

$$\sqrt[3]{x} = x = \frac{1}{3} (2\sqrt[3]{x} + y)$$

College Algemene Sterrenkunde

Hoofdstuk V, Hemelmechanica en sterrenstelsels

Deel 1, Hemelmechanica (H. Hubenet, 11 september t/m 4 oktober 1972, 16 collegeuren)

INHOUD

| | |
|---|----|
| <u>Inleiding</u> | 1 |
| <u>Kort overzicht historische ontwikkeling</u> | 1 |
| <u>Beweging zon</u> | 1 |
| <u>Beweging maan</u> | 1 |
| <u>Beweging planeten</u> | 1 |
| a) Mercurius en Venus (binnenplaneten) | 2 |
| b) De buitenplaneten (Mars, Jupiter, Saturnus enz.) | 3 |
| <u>Hipparchus en Ptolemeus</u> | 4 |
| <u>Copernicus</u> | 5 |
| <u>Galilei</u> | 6 |
| <u>Tycho Brahe</u> | 6 |
| <u>Kepler</u> | 6 |
| <u>Newton</u> | 8 |
| <u>Algemene beschouwingen over een systeem van puntmassa's die zich bewegen in elkaars gravitatieveld</u> | 9 |
| <u>Realiseerbaarheid van puntmassa's</u> | 9 |
| <u>Bewegingsvergelijkingen voor n lichamen (puntmassa's)</u> | 10 |
| <u>De 10 integralen van het stelsel</u> | 10 |
| <u>Viriaaltheorema</u> | 11 |
| <u>Algemener vorm van de 3de wet van Kepler</u> | 11 |
| <u>Tweelichamenprobleem</u> | 11 |
| <u>Bewegingsvergelijkingen</u> | 11 |
| <u>Perkenwet</u> | 12 |
| <u>Vorm van de baan</u> | 12 |
| <u>Vergelijking voor de baansnelheid</u> | 14 |
| <u>Parabolische en cirkelsnelheid</u> | 16 |
| <u>Elementen van een planetenbaan</u> | 16 |
| <u>Baanbepaling</u> | 17 |
| <u>Efemeriden</u> | 18 |
| <u>Massabepaling</u> | 18 |
| <u>Dubbelsterren</u> | 19 |
| a) Visuele dubbelsterren | 19 |
| b) Dynamische parallax | 19 |
| c) Spektroskopische dubbelsterren | 19 |
| d) Fotometrische dubbelster = eclipsveranderlijke = bedekkingsveranderlijke | 20 |

$$m \frac{dV}{dr} = F$$

| | |
|--|----|
| <u>Gestoorde tweelichamenbeweging</u> | 21 |
| <u>Invloed rotatie op de vorm van een hemellichaam</u> | 21 |
| <u>Gravitatieveld van een afgeplatte bol</u> | 21 |
| <u>Rozetbeweging</u> | 22 |
| <u>Mascons in de maan</u> | 23 |
| <u>Remming van een satelliet door wrijving</u> | 24 |
| <u>Invloed straling</u> | 25 |
| a) Stralingsdruk | 25 |
| b) Poynting-Robertsoneffect | 26 |
| <u>Drielichamenprobleem</u> | 27 |
| <u>Speciale gevallen</u> | 27 |
| a) Libratiepunten (Lagrange, 1772) | 27 |
| b) Problème restreint (Jacobi, ca. 1842, en Poincaré) | 28 |
| <u>Equipotentiaalvlakken bij nauwe dubbelstersystemen</u> | 29 |
| <u>Getijden</u> | 32 |
| <u>Limiet van Roche</u> | 33 |
| <u>Het stelsel aarde-maan</u> | 35 |
| <u>Precessie en nutatie</u> | 35 |
| a) Precessie | 35 |
| b) Nutatie | 36 |
| <u>Libraties</u> | 36 |
| <u>Invloed getijkrachten op de beweging van de maan</u> | 37 |
| <u>Invloed van de zon op de beweging van de maan</u> | 37 |
| <u>Theorie van Brown</u> | 38 |
| <u>De belangrijkste termen van de reeksontwikkeling voor de lengte</u> | 38 |
| <u>Het planetenstelsel als geheel</u> | 39 |
| <u>De astronomische eenheid</u> | 39 |
| a) Geometrische methoden | 39 |
| b) Gravitatiele methoden | 39 |
| c) Methoden gebaseerd op de lichtsnelheid enz. | 39 |
| <u>Regelmatigheden en eigenaardigheden in de bouw van het zonnestelsel die niet volgen uit de wetten van de hemelmechanica</u> | 39 |
| a) The two solar families (Chamberlin) | 39 |
| b) De regel van Titius en Bode | 39 |
| c) De Kirkwood gaps | 40 |
| d) Het impulsmoment | 41 |
| <u>Mechanica van het zonnestelsel</u> | 41 |
| a) Oplossingen door achtereenvolgende benaderingen | 41 |
| b) Storingen | 41 |
| c) Storingen van de planeten (algemene storingen) | 41 |
| d) Hoe groot zijn de periodieke storingen? | 42 |
| e) Seculaire storingen | 42 |
| f) IJstijden | 42 |
| g) Stabiliteit van het zonnestelsel | 43 |
| n) Plan invariable | 43 |
| <u>Literatuur</u> | 43 |

Algemene sterrenkunde voor tweedejaars
(1972/73)

Hoofdstuk V(1). Hemelmechanica

Inleiding

Doel mechanica is het geven van een beschrijving c.q. verklaring van de beweging van objecten onder invloed van krachten. Bij de hemelmechanica betreft het kosmische objecten: planeten (planetoiden, kometen, meteoroiden), satellieten, sterren enz. De krachten zijn meestal gravitationeel (niet-gravitationeel bijv. lichtdruk, wrijvingskrachten). De hemelmechanica is ontstaan uit de behoefte de bewegingen van de planeten te begrijpen en nog altijd is het zonnestelsel een belangrijk terrein van de hemelmechanica, zelfs is door de ruimtevaart en het ruimteonderzoek (dit is niet onderzoek van de ruimte, maar onderzoek in de ruimte met behulp van instrumenten die daar met raketten - eventueel ballonnen - gebracht zijn) dit onderdeel in belang toegenomen. De hemelmechanica houdt zich echter ook bezig met bewegingen van sterren en sterrenstelsels.

In dit hoofdstuk zal de behandeling vrij elementair zijn, bovendien zullen ook onderwerpen behandeld worden, die strikt genomen niet tot de hemelmechanica behoren, maar die gezien de opzet van dit college sterrenkunde het best hier hun plaats vinden.

Kort overzicht historische ontwikkeling

Beweging zon

De beweging van de zon is in hoofdstuk I al ter sprake gekomen. bedoeld wordt hier de beweging van de zon aan de hemelbol ("tussen de sterren door") in de loop van het jaar (dus niet de dagelijkse beweging). De plaats van de zon aan de sterrenhemel kan niet direct waargenomen worden (uitzondering bijv.: tijdens zoneclips, met coronograaf, vanuit de wereldruimte) en moet dus bepaald worden door doorgangstijden door de meridiaan en middaghoogten van de zon te vergelijken met dergelijke waarnemingen aan sterren. Nu met meridiaankijkers, vroeger bijv. met de gnomon. De zon blijkt een grote cirkel aan de hemelbol te beschrijven: de ecliptica. De snelheid is niet constant en toen men met kijkers ging waarnemen zag men ook, dat de zon niet altijd dezelfde schijnbare middellijn heeft. Na een siderisch jaar staat de zon weer op dezelfde plaats tussen de sterren en er ligt een tropisch jaar tussen twee doorgangen door het punt Aries (waarom zijn deze twee niet gelijk aan elkaar en welk jaar is het kortst?).

Beweging maan

De maan beweegt zich ook langs een grote cirkel, net als de zon van west naar oost. Deze bewegingsrichting tegengesteld aan de richting van de dagelijkse beweging blijkt in het zonnestelsel de normale richting te zijn en een zo bewegend hemellichaam heet rechtlopend (direct) in tegenstelling tot teruglopend (retrograad).

Siderische maand M: tijd tussen opvolgende conjuncties (samenstanden) met dezelfde ster. (Lat. sidus = ster)

Synodische maand S: tijd tussen opvolgende volle manen of nieuwe manen (conjuncties van zon en maan, Gr. synodos = samenkomst)

(Welke is het kleinst M of S?) In kalenders die op de maan zijn gebaseerd speelt de synodische maand (de schijn gestaltenmaand) een rol. Als de lengte van het siderische jaar E (van earth = aarde) is, dan geldt:

$$\frac{1}{M} - \frac{1}{E} = \frac{1}{S}$$

(Bedenk voor de afleiding hiervan, dat de relatieve hoeksnelheid gelijk is aan het verschil van de hoeksnelheden.) De maanbaan valt niet samen met de ecliptica; zij maken een hoek van ongeveer 5° . De snijpunten noemt men de knopen; de knopen van de maanbaan lopen langs de ecliptica terug met een periode van iets minder dan 19 jaar). Bij ruwe beschrijving is de beweging van de maan eenvoudig, maar in detail gecompliceerd. De precieze beschrijving van de beweging van de maan is een van de moeilijkste problemen uit de hemelmechanica!

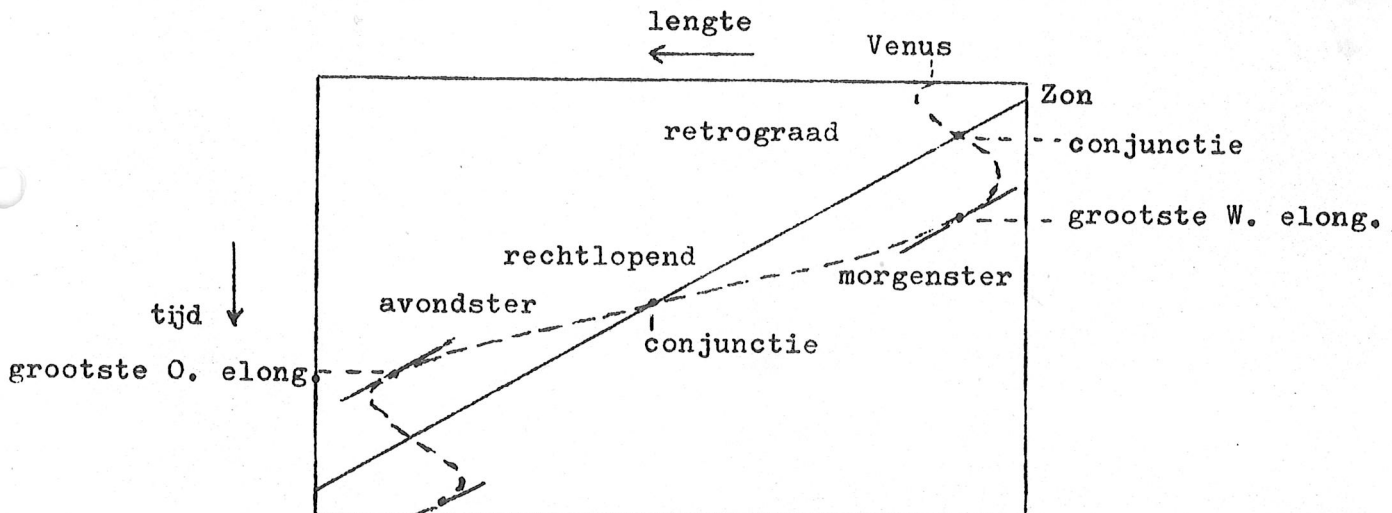
Beweging planeten

De beweging van de planeten is veel ingewikkelder dan die van de zon en de maan, die zich beiden naief laten interpreteren als een baanbeweging om de aarde, welke interpretatie in het ene geval wél en in het andere niet juist is! De planeten bevinden zich altijd evenals de maan dicht bij de ecliptica, m.a.w. hun breedte (zie hoofdst.I) is altijd gering en kan voor een eerste beschouwing gelijk aan nul gesteld worden. We beschouwen dus alleen de beweging in de lengte. Een gordel van 18° breedte (9° aan iedere kant van de ecliptica) noemt men Dierenriem of Zodiac, hoewel niet alle sterrenbeelden erin namen van dieren hebben: Ram, Stier, Tweelingen, Kreeft, Leeuw, Maagd, Weegschaal, Schorpioen, Schutter, Steenbok, Waterman en Vissen. De z.g. tekens van de Dierenriem, waarvan de astrologen zich bedienen, vallen t.g.v. de precessie niet meer samen met de sterrenbeelden; het zijn stukken van precies 30° lengte met dezelfde namen als de sterrenbeelden te beginnen bij het punt Ram.

De planeten bevinden zich altijd in de Dierenriem.

a) Mercurius en Venus (binnenplaneten)

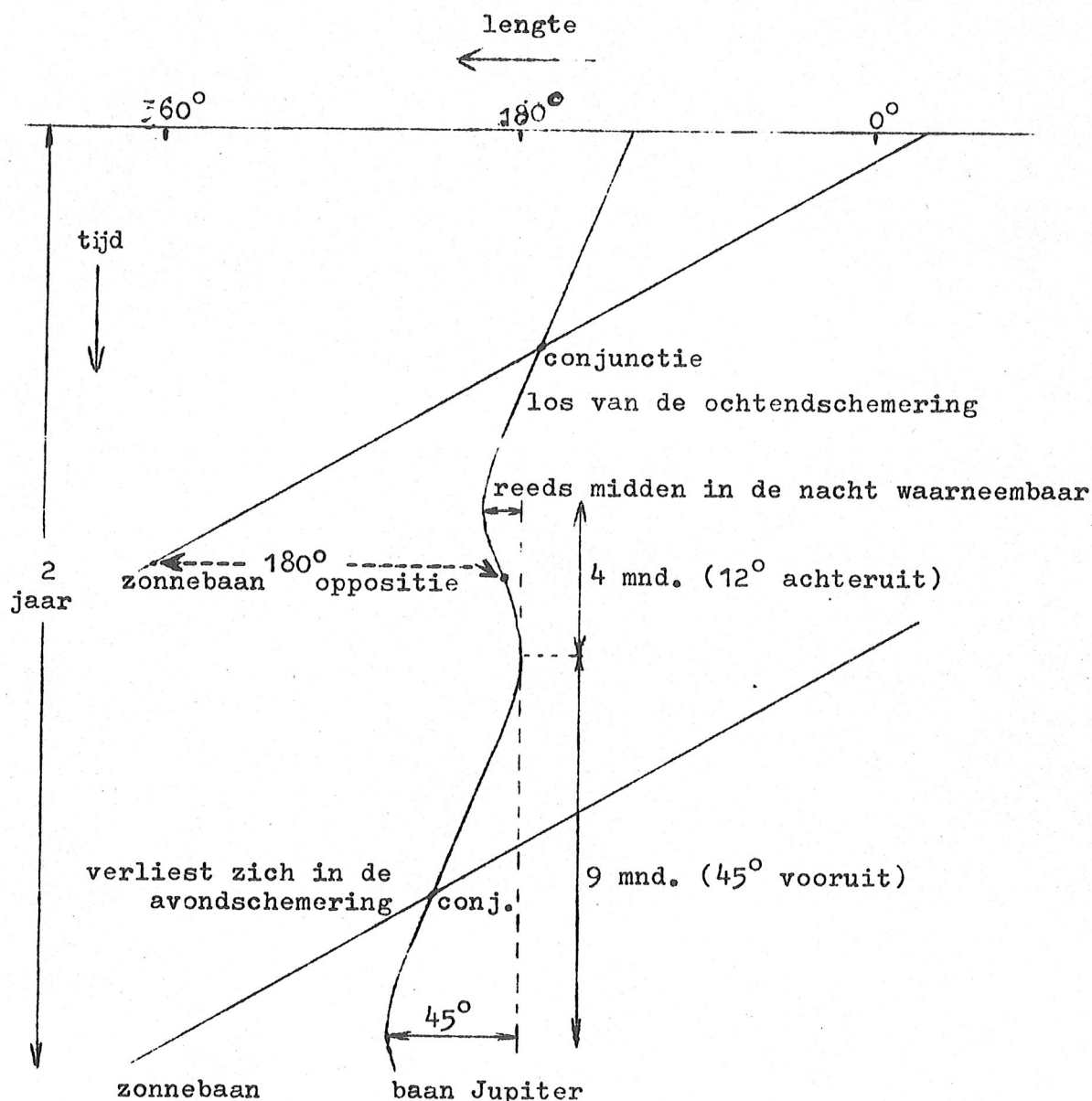
Deze planeten bevinden zich altijd in de buurt van de zon. Als ze ten oosten van de zon staan (dat is op het noordelijk halfrond links van de zon) zijn ze enige tijd zichtbaar als avondster. In het andere geval zijn ze morgenster of, als ze vlak bij de zon staan, onzichtbaar. Hieronder is voor Venus schematisch de lengte uitgezet tegen de tijd.



