)]

$$\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)_2 = \left(\frac{d\zeta}{dt}\right)_1 + \Delta\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)_1$$

zodat

$$\begin{aligned} \frac{d\zeta}{dt}(O-C)_2 = & \frac{d\zeta}{dt}(O-C)_1 - \frac{\delta f}{\delta v_{\text{syst}}} \Delta v_{\text{syst}} - \frac{\delta f}{\delta \omega} \Delta \omega - \frac{\delta f}{\delta(a \sin i)} \Delta(a \sin i) + \\ & - \frac{\delta f}{\delta e} \Delta e - \frac{\delta f}{\delta \mathcal{P}} \Delta \mathcal{P} - \frac{\delta f}{\delta t_p} \Delta t_p \end{aligned} \quad (4-29)$$

Met de methode der kleinste kwadraten kunnen dan weer de nodige korrekties verkregen worden. De term met  $\Delta \mathcal{P}$  wordt weggelaten, als de periode uit de waarnemingen zeer nauwkeurig bekend is. Tabel V geeft een voorbeeld voor AR Cas.

Tabel V

Voorlopige en met methode der differentieële korrekties verkregen verbeterde elementen van AR Cas

	voorlopig	nadat diff.korrekkties zijn toegepast
$v_{\text{syst}}$	-10.5 km/sek	-10.27 km/sek
$\omega$	$34^\circ$	$36.3^\circ$
$a \sin i$	4523000 km	4525000 km
$e$	0.25	0.224
$\mathcal{P}$	6 <sup>d</sup> .06652	6 <sup>d</sup> .06652
$t_p$	JD 2430648.050	2430648.044
$\Sigma(O-C)^2$	75.74	54.55

Soms blijkt  $\frac{\Sigma(O-C)^2}{n}$  niet in de "juiste" grootteorde te krijgen te zijn. De oorzaak hiervan kan zijn dat er nog een derde komponent is.

#### 4.3 massa's en massafunctie

Voor twee massa's  $\mathcal{M}_A$  en  $\mathcal{M}_B$  die in cirkelbanen om hun massacentrum bewegen geldt voor de versnellingen die erop werken:

$$\text{voor } \mathcal{N}_A: \frac{G\mathcal{N}_B}{a^2} = \frac{4\pi^2 a_A}{\mathcal{P}^2}$$

$$\text{voor } \mathcal{N}_B: \frac{G\mathcal{N}_A}{a^2} = \frac{4\pi^2 a_B}{\mathcal{P}^2}$$

$$\frac{G(\mathcal{N}_A + \mathcal{N}_B)}{a^2} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{P}^2} (a_A + a_B)$$

$$\text{of } \mathcal{N}_A + \mathcal{N}_B = \frac{4\pi^2}{G} \frac{(a_A + a_B)^3}{\mathcal{P}^2} \quad (4-30)$$

[vergelijk met (1-6)] *zie ook bl. 5, 6 en 8.3*

Uit (4-8) volgt

$$a_A \sin i = 1.375 \times 10^4 K_A \overset{\text{periode}}{\mathcal{P}} (1-e^2)^{\frac{3}{2}} \text{ km} \quad (4-31)$$

$$a_B \sin i = 1.375 \times 10^4 K_B \overset{\text{periode}}{\mathcal{P}} (1-e^2)^{\frac{3}{2}} \text{ km} \quad (4-32)$$

als K in km/sek en  $\mathcal{P}$  in dagen wordt uitgedrukt.

Vermenigvuldiging van (4-30) met  $\sin^3 i$  levert:

$$(\mathcal{N}_A + \mathcal{N}_B) \sin^3 i = \frac{4\pi^2}{G} \frac{(a_A \sin i + a_B \sin i)^3}{\mathcal{P}^2}$$

Hierin kan (4-31) en (4-32)

gesubstitueerd worden, zodat

$$(\mathcal{N}_A + \mathcal{N}_B) \sin^3 i = c(K_A + K_B)^3 \mathcal{P}^3 (1-e^2)^{3/2} \quad (4-33)$$

Uit (4-11) volgt

$$\frac{\mathcal{N}_B \sin^3 i}{(\mathcal{N}_A + \mathcal{N}_B) \sin^3 i} = \frac{K_A}{K_A + K_B} \quad (4-34)$$

Met (4-33) levert dit

$$\mathcal{N}_A \sin^3 i = c(K_A + K_B)^2 K_B \mathcal{P}^3 (1-e^2)^{3/2} \quad (4-35)$$

en

$$\mathcal{N}_B \sin^3 i = c(K_A + K_B)^2 K_A \mathcal{P}^3 (1-e^2)^{3/2} \quad (4-36)$$

De produkten  $\mathcal{N}_A \sin^3 i$  en  $\mathcal{N}_B \sin^3 i$  kunnen alleen uit de waarnemingen bepaald worden als de spektra van beide componenten zichtbaar zijn. Immers alleen dan kan zowel  $K_A$  als  $K_B$  uit de twee snelheidskrommen bepaald worden.

Is slechts het spektrum van een component te zien (bijv. A, dus alleen  $K_A$  te bepalen) dan moet uit (4-36)  $(K_A + K_B)$  geëlimineerd worden met behulp van (4-34), zodat



$$\frac{\mathcal{M}_B^3 \sin^3 i}{(\mathcal{M}_A + \mathcal{M}_B)^2} = c K_A^3 (1 - e^2)^{3/2} = f(\mathcal{M}) \quad (4-37)$$

Deze functie wordt de massafunctie genoemd.

Als  $\mathcal{M}_A = 0$  is  $f(\mathcal{M}) = \mathcal{M}_B^* \sin^3 i$ . Daar  $\mathcal{M}_A > 0$  en  $\mathcal{M}_B^* =$

$\frac{\mathcal{M}_B}{(1 + \mathcal{M}_A/\mathcal{M}_B)^2}$  is  $\mathcal{M}_B^*$  een onderste grens voor de massa van B.

#### 4.4 spektroskopische dubbelsterren tevens bedekkingsveranderlijken

Van een dubbellijnige SB, die tevens bedekkingsveranderlijke is, kan de massa en de straal van de componenten bepaald worden. Uit de lichtkromme is nl.  $i$ ,  $r_1 = R_1/a$  en  $r_2 = R_2/a$  te bepalen (zie hfdst.3). Daar  $v_{\text{rad}}$  in km/sek - onafhankelijk van de afstand van de SB! - gemeten wordt zijn  $K_A$  en  $K_B$  [zie (4-17)] ook in km/sek bekend en  $a_A \sin i$  en  $a_B \sin i$  [zie (4-31) en (4-32)] in km. Door  $i$  is ook  $a = a_A + a_B$  in km. bekend. Uit  $r_1$ ,  $r_2$  en  $a$  zijn nu  $R_1$  en  $R_2$  in km te berekenen.

Vanzelfsprekend zijn de massa's  $\mathcal{M}_A$  en  $\mathcal{M}_B$  met behulp van  $i$ , (4-35) en (4-36) nu ook absoluut bekend.

#### 4.5 de empirische-massa#lichtkrachtwet, (II).

Van dubbellijnige SB<sup>en</sup>, die tevens bedekkingsveranderlijken zijn, kan van de componenten de  $M_{\text{bol}}$  met (2-46) berekend worden, zodra de  $T_{\text{eff}}$  ervan bekend is:

$$M_{\text{bol}} = -5 \log R/R_{\odot} - 10 \log T_{\text{eff}} + M_{\text{bol}_{\odot}} + 10 \log T_{\text{eff}_{\odot}} \quad (4-38)$$

$T_{\text{eff}}$  kan geschat worden uit het spektraaltype of uit een intrinsieke kleurindex (zie 3.2.6.34) of uit de energiedistributie van de ster tezamen met bijv. de profielen van de H lijnen.

Het is duidelijk, dat op deze wijze aanvullende punten voor de empirische MLW verkregen kunnen worden. Enkele resultaten zijn verzameld in tabel VI en weergegeven in figuur 33, waarin ook de resultaten van astronomische dubbelsterren zijn gegeven.

