5.6 HZ 22 (= UX CVn)

Dit is een bijzonder interessante enkelvoudige spektroskopische /‾systeem dubbelster/‾nabij de galaktische pool. Het heeft een kleine massafunktie , f ($\mathfrak{M}$) en een grote radiele snelheidsamplitude, K_A. Op grond van evolutie beschouwingen is de onzichtbare komponent (= B komponent) waarschijnlijk een witte dwerg, alhoewel er geen observationeel bewijs voor is. Een aantal gegevens volgen hieronder:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_{1950} = 12^h\ 12^m\ 16^s \\ \delta_{1950} = +36^\circ\ 56' \end{array}\right\}\ \beta = 78^\circ$$

spektraal type B2 (?)

$m_V = V = 13.07$

$B-V = -0.29$

$U-B = -1.05$

$$\begin{array}{ll} \mu_\alpha = 0''.030 \\ \mu_\delta = -0''.021 \end{array}\Big\}(1) \quad \begin{array}{l} 0''.04 \\ -0''.014 \end{array}\Big\}(2) \quad \begin{array}{l} -0''.001 \\ -0''.011 \end{array}\Big\}\begin{array}{l} \text{per jaar} \\ \text{per jaar} \end{array} (3)$$

$\mathcal{P} = 3^d.5821$ (4)

$= 0^d.43$ (5)

$= 0^d.573703$

$$\left.\begin{array}{rl} K_A &= (130 \pm 3)\ \text{km/sek} \\ f(\mathfrak{M}) &= 0.113 \\ e &= 0.09 \pm 0.02 \\ a \sin i &= (1.02 \times 10^6 \pm 2 \times 10^4)\ \text{km} \\ \omega &= 340^\circ \pm 12^\circ \\ v_{syst} &= (-1 \pm 1)\ \text{km/sek} \end{array}\right\}$$

A. Young, B. Nelson en R. Mielbrecht: Astroph. J. 174, 27, 1972

(1) W.J. Luyten en W.C. Miller: Astroph. J. 114, 488, 1951

(2) G. Pels en L. Perek: Bull. Astron. Netherl. 11, 281, 1951

(3) W.J. Luijten: First Conf. on Faiut Blue Stars, ed. W.J. Luijten, University of Minnesota, p. 122, 1965

(4) S. Gaposchkin: Astron. J. 67, 361, 1962

(5) J. Smak: Acta Astron. 19, no 2, '69

De waargenomen lichtkromme moet waarschijnlijk door ellipticiteit van de zichtbare komponent verklaard worden. Tot nu zijn geen zeer kortdurende lichtvariaties (light-flickering) waargenomen zoals bij de kataklytische dubbelsterren. Op grond hiervan moet het een gescheiden systeem zijn.

Uit spektra (H_γ en H_δ profielen) en de kleuren bepaalt Greenstein (Astron. 4 Astroph. 23, 1, 1973) : T_{eff} = 28 000 °K en logg = 4. (Voor witte dwergen is logg 6-7 en voor subdwergen ≈ 5.5)

Een ruwe schatting van de massa van de zichtbare komponent (= A komponent) (uit de gemeten massafunktie te verkrijgen door te stellen $\mathfrak{M}_A = \mathfrak{M}_B$ en sin = 1) geeft $\mathfrak{M}_A \approx 0.5\ \mathfrak{M}_\odot$. (B2 V sterren hebben normaliter ≈ 10 $\mathfrak{M}_\odot$).

Uit deze "waargenomen" massa en de"waargenomen" logg volgt met (2-47) (blz. 20) : R = 1.17 $R_\odot$ terwijl een hoofdreeksster van bovengenoemde effektieve temperatuur een straal van ≈ 7 $R_\odot$ heeft. De massa kan niet groter zijn dan 0.5 $\mathfrak{M}_\odot$, want R_A moet kleiner zijn dan R_A^* omdat niets duidt op massa overdracht (geen emissielijnen, ook niet in H_α). Voor $\mathfrak{M}_A$ = 0.5 $\mathfrak{M}_\odot$ is R_A nog net een beetje kleiner dan R_A^*.

Substitutie van (2-47) in (4-38) (blz. 42) geeft:

$$M_{bol_A} = -2.5 \log \mathfrak{M}_A/\mathfrak{M}_\odot - 10 \log T_{eff_A} + 2.5 \log g_A + \left[M_{bol_\odot} + 10 \log T_{eff_\odot} - 2.5 \log g_\odot\right] \quad (5\text{-}22)$$

Uit deze formule wordt nu geschat M_{bol} = -2.7. Aannemend, dat de BC = -2.95 wordt nu M_V = + 0.25, zodat de afstandsmodulus $m_V - M_V \approx$ 13 is.

[Formule (5-22) mag "eigenlijk" alleen gebruikt worden als er geen centrifugale- en getijdekrachten werken en de stralingsdruk verwaarloosd kan worden. Immers deze veroorzaken een effektieve g, die verschilt met de m.b.v. (2-47) uit $\mathfrak{M}$ en R te berekenen g. Uit de spektra wordt de effektieve g gemeten.]

Uit de galaktische breedte en de afstandsmodulus volgt m.b.v. (2-27) (A = 0 aannemend: hoge galaktische breedte!) dat de afstand tot het galaktische vlak op meer dan 1500 parsec geschat moet worden.

Uit de afstand, de eigen bewegingen μ_α en μ_δ (gemiddelde van de eerste 2 waarden) en de radiele snelheid van het massacentrum, v_{syst}, kan de ruimtelijke snelheid van HZ 22 berekend worden. Als HZ 22 van halo populatie II is (zie hfdst 7) zou $m_V - M_V \lesssim 12$ hebben zoeten zijn, als HZ 22 tot de "oude" schijfpopulatie behoort zou $m_V - M_V \lesssim 9$ hebben moeten zijn!