Voor de zon wordt het verband weergegeven door een bijna rechte lijn. We merken in de grafiek op: het inderdaad steeds in de buurt blijven van de zon, de momenten van grootste elongatie, de ogenblikken van conjunctie, het recht- en teruglopen, de korte tijd tussen het verdwijnen als avondster en weer verschijnen als morgenster, vergeleken bij de lange tijd tussen morgen- en avondster. De verschijnselen herhalen zich met een periode, die men hier ook de synodische noemt. Voor Venus bedraagt die gemiddeld 584 dagen. (Een toevalligheid is, dat 5 synodische

perioden van Venus ongeveer gelijk zijn aan 8 jaar; dus na 8 jaar her-
 / bijna halen zich de verschijnselen op dezelfde datum van het jaar en aan het-
 zelfde gedeelte van de hemel, wat niet voor de periode van 584 dagen
 het geval is.) Voor Mercurius zijn de verschijnselen in principe de-
 zelfde, alleen staat Mercurius altijd zo dicht bij de zon, dat hij
 veel moeilijker waarneembaar is dan Venus. Ook is de regelmaat in de
 verschijnselen minder groot dan die bij Venus.

b) De buitenplaneten (Mars, Jupiter, Saturnus enz.)
 Deze planeten blijven niet altijd in de buurt van de zon. Zij kunnen
 zelfs tegenover de zon staan, de oppositie, en staan dan om middernacht
 aan de zuidhemel. Hieronder vindt men het verband tussen de lengte en
 de tijd voor Jupiter en voor de zon. Voor de andere buitenplaneten zijn
 de verschijnselen analoog.

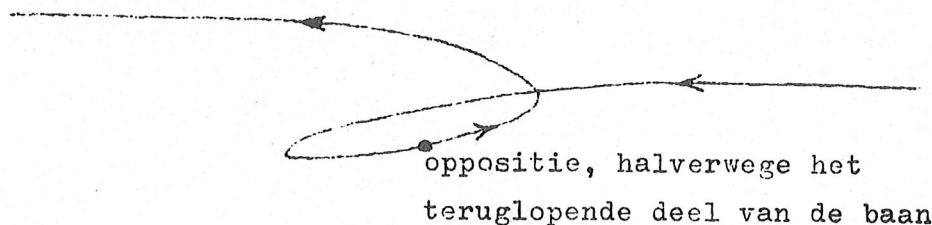


De zon loopt sneller dan Jupiter en haalt Jupiter dus om de zoveel tijd
 in. Men kan weer van een synodische periode spreken, maar nu ook van
 een siderische. Men kan n.l. door de golflijn van Jupiter een strakke
 gemiddelde lijn trekken en aflezen hoeveel tijd Jupiter gemiddeld nodig
 heeft om de hemel één maal rond te lopen, dat is dan de siderische om-
 loopstijd

We tabelleren nog de synodische en siderische perioden voor de verschillende planeten. Men bedenke, dat het gemiddelde waarden zijn. Voor Venus en Mercurius heeft het begrip siderische periode op dit moment voor ons nog geen betekenis.

| | P (syn.) | S (sid.) |
|-----------|------------------|---------------------|
| Mercurius | 116 ^d | 88 ^d |
| Venus | 584 ^d | 225 ^d |
| Mars | 780 ^d | 687 ^d |
| Jupiter | 399 ^d | 11,862 ⁿ |
| Saturnus | 378 ^d | 29,458 ^a |

Houden we rekening met het feit, dat de breedte niet precies gelijk aan 0° is en bovendien varieert, dan blijken de planeten veelal een lusbeweging uit te voeren.



N.B. Deze lusbeweging is te vergelijken met de schijnbare beweging van de sterren, zoals die ontstaat door superpositie van de parallactische verschuiving op de eigenbeweging. Ook bij de planeten is de afstand uit de grootte van de lus te bepalen.

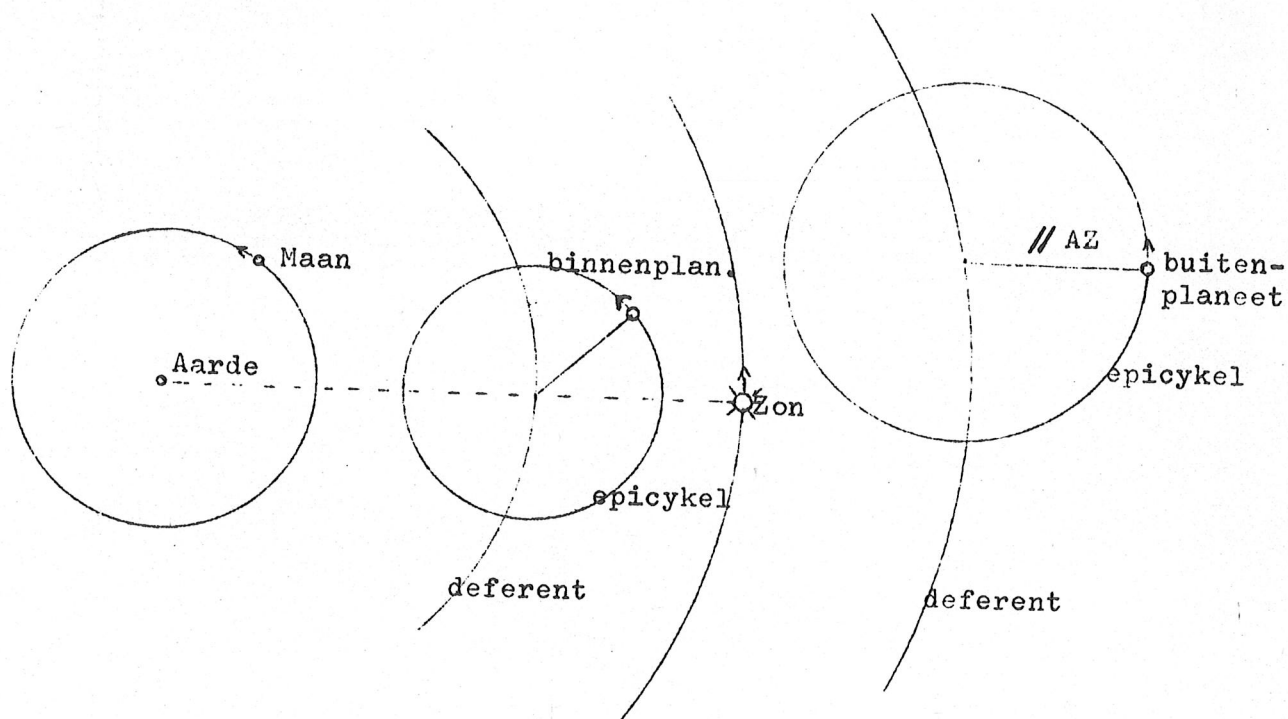
Hipparchus en Ptolemeus

De beweging van de planeten is dus nogal gecompliceerd, bovendien komt er nog de dagelijkse beweging bij (rotatie van de hemelbol om de hemelas in ca. $23^{\text{n}} 56^{\text{m}}$). Wij weten nu, dat de oorzaak hiervan is, dat wij de beweging van de planeten niet bekijken vanuit een vast punt, maar vanaf een aarde die een baan om de zon beschrijft (revolutie) en bovendien om zijn as draait (rotatie). Aristarchus van Samos (310-230 v. Chr.) leerde dit reeds, maar werd daarom van goddeloosheid beschuldigd. Hipparchus (2de eeuw voor Chr.) vond de epicykeltheorie uit, die later nog werd uitgewerkt door Ptolemeus (2de eeuw na Chr.) en door hem beschreven is zijn beroemde astronomische handboek Megalè syntaxis tès astronomias (Grote verhandeling over de sterrenkunde), dat door ons altijd de Almagest wordt genoemd, daar het het eerst tot ons is gekomen via Arabische vertalingen. Het werk, bestaande uit 13 boeken, is in zijn geheel bewaard gebleven en vormt een compleet compendium van de antieke astronomie.

In de epicykeltheorie wordt de planetenbeweging opgebouwd gedacht uit twee cirkelbewegingen - een gedachte die voor ons, die gewend zijn bewegingen te ontleden en een heen en weergaande beweging te zien als de projectie van een cirkelbeweging, misschien voor de hand ligt, maar voor die tijd toch als een uitzonderlijke intellectuele prestatie kan gelden.

* Niet juist: theorie 3e eeuw v. Chr. ontstaan!

De planeet loopt langs een epicykel (= opcirkel), terwijl het middelpunt van de epicykel langs de deferent (= draagcirkel) loopt. Voor een binnenplaneet was de situatie iets anders dan voor een buitenplaneet, n.l. wat betreft de invloed die de positie van de zon heeft (zie daarvoor de figuur).



De zon en de maan beschreven gewoon cirkels om de aarde. Niet-eenparige bewegingen konden verklaard worden door sommige cirkels (bijvoorbeeld die van de zon excentrisch te nemen). Om de waargenomen bewegingen beter te kunnen verklaren zouden de Arabieren tweede- en hogere orde epicykels hebben ingevoerd (iets wat te vergelijken zou zijn met onze harmonische analyse), volgens moderne "astrohistorici" is deze bewering echter slecht gefundeerd! Wél is een feit, dat men op grond van de filosofie van Plato cirkel en bol als ideale figuren beschouwde en meende, dat daarom de hemellichamen bolvormig moesten zijn en eenparige cirkelbewegingen (of een samenstelling daarvan) moesten uitvoeren.

De Grieken waren niet zulke begaafde waarnemers (wel grote meetkundigen), maar door de veroveringen van Alexander de Grote (356-323 v. Chr.) maakten zij kennis met de eeuwenlange waarnemingsreeksen van de Babyloniërs, die zij voor hun theorieën gebruikten. (Ook met de Babylonische astrologie!)

Copernicus

Copernicus (1473-1543) herhaalde de stap, die Aristarchus een kleine 2000 jaar vóór hem had gedaan en zette de zon in het middelpunt, liet de planeten inclusief de aarde daaromheen draaien en liet de aarde om zijn as draaien. In een paar stappen kan men de overgang van Ptolemeus' stelsel naar dat van Copernicus maken, waaruit blijkt dat ze wat het beschrijven van de verschijnselen gelijkwaardig zijn. Het stelsel van Copernicus heeft dan het voordeel van de grotere eenvoud, welke eenvoud echter verloren ging doordat Copernicus ter verklaring van sommige details toch nog epicykels gebruikte. Hierdoor verloor zijn theorie aan overtuigingskracht; het duurde dan ook nog minstens een eeuw voor Copernicus' ideeën vrij algemeen ingang (althans onder de astronomen) hadden gevonden. Het boek van Copernicus, *De Revolutionibus Orbium Coelestium*, verscheen na zijn dood in 1543 en stond op de Index van 1616 tot 1822.

In het stelsel van Copernicus zijn de siderische omloopstijden de echte omloopstijden om de zon. Nu kunnen we pas goed over de siderische omloopstijden van de binnenplaneten spreken.

Het verband tussen de synodische periode S en de siderische omloopstijden van de planeet en de aarde resp. P en E , is voor een binnenplaneet anders dan voor een buitenplaneet:

$$a) \text{ Voor binnenplaneet: } \frac{1}{S} = \frac{1}{P} - \frac{1}{E}$$

$$b) \text{ Voor buitenplaneet: } \frac{1}{S} = \frac{1}{E} - \frac{1}{P}$$

Deze relatie moet men gebruiken om de siderische omloopstijd te berekenen uit de synodische; deze laatste kan men n.l. direct uit de waarnemingen afleiden. Zo bepaalde Kepler het "Marsjaar".

Galilei

Galilei (1564-1642) maakt in 1609 een verrekijker, waarmee hij ontdekkingen doet, die Copernicus steunen, o.a.:

bergen op de maan - de maan leek dus op de aarde en de aarde was dus helemaal niet zo uitzonderlijk als men meende en zou dus net als de maan best kunnen bewegen,

de satellieten van Jupiter - hij zag een miniatuur zonnestelsel voor ogen,

rot. zon~~de~~ de schijngestalten van Venus - niet te verklaren met Ptolemeus.

Bekend is zijn strijd met de R.K. kerk en het verbod, dat hij opgelegd kreeg, zich verder met astronomie bezig te houden. Op het gebied der mechanica heeft hij evenwel nog belangrijk werk gedaan (valbeweging, wet van de traagheid).