Uit deze grafiek is de in 2.6.4 geformuleerde MLW gehaald:

$$\begin{aligned} M_{\text{bol}} &= 4.4 - 9.2 \log \mathcal{M} \\ \text{of} \\ L_{\text{bol}} &= c \cdot \mathcal{M}^{3.68} \end{aligned} \quad (2-45)$$

Een kwadratische aanpassing met behulp van de kleinste kwadraten methode levert:

$$M_{\text{bol}} = 4.54 - 11.54 \log M/M_{\odot} + 2.41 \log^2 M/M_{\odot} \quad (4-39)$$

Het zou nuttig zijn om uit al het beschikbare materiaal eens alleen de hoofdreekssterren te selekteren en daarvoor een MLW te bepalen.

Zodra de massa van een hoofdreeksster bekend is kan dan met (4-38) en (2-45) of (4-39) de effectieve temperatuur bepaald worden. Als (2-45) juist is geldt:

$$\log T_{\text{eff}} = +0.92 \log M/M_{\odot} - 0.5 \log R/R_{\odot} + 0.1 M_{\text{bol}} + \log T_{\text{eff}} - 0.44 \quad (4-40)$$

Tabel VI.

Gegevens van "betrouwbare" SB's tevens bedekkingsveranderlijke

systeem	spektrum		log $M$		log R		$M_{\text{bol}}$		
	(1963)	(1970)	(1963)	(1970)	(1963)	(1970)	(1963)	(1970)	
Y Cyg	A	09.5V	1.24		0.77		-6.5	-6.6	
	B	09.5V	1.24		0.77		-6.5	-6.6	
Z Vul	A	B3-4V	0.73		0.67		-3.6		
	B	A2-3III	0.36		0.67		-0.7		
U Oph	A	B5V B4V	0.72		0.53		-2.5	-2.6	
	B	B6V B5V	0.67		0.49		-2.0	-2.0	
ζ Phe	A	B6V B6V	0.79		0.53		-2.2	-1.3	
	B	A0V B3V	0.48		0.30		+0.5	+0.5	
AR Aur	A	B8V B9V	0.41		0.25	0.28	-0.2	+0.6	
	B	B9.5V B9V	0.36		0.25	0.23	+0.4	+0.9	
RX Her	A	B9.5V A0V	0.44		0.38	0.39	-0.2	+0.6	
	B	A1V A0V	0.37		0.30	0.29	+0.7	+1.0	
AS Eri	A	A0V		0.21		0.20		+1.5	
V4510ph	A	A0V		0.45		0.42		+0.7	
	B	As?		0.37		0.33		+1.7	
CM Lac	A	A2V		0.28		0.20		+1.7	
	B	F2?		0.17		0.15		+3.0	
V477Cyg	A	A3V		0.25		0.18		+2.3	
	B	F2?		0.13		0.08		+3.8	
WW Aur	A	A7V		0.26		0.28	0.29	+1.6	+1.8
	B	A7V		0.24		0.28		+1.8	
TX Her	A	A5V A7V	0.32	0.20	0.25	0.18	+1.7	+2.6	
	B	F7V A7	0.26	0.25	0.18	0.14	+2.8	+3.2	

Tabel VI (vervolg)

systeem	spektrum		log $\mathcal{M}$		log R		$M_{bol}$	
	(1963)	(1970)	(1963)	(1970)	(1963)	(1970)	(1963)	(1970)
HR7484 A		F5V		0.12		0.12		+3.4
Cyg B		F5V		0.12		0.12		+3.7
VZHya A		F5V		0.09		0.10		+3.6
B		F5V		0.05		0.04		+4.1
ZHer A	F4IV-V			0.09		0.20	+3.0	+2.9
B	K0 IV		0.04		0.42		+3.3	+3.3
WZOph A	G0V	F8V		0.05	0.137	0.13	+3.9	+3.8
B	G0V	F8V		0.05		0.13	+3.9	+3.7
UV Leo A		G0V	-0.05	-0.01	0.04	0.03	+4.4	+4.5
B		G2V	-0.05	-0.01	-0.04	0.03	+4.7	+4.6
AR Lac A	G2?	G2?	+0.12		0.19		+3.8	+3.6
B	K0?	K0?	+0.12		0.46		+3.1	+2.9
YYGem A		M1Ve	-0.19		-0.21			+7.7
B		M1Ve	-0.19		-0.21			+7.7

#### 4.6 vervormingen en veranderingen in de radiële snelheidskromme

##### 4.6.1 rotatie van de componenten

De spektrale lijnen van een enkelvoudige roterende ster zijn "komvormig" verbreed als de rotatieas van de ster niet samenvalt met de gezichtslijn. Het effect is het grootst als de rotatieas  $\perp$  gezichtslijn staat. De komvormige verbreding wordt veroorzaakt doordat de Dopplerverschuivingen van de verschillende punten van het oppervlak verschillend zijn (zie fig.34).

##### 4.6.1.1 de rotatievervorming

Voor een SB, tevens bedekkingsveranderlijke, heeft de rotatie van de componenten (meestal in dezelfde richting als de revolutie) een vervormende invloed op de radiële snelheidskromme. Het effect is het grootst als  $\ell_2 \gg \ell_1$  (zie voor rotatie bl.23). De snelheidskromme van U Cephei (zie fig.35a) is een voorbeeld. De uitschieters in  $\frac{d\Delta z}{dt}$  worden veroorzaakt door dat vlak voor de totale verduistering en vlak erna slechts straling afkomstig van de linkerkant resp. rechterkant van component 2 de waarneemapparatuur bereikt (component 1 is zo zwak, dat er geen spektrum van zichtbaar is). Daardoor wordt op die momenten niet meer de gehele lijn met midden  $\lambda_m$  gevormd (zie fig.34b) maar alleen de naar rood resp. violet verschoven componenten (zie fig.35b).

#### 4.6.1.2. het reflectie effect

Als het helderheidsverschil van de componenten van een SB niet te groot is worden de naar elkaar toegekeerde delen een beetje verwarmd. Lijnen van hogere potentiaal ontstaan voornamelijk van de hetere sterdelen en lijnen van lagere potentiaal van de koelere. Bij rotatie van de componenten zullen derhalve lijnen van hogere potentiaal een andere Dopplerverschuiving hebben dan lijnen van lagere potentiaal. Een redelijke radiële snelheidskromme kan verkregen worden door het gemiddelde van de radiële snelheden van lijnen van hogere en van die van lagere potentiaal te nemen.

#### 4.6.2. gas rondom de componenten

Indien er zich gas rondom de beide componenten bevindt kan het zijn, dat de kernen van de absorptielijnen in dit gas gevormd worden, terwijl de vleugels van de lijnen in de buitenste lagen van de componenten ontstaan. Als de componenten roteren (rotaties  $\perp$  gezichtslijn) zijn de vleugels verbreed en daardoor minder scherp afgetekend in het spektrum. Is de op de gezichtslijn geprojecteerde gemiddelde snelheid van het cirkumstellaire gas rondom een component anders dan de projectie van de revolutie snelheid van die component dan hebben de kernen van de lijnen een andere Dopplerverschuiving dan de vleugels (fig.36).

In de praktijk zijn tot nu toe meestal alleen de Dopplerverschuivingen van de kernen gemeten ( $\lambda_{\text{obs}}$  in fig.36b) [met gewone komparatoren (zie 4.822 H.95 v. ) wordt nl. op het diepste punt ingesteld], zodat niet vermoede vervormingen in de snelheidskromme optraden. Men is dit effect op het spoor gekomen, bijv. doordat snelheidskrommen van SB's - tevens bedekkingsveranderlijke - een andere excentriciteit van de baan, e, gaven dan de lichtkrommen.

Wellicht moeten langs deze weg ook de te grote minimum massa's - gevonden voor sommige SB's - verklaard worden. Zo is voor HD 698 (B8) gevonden  $M_A \sin^3 i = 113 M_\odot$  en  $M_B \sin^3 i = 45 M_\odot$ , dwz.  $M_A / M_\odot \geq 113$  en  $M_B / M_\odot \geq 45$ , terwijl de massa van een B8 ster  $\approx 4.5 M_\odot$  is. Uit fig.36b en formule (4-7) immers volgt, dat te grote K's gemeten kunnen worden, zodat met (4-35) en (4-36) te grote  $M \sin^3 i$  gevonden kunnen worden.