Berekeningen tot nu toe gedaan betreffende de evolutie van een dubbelstersysteem, dat eindigt voor de huidige B komponent bij een Helium witte dwerg met $\mathfrak{M}_B = 0.26 - 0.41\ \mathfrak{M}_\odot$ en waarbij $a_A + a_B$ enkele 10^6 km is, gaan uit van een totale beginmassa van $2.5\,\mathfrak{M}_\odot$. Maar daar bij deze berekeningen aangenomen wordt dat geen massa verloren gaat [zie d) op blz. 62.] zou $2.24 < \mathfrak{M}_A/\mathfrak{M}_\odot < 2.09$ moeten zijn, hetgeen uitgesloten is, daar dan $R_A > R_A^*$.

Net als in het geval van BD 16° 516 valt te verwachten, dat er veel massa verloren gegaan moet zijn eventueel in een planetair nevel stadium.

Intussen is al theoretisch aangetoond, dat sterren met temperaturen rondom 30 000 k en log g = 4 geen massa's van $\approx 10\,\mathfrak{M}_\odot$ hoeven te hebben. V. Trimble (Astron. & Astrophys. <u>23</u>, 281, 1973) heeft een set van statische modellen berekend met Helium-kernen en $10^4 \leq T_{eff} \leq 10^5$ en $1.8 < \log g \leq 5.9$. De massa's van de kernen zijn vrijwel gelijk aan de massa's van de sterren en wel $0.26 \leq \mathfrak{M}/\mathfrak{M}_\odot \leq 0.5$.

5.7 Stellaire röntgenbronnen

Het is zeer waarschijnlijk, dat een aantal röntgenbronnen geidentificeerd moet worden met dubbelsterren. Tabel geeft een overzicht van de huidige vermoedens. (zie blz. 70a)

In figuur 58c is de lichtkromme van HZ Her en in fig. 58b schematisch de intensiteit van de röntgenstraling van Her X-1 (de fluktuaties zijn weggelaten) als funktie van de tijd weergegeven, terwijl fig. 58a de radiele snelheidskromme van de optisch zichtbare komponent (= o.z.k.) van HZ Her geeft. Alhoewel het optisch minimum niet verklaard kan worden door een okkulatie van de hete ster, maar wellicht door verhittings- en deformatie effekten, is het samenvallen van de minima van de krommes in fig 58b en c opvallend.

Het ontstaan van de röntgenstraling moet gezocht worden in het met grote snelheid vallen van materie afkomstig van de hete ster op een neutron ster of zwart gat of op een deze objekten omringende gasring. (Grote gravitatie energie). Hierbij kunnen schokgolven ontstaan als geen viskositeit wordt geintroduceerd. De massastroom zou veroorzaakt kunnen worden, doordat de o.z.k. zijn Roche lobe vult of er overheen puilt.

Alleen als de massa van de optisch onzichtbare komponent (= o.o.k.) $\leq 2\,\mathcal{M}_\odot$ is, is deze een neutron ster anders een zwart gat ($\geq 3\,\mathcal{M}_\odot$).

Zodra een massafunktie bekend is kan m.b.v. (4-37) (blz. 42) geschreven worden:

$$\left(\mathcal{M}_{\text{rönt}}\right)^3 = \frac{f(\mathcal{M})\,(\mathcal{M}_{\text{rönt}}+\mathcal{M}_{\text{opt}})^2}{\sin^3 i} > \frac{f(\mathcal{M})\,(\mathcal{M}_{\text{opt}})^2}{\sin^3 i} >$$

$$> f(\mathcal{M})\,(\mathcal{M}_{\text{opt}})^2,$$

zodat:

$$\boxed{\mathcal{M}_{\text{rönt}} > \sqrt[3]{f(\mathcal{M})}\;(\mathcal{M}_{\text{opt}})^{2/3}} \qquad (5\text{-}23)$$

Een minimum massa van de röntgenbron is nu bekend als funktie van de massa van de o.z.k. In fig. 59 is dit verband gegeven voor HDE 226868, de vermoedelijke optische tegenhanger van Cyg X-1, waarvoor volgens C.T. Bolton (Nature, Phys. Sci. 240, 124, 1972) $f(\mathcal{M}) = 0.182$.

Tabel

röntgenbron	periodiciteit en röntgenstraling (sek)	okkultatieduur van de röntgenstraling (dagen)	radiostraling waarnemingen	met röntgenbron te identificeren dubbelster	spektraaltype optisch zichtbare komponent	m_v	P (dagen)	K_{ozk} (km/sek)	$f(\mathcal{M})$
Her X-1 (2U 1705-34)	1.24			HZ Her	vroeg B bij max laat A bij min		1.7		
2U 1702-35		0.24 ± 0.06					1.7		
Cen X-3	4.8	0.488					2.087		$15\mathcal{M}_\odot$
2U 1700-37				HD 153919	O 7 f		3.412		
SMC X-1				Sanduleak Nr. 160	BO I	$13.^m3$	3.8927		
Cyg X-1 (2U 1956+34)			variabele radiobron	HDE 226868	O 9.7 I ab		5.6	68.2±1.7	$0.182\mathcal{M}_\odot$
2U 0900-40				HD 77581	B 0.5 I b		8.96		
2U 0525-06				θ^2 Ori	O 9.5 V p	$5.^m07$	21.0315	105.8	$2.5\mathcal{M}_\odot$

70a.