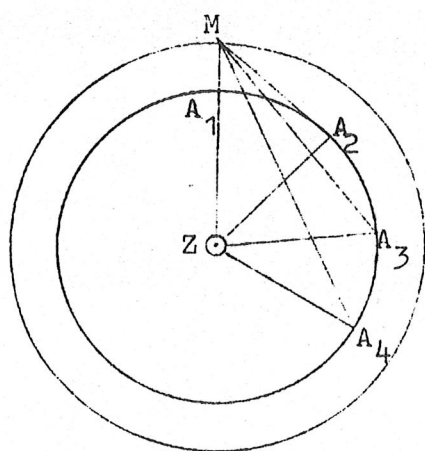
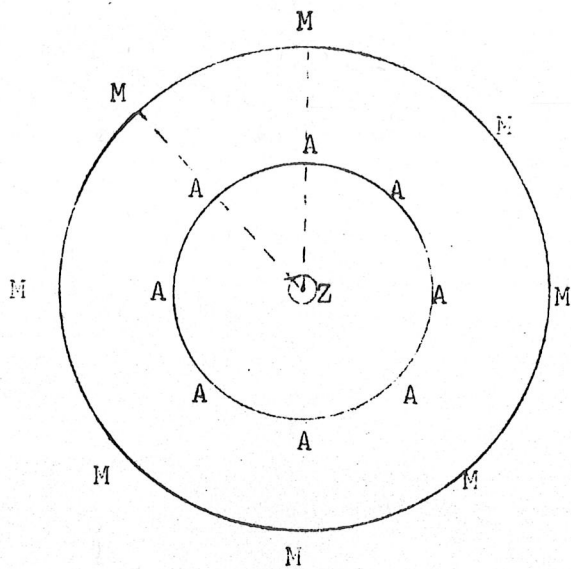
Tycho Brahe

Tycho Brahe (1546-1602), Deens edelman, was een groot waarnemer; hij gebruikte nog geen kijkers, maar vizierinrichtingen. Hij bereikte een nauwkeurigheid van $1'$ (= oplossend vermogen van het menselijk oog). /beter dan Zijn muurkwadrant was een voorloper van de meridiaan-kijker. Eerst werkte hij op een eilandje in de Sont, waar hij zijn sterrenwachten Uranienborg en Stjerneborg bouwde. Later vestigde hij zich in Praag, waar Johannes Kepler hem gedurende zijn laatste levensjaren assisteerde met het uitwerken van zijn waarnemingen. Tycho verwierp het Copernicaanse stelsel omdat hij geen parallactische beweging van de sterren had waargenomen. Hij had een eigen stelsel met de aarde in het centrum; de zon draaide om de aarde en de planeten weer om de zon.

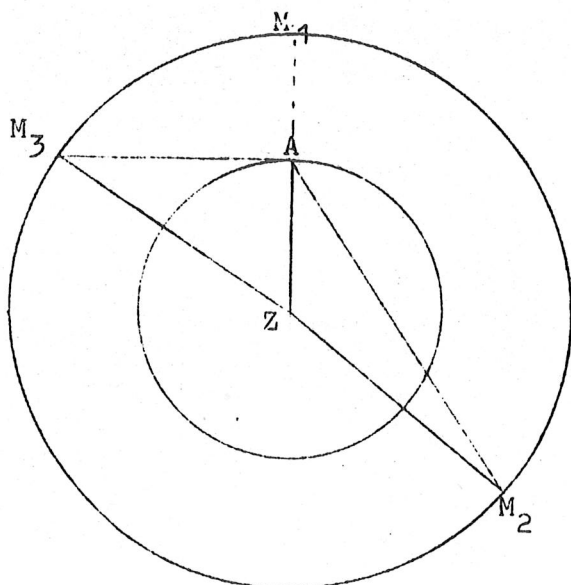
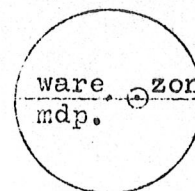
Kepler

Tycho's wetenschappelijke erfenis werd overgenomen door Johannes Kepler (1571 - 1630). Deze stelde zich op Copernicaans standpunt en begon de baanvorm der planeten nauwkeurig te bepalen uit de waarnemingen van Tycho; hij nam daarvoor Mars. (Deze heeft een sterkere excentriciteit dan de anderen, behalve de moeilijk waarneembare Mercurius. Het was een gelukkig toeval, dat hij juist Mars nam.)

Kepler bepaalde de afstanden aan de hemel door van twee verschillende plaatsen uit een zelfde object waar te nemen. Hij maakte gebruik van de opposities van Mars, omdat op dat ogenblik de stand van Mars niet alleen bekend is kijkende vanaf de Aarde, maar ook vanuit de richting der Zon. De oppositiedata gaven de synodische periode en met behulp van bovenstaande formule bepaalde hij daaruit de siderische omloopstijd (het "Marsjaar").



werken kon), waarin de zon excentrisch staat. Tevens vond hij, dat op dat gedeelte, waar de afstand Aarde-Zon het grootst was, de snelheid het kleinste was, en omgekeerd. Dus $\text{snelheid} \propto 1/r$, althans voor perihelium en aphelium. Hieruit volgt de Perkenwet (I).



- 1) Marsjaar = 1,88 jaar. Vooreerst bepaalde Kepler nauwkeurig de vorm der aardbaan.
- 1) Hij bepaalde nauwkeurig de oogenblikken der opeenvolgende opposities. Hij vond, dat de bogen langs de ecliptica soms groter, soms kleiner waren.
- 2) Op deze manier kon hij de gehele heliocentrische lengte van Mars (♂) door interpolatie bepalen.
- 3) Hij kende op elk oogenblik de richting naar de Zon, dus ook de heliocentrische lengte van de Aarde (door interpolatie).
- 4) Hieruit volgt de baan van de aarde. Daartoe vergelijkt hij telkens twee waarnemingen, 1 Marsjaar uit elkaar, uitgaande van een oppositie. Dan bevindt de aarde zich respectievelijk in de standen A_1 en A_2 . We letten op ΔZMA_2 . Hierin zijn bekend de hoeken MZA_2 en ZA_2M . Dus is ook ZA_2 uit te drukken in ZM . Na nog een Marsjaar is de Aarde in A_3 . We kunnen de redenering herhalen en ZA_3 uitdrukken in ZM . Evenzo ZA_4 in ZM , enz. We kunnen dus zo de vorm van de aardbaan vinden (op de eenheid na) en de snelheid van de aarde in de baan. Hij vond, dat de aardbaan een cirkel is (in de benadering, waarmee hij

- 5) Hij bepaalde nu de baan van Mars. Daartoe vergeleek hij twee waarnemingen, 1 aardjaar uit elkaar. We gaan uit van de oppositie ZAM_1 . Na een aardjaar is Mars in M_2 . We letten op driehoek AZM_2 . Daarin zijn bekend ΔAZM_2 en ΔZAM_2 (vgl. 2 en 3). Dus kunnen we ook nu weer bepalen de verhouding: ZM_2/ZA . Nog een aardjaar verder is Mars in M_3 . Uit ΔAZM_3 volgt dan: ZM_3/ZA . Voor een aantal plaatsen vinden we zo de waarde van de voorstraal tot de zonne in Astronomische Eenheden. De baan van Mars leek ook op een excentrische cirkel. Toch klopte het niet helemaal: er was een systematische af-

wijking tot $8'$ ten opzichte van de waargenomen standen. Hij vond, dat in bepaalde delen de middellijn te klein, in andere te groot was. Na eindeloos proberen en door een gelukkige intuïtie vond hij, dat het een ellips was. (Ellipsen waren reeds bestudeerd door Apollonius.) De afplatting van de ellipsbaan van Mars was $= (a-b/a = 0,004 (= 1/230))$. Voor de aardbaan, die ook een ellips is, is deze: $1/7000$. Deze kon hij niet vinden, omdat de nauwkeurigheid van de metingen niet groot genoeg was.

Hieruit volgde zijn tweede wet (II):

Planetenbanen zijn ellipsen, de Zon staat in het brandpunt.

In zijn "Astronomia Nova" heeft hij zijn ontdekkingen beschreven. Later heeft hij daaruit ephemeriden samengesteld, om vooruit te voorspellen, welke stand de planeten innemen.

Verder heeft hij gezocht naar het verband tussen omloopstijden en afstand tot de Zon.

In 1615 publiceerde hij "Harmonice Mundi", waarin hij na veel probeersels vond: (III)

$$T^2(:)a^3$$

a = gemiddelde afstand tot de Zon

= gemiddelde v. grootste en

kleinste afstand tot de Zon

= halve lange as.

Hij vond voor $\frac{a^3}{T^2}$ (als eenheid voor a en T de waarden nemend die voor

de Aarde gelden):

voor Saturnus = 0,991

voor Aarde = 1,000

voor Jupiter = 0,999

voor Venus = 1,003

voor Mars = 1,001

voor Mercurius = 1,007

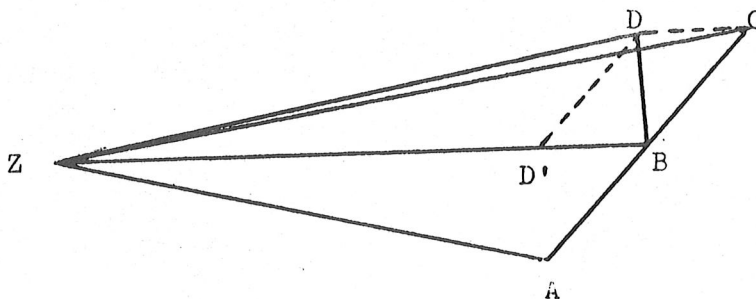
Newton

Isaac Newton (1642-1721), de grondlegger van de moderne mechanica en hemelmechanica, kon voortbouwen op het werk van voorgangers. Galilei hebben we reeds genoemd, Huygens (1629-1695, dus een jongere tijdgenoot van Newton) had reeds gevonden: middelpuntzoekende versnelling = v^2/r .

Uit de wetten van Kepler leidt Newton de gravitatiewet af:

1. Uit de perkenwet volgt: de krachten zijn centraal.

Dit kan op elementaire manier worden ingezien.



In een korte tijd Δt beweegt een planeet A naar B.

Zou er geen kracht werken, dan zou hij na nog een tijd Δt in C zijn aangekomen, zodanig dat $EC = AB$. Dan is dus opp. $\Delta ZBC =$ opp. ΔZAB .

De snelheid is echter zodanig gewijzigd, dat de planeet niet in C, maar in D is terechtgekomen. Uit de perkenwet volgt dat opp. $\Delta ZBD =$ opp. ΔZAB . Dus is opp. $\Delta ZBD =$ opp. ΔZBC en dus is $CD \parallel ZB$.

Er heeft dus een versnelling in de richting $BD' // CD$ gewerkt en die is inderdaad op de Zon gericht.

2. Uit het feit, dat de banen ellipsvormig zijn met de zon in het brandpunt kon hij afleiden, dat de kracht in de baan omgekeerd evenredig is met r^2 . Deze afleiding is wat lastiger en geven we hier niet.

3. Uit de harmonische wet volgt dat de versnelling $= C/r^2$, waarbij C voor alle planeten dezelfde waarde heeft. Voor cirkelbanen is de afleiding eenvoudig. Vergelijk twee planeten. De middelpuntzoekende versnellingen zijn:

$$\begin{array}{lll} & V^2/R & \text{en} & v^2/r \\ \text{Nu is:} & V = 2\pi R/T & \text{en} & v = 2\pi R/t \\ \text{De versnellingen zijn dus:} & 4\pi^2 R/T^2 & \text{en} & 4\pi^2 r/t^2 \\ \text{Harmonische wet:} & T^2 = cR^3 & \text{en} & t^2 = cr^3 \\ \text{Dus de versnellingen zijn:} & 4\pi^2/cR^2 = C/R^2 & \text{en} & 4\pi^2/cr^2 = C/r^2 \end{array}$$

als $C = 4\pi^2/c$.

Daar kracht = massa x versnelling volgt hieruit voor de krachten:

$$CM/R^2 \quad \text{en} \quad Cm/r^2.$$

De aantrekkingskrachten zijn dus evenredig met de massa's van de planeten. Een generalisatie is, dat ze ook evenredig met de massa van de zon zijn. Door de versnelling van de maan te vergelijken met die van een steen bij het aardoppervlak, blijkt daar dezelfde wet te gelden. Zo heeft Newton de gravitatiewet inductief (vanuit het bijzondere naar het algemene geval) afgeleid. Daarna kan met behulp van deze wet en de andere wetten van de mechanica de hemelmechanica deductief opgebouwd worden. Grote wiskundigen (o.a. Laplace, Lagrange, Poincaré) hebben hieraan meegewerkt. Zo is de mathematische fysica ontstaan. Wij zullen nu eerst eens bekijken wat voor algemene wetten gelden voor een systeem van massa's, die zich bewegen onder invloed van de wederzijdse gravitatiekrachten. Daarna gaan wij over naar eenvoudiger systemen (2 en 3 massa's) om te zien of we dan van de bewegingen een gedetailleerder beschrijving kunnen geven. Tenslotte komen we dan weer bij systemen met veel massa's: planetenstelsel en stersystemen.

Algemene beschouwingen over een systeem van puntmassa's, die zich bewegen in elkaars gravitatieveld

Realiseerbaarheid van puntmassa's

Het lijkt misschien een enorme beperking, dat de gravitatiewet strikt genomen alleen geldt voor puntvormige massa's. Men kan evenwel bewijzen, dat men de massa van een homogene bolvormige massa in het middelpunt geconcentreerd kan denken. De bolvormige massa hoeft niet eens homogeen te zijn: het is voldoende als de dichtheid een functie van alleen maar de afstand tot het middelpunt is. (Een niet roterende ster is ongeveer zo opgebouwd.) Het bewijs zullen wij hier niet geven; men bewijst eerst, dat men de massa van een oneindig dunne homogene bolschaal in het centrum geconcentreerd kan denken. Een dergelijke bolschaal oefent geen kracht uit op een erbinnen gelegen massapunt. (Bij het opstellen van de vergelijking van het hydrostatisch evenwicht in een ster maakt men hiervan gebruik.) Als een massa niet bolvormig is, dan kan men als men zich op een grote afstand bevindt (groot t.o.v. de afmetingen van het lichaam), de massa geconcentreerd denken in het zwaartepunt. Veelal kan men dus doen alsof men met puntmassa's te maken heeft. Er zijn echter ook uitzonderingen: bijv. de beweging van de maan in het gravitatieveld van de afgeplatte aarde.

Bewegingsvergelijkingen voor n lichamen (puntmassa's)

Eerst berekenen we de componenten van de kracht F , die een massa m_1 op m_2 uitoefent. Als r_{21} de afstand van de beide massapunten is, dan is:

$$F = Gm_2m_1/r_{21}^2.$$

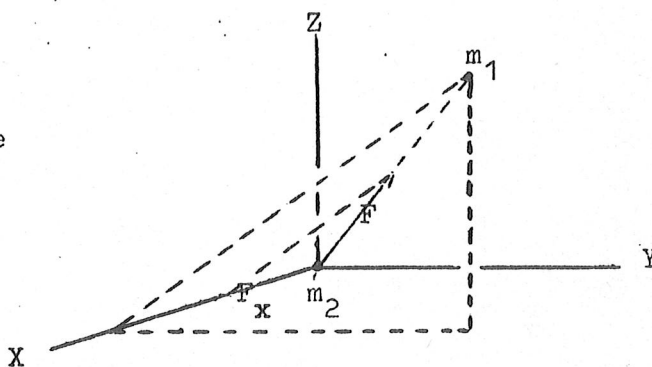
De rechthoekige coördinaten van m_1 en m_2 mogen (x_1, y_1, z_1) en (x_2, y_2, z_2) zijn. Als we m_2 in de oorsprong denken, dan zijn de coördinaten van m_1 :

$$(x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2).$$

Uit de figuur lezen we af:

$$F_x/F = (x_1 - x_2)/r_{21} =$$

$$= - (x_2 - x_1)/r_{21}.$$



Met behulp van de hierboven geschreven uitdrukking voor F vinden we:

$$F_x = - Gm_2m_1 (x_2 - x_1)/r_{21}^3.$$

De totale kracht op m_2 t.g.v. alle andere massa's is:

$$m_2 \ddot{x}_2 = - \sum_{k=1}^n Gm_2m_k \frac{x_2 - x_k}{r_{2k}^3}$$

Algemeen:

$$m_i \ddot{x}_i = - \sum_{k=1}^n Gm_i m_k \frac{x_i - x_k}{r_{ik}^3} \quad (i = 1, \dots, n)$$

Analoog voor y en z .