4.6.3. veranderingen in  $v_{\text{sys}}$ 

Soms blijkt  $v_{\text{sys}}$  te veranderen met de tijd. Dit kan veroorzaakt worden door een 3de komponent C.

Voorbeelden zijn:

	$\overset{AB}{v_{\text{sys}}}$	$\overset{AB-C}{v_{\text{sys}}}$
$\beta$ Per (Algol)	$2.^d 8673$	$1.^j 87$
$\lambda$ Tau	$3.^d 952952$	$33.^d 025$
HD 100018	$7.^d 39902$	$84.^j 734$

4.6.4. veranderingen in  $P$ 

Lang niet altijd is de periode konstant. Soms kan na jarenlange konstante periode deze plotseling veranderen. Soms is er een continue periodeverandering. Vaak treden echter ook willekeurige periodeveranderingen op, zowel + als -. Oorzaken kunnen zijn:

- 1) massa uitwisseling tussen de componenten (zie
- 2) aanwezigheid van 3de komponent (zie 4.6.3)
- 3) synchronisatie van revolutie en rotatie (getijdekrachten t.g.v. niet sferische vorm van de componenten) bij zeer jonge systemen)

4.6.5. veranderingen in  $\omega$ 

Deze zijn mogelijk

- 1) door een 3de komponent
- 2) door de massakonzentratie in de componenten
- 3) door 3) van 4.6.4. Een theoretische uitdrukking voor de rotatie van de apsidenlijn in dit geval is:

$$P/P' = c_1 \left( \frac{R_A}{a} \right)^5 \left( 1 + \frac{16\omega_B}{\mathcal{M}_A} \right) + c_2 \left( \frac{R_B}{a} \right)^5 \left( 1 + \frac{16\omega_A}{\mathcal{M}_B} \right), \quad (4-41)$$

waarin  $P$  = de periode van revolutie van de beide componenten

$P'$  = de rotatieperiode van de apsidenlijn.

Als  $e$  klein is dan is het bepalen van veranderingen in  $\omega$  moeilijk. Veel systemen met niet sferische componenten zijn "kontakt" systemen (zie ) en deze hebben vrijwel cirkelvormige

banen. Het is waarschijnlijk, dat de apsidenlijn van  $\gamma$  Cygni (09.5 + 09.5;  $P_{AB} = 2.^d 996332$ ) roteert. De spektraallijnen zijn zeer rotatieverbreed (zie fig. 34), waardoor de radiële snelheidskromme niet voldoende nauwkeurig bekend is. Het is waarschijnlijk,

zie ook figuur 33  
links boven

dat getijdekrachten werken, omdat  $R_A + R_B = 1/5 a \cdot v_{\text{sys}}$  blijkt echter ook variabel te zijn, hetgeen duidt op een 3de komponent.

#### 4.7 radiële snelheidskrommen t.g.v. pulsaties

Intrinsiek veranderlijken, zoals Cepheïden, verschaffen ook radiële snelheidskrommen. Aanvankelijk dacht men, dat dit dubbelsterren waren, maar de baanelementen afgeleid uit dit soort radiële snelheidskrommen waren zeer onwaarschijnlijk; zo waren de excentriciteiten,  $e$ , groter dan gewoonlijk voor dubbelsterren met overeenkomstige periodes;  $a \sin i$  en  $f (e^M)$  waren steeds te klein.

In 4.7.1. zal blijken dat de te bepalen stralen - aannemend, dat variaties in de radiële snelheid door pulsaties ontstaan - hiermee in overeenstemming zijn. De gevonden stralen blijken groter te zijn dan de berekende banen! De Cepheïden blijken reuzen te zijn.

H. Shapley en A.S. Eddington waren de eersten, die de veranderende  $v_{\text{rad}}$  toegeschreven hebben aan pulsaties van het steroppervlak. In sectie zal een overzicht van de pulserende sterren gegeven worden.

##### 4.7.1 bepaling straal van een pulserende ster

In figuur 37 zijn van  $\delta$  Cephei achtereenvolgens als functie van de fase gegeven: de helderheidsvariatiën in B en V, de kleurindex  $C = B - V$ , het tegengestelde van de gemeten snelheidsvariatiën  $-\frac{d\Delta z}{dt} = \frac{dR}{dt}$  (voor notatie zie bl. 23), de "time-displacement" kurve [ zie 1.3.1 bl. 3 en 4 en ook bl. 38 ] en de effectieve temperatuur.

De radiële snelheid van een punt van het steroppervlak (zie figuur 38) is  $\frac{dR}{dt}$ . Daar over de op de gezichtslijn geprojecteerde radiële snelheden van het gehele zichtbare steroppervlak geïntegreerd moet worden wordt uit de metingen een gemiddelde radiële snelheid  $\frac{dR}{dt}$  verkregen. Voor een sterschijf met uniforme helderheidsverdeling ( $u_\lambda = 0$ , zie bl. 24. even onder het midden en figuur 23) geldt:

$$\begin{aligned} \overline{\frac{dR}{dt}} &= \frac{1}{\pi R^2} \int_0^{\pi/2} \left( \frac{dR}{dt} \cos \psi \right) (2\pi R \sin \psi) (R d\psi \cos \psi) \quad (4-42) \\ &= \frac{dR}{dt} \int_0^{\pi/2} \cos^2 \psi d \cos \psi = \frac{2}{3} \frac{dR}{dt} \end{aligned}$$

↑ Hier hoort ↑  
van bl. 48

In het algemeen geldt:

$$\overline{\frac{dR}{dt}} = \frac{\int_0^{\pi/2} \left( \frac{dR}{dt} \cos \psi \right) (2\pi R \sin \psi) I(\psi) (R \cdot d\psi \cdot \cos \psi)}{\int_0^{\pi/2} (2\pi R \sin \psi) \cdot I(\psi) (R \cdot d\psi \cdot \cos \psi)} \quad (4-43)$$

Volgens (3-7) is  $I(\psi) = I(\psi=0) [1 - u_\lambda + u_\lambda \cos \psi]$   
 Substitutie hiervan in (4-43) en enige herleiding geeft

$$\frac{dR}{dt} = g_\lambda \overline{\frac{dR}{dt}}, \quad (4-44)$$

waarin  $g_\lambda = \frac{6 - 2u_\lambda}{4 - u_\lambda}$ .

voor  $u_\lambda = 0$  is  $g_\lambda = 3/2$  (zie 4-42) } zodat  $1,33 < g_\lambda < 1,50$   
 voor  $u_\lambda = 1$  is  $g_\lambda = 4/3$

Vaak wordt  $g_\lambda = 1,4$  genomen.

De heliocentrische radiële snelheid kan in navolging van (4-12) geschreven worden als

$$\frac{dC}{dt} = v_{\text{ster}} \cdot \overline{\frac{dR}{dt}} \quad (4-45)$$

waarin  $v_{\text{ster}}$  de radiële snelheid van het centrum van de ster ten opzichte van de zon is.  $\frac{dC}{dt}$  is de gemeten radiële snelheid na correctie voor rotatie en revolutie van de aarde. Daar

$\int_0^{\psi} \overline{\frac{dR}{dt}} = 0$  kan  $v_{\text{ster}}$  bepaald én in rekening worden gebracht:

$$v_{\text{ster}} = \frac{\int_0^{\psi} \left( \frac{dC}{dt} \right) dt}{\int_0^{\psi} \overline{\frac{dR}{dt}}} \quad (4-46)$$

Het nulpunt van de  $\frac{dR}{dt}$  schaal is nu vastgelegd (zie Fig. 37d)

De "time-displacement kurve" wordt verkregen met behulp van

$$\overline{\Delta R}(t) = \int_0^t \overline{\frac{dR}{dt}} dt \quad (4-47)$$

$\overline{\Delta R}$  wordt naderhand gerekend vanaf het midden tussen  $R_{\text{max}}$  en  $R_{\text{min}}$  (horizontale lijn in fig. 37e). Dit punt heeft betrekking op de gemiddelde straal,  $R$ , van de ster.