Nu zijn de massa's van B0 superreuzen niet goed bekend, maar die van B0 V sterren worden geschat op 15 $\mathfrak{M}_\odot$ en groter. Er kan dus aangenomen worden, dat de massa van de o.z.k. van HD 226868 $> 9\ \mathfrak{M}_\odot$, waardoor de minimum massa van de o.o.k. groter dan 3 $\mathfrak{M}_\odot$ wordt volgens fig. 59 en dus een zwart gat zou moeten zijn. Bij HZ 22 (zie sektie 5.7) is echter al duidelijk geworden, dat er geen eenduidig verband bestaat tussen spektraal type en massa. Voor een 09.7 Iab wordt thans aangenomen, dat $T_{eff} \approx 30\,000$ K en logg ≈ 3.2 Volgens V. Trimble (zie sektie 5.7) kunnen deze grootheden ook bereikt worden met een ster met een massa tussen 0.26 en 0.5 $\mathfrak{M}_\odot$, waardoor dus de o.o.k. een gewone neutron ster kan blijven.

NB: D.T. Wickramasinghe, N.A. Vidal, B.A. Peterson en M.S. Bessell (circular 2525 Centr. Bureau Astron. Telegrams IAU, 1973 April 20) heeft voor HD 77581 een massafunktie kunnen bepalen. Aannemend, dat de massa van de o.z.k. (B 0.5 Ia) $\approx 45\ \mathfrak{M}_\odot$ (!) is moet de o.o.k. een massa groter dan 3 $\mathfrak{M}_\odot$ hebben en "dus" een zwart gat zijn!!

De massastroom van de o.z.k. naar de o.o.k. kan nu niet meer verklaard worden doordat de o.z.k. zijn Roche lobe vult. Echter K. Davidson en J.P. Ostriker (Astroph. J. 179, 585, 1973) hebben aangetoond, dat de sterre-wind van een hete ster een voldoend grote massastroom kan opleveren om röntgenstraling te krijgen. (Zie V. Trimble, W.K. Rose en J. Weber in Mon. Not. R. Astr. Soc. 162, 1 P, 1973)

Volledigheidshalve zij opgemerkt, dat als aangenomen wordt, dat de o.z.k. zijn Roche lobe vult, dat dan de formules (5-18) gelden. Als voorts aangenomen wordt, dat de straal van de neutronster/pulsar zeer klein is t.o.v. de straal van de o.z.k. (R_A) dan geldt:

$$\frac{R_A}{a} = \left[\, 1-\cos^2\left(\frac{\pi t}{P}\right).\ \sin^2 i \,\right]^{\frac{1}{2}}, \qquad (5\text{-}24)$$

waarin t de okkulatie duur is. Voor sin i = 1 wordt dan een bovenste grens gevonden voor $= \frac{\mathfrak{M}_{rönt}}{\mathfrak{M}_{opt}}$. Tezamen met de massafunktie kunnen dan maximale waarden voor $\mathfrak{M}_{rönt}$ gevonden worden. E.P.J. van den Heuvel en J. Heise (Nature, Phys. Sci. 239, 67, 1972) vinden op deze wijze voor Cen X-3 $\mathfrak{M}_{rönt} < 0.70\ \mathfrak{M}_\odot$. Op grond van het voorafgaande is het echter niet zeker of een Roche model gebruikt mag worden.

6. De W Ursae Majoris systemen

6.1 inleiding

In 5.3 zijn deze systemen ingedeeld onder Vn. De periodes varieren van $0^{d}.1$ tot $1^{d}.0$; het spektraal type is altijd later dan FO. De lichtkromme, met twee ongeveer even diepe minima (zie fig. 65) is niet op de gewone manier te verklaren.

Het feit, dat het oppervlak van een kontaktsysteem een ekwipotentiaal oppervlak is eist volgende massa-straal-wet (MRW)

$$R_A/R_B \simeq (\mathcal{M}_A/\mathcal{M}_B)^{0.46} \quad . \qquad (6\text{-}56)$$

(R_A heeft betrekking op de meer massieve komponent)
Voor hoofdreekssterren geldt echter

$$R_A/R_B \approx (\mathcal{M}_A/\mathcal{M}_B)^{0.6} \quad . \qquad (6\text{-}53)$$

De kontradiktie tussen (6-56) en (6-53) heeft ertoe geleid, dat wel eens gedacht is, dat W UMa systemen geevolueerd systemen zouden zijn. Er blijken echter per volume eenheid 20x zoveel W UMa systemen te zijn dan alle andere soorten van bedekkingsveranderlijken. Dit maakt het onwaarschijnlijk, dat W UMa systemen een evolutie fase zijn van een bepaald soort bedekkingsveranderlijke. Tegenwoordig gelooft men, dat het zero-age-objekten zijn.

Aan (6-56) en (6-53) kan alleen dan tegelijkertijd voldaan worden als $\mathcal{M}_A = \mathcal{M}_B$. Dit is echter in strijd met de waarnemingen. Hieruit kan de konklusie getrokken worden, dat W UMa systemen geen evenwichtskonfiguraties zijn. Het is de verdienste van L.B. Lucy geweest om aan te tonen, dat W UMa systemen een gemeenschappelijke konvektieve omhulling hebben. Daar de straal van een ster met een konvektieve atmosfeer afhangt van de adiabatische konstante [zie (6-30)] hoeft niet aan (6-53) voldaan te zijn. De theorie van de opbouw van sterren laat zien, dat bij sterren vroeger dan A5 geen konvektielagen nabij de oppervlakte voorkomen, maar bij sterren later van GO kunnen uitgebreide konvektielagen nabij de oppervlakte voorkomen.