Dit is een stelsel van $3n$ gewone differentiaalvergelijkingen van de 2de orde. Voor de oplossing zijn $6n$ integraties nodig, waarbij dus $6n$ integratieconstanten ingevoerd worden, die eventueel aangepast kunnen worden aan de volgende $6n$ beginvoorwaarden:

$$\text{Coördinaten voor } t = 0: x_i(0), y_i(0), z_i(0) \quad (i = 1, \dots, n)$$

$$\text{Snelheden voor } t = 0: \dot{x}_i(0), \dot{y}_i(0), \dot{z}_i(0) \quad (i = 1, \dots, n)$$

De 10 integralen van het stelsel

Een integraal van het stelsel differentiaalvergelijkingen is een betrekking tussen de coördinaten van het stelsel, sommige afgeleiden en eventueel de tijd. Voor dit stelsel bestaan 10 dergelijke betrekkingen: de 10 bewegingsintegralen.

Allereerst zijn er de 6 zwaartepuntsintegralen. Daar $\sum m_i \ddot{x}_i = 0$:

$$\sum m_i \dot{x}_i = \alpha_x$$

$$\sum m_i x_i = \alpha_x t + \beta_x$$

Samen met de analoge relaties voor y en z zijn dit 6 integralen. Daar voor het zwaartepunt Z geldt:

$$x_Z = \sum m_i x_i / \sum m_i \text{ en analoog voor } y_Z \text{ en } z_Z,$$

staat hier, dat het zwaartepunt zich eenparig rechtlijnig beweegt. Daar er geen uitwendige krachten op het stelsel werken is het impulsmoment constant. Voor de 3 componenten geeft dit 3 integralen.

De 10de integraal is de energieintegraal: de som van de kinetische en de potentiële energie is constant.

Voorbeeld: Om het 3 lichamenprobleem op te lossen zijn er $6 \times 3 = 18$ integraties nodig; op grond van bovenstaande beschouwing wordt dit aantal dus teruggebracht tot 8!

Viriaaltheorema

Als n lichamen bij hun beweging steeds in één volume blijven geldt voor het tijdgemiddelde van de kinetische en van de potentiële energie:

$$\bar{E}_{\text{kin}} = -\frac{1}{2} \bar{E}_{\text{pot}} \quad (\text{viriaaltheorema})$$

Het bewijs zullen we hier niet leveren (zie hfdst. V(2)).

Daar $E_{\text{totaal}} = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = \bar{E}_{\text{kin}} + \bar{E}_{\text{pot}}$ (daar $E_{\text{totaal}} = \text{const.}$),

hebben we ook:

$$E_{\text{tot}} = -\bar{E}_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \bar{E}_{\text{pot}}.$$

We zullen zien, dat we dit theorema kunnen gebruiken om de massa's van sterrenhopen te schatten; men denke evenwel goed aan de beperkende voorwaarde! Vroeger is dit theorema al op het inwendige van een ster toegepast met als verrassend resultaat, dat door uitstraling van energie een ster heter wordt (zie hfdst. II).

Algemene vorm van de 3de wet van Kepler

Door substitutie van een nieuwe lengte- en van een nieuwe tijdseenheid in de algemene bewegingsvergelijkingen kan men eenvoudig verifiëren, dat men zich gelijkvormige deeltjessystemen kan denken, waarin de kwadraten van de tijden die nodig zijn om corresponderende trajecten af te leggen, evenredig zijn met de derde machten van de afmetingen.

Tweelichamenprobleem

Het eenvoudigste probleem: de beweging van één deeltje in een centraal krachtenveld zullen we niet behandelen omdat het mathematisch praktisch equivalent is aan het tweedeeltjesprobleem. Dit is streng oplosbaar. Om dit probleem te behandelen schrijven we de bewegingsvergelijkingen in vectorvorm:

De $3n$ algemene bewegingsvergelijkingen zijn equivalent aan het volgende stelsel van n vectorvergelijkingen:

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = - \sum_{k=1}^n G m_i m_k \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_k}{r_{ik}^3} \quad (i = 1, \dots, n)$$

Als $n = 2$ worden dit dus de volgende 2 vergelijkingen:

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = - G m_1 m_2 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{r_{12}^3}$$

$$m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = - G m_2 m_1 \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{r_{21}^3}$$

Stel nu $m_1 = M$ (bijv. de massa van de zon) en $m_2 = m$ (bijv. planeet) en beschouw de positie van m t.o.v. M ; deze kan beschreven worden met de vector

$$\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

De vergelijkingen worden nu:

$$\ddot{\vec{r}}_1 = - G m \frac{-\vec{r}}{r^3}$$

$$\ddot{\vec{r}}_2 = - G M \frac{\vec{r}}{r^3} \quad (\text{hierbij is dus ook door } M \text{ resp. } m \text{ gedeeld})$$

Aftrekken geeft: $\ddot{\vec{r}} = -G \frac{M+m}{r^3} \vec{r}$

Dit is dus in feite een stelsel van drie gewone differentiaalvergelijkingen van de 2de orde; het stelsel zal blijken oplosbaar te zijn.

Vermenigvuldigen we links en rechts vectorieel met \vec{r} , dan krijgen we, daar $\vec{r} \times \vec{r} = 0$ (strikt genomen $\vec{0}$):

$$\vec{r} \times \ddot{\vec{r}} = 0$$

Daar:

$$\frac{d}{dt} (\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) = \dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}} + \vec{r} \times \ddot{\vec{r}} = \vec{r} \times \ddot{\vec{r}}$$

volgt hieruit

$$\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \text{constant} = \vec{N}$$

Daar het impulsmoment van m t.o.v. M geschreven kan worden als $m\vec{r} \times \dot{\vec{r}}$, staat hier dus de wet van behoud van impulsmoment.

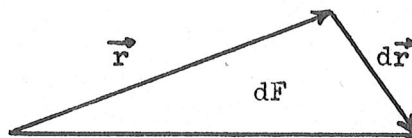
\vec{N} is de impulsmomentvector per eenheid van massa.

Het bovenstaande kan in verband worden gebracht met de perkenwet van Kepler: als dF het oppervlak is, dat de voerstraal in de tijd dt bestrijkt, dan hebben we (zie figuur):

$$dF = \frac{1}{2} |\vec{r} \times d\vec{r}|$$

en dus:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{1}{2} |\vec{r} \times \dot{\vec{r}}| = \frac{1}{2} N = \text{constant.}$$



Het per tijdseenheid bestreken perk is dus constant: de perkenwet.

$\vec{N} = \text{constant}$ betekent verder, dat het vlak door \vec{r} en $\dot{\vec{r}}$ niet verandert, m.a.w. de beweging van m vindt plaats in één plat vlak.

Nu gaan we de vorm van de baan afleiden. Daartoe vermenigvuldigen we het linker- en het rechterlid van de bewegingsvergelijking vectorieel met \vec{N} :

$$\ddot{\vec{r}} \times \vec{N} = -G \frac{M+m}{r^3} \vec{r} \times \vec{N}$$

Nu maken we gebruik van de voldoende rekenregel uit de vectoralgebra:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}),$$

bedenken ons, dat: $\vec{N} = \vec{r} \times \dot{\vec{r}}$,

$$\text{dat: } \vec{r} \cdot \dot{\vec{r}} = r\dot{r}$$

en verder dat:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{r}}{r} \right) = \frac{r\dot{r} - \vec{r}\dot{r}}{r^2}$$

Wij vinden dan:

$$\ddot{\vec{r}} \times \vec{N} = G(M+m) \frac{d}{dt} \frac{\vec{r}}{r}$$

Integratie geeft :

$$\dot{\vec{r}} \times \vec{N} = G(M+m) \frac{\vec{r}}{r} + \vec{L},$$

waarin \vec{L} een integratieconstante is.

Vermenigvuldig nu beide leden scalair met \vec{r} :

$$\vec{r} \cdot (\dot{\vec{r}} \times \vec{N}) = G(M + m) r + \vec{r} \cdot \vec{L}.$$

Met de rekenregel:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$$

vinden we voor het linkerlid:

$$\vec{r} \cdot (\dot{\vec{r}} \times \vec{N}) = \vec{N} \cdot (\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) = \vec{N} \cdot \vec{N} = N^2$$

Als verder ν de hoek is tussen de vaste richting \vec{L} en en plaatsvector \vec{r} , dan is:

$$\vec{r} \cdot \vec{L} = rL \cos \nu$$

Dan vinden we:

$$N^2 = G(M + m) r + rL \cos \nu$$

of:

$$\begin{aligned} r &= \frac{N^2}{G(M + m) + L \cos \nu} \\ &= \frac{N^2/G(M + m)}{1 + \left\{ L/G(M + m) \right\} \cos \nu} \\ &= \frac{p}{1 + e \cos \nu}, \end{aligned}$$

als:

$$p = N^2/G(M + m)$$

en:

$$e = L/G(M + m)$$

De baanvergelijking wordt dus:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \nu}$$

Dit is de vergelijking van een kegelsnede in poolcoördinaten. De waarde van e bepaalt of de kegelsnede een cirkel, ellips, parabool of hyperbool is. Zie volgende overzicht, waarin ook de relaties met halve lange as, halve korte as enz. zijn aangegeven.

| | | cirkel | ellips | parabool | hyperbool |
|-------------------------|-------|--------|-----------------|----------|-----------------|
| excentriciteit | e | 0 | < 1 | 1 | > 1 |
| parameter ^{*)} | p | a | $a(1-e^2)$ | p | $a(e^2-1)$ |
| halve lange as | a | a | a | - | a |
| halve korte as | b | a | $a\sqrt{1-e^2}$ | - | $a\sqrt{e^2-1}$ |
| pericentrumafstand | r_P | a | $a(1-e)$ | $p/2$ | $a(e-1)$ |
| apocentrumafstand | r_A | a | $a(1+e)$ | ∞ | ∞ |

Wij kunnen nu voor het geval van een ellipsbaan de 3de wet van Kepler afleiden (voor een cirkelbaan is dat reeds in hoofdstuk I gedaan):

$$p = N^2/G(M + m)$$

$$p = a(1-e^2)$$

Hieruit volgt:

$$1-e^2 = \frac{N^2}{a G(M+m)}$$

*) N.B. In de wiskunde is de parameter van een kegelsnede iets anders gedefinieerd, n.l. als de koorde door F loodrecht op de as.

Als de omloopstijd T is, hebben we:

$T \times$ oppervlaktesnelheid = opp. ellips

$$T \times \frac{N}{Z} = \pi ab = \pi a^2 \sqrt{1-e^2}$$

Kwadrateren: $\frac{T^2 N^2}{4} = \pi^2 a^4 (1-e^2) = \pi^2 \frac{a^3 N^2}{G(M+m)}$

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{G(M+m)} a^3 \quad (\text{vgl. hoofdstuk I})$$

Hiermee is dus de 3de wet van Kepler ($T^2 \propto a^3$) afgeleid. Daar in het zonnestelsel $m \ll M$ is de evenredigheidsconstante gelijk aan $4\pi^2/GM$ en dus inderdaad voor alle planeten dezelfde. Strikt genomen speelt de massa van de planeet echter een geringe rol (scheelt bij Jupiter 1 p.m.).

Wij hebben de baan $\vec{r}(t)$ berekend van de massa m t.o.v. M . In werkelijkheid beschrijven beide lichamen gelijkvormige banen t.o.v. het gemeenschappelijk zwaartepunt Z . Zijn de plaatsvectoren van M en m t.o.v. Z resp. r_M en r_m , dan geldt:

$$\vec{r}_M = -\frac{m}{M+m} \vec{r},$$

$$\vec{r}_m = \frac{M}{M+m} \vec{r}.$$

Als $m \ll M$ (planeet t.o.v. Zon) dan:

$$\vec{r}_M \approx 0 \quad (\text{Zon blijft op zijn plaats t.o.v. } Z),$$

$$\vec{r}_m \approx \vec{r}$$

Vergelijking voor de baansnelheid

De snelheid v van m t.o.v. M op een afstand r wordt gegeven door:

$$v^2 = G(M+m) \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right),$$

waarin a de halve lange as is. De vergelijking volgt uit de energie-vergelijking:

$$E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = \text{const.}$$

Eerst rekenen we E_{kin} uit:

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v_m^2 + \frac{1}{2} M v_M^2,$$

waarin v_m en v_M de snelheden van m en M t.o.v. het zwaartepunt zijn, dat we in rust denken.

Dan is:

$$v_m = \frac{M}{M+m} v$$

$$v_M = \frac{m}{M+m} v.$$

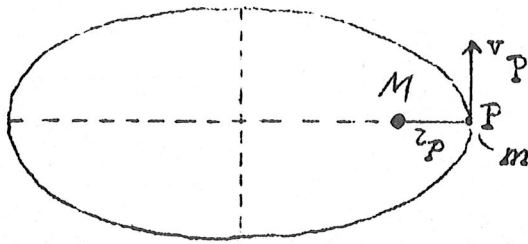
Hieruit volgt:

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \frac{mM}{M+m} v^2.$$

Verder:

$$E_{\text{pot}} = -\frac{GMm}{r}.$$

De totale energie is $-\frac{GMm}{2a}$. We zullen dit bewijzen voor een ellipsbaan door deze totale energie te berekenen voor het moment dat m in het pericentrum P .



v_p is de snelheid van m t.o.v. M .

Dan is:

$$\begin{aligned} E_{\text{tot}} &= E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{Mm}{M+m} v_p^2 = \frac{GMm}{r_p} \end{aligned}$$

Uit de eigenschappen van de ellips volgt (zie ook tabel op blz. V. 13):

$$r_p = a(1-e)$$

De snelheid v_p berekenen we met behulp van de vergelijking voor de perksnelheid (blz. V.12)

$$\frac{dF}{dt} = \frac{N}{2}$$

In het punt P is:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{1}{2} r_p v_p$$

Dus:

$$v_p = N/r_p = N/a(1-e)$$

Op blz. V.13 zagen we reeds:

$$1-e^2 = \frac{N^2}{a^2 G(M+m)}$$

en dus:

$$N^2 = a(1-e^2) G(M+m).$$

waaruit volgt:

$$v_p^2 = \frac{N^2}{a^2(1-e)^2} = \frac{(1+e)G(M+m)}{a(1-e)}$$

Substitutie van v_p^2 en r_p in de vergelijking voor E_{tot} geeft dan:

$$E_{\text{tot}} = -\frac{GMm}{2a}$$

In ieder punt van de baan geldt dus:

$$\frac{1}{2} \frac{mM}{m+M} v^2 - \frac{GMm}{r} = -\frac{GMm}{2a}$$

waaruit volgt:

$$v^2 = G(M+m) \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)$$

Voor een parabool en een hyperboolbaan geldt de vergelijking ook. In die gevallen is a resp. oneindig en negatief.