Natuurlijk is ook  $\Delta R = g_\lambda \overline{\Delta R}$ .

Aannemende, dat er een eenduidig verband bestaat tussen effectieve temperatuur,  $T_{\text{eff}}$ , en kleur,  $C$ , van een ster moet op twee momenten I en II, waarop de kleuren dezelfde zijn ( $C_I = C_{II}$ ,

hier

naar bl. 47

dus ook  $T_{\text{eff I}} = T_{\text{eff II}}$  ) het verschil in helderheid tussen de momenten I en II toegeschreven worden aan het verschil in straal tussen die twee momenten :  $R_I = R + \Delta R_I$  en  $R_{II} = R + \Delta R_{II}$ . Voor bijv. de helderheid in V kan geschreven worden

$$m_V = -2.5 \log 4\pi R^2 \int_0^\infty r_\lambda(V) \mathcal{F}_\lambda d\lambda + \text{konst}_V^{-5-5 \log \pi A_V} \quad (4-48)$$

[a konst. is gehaald van (2-40); zie ook (2-27); vergelijk met (4-38)]

waarin  $r_\lambda(V)$  = dat deel van het sterlicht, dat bijdraagt tot de intensiteitsmeting in V (zie bl. 16)

$$r_\lambda(V) = r_4(\lambda) \cdot r_5(\lambda) \quad \text{volgens 3.8.2 van bl. 32}$$

$\mathcal{F}_\lambda$  = de monochromatische flux (zie bl. 16)

$$\left[ \int_0^\infty \mathcal{F}_\lambda d\lambda = \mathcal{F} = \sigma T_{\text{eff}}^4; \text{ zie (2-30) en (2-31)} \right]$$

Voor de momenten I en II geldt:  $m_{II} - m_I = \Delta m_V = -5 \log R_{II}/R_I$

of

$$n = \frac{R_{II}}{R_I} = 10^{-0,2 \Delta m_V} \quad (\text{dus bekend!})$$

Uit  $n = \frac{R + \Delta R_{II}}{R + \Delta R_I}$  volgt  $R = \frac{\Delta R_{II} - n \Delta R_I}{n-1}$  of

$$R = \bar{a}_\lambda \frac{\Delta \bar{R}_{II} - n \Delta \bar{R}_I}{n-1}, \quad (4-49)$$

waarin  $\Delta \bar{R}_I$  en  $\Delta \bar{R}_{II}$  bekend zijn uit fig. 37e.

In figuur 37c kunnen verscheidene horizontale lijnen ( $\Delta C=0$ ) getekend worden. Bij elke lijn hoort een stel van  $\Delta \bar{R}_I$  en  $\Delta \bar{R}_{II}$  waarden. Er kan dus een gemiddelde R bepaald worden.

Voor  $\delta$  Cephei blijkt  $R = 53 R_\odot$  te zijn. Ter vergelijking wordt voor RR Lyrae (zie ) gevonden:  $R = 7.2 R_\odot \pm \frac{1}{2}$

#### 4.8 bepaling van $v_{\text{rad}}$

Als golflengte veranderingen van lijnen in een spectrum alleen door Doppler effecten veroorzaakt worden kan de radiële snelheid,  $v_{\text{rad}}$ , bepaald worden met

$$\frac{\Delta \lambda}{\lambda_L} = \frac{v_{\text{rad}}}{c}, \quad (4-50)$$



waarin  $c$  = de lichtsnelheid

$\lambda_L$  = de laboratorium golflengte van de te bestuderen lijn

$\Delta\lambda = \lambda_0 - \lambda_L$  = het verschil tussen de gemeten en de  
laboratoriumgolflengte van die lijn

Voor de meting van  $\Delta\lambda$  is een dispergerend element noodzakelijk.

In veel gevallen wordt een spektrograaf gebruikt. Stel de dispersiekromme ervan is

$$\lambda = \Delta(x) \quad (4-51)$$

dan is

$$\Delta\lambda = \lambda_0 - \lambda_L = \Delta'(x_0) \cdot (x_0 - x_L) \quad (4-52)$$

$\Delta\lambda$  wordt dus bepaald door een verandering in positie.

#### 4.8.1 fotoelektrische bepaling van $v_{\text{rad}}$

In het fokale vlak van de kamera van een spektrograaf (zie fig.39) bevindt zich een in de dispersierichting verplaatsbare metalen strip (lengterichting strip // dispersierichting) met een aantal spleetjes  $\perp$  lengterichting. De onderlinge afstanden van de hartlijnen van de spleetjes komen overeen met de onderlinge afstanden van de middens van daarvoor geschikt geachte Fraunhofer lijnen. Niet alle Fraunhoferlijnen kunnen n.l. gebruikt worden en bovendien moet een verstandige keus van Fraunhofer lijnen gemaakt worden om niet voor elk spektraaltype een aparte metalen strip te moeten gebruiken.

Het door de spleetjes vallende licht wordt gekoncentreerd op één fotocel. Bij heen en weer bewegen van de strip verandert de hoeveelheid licht, die op de fotocel valt. De fotostroom is <sup>maximaal</sup> minimaal als de spleetjes samenvallen met de voor die spleetjes bedoelde Fraunhofer lijnen uit het spektrum.

Het is duidelijk, dat bij dergelijke apparaten  $\Delta'$  [zie(4-52)] konstant moet zijn over het te gebruiken golflengtegebied.

Met behulp van "standaardsterren" (sterren, waarvoor  $v_{\text{rad}}$  konstant en goed bekend is) kunnen deze apparaten geijkt worden.

Grote eisen moeten konstruktief aan dit soort instrumenten gesteld worden: De positie van het spektrum ten opzichte van de nulstand van de metalen strip moet steeds dezelfde blijven. De dispersie van het spektrum en de onderlinge afstanden van de spleetjes in in de strip mogen <sup>(in dezelfde tyd)</sup> niet veranderen (dus het geheel moet op konstante temperatuur gehouden worden). De strip moet

[gedurende de tyd, dat de te onderzoeken ster ende standaardster gemeten wordt

zeer nauwkeurig instelbaar en afleesbaar zijn, immers de positie ervan bepaalt de te meten  $v_{\text{rad}}$ .

Het voordeel van deze methode is dat een groot aantal Fraunhofer lijnen gelijktijdig wordt afgetast. Meetnauwkeurigheden van enkele km/sek worden bereikt bij relatief hoge dispersies als  $5\text{\AA}/\text{mm}$ . Bij dergelijke dispersies kunnen echter alleen de helderste sterren bestudeerd worden.

Een nadeel van deze methode is, dat verschillen in  $v_{\text{rad}}$  van de ene ten opzichte van de andere lijn niet gevonden kunnen worden. Dit nadeel vervalt bij de volgende methode.

#### 4.8.2 fotografische bepaling van $v_{\text{rad}}$

##### 4.8.2.1 het opnemen van de spektra

De metalen strip van 4.8.1 wordt nu vervangen door een fotografische plaat. In het fokale vlak van de kamera kan echter ook de gevoelige laag van een beeldversterker geplaatst worden, waarachter dan de fotografische plaat komt. [ winst in gevoeligheid: 30 x tot 50 x; nadeel: slecht oplossend vermogen, nl.  $\approx 20-70$  lijnen/mm (bij goede optiek  $\approx 300$  lijnen/mm!) ]

Boven en onder het sterspektrum kunnen vergelijkingspektra afgebeeld worden (zie b in figuur 41). Dit zijn emissie spektra van laboratoriumbronnen (bijv. ijzerboog, Ne-, Ar-, He-lampen), waarvan de golflengtes van de emissielijnen goed bekend zijn. Het licht van deze laboratoriumbronnen moet via de intreeploet in de spektrograaf vallen. Dit kan bijv. met 2 prisma's (zie figuur 40). Met de vergelijkingspektra wordt de dispersiekromme  $\lambda = \Delta(x)$  bepaald.