Om de W UMa systemen enigszins te kunnen begrijpen zal in de sekties 6.2 en 6.3 iets over de opbouw der sterren gezegd worden.

6.2 de opbouw van een ster

6.2.1 nodige begrippen en formules

In het onderstaande zal de ideale gaswet in de vorm (6-3) gebruikt worden. Voor één grammolekule geldt immers:

$$P.V = kT. \qquad (6\text{-}1)$$

Daar $V = \frac{m}{\rho}$ (6-2)
als m = gemiddelde molekulairgewicht en ρ = soortelijke massa ($gr\ cm^{-3}$) wordt (6-1):

$$P = \frac{k}{m}\rho T \qquad (6\text{-}3)$$

Het zal nodig blijken om de radiele optische diepte, τ, in te voeren, die gedefinieerd wordt door

$$d\tau_\lambda = - \varkappa_\lambda(r)\ \rho(r)\ dr \qquad (6\text{-}4)$$

waarin $\varkappa_\lambda$ de absorptiekoëfficient per gram is en dr een lengte elementje in de richting van de straal is (zie fig. 60). r wordt gerekend van binnen naar buiten (r=o in het centrum van de ster), τ van buiten naar binnen (τ = 0 ver buiten het oppervlak van de ster, dus voor $r = +\infty$)

Voor de optische diepte ter plaatse r moet dus geschreven worden

$$\tau_\lambda(r) = - \int_\infty^r \varkappa_\lambda(r)\ \rho(r)\ dr \text{ of}$$

$$\tau_\lambda(r) = \int_r^\infty \varkappa_\lambda(r)\ \rho\ (r)\ dr \qquad (6\text{-}5)$$

Aan de rand van de ster:

$$\tau_\lambda(R) = \int_R^\infty \varkappa_\lambda\ (r)\ \rho(r)\ dr \qquad (6\text{-}6)$$

(N.B. $\tau_\lambda(R) \neq 0$, immers daar waar de stralingsintensiteit zeer snel afneemt bij (R) houdt 't gas niet plotseling op).

Uit fig.60 volgt, dat de massa van een bolschil met dikte dr is

$$d\mathcal{M}(r) = 4\ \pi\ r^2 dr\ \rho\ (r) \qquad (6\text{-}7)$$

zodat voor de massa binnen een straal r geldt:

$$\mathcal{M}(r) = \int_0^r 4\ \pi\ r^2\ \rho\ (r)\ dr$$

en voor de totale massa van de ster, $\mathcal{M} = \mathcal{M}(R)$:

$$\mathcal{M} = \int_0^R 4\ \pi\ r^2 \rho(r)\ dr \qquad (6\text{-}8)$$

(6-7) is equivalent met

$$\boxed{\frac{d\mathcal{M}(r)}{dr} = 4\ \pi\ r^2\rho(r)} \qquad (6\text{-}9)$$

Als P(r) de totale gasdruk op afstand r van het centrum is, dan kan voor een volume elementje ds dr cm^3(zie fig. 60) het evenwicht tussen gravitatiekracht en opwaartse kracht t.g.v. de gasdruk geschreven worden als

$$\frac{G\mathcal{M}(r)\cdot\rho(r)\,dr\,ds}{r^2} = -\,d\,P(r)\,ds \qquad (6\text{-}10)$$

als G de gravitatiekonstante is.

Hieruit volgt de voorwaarde voor hydrostatisch evenwicht:

$$\boxed{\frac{dP(r)}{dr} = -\,\rho(r)\,\frac{G\mathcal{M}(r)}{r^2}} \qquad (6\text{-}11)$$

Aangetoond kan worden, dat kortstondig geïnduceerde afwijkingen van de toestand van hydrostatisch evenwicht snel weer vanzelf ongedaan gemaakt worden.

In de buitenste lagen van de ster geldt

$$\frac{dP(r)}{dr} = -\,\frac{G\mathcal{M}}{R^2}\,\rho(r) \qquad (6\text{-}12)$$

waarbij $\frac{G\mathcal{M}}{R^2} = g$, de versnelling van de zwaartekracht aan de oppervlakte van de ster is. (6-13)

Voor de totale per sekonde door een bolоppervlak met straal r getransporteerde energie, $\mathcal{L}(r)$, kan geschreven worden

$$\mathcal{L}(r) = \int_0^r 4\pi\, r^2\, \rho(r)\, \varepsilon(r)\, dr, \qquad (6\text{-}14)$$

waarin $\varepsilon(r)$ de energie produktie per gram en per sekonde is, zodat de voorwaarde voor thermisch evenwicht is:

$$\boxed{\frac{d\mathcal{L}(r)}{dr} = 4\pi\, r^2\, \rho(r)\, \varepsilon(r)} \qquad (6\text{-}15)$$

Voor de totale per sekonde door de ster afgestane energie, $\mathcal{L} = \mathcal{L}(R)$, geldt

$$\mathcal{L} = \int_0^R 4\pi\, r^2 \rho(r)\, \varepsilon(r)\, dr \qquad (6\text{-}16)$$

[zie ook (2-38)]

De drie vormen van energietransport zijn geleiding (cond.), konvektie(conv.) en straling(rad.) daarom is

$$\mathcal{L}(r) = \mathcal{L}_{cond}(r) + \mathcal{L}_{conv}(r) + \mathcal{L}_{rad}(r) \qquad (6\text{-}17)$$

In sterren is $\mathcal{L}_{cond} = 0$ op een heel enkele uitzondering na.