Omgekeerd kunnen we de vergelijking gebruiken om a te berekenen uit r en v . Interessant is de richting van v geen rol speelt!

(dat)

Parabolische en cirkelsnelheid

De baan is een parabool voor $1/a = 0$. Voor de parabolische of ontsnappingsnelheid v_e geldt dus:

$$v_e = \sqrt{2G(M+m)/r} \quad (e = \text{escape})$$

Als de baan een cirkel is, is $a = r$ en geldt:

$$v_c = \sqrt{G(M+m)/r}$$

Dus $v_e = v_c \sqrt{2}$

Speciaal interessant zijn de gevallen:

1. $M =$ massa aarde, $r =$ aardstraal, $m \ll M$:

$$v_c = 8 \text{ km/sec}$$

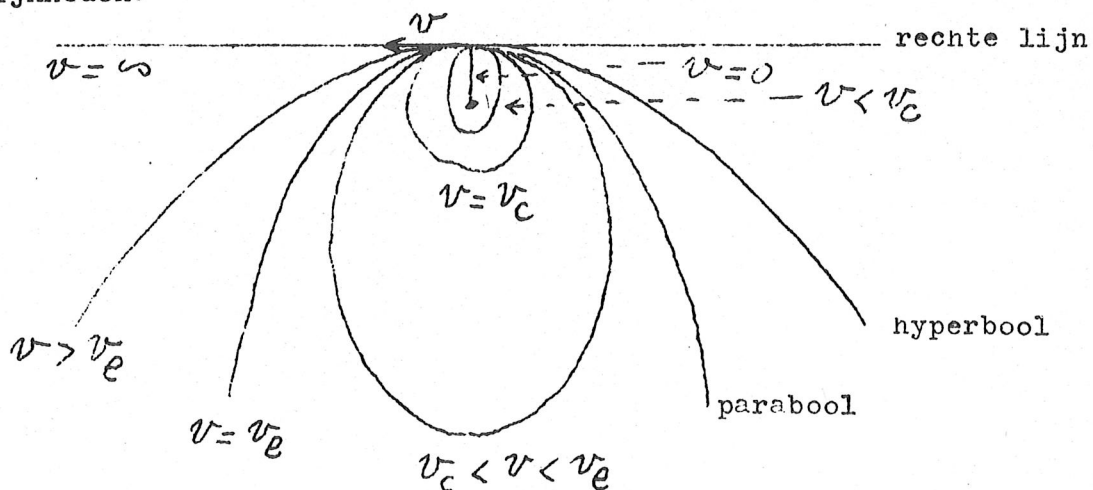
$$v_e = 11.2 \text{ km/sec}$$

2. $M =$ massa Zon, $r =$ straal aardbaan, $m \ll M$:

$$v_c = 30 \text{ km/sec} \approx \text{baansnelheid aarde}$$

$$v_e = 42 \text{ km/sec} \approx \text{snelheid meteorieten}$$

Als v loodrecht r hebben we afhankelijk van de waarde van v de volgende mogelijkheden:

Elementen van een planetenbaan

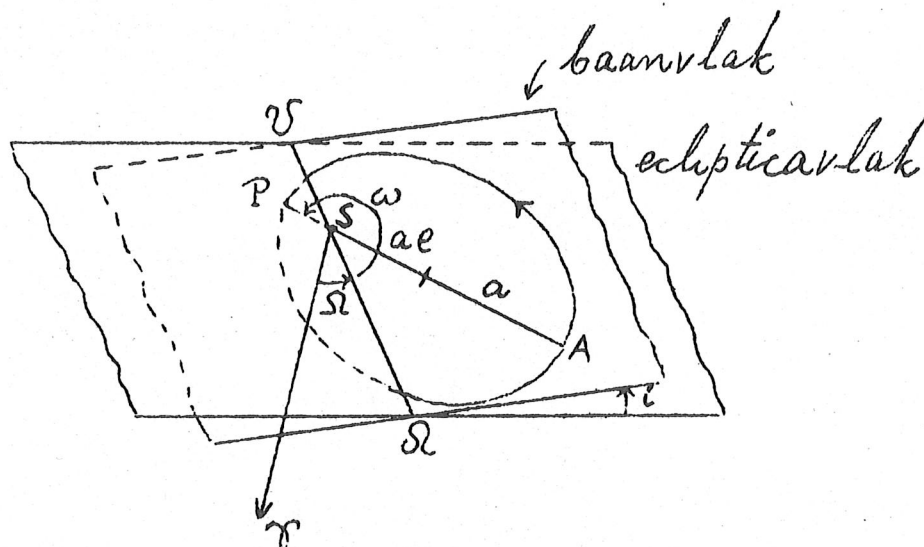
Bij het 2 lichamenprobleem zijn er dus $6 \times 2 = 12$ integratieconstanten: bijv. 6 voor de zon en 6 voor de planeet. Dat zien we ook aan de vergelijking voor de beweging van de planeet t.o.v. de zon, die we op V. 11 en 12 hebben afgeleid $\ddot{\mathbf{r}} = -G(M+m) \mathbf{\hat{r}}/r^3$, die aanleiding geeft tot 6 integratieconstanten voor de planeet. Dit kunnen coördinaten en snelheidscomponenten voor $t = 0$ zijn, maar ook de 6 elementen van de planetenbaan. Deze zijn:

- 1) Lengte van de klimmende knoop Ω
- 2) Helling van het baanvlak i
- 3) Periheliumhoek ω
- 4) Halve lange as a
- 5) Excentriciteit e
- 6) Epoche E of tijd van een perihelium doorgang.

Soms wordt nog toegevoegd:

7. Periode.

Deze kan evenwel als M en m bekend zijn uit a berekend worden.

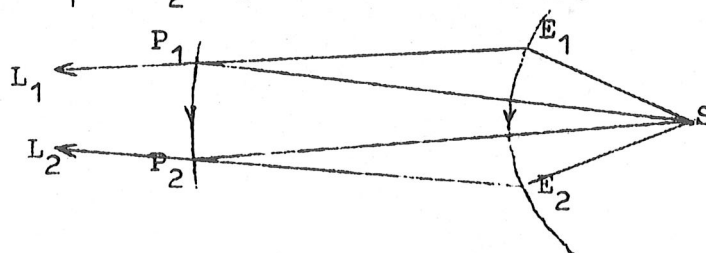


- 1) en 2) bepalen de ligging van het baanvlak t.o.v. het eclipticavlak.
 - 3), 4) en 5) bepalen de ligging en grootte van de baan in het baanvlak.
- I.p.v. ω geeft men vaak $\bar{\omega} = \Omega + \omega$, de z.g. "lengte" van het perihelium.
- 6) Geeft voor een willekeurig tijdstip de plaats in de baan.

Baanbepaling

Het probleem van de baanbepaling is uit een aantal waarnemingen de elementen te berekenen. Daar er dus 6 onbekenden zijn, zijn waarnemingen van α en δ voor 3 tijdstippen t_1 , t_2 en t_3 voldoende. Het probleem kan dan als volgt geformuleerd worden: Zoek de ellips met de zon in het brandpunt die door de 3 richtingen vanuit de aarde wordt gesneden en wel zodanig dat een planeet zich op de gegeven tijdstippen in de 3 snijpunten kan bevinden.

Het probleem is zo ingewikkeld, dat slechts een iteratieve oplossing mogelijk is. Het hoofdprobleem is de geocentrische afstand van de planeet te vinden; de rest is dan eenvoudig. Laten we om dit duidelijk te maken veronderstellen dat de baan cirkelvormig is (met de zon in het middelpunt). Dan is dus $e = 0$ en ω heeft geen betekenis meer (er is geen perihelium). Er blijven dus 4 elementen over, die d.m.v. 2 waarnemingen voor de tijdstippen t_1 en t_2 bepaald kunnen worden.



De positie van de aarde voor t_1 en t_2 zijn bekend: E_1 en E_2 . De waarnemingen bepalen 2 lijnen $E_1 L_1$ en $E_2 L_2$ waar de planeet zich op t_1 en t_2 op bevonden moet hebben. Neem nu eens een waarde voor de afstand $E_1 P_1$ aan. Dan is de plaats van de planeet dus bepaald en daarmee ook SP_1 . Daar $SP_2 = SP_1$ is nu ook de plaats P_2 vastgelegd. De baanstraal SP_1 legt evenwel de omloopstijd vast en hiermee kunnen we uitrekenen over welke hoek de verbindingslijn zon-planeet in de tijd $t_2 - t_1$ gedraaid is. Deze hoek moet gelijk zijn aan hoek $P_1 SP_2$; als dat niet zo is, is de aangenomen afstand $E_1 P_1$ fout en moeten we een nieuwe poging wagen. Doen we dit verstandig, dan naderen we snel naar de goede oplossing.

Als de baan geen cirkel is, maar een ellips, geeft deze methode geen nauwkeurige uitkomsten. Toch wordt de manier werkelijk gebruikt voor een grove voorspelling van de beweging van een pas ontdekte planetoïde voor de komende weken.

De bepaling van een ellipsbaan vereist dus 3 waarnemingen. Bij de methode van Gauss worden nu de afstanden $E_1 P_1$ en $E_3 P_3$ als onbekenden beschouwd, die d.m.v. een iteratieve methode worden opgelost. We nemen dus waarden aan voor $E_1 P_1$ en $E_3 P_3$, waardoor de plaatsen P_1 en P_3 zijn vastgelegd. Hiermede is de hele baan vastgelegd. Weliswaar is een ellips niet bepaald door 2 punten en een brandpunt, maar de voorwaarde dat de planeet zich in een tijdinterval $t_3 - t_1$ verplaatst moet hebben van P_1 naar P_3 levert een extra gegeven op. Voor de gevonden baan kunnen we nu de plaats P_2 voor t_2 berekenen. Bij voorkeur kiest men t_2 tussen t_1 en t_3 in (interpoleren geeft een nauwkeuriger resultaat dan extrapoleren!). Ook kan men de positie aan de hemel berekenen α_2 en δ_2 . Vergelijking van deze berekende waarden met de waargenomen waarden van α_2 en δ_2 levert 2 voorwaarden op, waarmee men $E_1 P_1$ en $E_3 P_3$ kan verbeteren. Men heeft vergelijkingen opgesteld die, hoewel ingewikkeld, een snellere oplossing mogelijk maken dan wanneer het alleen maar een kwestie van proberen was.

Kometen bewegen veelal in ongeveer parabolische banen, dan blijven er dus 5 elementen over ($1/a = 0$) en heeft men dus voldoende aan $2\frac{1}{2}$ waarneming, bijv. $\alpha_1, \delta_1, \alpha_2, \alpha_3, \delta_3$.

Vroeger kostte een baanbepaling een geroutineerde rekenaar soms wel 2 dagen.

De zo gevonden baan is ook nog maar voorlopig, de aanpassing van de elementen aan de waarnemingen over een lange tijd geeft een definitieve baan.

Efemeriden

De efemeride (eig. efemeris) van een planeet is een lijst van coördinaten (α, δ of λ, β) voor opeenvolgende tijdstippen (meestal dagen), zoals men die in de astronomische jaarboeken kan vinden. Het woord efemeride wordt ook voor zo'n astronomische almanak gebruikt. De meest bekende is "The Astronomical Ephemeris" (vroeger "The Nautical Almanac"). Men berekent de efemeride van een planeet uit de elementen, waarbij echter bovendien rekening moet worden gehouden met de storingen door andere planeten.

Massabepaling

In hoofdstuk I is reeds over massabepalingen gesproken. Deze berusten in het 2 lichamengeval op waarneming van de halve lange as a en de omloopstijd T . Als men de relatieve beweging van m t.o.v. M waarneemt vindt men zo $M + m$. Als evenwel $M \gg m$ is dit praktisch gelijk aan M (Zon en planeet, planeet en kleine satelliet). Afzonderlijke bepaling van m en M vereist waarneming van a_m en a_M t.o.v. het zwaartepunt van m en M :

$$m = \frac{a_M}{a} (m + M),$$

$$M = \frac{a_m}{a} (m + M).$$

In het geval van de aarde en de maan betekent dat, dat men de beweging van de aarde om het gemeenschappelijk zwaartepunt moet zien vast te stellen. Dit kan door de maardelijke parallax van een toevallig dichtbij komende planetoïde te meten.

Dubbelsterren

a) Visuele dubbelster.

Het bovenstaande is ook toepasbaar op dubbelsterren. Als men a in A.E. uitdrukt en T in jaren vindt men $M + m$ in zonsmassa's uit:

$$M + m = a^3 / T^2$$

Men meet evenwel a in boogseconden: a'' .

Uit de definitie van de parallax volgt:

$$a_{A.E.} = a'' / p''.$$

b) Dynamische parallax.