Vaak kunnen ook nog kalibratiespektra op de fotografische plaat afgebeeld worden (c in fig. 41). Deze kunnen verkregen worden door een bundel homogeen continu licht buiten de intreeploet om in de kollimator van de spektrograaf te laten vallen door twee sets van verzwakkers (bijv. 2 x 4 rechthoekige openingen met bekende lengteverhoudingen, zoals in fig. 40 aangegeven). Zo ontstaan 8 spektra, waarvan voor alle golflengtes de intensiteitsverhoudingen gelijk zijn aan de lengteverhoudingen van de 8 rechthoekige openingen. Daarvoor elke golflente de zwartingen in de 8 kalibratiespektra te meten zijn, is nu voor elke golflengte de <sup>zwarting</sup> kalibratiekromme (zwarting als functie van intensiteit) bekend. Soms blijkt eenzelfde <sup>zwarting</sup> kalibratiekromme te gelden voor een vrij groot golflengtegebied. Met dergelijke kalibratiekrommen (ook wel zwartingskrommen genoemd) kunnen inten-

siteitsprofielen van Fraunhoferlijnen verkregen worden.

De lengte van de intreespleet,  $H$ , kan in het geval van figuur 40 gevarieerd worden door de afstand van de twee prisma-houdertjes te variëren. Als het sterbeeldje, dat vooral t.g.v. de invloed van de aardse dampkring een schijfje van 1-10 boogsekonden kan zijn (de te kiezen breedte van de intreespleet hangt hier o.a. van af, zie volgende alinea) over  $H$  heen en weer bewogen wordt (bijv. door de kijker gelijkmatig heen en weer te bewegen, wordt de hoogte,  $h$ , van het spektrum

$$h = \frac{f_{\text{kam}}}{f_{\text{koll}}} H \quad (4-52)$$

Vaak wordt  $h = 0.1$  mm gekozen. Voor verantwoorde fotometrie van de spektra is echter  $h = 0.5$  mm te prefereren (dit betekent 5x langer belichten als de andere omstandigheden gelijk blijven!) De gewenste hoogte van het spektrum is ook te verkrijgen door vlak achter de intreespleet een plan parallelle kwartsplaat op "speciale" wijze heen en weer te laten bewegen (de hoek die de normaal beschrijft bepaalt  $h$ ). De "speciale" wijze is zodanig, dat een uniforme belichting van het spektrum in de hoogterichting wordt verkregen. Een voordeel van deze methode is, dat  $H$  zeer klein genomen kan worden, zodat weinig hemellicht doorgelaten wordt.

Om een zo zuiver mogelijk spektrum te krijgen moet de spleetbreedte,  $W$ , zo klein mogelijk gekozen worden (onder goede atmosferische omstandigheden is de diameter van het sterbeeldje van de orde van  $1''$  en kan een smalle spleet genomen worden). Een maat voor de zuiverheid van het spektrum is de spektrale zuiverheid,  $p$  (spectral purity), die bij zekere  $\lambda$  gedefinieerd is door

$$p = W \cdot \Delta_{\lambda} \cdot \frac{f_{\text{kam}}}{f_{\text{koll}}}, \quad (4-53)$$

als  $\Delta_{\lambda}$  de dispersie is bij  $\lambda$ .

Een op de intreespleet vallende monochromatische lichtbundel zal echter in het spektrum niet een emissielijn met een "rechthoekig" profiel met breedte  $p$  veroorzaken (zie stippellijnen in figuur 42). Optische effecten en eigenschappen van de emulsie veroorzaken een profiel, zoals in fig. 42 gedeeltelijk is weergegeven met de getrokken lijn. Dit profiel wordt apparaatprofiel (instrumental

profile) genoemd.

#### 4.8.2.2 bewerking van spektra

a) Het meest eenvoudige instrument om  $v_{\text{rad}}$  te bepalen is een komparator, bestaande uit een plaathouder (= "spektrum" houder), die met behulp van een zeer nauwkeurige schroef heen en weer bewogen kan worden. Het aantal omwentelingen van de schroef dient als positieindicatie. Er zijn voorzieningen, dat de dispersierichting van het spektrum // de verplaatsingsrichting van de plaathouder gesteld kan worden (zie fig.43).

Met behulp van een mikroskoop (star met het bed van het instrument verbonden) kan hetzij het sterspektrum, hetzij één van de vergelijksspektra bekeken worden. Met het oog moet de plaat-houder op het centrum van een lijn ingesteld worden, waarna de positie van de plaathouder afgelezen wordt (dit laatste kan ook elektrisch gebeuren).

Door de schroefdraad steeds in éénzelfde richting te draaien kan de dode gang zo goed als geëlimineerd worden.

b) Om echter goed op het midden van een lijn te kunnen instellen, is het gewenst om de plaathouder in de buurt van het centrum van een lijn iets heen en weer te bewegen. Dit kan niet met de onder a) beschreven komparator, maar wel met een, waarbij de plaathouder verlengd is, voorzien van een zeer nauwkeurige en fijne schaalverdeling // bewegingsrichting van de plaathouder.

(zie figuur 44). Met behulp van een tweede mikroskoop kan de schaalverdeling afgelezen worden. Dit kan ook elektronisch geschieden met digitale uitvoer. Het centrum van een zeer nauwe spektraallijn kan hiermee met een nauwkeurigheid van enkele  $\mu$  ingesteld worden. Bij een dispersie van  $20\text{\AA}/\text{mm}$  betekent dit bij  $6000\text{\AA}$  een nauwkeurigheid van enkele  $\text{km}/\text{sek}$  in  $v_{\text{rad}}$ .

c) Het instellen op het midden van brede spektraallijnen is met de in b) beschreven komparator niet voldoende nauwkeurig mogelijk, maar wel met de Grant machine (zie figuur 45). Hierbij wordt de plaat van onderen over een vrij groot gebied homogeen verlicht. Boven de plaat bevindt zich een draaiend vierkant glasblok (dispersierichting spektrum  $\perp$  draaiingsas glasblok).

De optiek boven dit glasblok laat slechts een - in positie vaststaand - dun lichtbundeltje toe tot de fotocel. Aan dit "boven"-lichtbundeltje is op elk moment een lichtbundeltje uit de homogene bundel, die de plaat van onderen verlicht, toegevoegd. De positie van dit "onder" lichtbundeltje hangt af van de stand van het glasblok (// verschuiving door parallelle glasplaat). Bij elke kwartslag van het glasblok (met wijzers van klok mee) gaat de "onder"-bundel eenmaal van rechts naar links. Synchroon hiermee gaat een kathodestraal gedurende zo'n kwartslag de ene keer ook van rechts naar links, de daarop volgende keer van links naar rechts etc. (de momentane snelheden van de "onder" lichtbundel en van de kathodestraal zijn - afgezien van het teken - steeds gelijk)

Tegelijkertijd ondergaat de kathodestraal een vertikaal naar beneden gerichte uitwijking, die op elk moment evenredig is met de intensiteit van het "boven" bundeltje ( $\approx$  de intensiteit van het "onder" bundeltje na passeren van de plaat) Op deze wijze wordt een Fraunhoferlijn beurteelings van rechts naar links en van links naar rechts gescanned. Alleen als de opeenvolgende scans samen vallen bevindt het centrum van de Fraunhoferlijn zich op de optische as van de optiek boven het glasblok. De positie van de plaathouder kan bepaald worden zoals in a) of b) beschreven.

d) Met het in c) genoemde instrument kunnen eigenlijk alleen van symmetrische lijnen de onderlinge posities van de centra bepaald worden. In feite symmetrische lijnen kunnen echter asymmetrisch lijken als het continuüm (van de zwarting!) sterk verloopt met de golflengte. Een zo goed mogelijk samen laten vallen van de opeenvolgende scans (zoals in fig. 46 weergegeven) levert positiefouten van 5% van de halfwaardebreedte van de lijnen (= breedte lijnprofiel ter halve hoogte van de maximale inzakking) op. De smalste sterrelijnen hebben halfwaardebreedtes van de orde van 250 mÅ, hetgeen minimale fouten in  $v_{\text{rad}}$  van  $\approx 0.7$  km/sek veroorzaakt bij 5000 Å. Dikwijls zijn de halfwaardebreedtes echter van de orde van enige Ångströms, zodat de fouten in  $v_{\text{rad}}$  3 - 10 km/sek kunnen bedragen.