Meestal is $\varepsilon(r) = \varepsilon_N(r)$ = de per gram en per sekonde vrijkomende kernenergie. Als plotseling $\varepsilon_N(r) = 0$ voor alle r kan de ster toch nog een tijd blijven stralen omdat naast de nukleaire energie inhoud E_N er nog twee andere energieinhouden zijn, n.l. die van de

thermische energie $E_T = \int_0^R (3/2\,\frac{k}{m}\,T)\, 4\pi\, r^2 \rho(r)\, dr$ (6-18)

en van de

potentiele energie $E_G = \int_0^R (-\,\frac{G\mathcal{M}(r)}{r})\, 4\pi\, r^2 \rho(r)\, dr$ (6-19)

Deze kunnen een tijdlang de (een) energieoutput van de ster in stand houden.

6.2.2 stralingsevenwicht

Zonder bewijs wordt hier het verband tussen temperatuurgradient en energieinhoud gegeven voor het geval van stralingsevenwicht [zie voor definitie tekst na (6-25) vlak voor 6.2.3]:

$$\boxed{\frac{dT(r)}{dr} = - \frac{3\kappa(r)\rho(r)}{4acT^3(r)} \; \frac{\mathcal{L}_{rad}(r)}{4\pi r^2}} \;, \qquad (6\text{-}20)$$

waarin

a = stralingsdichtheidskonstante [$=(7.5641 \pm 0.0009) \times 10^{-15}$ erg $cm^{-3} graad^{-4}$]

c = lichtsnelheid [$= (2.997929 \pm 0.000004) \times 10^{10}$ cm sek^{-1}]

[N.B. $\sigma = \frac{a.c.}{4} =$ konstante van Stefan - Boltzmann, zie(2-31)en (2-38)]

Uit (6-20) volgt

$$\mathcal{L}_{rad}(r) = -4\,\pi r^2 \,\frac{4ac}{3} \;\frac{T^3(r)}{\kappa(r)\rho(r)} \;\frac{dT(r)}{dr} \qquad (6\text{-}21)$$

Als er geen konvektie is, is de hiermee berekende energiestroom de totale energiestroom.

Op een eenvoudige manier kan nagegaan worden of er al dan geen konvektie is. Daartoe moet de stabiliteitsvoorwaarde tegen konvektie afgeleid worden. Stel een gasbel met druk P* en massadichtheid $\rho_1{}^*$ wordt door een perturbatie adiabatisch van positie 1 naar positie 2 [hoger in atmosfeer, zie fig.6.1].
Druk en dichtheid van het omringende gas, P en ρ, zijn in positie 1 gelijk aan die in de bel, d.w.z.

$$P_1{}^* = P_1$$

en $\quad \rho_1{}^* = \rho_1$

In positie 2 is

$$P_2{}^* = P_2$$

en

$$\rho_2{}^* = \rho_1 \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{1}{\gamma}},$$

waarbij $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$.

De voorwaarde voor stabiliteit tegen konvektieve bewegingen is nu

$$\rho_2{}^* > \rho_2 \qquad (6\text{-}22)$$

of

$$\rho_1 \left[\frac{P_1 + \frac{dP_1}{dr} ds}{P_1} \right]^{\frac{1}{\gamma}} > \rho_1 + \frac{d\rho}{dr} ds$$

of

$$\frac{1}{\gamma}\;\frac{1}{P}\;\frac{dP}{dr} > \frac{1}{\rho}\;\frac{d\rho}{dr} \qquad (6\text{-}23)$$

uit gevonden worden

Aannemend dat m = konst kan (6-3) als volgt geschreven worden:

$$\frac{1}{P}\frac{dP}{dr} = \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dr} + \frac{1}{T}\frac{dT}{dr} \qquad (6\text{-}24)$$

Substitutie van (6-24) in (6-23) levert de voorwaarde voor stabiliteit tegen konvektie:

$$\boxed{-\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\frac{T}{P}\frac{dP}{dr} > -\frac{dT}{dr}} \qquad (6\text{-}25)$$

waarbij $\frac{dP}{dr}$ de drukgradient in geval van hydrostatisch evenwicht is en

$\frac{dT}{dr}$ de temperatuurgradient voor stralingsevenwicht is.

Als in een laag aan (6-25) voldaan is is deze laag stabiel en heerst er stralingsevenwicht d.w.z. het energietransport vindt alleen door straling plaats.

6.2.3 konvektie

Als $\rho_2^* < \rho_2$ zullen de opwaarts gaande en de dalende gasbellen in hun bewegingen blijven volharden. De temperatuur in hogere lagen zal daardoor toenemen en die in diepere lagen minder worden. Volgens (6-21) zal het energietransport door straling dan minder worden. De nieuwe temperatuurs gradient, $(\frac{dT}{dr})'$, stelt zich zodanig in, dat

$$L_{rad}(r) + L_{konv}(r) = L_{tot}(r) \qquad (6\text{-}26)$$

Voor een laag in konvektie kan een relatie tussen P en T bepaald worden. Immers, in plaats van (6-25) geldt dan

$$\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\frac{T}{P}\frac{dP}{dr} > \frac{dT}{dr} \qquad (6\text{-}27)$$

Adiabatische verplaatsingen van een gasbel over een afstand Δr veroorzaken een temperatuur exces ΔT van die bel ten opzichte van de omgeving:

$$\Delta T = \left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\frac{T}{P}\frac{dP}{dr}\Delta r - \frac{dT}{dr}\Delta r \qquad (6\text{-}28)$$

In het sterinwendige kan $\Delta T = 0$ gesteld worden. Als benadering wordt dit ook wel voor de buitenste lagen gesteld, zodat steeds geldt:

$$\boxed{\frac{dT}{dr} = \left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\frac{T}{P}\frac{dP}{dr}} \qquad (6\text{-}29)$$

[vergelijk deze temperatuurgradient met die voor stralingsevenwicht, (6-20)]

(6-29) kan geschreven worden als $\frac{dP}{P} = \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{dT}{T}$, waaruit na integratie volgt:

$$P = K\,T^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \qquad (6\text{-}30)$$

K wordt de adiabatische konstante genoemd, K werd vaak in de praktijk als een vrije parameter gebruikt (afhangend van de grenskondities, zie 6.3.1), omdat de theoretische berekening ervan moeilijk is.