Als p onbekend is, kan men met behulp van de schijnbare magnituden van de sterren en de massa-lichtsterkte-wet nog tot resultaten komen. Laten we om te vermijden dat we met dezelfde letter verschillende grootheden aanduiden, de massa's μ_1 en μ_2 noemen, schijnbare magnitudes m_1 en m_2 en de absolute magnitudes M_1 en M_2 . We hebben de volgende vergelijkingen:

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= f(\mu_1) \\ M_2 &= f(\mu_2) \end{aligned} \right\} \text{ massa - lichtst. - wet}$$

$$\begin{aligned} M_1 &= m_1 + 5 + 5 \log p \\ M_2 &= m_2 + 5 + 5 \log p \end{aligned}$$

$$a_{A.E.} = a'' / p''$$

$$\mu_1 + \mu_2 = a_{A.E.}^3 / T^2$$

$L \approx \mu^{3.0}$ als $\mu > 2\mu_0$
 $L \approx \mu^4$ als $\mu \leq 2\mu_0$
 $L \approx \mu^{2.6}$ als $\mu < 0.5\mu_0$

De onbekenden zijn $M_1, M_2, \mu_1, \mu_2, p$ en $a_{A.E.}$. Waargenomen zijn:

m_1, m_2, a'' en T . Er zijn dus 6 vergelijkingen met 6 onbekenden. Oplossen d.m.v. iteratieproces: stel $\mu_1 = \mu_2 = 1$; bereken $a_{A.E.}$; bereken p , bereken M_1 en M_2 , vind nieuwe waarden van μ_1 en μ_2 enz. tot convergentie. Dus zowel bepaling van de afstand als van de massa's. Als de parallax wel bekend is, kan men op een dergelijke manier $\mu_1 + \mu_2$ splitsen. Als p niet bekend, maar wel a_1'' en a_2'' (t.o.v. zwaartepunt) heeft men een extra gegeven.

c) Spectroscopische dubbelsterren (Wanders, blz. 52)

Sterren niet gescheiden; dubbelsterkarakter blijkt uit het periodiek heen en weer schommelen van de spektraallijnen t.g.v. het Dopplereffect. Als de sterren ongeveer even helder zijn ziet men de lijnen van beide spektra. Als de sterren echter meer dan ca. $1''$ in helderheid verschillen verdwijnt het spektrum van de zwakste ster geheel. We kunnen de radiële snelheidskromme van één of beide componenten bepalen, daaruit is $a_1 \sin i$ en eventueel ook nog $a_2 \sin i$ af te leiden, waarin i de hoek tussen de richting naar de aarde en de loodlijn op het baanvlak. Zou de baan een cirkel zijn, dan zou $v_{\text{rad}}(t)$ een sinusfunctie zijn. Als $v_{\text{rad}} = 0$ voor $t = t_1$ (meest nabije punt van de baan) en $t = t_2$ (verst verwijderde punt), dan is:

$$\int_{t_1}^{t_2} v_{\text{rad}} dt = 2 r \sin i \quad (r \text{ dus in km!}).$$

In het algemene geval van een ellipsbaan kan men - zij het op een ingewikkelder manier - $a \sin i$ bepalen. De helling van het baanvlak, i , kan echter niet bepaald worden.

$$a_1/a = \mu_2/(\mu_1 + \mu_2) \quad a_2/a = \mu_1/(\mu_1 + \mu_2)$$

$$\mu_1 + \mu_2 = \frac{a^3}{T^2}$$

Als nu alleen voor μ_1 het spectrum is waargenomen, dan hebben we $a_1 \sin i$ kunnen bepalen. Hiermee kunnen we $(a_1 \sin i)^3/T^2$ berekenen en dit is gelijk aan:

$$\frac{(a_1 \sin i)^3}{T^2} = \left(\frac{a_1}{a}\right)^3 \frac{a^3 \sin^3 i}{T^2} =$$

$$= \left(\frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2}\right)^3 (\mu_1 + \mu_2) \sin^3 i = \frac{\mu_2^3 \sin^3 i}{(\mu_1 + \mu_2)^2} = f$$

De uitdrukking f heet de massafunctie en meer kunnen we niet te weten komen over de massa's als maar één spectrum zichtbaar is. Als beide spectra zichtbaar zijn kunnen we ook $a_2 \sin i$ bepalen. Daar $\mu_2/\mu_1 = a_1/a_2 = a_1 \sin i/a_2 \sin i$ kunnen dan $\mu_1 \sin i$ en $\mu_2 \sin i$ bepaald worden. Daar $\sin i \leq 1$, vinden we dus zo benedenste grenzen voor de massa's.

De massafunctie f kan ook geschreven worden als:

$$f = (\mu_1 + \mu_2) \sin^3 i \left(\frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2}\right)^3$$

Als alleen het spectrum van μ_1 waargenomen kan worden is zeer waarschijnlijk $\mu_2 < \mu_1$ (waarom?).

Dan heeft men dus

$$f < \frac{1}{8} (\mu_1 + \mu_2)$$

Het is dus niet verwonderlijk dat f soms heel klein is. Voor statistische beschouwingen kan men met een gemiddelde waarde van $\sin^3 i$ rekenen. Als men geen voorkeursrichtingen aanneemt voor de oriëntatie van de baanvlakken is:

$$\overline{\sin^3 i} = \frac{3\pi}{16} = 0,59$$

Houdt men echter rekening met het feit dat als i klein is een mogelijke spectroscopische dubbelster niet als zodanig herkend wordt, mag men voor de waargenomen spectroscopische dubbelsterren stellen:

$$\overline{\sin^3 i} \approx \frac{2}{3}$$

Als men dus de waargenomen waarden van $\mu \sin^3 i$ met 50% verhoogt krijgt men gemiddeld ongeveer de goede massa's. Van belang om de massa-lichtsterkte-wet te bepalen.

d) Fotometrische dubbelster = eclipsveranderlijke = bedekkingsveranderlijke.

Als het baanvlak ongeveer door de aarde gaat, kan het gebeuren dat de sterren elkaar beurtelings bedekken, waardoor de ster veranderlijk lijkt te zijn (prototype : Algol). Bij de gewone visuele dubbelsterren is dat nooit het geval (waarom niet?); dat een ster zowel een eclipsveranderlijke als een spectroscopische dubbelster is. Uit de lichtkromme kan men de baanelementen en de afmetingen van de sterren afleiden, echter uitgedrukt in een onbekende lengte-eenheid. Als hij tevens een spectroscopische dubbelster is kan men het systeem ijken en ook de massa's be-

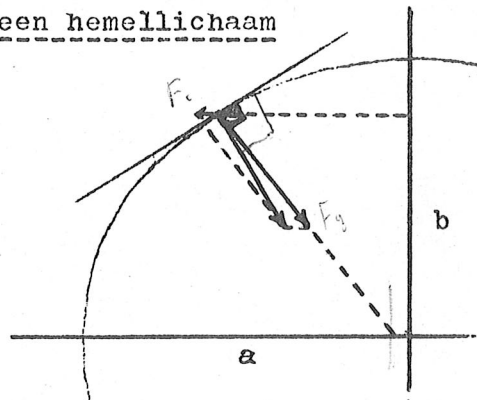
palen. Als de componenten te dicht bij elkaar komen kunnen er vervormingen van de sterren optreden en kan er zich zelfs een gemeenschappelijke ijle atmosfeer vormen. De 3de wet van Kepler geldt dan niet meer en de methode is niet meer betrouwbaar. Men heeft zo ca. 20 goede massabepalingen kunnen uitvoeren.

Gestoorde tweelichamenbeweging

Wij behandelen hier een paar gevallen, waarbij de Keplerbeweging niet normaal verloopt omdat de massa's niet als puntmassa's beschouwd kunnen worden of doordat wrijving of stralingsdruk een rol spelen. Beïnvloeding door een derde massa behandelen we bij het drielichamenprobleem.

Invloed van rotatie op de vorm van een hemellichaam

T.g.v. de rotatie treedt er een van de rotatieas af gerichte middelpuntvliedende versnelling op, die de versnelling van de zwaartekracht schijnbaar iets van richting verandert. Het oppervlak van de planeet zal loodrecht op de resultante van beide versnelingen staan. Men kan bewijzen dat de vorm bij benadering die van een afgeplatte omwentelingsellipsoïde is. De afplatting ϵ is gedefinieerd als $(a - b)/a$. Afgezien van de andere factoren hangt ϵ af van de verhouding van de centrifugale en de gravitatieversnelling op de equator:



$$\epsilon = \frac{a - b}{a}$$

De afplatting ϵ is gedefinieerd als $(a - b)/a$. Afgezien van de andere factoren hangt ϵ af van de verhouding van de centrifugale en de gravitatieversnelling op de equator:

massaconcentratie

$$\varphi = (v^2/r)/(GM/r^2) = (4\pi^2 r/P^2)/G \frac{4}{3} \pi r \bar{\rho}$$

Dus:
$$\varphi = \frac{3\pi}{G \bar{\rho} P^2}$$

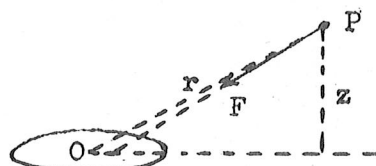
De afplatting hangt ook af van de inwendige bouw. Voor een homogene planeet is $\epsilon = 1.25 \varphi$. Als vrijwel alle massa in het centrum is geconcentreerd is $\epsilon = \varphi/2$. Metingen hebben het volgende opgeleverd:

| planeet | ϵ/φ |
|----------|--------------------|
| Mars | 1.14 |
| Aarde | 0.97 |
| Jupiter | 0.76 |
| Saturnus | 0.65 |

Gravitatieveld van een afgeplatte bol

Bij een afgeplatte bol kan men niet meer alle massa in het middelpunt geconcentreerd denken. Om inzicht in deze zaak te krijgen benaderen we een afgeplatte bol door een bol + een equatoriale ring. De straal van de ring zij a , zijn massa M en de dikte verwaarloosbaar.

Als P een eenheidsmassa is op afstand r van het middelpunt van de ring en op een hoogte z boven het vlak van de ring dan zal de aantrekkingskracht van de ring op P niet naar O gericht zijn, maar naar een punt dat verschoven is in de richting van de helft aan de kant van P . Die helft zal n.l. omdat



nij dichter bij P is dan de andere helft sterker aantrekken. Berekenen we de kracht door integratie, dan vinden we:

$$F = GM \left(\frac{1}{r^2} + \frac{3}{4} \frac{a^2}{r^4} - \frac{9}{4} \frac{a^2 z^2}{r^6} + \dots \right).$$

Zou men een bol en een ring samen nemen en zou de massa van de ring een fractie α zijn van de totale massa M , dan zou de kracht (afgezien van hogere termen) worden:

$$F = GM \left\{ \frac{1}{r^2} + \left(\frac{3}{4} \frac{a^2}{r^4} - \frac{9}{4} \frac{a^2 z^2}{r^6} \right) \alpha \right\}$$

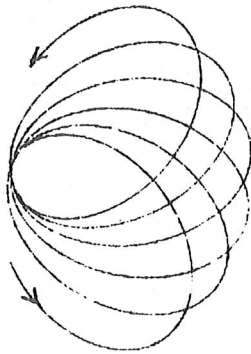
De volgende formule voor de aantrekkingskracht van een homogene afgeplatte bol komt nu niet meer helemaal uit de lucht vallen:

$$F = GM \left\{ \frac{1}{r^2} + \left(\frac{3}{5} \frac{a^2}{r^4} - \frac{9}{5} \frac{a^2 z^2}{r^6} \right) \epsilon \right\}$$

Vooreen niet-homogene bol zal de formule natuurlijk anders worden. Als $r \gg a$ zijn de hogere termen te verwaarlozen t.o.v. $\frac{1}{r^2}$ en krijgen we de gewone formule $F = GM/r^2$.

Rozetbeweging

We beschouwen een satellietbeweging in het equatorvlak van een afgeplatte bol. We hebben dus $z = 0$. Als zelfs de pericentrumafstand $\gg a$ zullen we een normale Keplerbeweging krijgen. Als echter het pericentrum zo dicht bij de afgeplatte bol ligt dat de r^{-4} -term een rol gaat spelen en de aantrekkingskracht groter wordt dan GM/r^2 , zal daar de baan sterker gekromd zijn dan de Keplerbaan. Het resultaat is een rozetbeweging. Zie figuur.

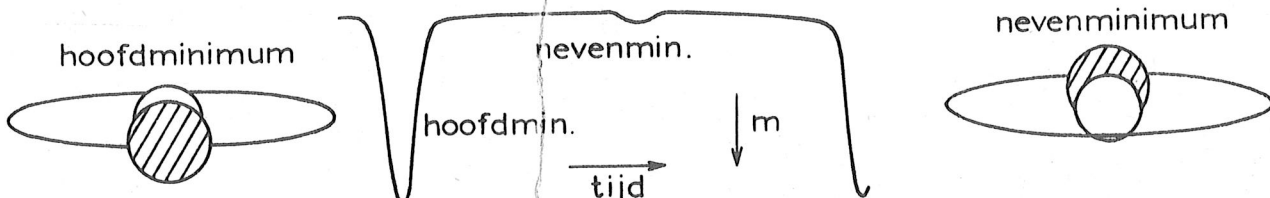


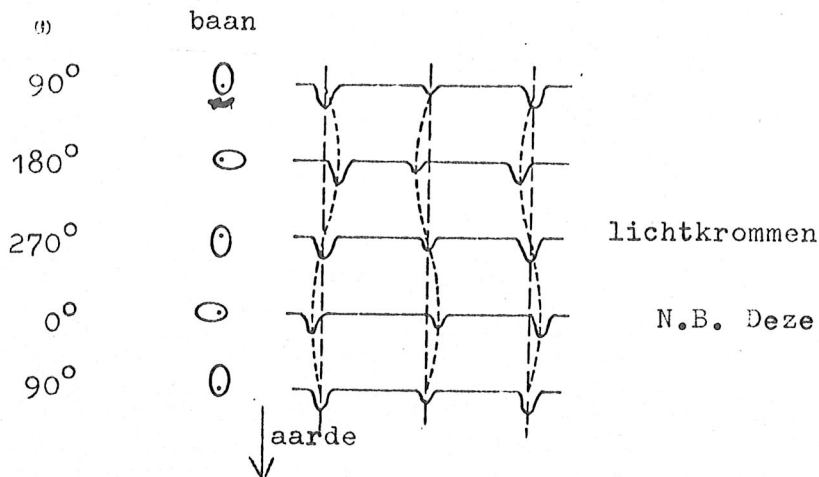
De lange as (apsidenlijn) draait voorwaarts met een periode:

$$\frac{a^2}{r^2} \times \frac{T}{\epsilon - \alpha/2} \quad \text{met} \quad \begin{cases} a = \text{halve lange baanas} \\ r = \text{straal afgeplatte bol} \end{cases}$$

Als het baanvlak niet met het equatorvlak samenvalt, krijgt men een regressie van de knopenlijn; deze wordt later bij de beweging van de maan behandeld.

Bij eclipsveranderlijken kan men deze draaiing van de apsidenlijn waarnemen als periodieke verschuivingen van de hoofd- en nevenminima. Zie figuren.





N.B. Deze tekening is niet goed!

Uit deze waarnemingen kan men dus iets afleiden over de massaconcentratie in het inwendige van een ster.

N.B. Naast het hierboven behandelde effect bestaat er ook nog een relativistische periheliumbeweging, die we hier niet behandelen!