Om asymmetrieën in lijnprofielen in rekening te kunnen brengen is op de Utrechtse sterrewacht een mikrofotometer-komparateur in gebruik genomen. Net als bij de Grant machine wordt met behulp van een multiplier de intensiteitsverzwakking gemeten van een fijne



lichtbundel, die door het spektrum valt. Deze intensiteitsverzwakking is een maat voor de zwarting van het spektrum ter plaatse. Als tevoren de zwartingskromme bepaald is kan de intensiteitsverzwakking direkt omgezet worden in een relatieve intensiteit. Er is geen roterend glasblok, maar het spektrum wordt t.o.v. de lichtbundel verplaatst, zonodig in stapjes van  $1\mu$ . Daar bij elke intensiteitsmeting de positie van de plaathouder met een nauwkeurigheid  $< 1\mu$  wordt vastgelegd, is uit de vergelijksspektra de dispersiekromme  $\lambda = \Delta(x)$  zeer nauwkeurig te bepalen zodat met deze dispersiekromme bij elke intensiteitsmeting in het ster-  
spektrum de golflengte nauwkeurig bekend is. De rekenmachine kan dan van elke gewenste lijn een plot maken van de relatieve intensiteit tegen  $\lambda$ . Als de relatieve intensiteiten nog omgezet worden in genormaliseerde intensiteiten (intensiteit continuum = 1) zien de plots er uit zoals aangegeven door de punten en korte streepjes in figuur 36b. Met dergelijke plots moet het mogelijk zijn om zowel de golflengte van het midden van de vleugels van het lijnprofiel te bepalen ( $\lambda_m$  in fig.36b) als de golflengte van de kom van dit lijnprofiel ( $\lambda_{obs}$  in fig.36b, zie verklaring van lijnprofiel 4.6.2.)

Nauwe dubbelsterren

classificaties  
 gescheiden (detached)  
 halfgescheiden (semi detached)  
 contact (contact)  
 verbonden (fr: attaché)

W - Urse majoris

- A comp<sup>en</sup> nog in stadium van gravitatie - contractie
- B comp<sup>en</sup> op de hfdreeks
- C één comp. reus/subreus
- D beide comp<sup>en</sup> reus/subreus
- E comp<sup>en</sup> beneden de hfdreeks

het Hertzsprung-Russell diagram  
 evolutie van enkelvoudige ster in H.R. diagram (Cepheidenstrook)  
 Lagrange opp<sup>en</sup> en -punten  
 evolutie van nauwe dubbelsterren in H.R. diagram (materieoverdracht)  
 Wolf Rayet sterren  
 T Tauri sterren

W UMa sterren: beetje steratmosferen; hydrostatisch evenwicht; convectie energieoverdracht door straling en convectie; adiabatische constante; relatie van von Zeipel

niet exploderende close binaries met zelfde eigenschappen als de cataclytische binaries

Eruptieve veranderlijken

U Geminorum (SS Cygni)  
 + Z Camelopardalis Sterren  
 Symbiosesterren  
 recurrente novae

latere W Urse Majoris??  
 $\Delta U$  (erg)  
 $10^{30} - 10^{39}$   
 freq.  $10^{-40} - 10^{-44}$   
 $10^{-43} - 10^{-44}$

$\Delta t$  (yr)  
 $10^{-2} - 10^{-1}$   
 cataclytische binaries  
 sterren beneden de hfdreeks  
 $10^{-100}$

gewone novae

RW Aurigae -sterren  
 UV Ceti (flare) -sterren  
 R Coronae Borealis -sterren

$10^{-44} - 10^{-45}$  N  
 $10^{-44} - 10^{-45}$  RW  
 $10^{-44} - 10^{-45}$  UV  
 $10^{-44} - 10^{-45}$  RCB  
 $10^{-44} - 10^{-45}$  SN

Supernovae (I type)  
 (II type) - geen dubbelst.

Pulserende Veranderlijken

$\delta$  Cephei sterren  
 W Virginis sterren  
 RR Lyrae sterren  
 $\delta$  Scuti sterren

	kan P	kan R	Sp. type
$\delta$ Cephei	7d	1m	F6G
W Virginis	15d	1	F6G
RR Lyrae	12h	1	A
$\delta$ Scuti	3h	1	A+F

HZ 29 P=17<sup>m</sup>.6  $\Delta m = 0.<sup>m</sup>012$  (Zie bl 5 (14))

$\beta$  Canis Majoris sterren

$\beta$  CMa 4h 0<sup>m</sup> B

Mira L.P.V.  
 semiregelmatische veranderlijken

rad. r. r. r.  $90^\circ < P < 60^\circ$

M { kurz 175d 5<sup>m</sup> 4  
 lang 350d 6<sup>m</sup> 7  
 SR 100d 1 11

RV Tauri sterren

RV 75d 2 genk

c<sup>2</sup> Canum Venaticorum sterren  
 onregelmatig veranderlijken

c<sup>2</sup> CV 10<sup>ci</sup> < 2<sup>m</sup> 400-4500 jaar 11  
 I Superreuzant van late type  
 P 4000d

Populaties (Zie bl 3-6)

Zeer zonnemissie in beschrijving tot  
~~Kleinere~~ Pulsartheorie

$\beta^2$  Linnæus Varietatis  
 $P = 5.96$  4000 - 7500 jaar 11  
 $v_{\text{rot}} < 10 \text{ km/sec}$   
 $\Delta m \approx 0.<sup>m</sup>1$

geen "light flickering"  
 $\rightarrow$  geen massa overdracht.

5. Nauwe dubbelsterren5.1 definitie

Een dubbelster wordt nauwe dubbelster genoemd als de afstand van de componenten zodanig klein is, dat er in de loop van de evolutie van het systeem massa-overdracht kan plaats vinden.

5.2 ekwipotential oppervlakken

(geen theorie)

5.2.1 beweging van een infinitesimaal deeltje in het veld van twee om elkaar draaiende massa's

Stel, dat de dichtheidsconcentratie in de twee massa's zo groot is, dat de zwaartekrachtspotential van elk van deze massa's  $\mathcal{M}_A$  en  $\mathcal{M}_B$  benaderd kan worden door die van een massapunt.

Stel, dat het massacentrum van de componenten  $\mathcal{M}_A$  en  $\mathcal{M}_B$  samenvalt met de oorsprong van een rechthoekig assenstelsel  $(\xi, \eta, \zeta)$ , zie figuur 46a. Stel de componenten beschrijven cirkelbanen in het  $(\xi, \eta)$  vlak. Voor een eenparige hoeksnelheid ervan geldt dan:

$$\omega = \frac{2\pi}{P} \quad (5-1)$$

Uit de 3de wet van Kepler [zie ook (1-6)]

$$\mathcal{M}_A + \mathcal{M}_B = \frac{4\pi^2}{G} \frac{a^3}{P^2}$$

en (5-1) volgt:

$$\omega = \sqrt{G \frac{(\mathcal{M}_A + \mathcal{M}_B)}{a^3}} \quad (5-2)$$

Bij dit soort beschouwingen wordt vaak gesteld:

- dat de afstand van de componenten  $a = 1$
- dat de som van de massa's  $\mathcal{M}_A + \mathcal{M}_B = 1$
- dat de gravitatieconstante  $G = 1$  (mogelijk door geschikte keuze van de tijdseenheid)

Het is duidelijk, dat nu ook  $\omega = 1$ .