Voor $T > 50\,000^{o}K$ (H en He geheel geioniseerd) is γ = konstant = 5/3. Ook voor veel lagere temperaturen wordt deze waarde van γ vaak gebruikt, zodat

$$P = KT^{5/2} \qquad (6\text{-}31)$$

of met (6-3)

$$\rho \sim T^{3/2} \qquad (6\text{-}32)$$

6.3 de buitenste lagen van een ster

6.3.1 grenskondities

Uit de in 6.2 gegeven formules kan de toestand in de oppervlaktelagen van een ster berekend worden als de grenskondities bekend zijn.

De meest simplistische grenskondities zijn

$$T\,(R) = 0 \quad \text{en} \quad P\,(R) = 0 \qquad (6\text{-}33)$$

Betere grenskondities worden verkregen door $T(R) = T_{eff}$ te stellen(zie bl.16,17,42,43)Dus $T(R) \neq 0$. Om $P(R)$ te vinden wordt gesteld dat $\tau(R)$ [zie (6-6) en fig.I] en $P(R)$ de optische diepte en de gasdruk zijn in de laag waar $T = T_{eff}$. Uit de theorie van de stralingsoverdracht volgt $\tau(R) = 2/3$, zodat aannemend, dat $\varkappa(r)$ = konst. = $\varkappa(R)$ voor $R < r < \infty$, met behulp van (6-6) geldt:

$$\tau(R) = \int_R^{\infty} \rho(r)\,\varkappa(r)\,dr = 2/3 \qquad (6\text{-}34)$$

Met behulp van (6-12) is dan

$$P\,(R) = \frac{G\mathcal{M}}{R^2} \int_R^{\infty} \rho(r)dr \qquad (6\text{-}35)$$

of met (6-34)

$$P(R) = \frac{2}{3}\,\frac{G\mathcal{M}}{R^2}\,\frac{1}{\varkappa(R)} \neq 0 \qquad (6\text{-}36)$$

6.3.2 P(T) relaties

In het geval van stralingsevenwicht kan de relatie tussen P en T voor de buitenste lagen van een ster verkregen worden door (6-20) op (6-11) te delen:

$$\frac{dP}{dT} = \frac{64\pi}{3} G\sigma \frac{\mathcal{M}(r)}{\mathcal{L}(r)\ \varkappa(r)} T^3 \tag{6-37}$$

Voor de buitenste lagen geldt

$$\mathcal{M}(r) = \mathcal{M}$$
$$\mathcal{L}(r) = \mathcal{L}$$
$$\varkappa = \varkappa_0\ \rho\ T^{-3.5}$$ hetgeen met (6-3) wordt:
$$\varkappa = \varkappa_0 \frac{m}{k} PT^{-4.5}, \tag{6-38}$$

zodat (6-37) wordt:

$$\frac{dP}{dT} = \frac{64\pi}{3} \frac{\sigma\ k\ G\mathcal{M}}{m\ \varkappa_0 \mathcal{L}} \frac{T^{7.5}}{P} \tag{6-39}$$

waaruit na integratie volgt:

$$P^2 = \text{konst.}\ T^{8.5} + C \tag{6-40}$$

De integratie konstante C hangt af van de grenskondities

$C = 0$ Voor de grensvoorwaarden (6-33) is $C = 0$, echter ook voor grote waarden van P en T kan $C = 0$ gesteld worden — "zero radiative resolution" [zie fig. 62]. Voor $C = 0$ wordt (6-40):

$$P = \text{konst}\ T^{4.25} \tag{6-41}$$

of met (6-3)

$$\boxed{\rho = \text{konst}\ T^{3.25}} \tag{6-42}$$

$C < 0$ Voor $C < 0$ zal als $P \to 0$ $T \to T_{lim}$; voor toenemende P is er konvergentie naar de "zero radiative solution".

$C > 0$ Voor $C > 0$ zal als $T \to 0$ $P \to P_{lim}$; echter $T = 0$ wordt niet bereikt. Er blijkt nl. bij elke C een T_{min} te zijn zodanig, dat er voor $T < T_{min}$ konvektie optreedt.

In het geval van <u>konvektie</u> wordt voor de buitenste lagen van een ster de relatie tussen P en T en die voor ρ en T ook gegeven door (6-30) en (6-32):

$$\boxed{\rho \sim T^{1.5}}$$

In fig. 62 zijn een vijftal lijnen getekend, waarvan een deel volgens (6-32) ($C > 0$) verloopt. Voor een viertal lijnen is door middel van een punt de overgang naar (6-40) weergegeven.

De dik getrokken lijn geeft de $\rho(T)$ relatie voor de zon. De grafiek laat zien, dat de allerbuitenste laag van de zon (de fotosfeer) niet meer in konvektie is. De $\rho(T)$ relatie is daar min of meer // "radiative zero solution".