Mascons in de maan

Mascons (= massaconcentraties; Minnaert heeft het woord massaknobbels voorgesteld (H. en D. 68, 127 (1970))) zijn gevonden door de bewegingen van kunstmatige maansatellieten te bestuderen. Daar men deze satellieten niet kan zien moet men dit doen door het Dopplereffect bij teruggekaatste radiogolven waar te nemen, hieruit kan men de radiële snelheid met een nauwkeurigheid van ca. 1 cm/sec bepalen. De bewerking gaat als volgt:

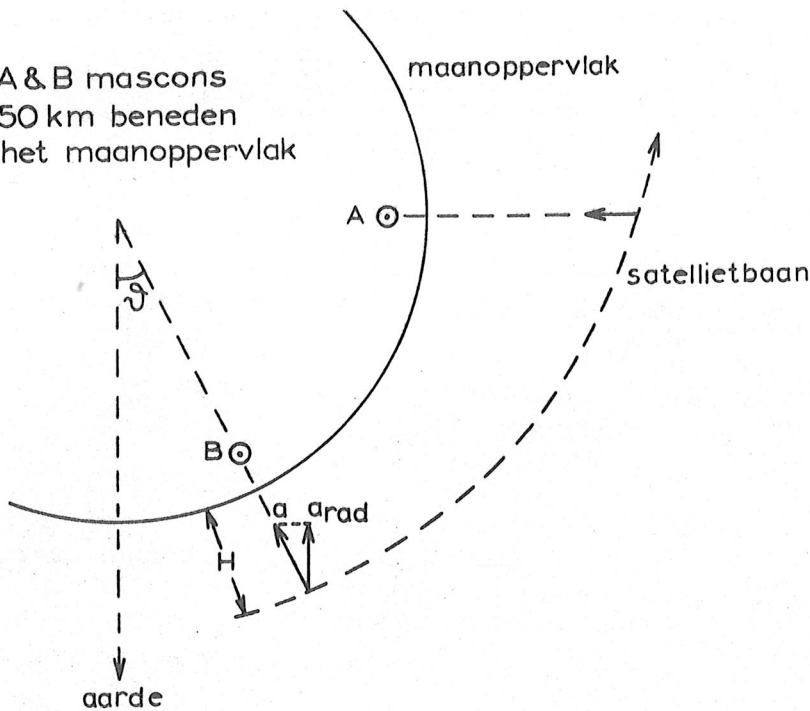
1. Men gaat uit van een theoretische baan, waarin alle storingen door de zon en door naburige planeten in rekening gebracht zijn, alsook de algemene kleine afwijkingen van de maan ten opzichte van een bol. Voor dit model berekent men de snelheid in de gezichtslijn die de satelliet op elk ogenblik moest hebben, om de minuut (of zelfs nog met kleinere stapjes).
2. Men vergelijkt de berekende snelheid in de gezichtslijn met de waargenomen snelheid in de gezichtslijn en vindt afwijkingen in de gezichtslijnsnelheid.
3. Die afwijkingen in de gezichtslijnsnelheid v_{rad} worden nu omgezet tot afwijkingen in de gezichtslijnversnelling a_{rad} , door te kijken hoe ze oplopen of afnemen. Zulke plaatselijke versnellingen moeten afkomstig zijn van aantrekkingscentra, massaknobbels in de maan, die de baan storen.
4. De plaats van die aantrekkingscentra kennen we niet. We maken het ons gemakkelijk door aan te nemen dat de storing op elk ogenblik afkomstig is van wat er zich recht onder de raket bevindt. En we rekenen de gezichtslijnversnelling om tot verticale versnelling $a_{rad}/\cos\psi$ (zie figuur volgende biz.)

*) bedoeld is hier actieve terugkaatsing

A & B mascons
50 km beneden
het maanoppervlak

maanoppervlak

V. 24



5. De aldus bepaalde verticale versnelling is nog geen goede maat voor de aantrekkingskracht door de knobbel uitgeoefend, want de baan van de raket is geen zuivere cirkel: hij vliegt soms op grotere, soms op kleinere afstand boven het maanoppervlak. We gaan de aantrekkingskracht a_H , ondervonden op een hoogte H , herleiden tot wat die zijn zou op een hoogte van 100 km; en daarbij gaan we aannemen dat de knobbel zich bevindt op een diepte van 50 km. (Dit laatste is een ruwe, voorlopige schatting, gehaald uit de detailstudie van sommige van de bestbekende banen). We schrijven dus:

$$a_{100} = a_H \cdot (H + 50)^2 / 150^2$$

Zo heeft men 6000 waarden van a_{100} gevonden. Resultaten uit verschillende banen behaald zijn met elkaar in overeenstemming. De punten vormen 13 gebieden, waarvan er in 12 een teveel aan massa is; in één geval is er een massatekort. In 11 gevallen bevonden de massaknobbels zich onder de maria. De massa's zijn ca. 10^{20} à 10^{21} gram; de grootsten hebben een massa gelijk aan die van een ijzeren bol met een diameter van 80 km.

Remming van een satelliet door wrijving

Als een satelliet (of eventueel een planeet) in zijn baanbeweging geremd wordt (bijv. door een ijle middenstof, eventueel de aardatmosfeer), maar zo weinig dat op ieder moment de beweging nog wel als Keplerbeweging beschouwd kan worden, neemt de snelheid toe. Volgens blz. V. 11 (viriaaltheorema) geldt $\bar{E}_{kin} = -E_{tot}$. Door de wrijving gaat er energie verloren, E_{tot} wordt minder en \bar{E}_{kin} neemt dus toe, m.a.w. v^2 neemt toe. Dit gaat ten koste van E_{pot} die meer afneemt dan E_{tot} :

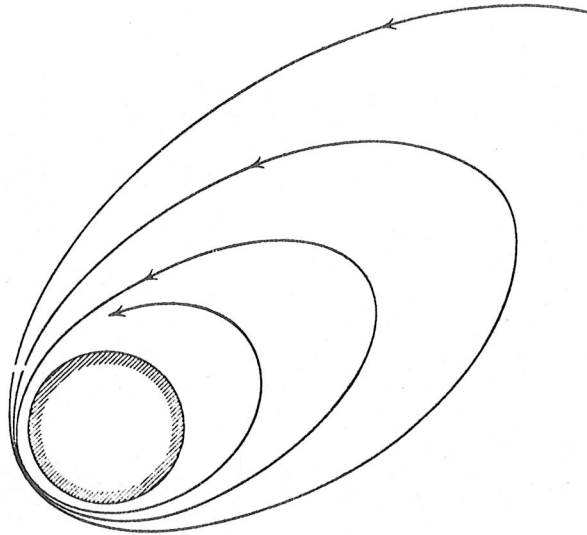
$$\begin{aligned} \bar{E}_{pot} &= 2 E_{tot} \\ \Delta \bar{E}_{pot} &= 2 \Delta E_{tot} \end{aligned}$$

De baanafmetingen worden dus kleiner, wat we ook aflezen uit:

$$\text{toenemende } E_{tot} = -\frac{GMm}{2a} \text{ (blz. V. 15)}$$

Meestal zal de remming met \angle afstand afnemen (bijv. met de hoogte ijler wordende atmosfeer). Als dan alleen de remming in de onmiddellijke omgeving van het pericentrum een rol speelt, gaat de afname van a ten koste van de apocentrumafstand. De pericentrumafstand verandert niet. Door de remming in het pericentrum gaat er n.l. snelheid verloren en de massa kan zich niet meer zover van de hoofdmassa verwijderen, m.a.w. het apocentrum komt dichterbij. In het apocentrum gebeurt echter niets en de massa

komt wèl terug in het pericentrum. De excentriciteit wordt kleiner en de baan gaat steeds meer op een cirkelbaan lijken.



In werkelijkheid zal de remming niet allèen in het pericentrum gebeuren. Daarom zal de pericentrumafstand ook kleiner worden, maar toch minder snel dan de apocentrumafstand en ook dan gaat de baan steeds meer de cirkelvorm aannemen.

Invloed straling

a) stralingsdruk

Een foton heeft een impuls $h\nu/c$. Als het foton door een lichaam geabsorbeerd wordt, wordt deze impuls overgedragen op dat lichaam. Daar kracht = impulsoverdracht per seconde wordt er een kracht $Nh\nu/c$ uitgeoefend als er per seconde N fotonen worden geabsorbeerd en de fotonen zich in (nagenoeg) dezelfde richting bewegen. De energie van deze N fotonen is $E = Nh\nu$; de kracht is dus E/c . Hebben we een bundel (ongeveer) gelijkgerichte fotonen met flux F (= energie per sec per cm^2) dan is de stralingsdruk (kracht/ cm^2) = F/c en op een absorberend deeltje met botsingsdoorsnede σ wordt een kracht uitgeoefend $F\sigma/c$. Als F_0 de flux van de zon is op eenheidsafstand, dan is deze op afstand R : F_0/R^2 . De afstandsafhankelijkheid is dus dezelfde als de aantrekkingskracht. Als de stralingskracht niet overheerst kunnen wij hem in rekening brengen door met een gewijzigde gravitatieconstant te werken. De banen van de deeltjes blijven dus kegelsneden. De verhouding van stralingsdruk (eigenlijk kracht) tot gravitatiekracht is voor een deeltje met straal a en dichtheid ρ :

$$\frac{\pi a^2 F_0 / c R^2}{\frac{4}{3} \pi a^3 \rho M_\odot / R^2} = \frac{3 F_0}{4 G c M_\odot \rho} \frac{1}{a} =$$

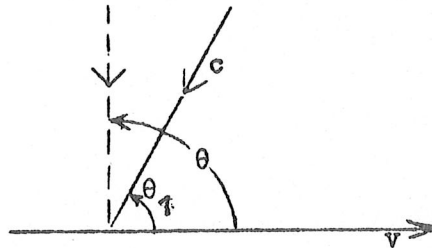
$$= \frac{5.7 \times 10^{-5}}{\rho a} \quad (\rho \text{ in } g \text{ cm}^{-3} \text{ en } a \text{ in cm}).$$

Dus pas als $a \lesssim 10^{-5} \text{ cm} = 1000 \text{ \AA}$ gaat de stralingsdruk overheersen. De banen zijn ook dan kegelsneden n.l. hyperbolen met de bolle kant naar de zon gekeerd. De stralingsdruk speelt een rol in het inwendige van sommige stertypen, bij de vorming van kometenstaarten (dan samen met de zonnwind), bij interplanetair stof, bij pulsars.

b) Poynting-Robertsoneffect

Behalve de radiale component heeft de stralingsdruk bij een bewegend deeltje een tangentiële component, die het deeltje zal afremmen, zodat het langs een spiraal naar de zon zal vallen. T.g.v. de aberratie (hfdst. I) lijkt de straling n.l. iets van voren te komen. We kunnen het ook als volgt zeggen: het deeltje is in stralingsevenwicht, want door het absorberen van de zonnestraling wordt het net zo lang heter tot het evenveel straling emitteert als het absorbeert. De geëmitteerde fotonen hebben een massa, die zij onttrekken aan het deeltje en met de massa onttrekken zij daaraan een evenredige hoeveelheid impuls. Beide beschouwingen leiden tot dezelfde formule voor het impulsverlies. We nemen aan dat het deeltje een cirkelbaan om de zon beschrijft en dus dat de straling loodrecht op de bewegingsrichting invalt:

1. T.g.v. de aberratie komt de straling iets van voren. De invallende straling maakt in werkelijkheid een hoek $\theta = 90^\circ$ met de bewegingsrichting, maar lijkt onder een hoek θ_1 in te vallen. $\sin(\theta - \theta_1) = \frac{v}{c} \sin \theta$ (hfdst. I)



- I) en daar $\theta = 90^\circ$ hebben we $\cos \theta_1 = v/c$. De impuls van de per tijdseenheid geabsorbeerde straling is F_0/c . De component loodrecht v vermindert G en de component tegengesteld aan v remt het deeltje. Deze component is $\cos \theta_1 F_0/c = \frac{v}{c} F_0/c = vF_0/c^2$.
2. De door het deeltje per tijdseenheid ontvangen straling heeft een energie F_0 en een massa F_0/c^2 . Deze massa heeft als hij deel uitmaakt van het deeltje een impuls vF_0/c^2 en deze impuls verliest het deeltje bij de emissie van de straling.

Beide redeneringen leiden dus tot hetzelfde resultaat. Poynting gaf in 1903 een benaderde theorie en Robertson in 1937 een strenge relativistische theorie.

De deeltjes worden dus afgeremd en vallen in een zeer nauwgewonden spiraalbaan naar de zon. Op ieder ogenblik is de baan praktisch een cirkelbaan. De valtijd t is volgens Robertson voor een bolvormig deeltje:

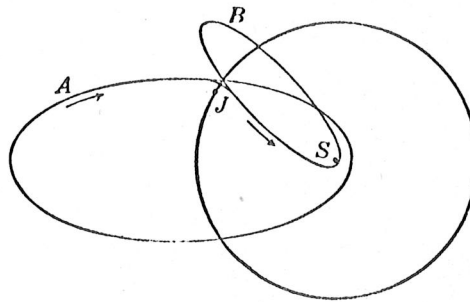
$$t = 7.0 \times 10^6 a R^2 \rho \text{ jaren,}$$

waarin R = beginafstand tot de zon in A.E. ($R \gg R_\odot$), a = straal van het deeltje in cm , ρ = dichtheid deeltje in g/cm^3 . Een deeltje met een straal van 10^{-3} cm en een dichtheid van 3 g/cm^3 heeft volgens deze formule dus 21000 jaar nodig om vanaf de aardbaan naar de zon te vallen. Vergeleken bij de ouderdom van het zonnestelsel is dit dus heel snel. Als $a = 1 \text{ km} = 10^5 \text{ cm}$ is $t = 2.1 \times 10^{12}$ jaar en dat is weer lang t.o.v. de leeftijd van het zonnestelsel. Voor gewone hemellichamen speelt het effect geen rol. Klein gruis (o.a. restanten van kometen) verdwijnt snel uit de interplanetaire ruimte doordat het op de zon valt. H&K kleine deeltjes worden echter door de stralingsdruk weggeblazen.

Drielielichamenprobleem

Voor het drielielichamenprobleem is eigenlijk geen algemene oplossing te vinden. De Fin K. Sundman heeft er een gegeven (1912); de door hem gebruikte reeksen convergeren echter zo langzaam, dat zijn oplossing voor praktische berekening onbruikbaar is. Het volgende voorbeeld kan de gecompliceerdheid van het probleem duidelijk maken:

Een kleine planetoïde beschrijft een langerekte baan A in het vlak van de Jupiterbaan en de Jupiterbaan snijdt. I.n.a. zal na een aantal omlopen de planetoïde de Jupiterbaan snijden op een moment dat de Jupiter in de buurt van het snijpunt is. De planetoïde zal gestoord worden en in baan B gaan lopen; als zijn massa klein is t.o.v. die van Jupiter zal deze niet gestoord worden. Na verloop



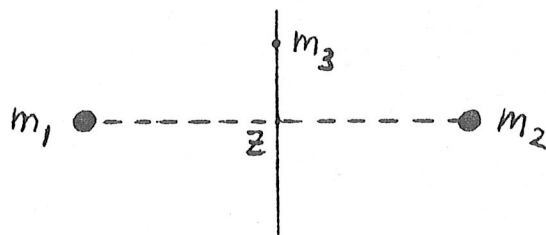
van tijd herhaalt het verschijnsel zich. De algemene oplossing zal al deze banen van de planetoïde moeten bevatten. Toch is dit nog een heel speciaal geval. Als Jupiter vervangen wordt door een lichaam van kleine massa, zal dat ook steeds van baan veranderen. Ook de zon kunnen we nog vervangen door een lichaam met vergelijkbare massa en tenslotte hoeft alles zich niet in één vlak af te spelen.

Met een computer kan natuurlijk ieder speciaal geval snel met stap-voor-stap-integraties doorgeroekend worden.

In sommige speciale gevallen zijn analytische oplossingen mogelijk: soms kunnen die dan exact in een gesloten vorm gegeven worden, soms maakt men gebruik van benaderingen door reeksontwikkelingen, die dan wel - ook over langere tijdintervallen - voldoende snel moeten convergeren.