Voor een infinitesimaal deeltje met massa  $\mathcal{M}$  (massa  $\mathcal{M}$  zo klein, dat het nimmer invloed uitoefent op de beweging van  $\mathcal{M}_A$  en  $\mathcal{M}_B$ ) geldt in het veld van  $\mathcal{M}_A$  volgens Newton:

$$\mathcal{M} \ddot{\vec{r}}_A = -G \mathcal{M}_A \mathcal{M} \frac{\vec{r}_A}{(r_A)^3}$$

of

$$\ddot{\vec{r}}_A = -G\mathcal{M}_A \frac{\vec{r}_A}{(r_A)^3}, \quad (5-3)$$

waarin  $\vec{r}_A$  de afstand is van  $\mathcal{M}_A$  tot het infinitesimale deeltje. De differentiaal vergelijkingen voor de beweging van het infinitesimale deeltje in het veld van  $\mathcal{M}_A$  en  $\mathcal{M}_B$  worden volgens (5-3) als  $(\xi, \eta, \zeta)$  de coördinaten van dit deeltje zijn (zie figuur 46a):

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2\xi}{dt^2} &= -\mathcal{M}_A \frac{(\xi - \xi_A)}{r_A^3} - \mathcal{M}_B \frac{(\xi - \xi_B)}{r_B^3} \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} &= -\mathcal{M}_A \frac{(\eta - \eta_A)}{r_A^3} - \mathcal{M}_B \frac{(\eta - \eta_B)}{r_B^3} \\ \frac{d^2\zeta}{dt^2} &= -\mathcal{M}_A \frac{\zeta}{r_A^3} - \mathcal{M}_B \frac{\zeta}{r_B^3} \end{aligned} \right\} \quad (5-4)$$

waarin

$$\left. \begin{aligned} r_A &= \sqrt{(\xi - \xi_A)^2 + (\eta - \eta_A)^2 + \zeta^2} \\ r_B &= \sqrt{(\xi - \xi_B)^2 + (\eta - \eta_B)^2 + \zeta^2} \end{aligned} \right\} \quad (5-5)$$

Voor de overgang tot het rechthoekige coördinatenstelsel  $(X, Y, Z)$  waarbij de X-as samenvalt met de verbindinglijn van  $\mathcal{M}_A$  en  $\mathcal{M}_B$  (en dus meerooteert met de hoeksnelheid  $\omega$ ), de Y-as in het  $(\xi, \eta)$  vlak ligt en de Z-as samenvalt met de  $\zeta$ -as gelden volgende transformatieformules (bedenk  $\omega = 1$ ):

$$\left. \begin{aligned} \xi &= x \cos t - y \sin t \\ \eta &= x \sin t + y \cos t \\ \zeta &= z \end{aligned} \right\} \quad (5-6)$$

Substitutie hiervan in (5-4) en eliminatie van  $\cos t$  en  $\sin t$  (dit blijkt te kunnen!) levert (bedenk  $y_A = y_B = 0$ ):

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} - 2 \frac{dy}{dt} &= x - \mathcal{M}_A \frac{(x-x_A)}{r_A^3} - \mathcal{M}_B \frac{(x-x_B)}{r_B^3} \\ \frac{d^2y}{dt^2} + 2 \frac{dx}{dt} &= y - \mathcal{M}_A \frac{y}{r_A^3} - \mathcal{M}_B \frac{y}{r_B^3} \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= -\mathcal{M}_A \frac{z}{r_A^3} - \mathcal{M}_B \frac{z}{r_B^3} \end{aligned} \right\} \quad (5-7)$$

Met

$$U = \frac{1}{2} (x^2 + y^2) + \frac{\mathcal{M}_A}{r_A} + \frac{\mathcal{M}_B}{r_B} \quad (5-8)$$

wordt (5-7):

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= 2 \frac{dy}{dt} = \frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{d^2y}{dt^2} + 2 \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial U}{\partial y} \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= \frac{\partial U}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (5-9)$$

Vermenigvuldiging van deze drie vergelijkingen respectievelijk met  $2 \frac{dx}{dt}$ ,  $2 \frac{dy}{dt}$  en  $2 \frac{dz}{dt}$ , optellen ervan en integreren levert

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = 2U - C, \quad (5-10)$$

waarin de integratieconstante afhangt van de beginvoorwaarden.

Nog 5 integralen zouden nodig zijn om dit probleem te kunnen oplossen. Deze zijn er echter niet.

Daar  $\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} = v$ , de snelheid van het infinitesimale deeltje in het draaiende (X, Y, Z) stelsel, kan voor (5-10) met behulp van (5-8) geschreven worden

$$\boxed{v^2 = x^2 + y^2 + \frac{2\mathcal{M}_A}{r_A} + \frac{2\mathcal{M}_B}{r_B} - C} \quad (5-11)$$

### 5.2.2 zero velocity surface

Bij elke C wordt voor  $v = 0$  een driedimensionaal oppervlak bepaald, "waarbinnen" infinitesimale deeltjes een reële snelheid kunnen hebben, maar niet "erbuiten" (snelheid dan imaginair).

De vergelijking voor deze "zero velocity surfaces" is:

$$x^2 + y^2 + \frac{2}{r_A} \mathcal{M}_A + \frac{2}{r_B} \mathcal{M}_B = C, \quad (5-12)$$

waarbij

$$\begin{aligned} r_A &= \sqrt{(x-x_A)^2 + y^2 + z^2} \\ r_B &= \sqrt{(x-x_B)^2 + y^2 + z^2} \end{aligned}$$



Bijzondere gevallen

$$z \rightarrow \infty$$

Voor (5-12) kan in dit geval geschreven worden

$$x^2 + y^2 = C - \epsilon$$

Hoe groter  $z$ , des te kleiner  $\epsilon$  en des te meer de doorsnede met een vlak  $\parallel (x,y)$  vlak op die hoogte  $z$  lijkt op een cirkel met straal  $\sqrt{C}$  en met het centrum op de  $Z$ -as. Zie figuur 47 a en b. In deze figuren is  $C_1 > C_2 > C_3$  enz. De stippellijnen in deze figuren geven "asymptotische" cylinders aan.

$$z = 0, \text{ d.w.z. deeltje in } (x,y) \text{ vlak}$$

Voor (5-12) kan nu geschreven worden:

$$x^2 + y^2 + \frac{2\mathcal{K}_A}{\sqrt{(x-x_A)^2 + y^2}} + \frac{2\mathcal{K}_B}{\sqrt{(x-x_B)^2 + y^2}} = C \quad (5-13)$$

$x$  en  $y$  zeer groot

(5-13) kan dan weer benaderd worden door:

$$x^2 + y^2 = C - \epsilon$$

Doorsneden worden weer benaderd door met oorsprong concentrische cirkels met stralen  $\sqrt{C - \epsilon}$ .

Hoe groter  $C$ , des te groter  $x$  en  $y$  moeten zijn, des te kleiner  $\epsilon$  zal worden, des te cirkelvormiger de doorsneden zullen worden.

$x$  en  $y$  klein

(5-13) wordt nu benaderd door:

$$\frac{\mathcal{K}_A}{r_A} + \frac{\mathcal{K}_B}{r_B} = \frac{C}{2} - \epsilon$$

Als  $C$  groot is ontstaan twee gesloten oppervlakken rondom  $\mathcal{K}_A$  en  $\mathcal{K}_B$ . Als  $C$  kleiner wordt verenigen die twee oppervlakken zich met elkaar. Zie in figuur 47b de overgang van  $C_2$  naar  $C_3$ . ( $C_1 > C_2 > C_3$  enz.!) )

### 5.2.3 ekwipotenciaal oppervlakken

De zero velocity surfaces zijn ekwipotenciaal oppervlakken, zoals hieronder aangetoond zal worden. In de literatuur wordt bij deze beschouwingen  $\mathcal{K}_A$  steeds in de oorsprong genomen, zie figuur 46b.