6.3.3 randverzwakking en "gravity darkening"

In 3.2 (bl.24) zijn formules gegeven voor de CLV. (3-6) beschrijft de CLV van de zon in het zichtbare heel goed. Blijkbaar is dit een goede benaderingsformule voor de CLV van een fotosfeer in stralingsevenwicht. Het is duidelijk, dat het verloop van de temperatuur met de diepte in de fotosfeer van belang is voor het intensiteitsverloop van centrum naar rand. Wordt als diepte de optische diepte genomen dan geldt zowel voor een konvektieatmosfeer als een atmosfeer in stralingsevenwicht bij benadering

$$T^4 = \frac{1}{2} T_{eff}^{\;4} \left(1 + \frac{3}{2} \tau\right) \quad \left[\tau \text{ gerekend in radiële richting}\right] \tag{6-43}$$

Het $\tau(r)$ verband is echter in die twee gevallen verschillend, zodat voor een atmosfeer in stralingsevenwicht het $T(r)$ verband bepaald wordt door (6-20) en voor een konvektieve atmosfeer door (6-29). (6-29) kan in de buitenste lagen echter anders geschreven worden. Immers met (6-3) kan ρ uit (6-12) geëlimineerd worden, zodat aldaar

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{m}{k}\,\frac{P}{T}\,\frac{G\mathcal{M}}{R^2}, \tag{6-44}$$

hetgeen gesubstitueerd in (6-29) geeft:

$$\frac{dT}{dr} = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \frac{m}{k}\,\frac{G\mathcal{M}}{R^2} = \text{konst} \tag{6-45}$$

Aannemend, dat de absorptiecoëfficiënt evenredig is met de gasdruk, kan aangetoond worden, dat de CLV voor een konvektieve atmosfeer is

$$i(\mu) = (\mu)^{\frac{2(\gamma-1)}{\gamma}}$$

of

$$i(\psi) = (\cos\psi)^{\frac{2(\gamma-1)}{\gamma}} \tag{6-46}$$

In fig.23 is dit verband ook weergegeven. Bij een konvektieve atmosfeer moet de randintensiteit ($\mu = 0$) dus nul zijn in tegenstelling tot die bij een atmosfeer in stralingsevenwicht. De CLV van een konvektieve atmosfeer kan benaderd worden door een lineaire randverzwakkingskoëfficiënt $u_\lambda = 0.96$ [zie formules (3-7) in 3.2 bl.24]

Bij gedeformeerde sterren (door rotatie - door getijdekrachten) is de CLV bepaald door de verschillen in afstand van de punten aan het oppervlak ten opzichte van het stermidden. Daardoor is g niet konstant over het oppervlak van de ster. Voor een konvektieve atmosfeer is de lokale T_{eff} gekoppeld aan de lokale g door

$$T_{eff} \sim g^{0.08} \tag{6-47}$$

Doordat de exponent van g zo klein is kan T_{eff} in eerste instantie konstant gedacht worden over het steroppervlak.

Dit is echter geenszins het geval bij een atmosfeer in stralingsevenwicht. Daar geldt nl

$$T_{eff} \sim g^{0.25} \qquad \text{von Zeipel} \tag{6-48}$$

D.w.z. lokale effektieve temperaturen kunnen sterk verschillend zijn zodat volgens (6-43) de lokale T(τ) [τ gerekend langs de normaal] relatie ook sterk van punt tot punt kan veranderen. Hierdoor wordt de CLV sterk beinvloed. Dit effekt heet "gravity darkening".

6.4 representatieve grootheden voor sterren

Voor de grootheden ρ, P, T en $\mathcal{L}$ kunnen met de in 6.2 en 6.3 gegeven formules representatieve benaderde waarden gevonden worden als funktie van $\mathcal{M}$ en R.

Voor de representatieve dichtheid, ρ_{rep}, kan geschreven worden:

$$\rho_{(repr)} = \frac{\mathcal{M}}{\frac{4}{3}\pi R^3} . \tag{6-49}$$

Door in (6-12) $\frac{dP(r)}{dr} = \frac{P_{rep}}{R}$ te stellen wordt met (6-49) verkregen:

$$P_{rep} = \frac{3G}{4\pi} \frac{\mathcal{M}^2}{R^4} \tag{6-50}$$

Substitutie van (6-49) en (6-50) in (6-3) levert:

$$T_{rep} = \frac{m}{k} G \frac{\mathcal{M}}{R} \tag{6-51a}$$

N.B. Als de ster in zijn geheel in komvektie is volgt door in (6-45)

$$\frac{dT}{dr} = \frac{T_{rep.k}}{R} \quad \text{te stellen}$$

$$\left.\begin{aligned} T_{rep.k} &= (1-\frac{1}{\gamma})\ \frac{m}{k}\ G\ \frac{\mathcal{M}}{R} \\ &\approx \frac{2}{5}\ \frac{m}{k}\ G\ \frac{\mathcal{M}}{R} \end{aligned}\right\} \quad (6\text{-}51b)$$

Door in (6-21) $r = R$; $T(r) = T_{rep}$; $\frac{dT(r)}{dr} = \frac{T_{rep}}{R}$; $\rho(r) = \rho_{rep}$ en $k(r) = k =$ konstant te stellen wordt

$$\mathcal{L}_{rep} = \frac{64\pi^2\ ac\ m_a^4\ G^4}{3\ \varkappa\ k^4}\mathcal{M}^3 \quad (6\text{-}52a)$$

zodat met (2- 39)

$$L_{rep} \sim \mathcal{M}^3 \quad (6\text{-}52b)$$

Dit is een benadering voor de MLW. In sektie 4.5 (bl 42) is empirisch geworden

$$L_{bol} \sim \mathcal{M}^{3.68} \quad (2\text{-}45)$$

Tent.!! Voor homogene sterren in stralingsevenwicht kan afgeleid worden:

$$\boxed{R \sim \mathcal{M}^{0.6}}$$ hoofdreeks

(zie ook bl. 72) (6-53)

Voor hoofdreekssterren geldt deze relatie bij benadering voor $\mathcal{M} > 2\mathcal{M}_\odot$. Als de buitenste lagen in konvektie zijn, dan is R ook nog een funktie van K.

$$R = f\ (K, \mathcal{M}) \quad (6\text{-}54)$$

De getrokken lijnen in fig. 63 geven enkele van deze relaties weer voor verschillende K. Er zijn tabellen voor konvektieve steratmosferen bepaald waarbij K uit T_{eff} en g bepaald kunnen worden, daar

$$K = f(T_{eff}, g) \quad (6\text{-}55)$$

6.5 de W Ursa Majoris systemen

6.5.1 theoretische bestaansmogelijkheid

Uit de waargenomen stralen en massa's van W UMa sterren volgt, dat het kontaktsystemen moeten zijn. Daar het gemeenschappelijke oppervlak van een kontaktsysteem een ekwipotentiaal oppervlak is moet gelden:

$$R \sim \mathcal{M}^{0.46}. \text{ (zie ook bl. 72)} \quad (6\text{-}56)$$

Dit valt niet te kombineren met (6-53), maar wel met (6.54). In fig 63 zijn enkele relaties (6-55) met stippellijnen aangegeven. De twee bovenste snijden een (6-54) relatie tweemaal. De snijpunten kunnen de $\mathcal{M}$ en R geven van beide komponenten, daar theoretisch aangetoond is, dat konvektieve zones, die met elkaar in kontakt zijn, dezelfde adiabatische konstante, K, moeten hebben.

Theoretisch kunnen W UMa systemen dus bestaan, mits de twee komponenten een gemeenschappelijke konvektieve atmosfeer hebben.

6.5.2 modellen voor W UMa systemen

Door deze snijpunten van (6-56) en (6-54) (zie fig. 63) zijn mogelijke theoretische waarden voor $\mathcal{M}$ en R van de twee komponenten bekend. Een gemiddelde g, $\bar{g}$, wordt gegeven door

$$2 \log \bar{g} = \log \frac{G\mathcal{M}_A}{R_A^2} + \log \frac{G\mathcal{M}_B}{R_B^2} \qquad (6\text{-}57)$$

Daar al zekere K aangenomen is voor de getrokken lijnen in fig. 63 kan uit (6-55) [tabellen!] T_{eff} bepaald worden [T_{eff} moet zodanig uitvallen dat het past bij later spektraaltype dan F0. Op grond van (6-47) en onderstaande tekst kan een gemiddelde effektieve temperatuur, $\bar{T}_{eff}$, ingevoerd worden. Voor de lichtkracht van de komponenten geldt dus

$$\mathcal{L}_{A/B} = 4\pi R_{A/B}^{2} \sigma \bar{T}_{eff}^{4}, \qquad (6\text{-}58)$$

zodat de totale lichtkracht van het systeem, $\mathcal{L}$, geldt:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_A + \mathcal{L}_B = 4\pi (R_A^2 + R_B^2) \sigma \bar{T}_{eff}^{4}, \qquad (6\text{-}59)$$

en voorts

$$\mathcal{L}_A / \mathcal{L}_B = (R_A/R_B)^2 \qquad (6\text{-}60)$$

M_{bol} kan nu uit (6-5a) berekend worden met (2-41)

$$M_{bol} = 4.72 - 2.5 \log \mathcal{L}/\mathcal{L}_0 .$$

Substitutie van (6-56) in (6-60) levert:

$$\mathcal{L}_A/\mathcal{L}_B = (\mathcal{M}_A/\mathcal{M}_B)^{0.92} \qquad (6\text{-}61)$$

Dit is in strijd met (6-52a) en ook met (2-45) [zie bl. 81 en bl. 18].

Fig.64 laat echter zien, dat (6-61) aardig overeenkomt met de waarnemingen, hetgeen een argument voor de theorie van de gemeenschappelijke konvektieve atmosferen bij W U Ma systemen is. In fig. 64 is ter vergelijking ook de MLW volgens (2-45) aangegeven.

Bij het berekenen van theoretische lichtkrommen moet voor de komponenten gelijktijdig voldaan zijn aan (6-58), (6-57), (6-56), (6-55) en (6-54). Op deze wijze horen bij aangenomen massa's, dus aangenomen q waarden, zeer bepaalde waarden voor R_A en R_B. Met de formules (5-18) ligt nu ook de afstand a van de komponenten vast en met de Wet van Kepler (in bl. 56) ook de periode: zie (4-30)

$$\mathcal{P} = 2\pi \left[\frac{a^3}{G(\mathcal{M}_A + \mathcal{M}_B)} \right]^{1/2} .$$

Figuur 65 geeft een voorbeeld voor $q = 0.5$ en $i = 80^{\circ}$. Dergelijke lichtkrommen lijken veel op de waargenomen lichtkrommen (2 ongeveer even diepe minima) en kunnen voor de waargenomen massaverhoudingen nimmer verkregen worden als stralingsevenwicht wordt aangenomen. De berekende perioden verschilden aanvankelijk nog een beetje van de waargenomen. Maar de formules (5-18) gelden natuurlijk alleen als de oppervlakken van de komponenten samenvallen met het kritische oppervlak. Dit hoeft in de praktijk niet zo te zijn. De komponenten kunnen er iets over heen puilen. Op deze wijze is het inderdaad mogelijk gebleken de berekende periodes beter in overeenstemming met de waarnemingen te krijgen.