Het meedraaiende koördinatenstelsel stellen we  $(X^*, Y, Z)$  met

$$x = x^* - \frac{\mu_B}{\mu_A + \mu_B} a \quad (5-14)$$

In dit stelsel is de potentiaal  $\Psi$  van de krachten op een infinitesimaal deeltje in het punt  $(x^*, y, z)$

$$\Psi = G \frac{\mu_A}{r_A} + G \frac{\mu_B}{r_B} + \frac{\omega^2}{2} \left( x^* - \frac{\mu_B}{\mu_A + \mu_B} a \right)^2 + y^2 \quad (5-15)$$

potentiaal t.g.v. centrifugale kracht

$$\begin{aligned} \text{waarin } r_A &= \sqrt{(x^*)^2 + y^2 + z^2} \\ r_B &= \sqrt{(a-x^*)^2 + y^2 + z^2} \end{aligned}$$

Substitutie van (5-2) en (5-14) in (5-15) levert :

$$\frac{2}{r_A/a} \frac{\mu_A}{\mu_A + \mu_B} + \frac{2}{r_B/a} \frac{\mu_B}{\mu_A + \mu_B} + \left\{ \left( \frac{x}{a} \right)^2 + \left( \frac{y}{a} \right)^2 \right\} = \frac{2\Psi a}{G(\mu_A + \mu_B)} \quad (5-16)$$

Voor  $C = \frac{2a}{(\mu_A + \mu_B)} \Psi$  is deze formule gelijk aan (5-12), in welke formule de afspraken a), b) en c) van bl. 56 reeds verwerkt zijn.

Door in (5-16)  $q = \frac{\mu_B}{\mu_A}$  en (5-14) te substitueren en door  $a = 1$  te stellen wordt de formule voor de ekwipotential oppervlakken :

$$C = \frac{2}{1+q} \cdot \frac{1}{r_A} + \frac{2q}{1+q} \left( \frac{1}{r_B} - x^* \right) + (x^*)^2 + y^2 + \frac{q^2}{(1+q)^2} \quad (5-17)$$

In de literatuur worden de ekwipotentialvlakken vaak weergegeven zoals afgebeeld in figuur 48.  $L_1$ ,  $L_2$  en  $L_3$  heten respectievelijk 1<sup>ste</sup>, 2<sup>de</sup> en 3<sup>de</sup> Lagrange punt. Door  $L_2$  en  $L_3$  kan materie uit het systeem verdwijnen. (zie ). Het oppervlak door  $L_1$  wordt het kritische- of het Roche oppervlak genoemd. De gemiddelde straal van het Roche oppervlak rondom een component ( $\equiv R_A^*$  of  $R_B^*$ ) kan worden benaderd door:

$$\left. \begin{aligned} \frac{R_A^*}{a} &= 0.38 + 0.2 \log \frac{1}{q} \\ \frac{R_B^*}{a} &= 0.38 + 0.2 \log q \end{aligned} \right\} \quad (5-18)$$

Deeltjes, die zich binnen een gesloten ekwipotential oppervlak rondom één van de componenten bevinden, kunnen nooit (zonder dat extra energie toegevoerd wordt) de andere component bereiken.

Deeltjes, die zich op of buiten het kritische oppervlak bevinden, kunnen zonder dat energie wordt toegevoerd tot de andere komponent gaan behoren.

Berekeningen hebben aangetoond, dat deeltjes, die een Roche oppervlak verlaten, een grotere snelheid dan de thermische snelheid moeten hebben, willen zij <sup>thv. rondom</sup> de andere komponent bereiken en bijv. een ring veroorzaken. Zo zijn in fig. 49a enkele trajektoriën in het (x,y)-vlak gegeven van deeltjes, die  $\mathcal{N}_B$  verlaten via  $L_1$  onder verschillende hoeken met de richting  $L_1 \mathcal{N}_B$  met een snelheid van 112 km/sek. (thermische snelheid  $\approx 10$  km/sek.). In figuur 49b zijn enkele banen gegeven van deeltjes, die met dezelfde snelheid het Roche oppervlak op andere punten verlaten. Alleen deeltjes uit een klein gebiedje rondom  $L_1$  kunnen  $\mathcal{N}_A$  bereiken! Figuur 49 heeft betrekking op RW Tauri, waarvan de A en B komponent respectievelijk een B8V en een KOIV ster zijn:

$a = 8.5 \times 10^6$  km,  $q = 0.215$  en  $\mathcal{P} = 2^d.769$ . De KOIV ster vult zijn Roche Lobe.

Doordat de straal van een ster in de loop van zijn evolutie verandert kan deze op zeker ogenblik gelijk worden aan die van het Roche oppervlak van deze ster, mits deze zich in een dubbelster systeem bevindt. De figuren 50 a en b geven het verloop van de straal met de tijd voor een ster met 9 en met 3 zonsmassa's. Figuren 51 en 52 geven een indruk van het verschil in snelheid van de evolutie voor sterren van verschillende massa's, terwijl in tabel VII de levensduur op de hoofdreeks als functie van de massa wordt gegeven.

Tabel VII

$M/M_{\odot}$	$T_{\text{hfdreeks}}$ (jr.)
30	$5.95 \times 10^6$
20	$8.30 \times 10^6$
10	$2.20 \times 10^7$
5	$7.76 \times 10^7$
3	$3.25 \times 10^8$
2	$1.45 \times 10^9$
1	$1.82 \times 10^{10}$

Zodra de straal van een komponent gelijk wordt aan de gemiddelde straal van het Roche oppervlak rondom die komponent ( $R_A^*$  of  $R_B^*$ ) kan materie-overdracht plaatsvinden van die komponent naar de andere. Zodra er echter materie-overdracht plaatsvindt verandert de afstand  $a$  van de componenten, zoals aan de hand van een eenvoudig voorbeeld zal worden toegelicht:

Stel in de beginsituatie is  $(M_B)_0 \ll (M_A)_0$ , dan kan aangenomen worden, dat  $(M_A)_0$  stilstaat en dat het impulsmoment van het systeem is:  $(M_B)_0 \omega a_0^2$ . Daar

$$\frac{v_0^2}{a_0} = \frac{G (M_A)_0}{a_0^2}$$

is

$$\omega = \sqrt{\frac{G (M_A)_0}{a_0^3}}, \quad \left[ - (M_A \omega a_A^2 + M_B \omega a_B^2 = \text{konst}) - \text{in dit geval} \right]$$

zodat de wet van behoud van baanimpulsmoment luidt:

$$\sqrt{M_B} \sqrt{M_A} \cdot a = \text{konst.} \quad (5-19)$$

Stel een massa  $(M_B)_0$  gaat nu van de A komponent over naar de B komponent, dan is  $M_A = (M_A)_0 - (M_B)_0$  en  $M_B = 2 (M_B)_0$ . Volgens (5-19) is nu:

$$\sqrt{2 (M_B)_0} \sqrt{[(M_A)_0 - (M_B)_0] \cdot a} = \sqrt{(M_B)_0} \sqrt{(M_A)_0 \cdot a_0}$$

$$\text{of } a = \frac{a_0}{4}$$

$$a = \frac{M_B M_A d_0}{2 M_B (M_A - M_B)} \approx \frac{d_0}{2}$$

In het algemeen geldt, aannemend dat

- de banen van de componenten cirkelvormig zijn;
- de componenten niet roteren;
- de wet van behoud van impulsmoment geldt;
- er geen massa verloren gaat;
- de massa-uitwisseling alleen via het 1<sup>ste</sup> Lagrange punt plaatsvindt;
- de overgedragen massa vrijwel direkt op de andere komponent valt:

$$\frac{a}{a_0} = \left[ \frac{q_0}{q} \left( \frac{1+q}{1+q_0} \right)^2 \right]^2 \quad (5-20)$$

$$\frac{\mathcal{P}}{\mathcal{P}_0} = \left[ \frac{q_0}{q} \left( \frac{1+q}{1+q_0} \right)^2 \right]^3 \quad (5-21)$$

Deze funkties bereiken een minimum voor  $q = 1$ .

Tijdens de massa uitwisseling kan met behulp van (5-18) en (5-20) de gemiddelde straal van het Roche oppervlak van de componenten als functie van  $q$  worden berekend. In figuur 53 is het verloop van  $R_A^*$  met  $q$  aangegeven. Uit deze figuur volgt, dat als éénmaal de massa-overdracht van de zwaardere naar de lichtere komponent begonnen is, dit proces versneld wordt totdat  $q = 1.3$ , omdat de straal van het kritische oppervlak steeds kleiner wordt, terwijl de toename van de straal van de ster niet direkt op zal houden (zie figuren 50 a en b).