Speciale gevallen

Speciale gevallen zijn voor het 3- en n-lichamenprobleem gemakkelijk te construeren. Bijv.: m_1 en m_2 zijn even zwaar en beschrijven cirkelbanen om hun gemeenschappelijk zwaartepunt Z. Als de massa van m_3 klein is t.o.v. die van m_1 en m_2 kan m_3 om Z oscilleren langs een lijn door Z loodrecht het baanvlak van m_1 en m_2 . (Zou deze beweging stabiel² zijn?)

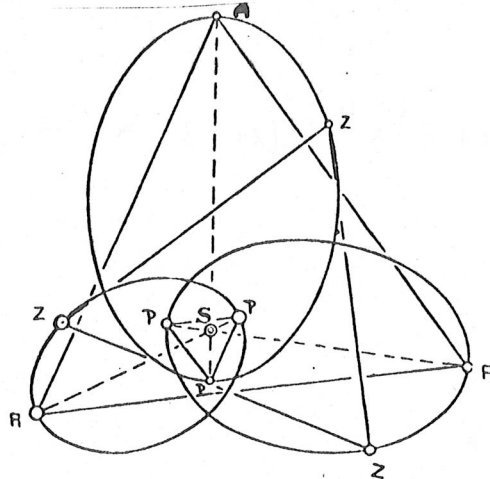


Beroemd zijn de speciale gevallen van Lagrange en Jacobi.

a) Libratiepunten (Lagrange, 1772)

Wij denken ons 2 massapunten m_1 en m_2 . We kunnen nu 5 punten L_1 t/m L_5 (libratiepunten) definiëren met de volgende eigenschap: als we een massa m_3 in één van de libratiepunten plaatsen, kunnen we m_1 , m_2 en m_3 zodanige snelheden geven (in het vlak door m_1 , m_2 en m_3) dat de verhoudingen van hun onderlinge afstanden voor altijd onveranderd blijven. Het blijkt, dat massa's in het vlak gelijkvormige kegelsneden om het zwaartepunt beschrijven. In de volgende figuur is dat afgebeeld voor het geval dat de derde massa zich in het libratiepunt L_4 of L_5 bevindt. Deze punten vormen gelijkzijdige drie-

hoeken met de twee andere massa's.



De punten L_1 , L_2 en L_3 liggen op de rechte door m_1 en m_2 en wel op plaatsen die afhangen van de verhouding m_1/m_2 . L_4 en L_5 vormen met m_1 en m_2 gelijkzijdige driehoeken. In het algemene geval is dit niet zo eenvoudig in te zien, wèl in het geval van het "problème restreint".

b) Problème restreint (Jacobi, ca. 1842, en Poincaré).

De volgende voorwaarden bepalen het "problème restreint" (Eng. restricted problem):

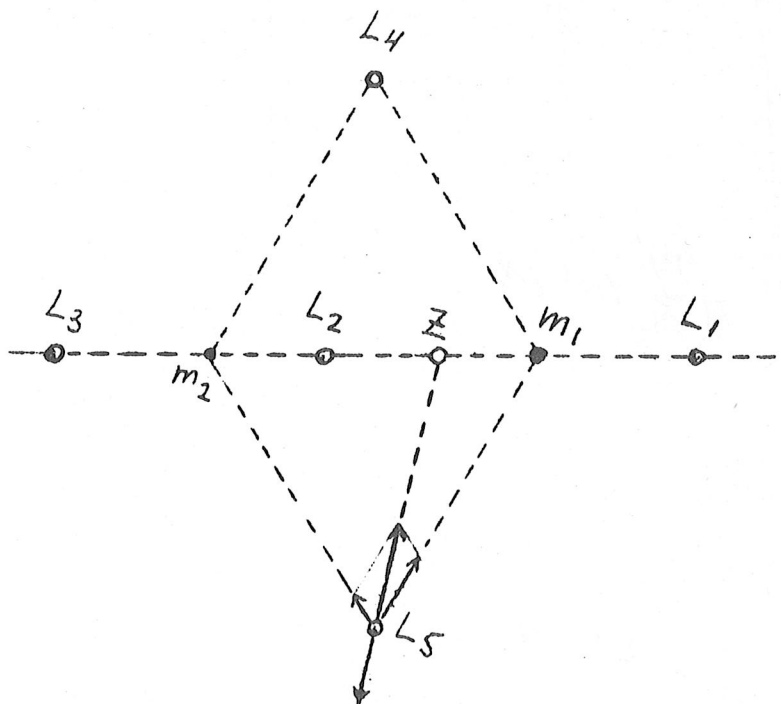
1. m_1 en m_2 draaien in cirkelbanen om een gemeenschappelijk zwaartepunt; m_2 "wezenlijk" $< m_1$
2. $m_3 \ll m_1, m_2$; m_3 beïnvloedt de bewegingen van m_1 en m_2 dus niet
3. alle bewegingen in één vlak

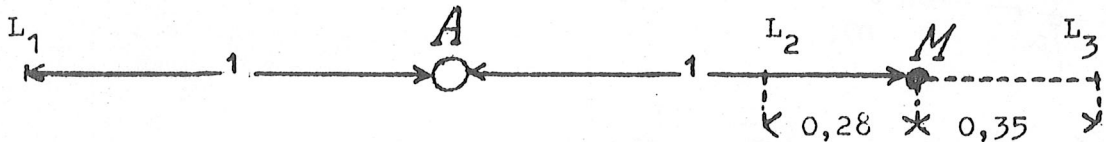
Analytisch kan het bestaan van periodieke banen bewezen worden. Laat men de beperking m_2 "wezenlijk" $< m_1$ vervallen, maar handhaaft men $m_3 \ll m_1, m_2$ dan ontstaat het "uitgebreide problème restreint", dat weer door numerieke integratie opgelost moet worden.

We bekijken nu weer de libratiepunten. In een coördinatenstelsel met de oorsprong in Z, dat meedraait en waarin m_1 en m_2 dus onbewegelijk zijn, zijn in de libratiepunten de gravitatiekrachten en de centrifugale krachten met elkaar in evenwicht, vandaar de naam (libra = weegschaal).

De ligging van L_1 , L_2 en L_3 hangt van de verhouding m_2/m_1 af; de vergelijkingen voor de afstanden l_1 , l_2 en l_3 van L_1 , L_2 en L_3 tot Z zijn eenvoudig neer te schrijven. Er ontstaan vijfdegraadsvergelijkingen, die alleen numeriek zijn op te lossen.

Als m_2/m_1 klein dan kan men benaderde analytische oplossingen geven. Voor het stelsel aarde-maan ($m_2/m_1 = 1/81,3$) vindt men:





De punten L_4 en L_5 hebben hun vaste ligging onafhankelijk van de waarde van m_2/m_1 , wat eenvoudig te verifiëren is. De punten L_1, L_2, L_3 zijn labiel en L_4 en L_5 stabiel, omdat in het meedraaiende coördinatenstelsel in L_1, L_2 en L_3 de potentiaal een maximum heeft en in L_4 en L_5 een minimum. In de omgeving van L_4 zijn de krachten naar L_4 gericht (evenzo voor L_5). Kleine massa's m_3 kunnen dus (steeds in het meedraaiende coördinatenstelsel) kleine baantjes om L_4 en L_5 beschrijven.

Dit zijn niet slechts theoretische beschouwingen. In het stelsel zon-Jupiter bevinden zich in de omgeving van de punten L_4 en L_5 12 planetoiden, bekend als de Gricken en de Trojanen; hun omlooptijd om de zon is dus gelijk aan die van Jupiter. Zeven bewegen zich voor Jupiter uit en vijf volgen hem.

Waarnemingen van een flauw schijnsel in de richting van L_4 of L_5 van het stelsel aarde-maan zijn niet bevestigd. Het zou veroorzaakt worden door interplanetair stof, dat zich daar verzameld zou hebben.

Equipotentiaalvlakken bij nauwe dubbelstersystemen

Zoals hiervoor al even werd aangestipt kunnen we de equipotentiaaloppervlakken beschouwen in de omgeving van twee om elkaar draaiende massa's. Dit is o.a. van belang voor de studie van nauwe dubbelsterren.

De uitdrukking voor de potentiaal luidt:

$$\varphi(\vec{r}) = -Gm_1/r_1 - Gm_2/r_2 - r_s^2 \omega^2/2,$$

$m_1 = 598 \cdot 10^{27} \text{ gr}$
 $m_2 = 1/813 \cdot m_1$

waarin:

r_1 en r_2 : afstanden van punt \vec{r} tot m_1 en m_2

$d = 384400 \text{ km}$

r_s : afstand van punt \vec{r} tot de rotatieas

$T = 28,3217 \text{ dag}$

ω : hoeksnelheid van de rotatie

$1 \text{ dag} = 24 \cdot 3600 \text{ s}$

De eerste twee termen zijn de gravitatiepotentialen, de derde is de potentiaal van de centrifugale kracht (we werken dus weer in een coördinatenstelsel dat meereoteert om een as door het zwaartepunt en loodrecht op het baanvlak). De hoeksnelheid ω kan met de 3de wet van Kepler berekend worden.

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{G(m_1+m_2)} d^3$$



$$\omega^2 = \frac{G(m_1+m_2)}{d^3}$$

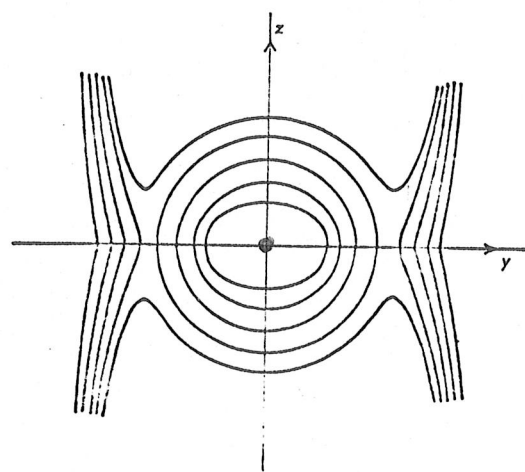
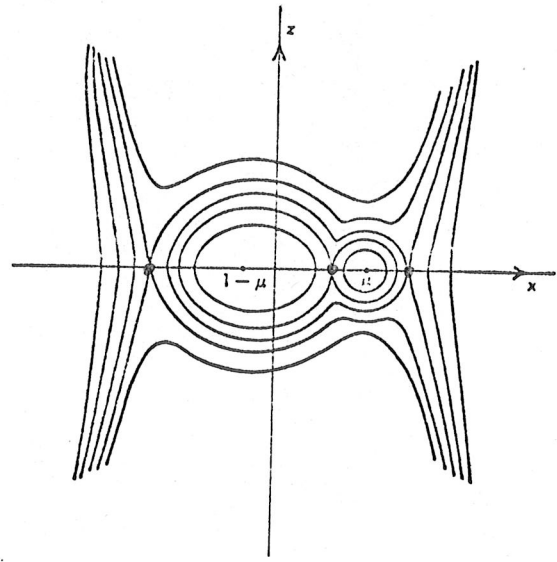
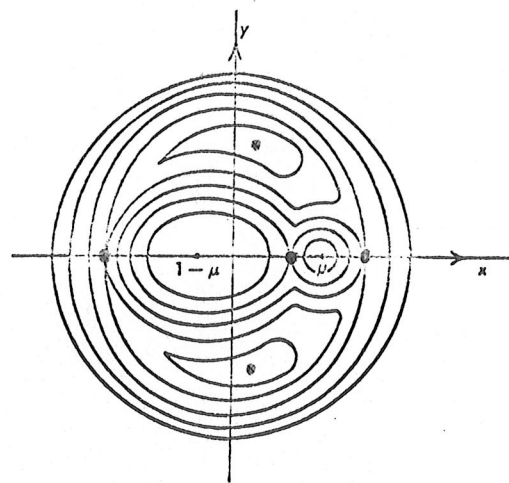
$$\frac{4\pi^2}{T^2} (m_1+m_2) x^5 - \frac{4\pi^2}{T^2} d (2m_1+3m_2) x^4 + \frac{4\pi^2}{T^2} d^2 (m_1+3m_2) x^3 - \left(\frac{4\pi^2}{T^2} m_2 d^3 + G(m_1+m_2)^2 \right) x^2$$

$$- 2 d G m_1 (m_1+m_2) x + d^2 G m_1 (m_1+m_2) = 0$$

$$\rightarrow \left(\frac{m_1+m_2}{d^3} x^5 - \frac{(2m_1+3m_2)}{d^2} x^4 + \frac{(m_1+3m_2)}{d} x^3 - (m_1+2m_2) x^2 - 2m_1 x + m_1 d^2 = 0 \right)$$

of als x in d uitgedrukt

$$(m_1+m_2) x^5 - (2m_1+3m_2) x^4 + (m_1+3m_2) x^3 - (m_1+2m_2) x^2 - 2m_1 x + m_1 = 0$$

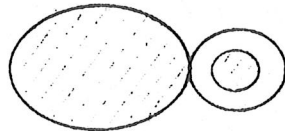


De figuren op blz. V. 30 zijn overgenomen uit: J.M.A. Danby, Fundamentals of celestial mechanics, blz. 191 en 192. Zie bijv. ook: F.R. Moulton, An introduction to celestial mechanics, blz. 283-285. De figuren geven de doorsneden van de equipotentiaaloppervlakken met de vlakken $z = 0$, $y = 0$ en $x = 0$. De x -as gaat door de beide massa's, waarvan hier de som genormeerd is op 1 en de kleinste μ is. De y -as ligt in het baanvlak en gaat door het zwaartepunt. De z -as is de rotatie-as. De punten L_4 en L_5 zijn alleen op de fig. 1 (doorsnede met vlak $z = 0$) te zien als potentiaalkuilen. L_1 , L_2 en L_3 zijn op de fig. 1 en 2 te zien als punten waar equipotentiaaloppervlakken elkaar raken. Daarna wat gebieden van hoge en lage potentialen zijn.

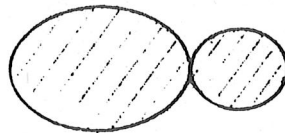
Deze beschouwingen zijn oorspronkelijk opgezet om bewegingen van hemellichamen te bestuderen en dan ook van belang i.v.m. de bewegingen van planetoiden en interplanetair stof. Later is gebleken, dat zij ook van toepassing zijn op gasbewegingen in nauwe dubbelsterstelsels. De oppervlakken van de sterren zijn ook equipotentiaaloppervlakken, bijv. de kleine ovalen om $1 - \mu$ en μ in de fig. 1 en 2. We hebben dan gescheiden sterren: klasse D (detached system).



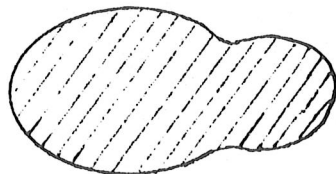
Eén van beide componenten kan zo groot worden, dat zijn oppervlak een equipotentiaaloppervlak om de andere ster raakt. Gas kan dan van de ene component naar de andere stromen: klasse SD (semi-detached system).



Tenslotte kan ook de andere ster zijn kritische volume vullen: klasse C (contact binary).

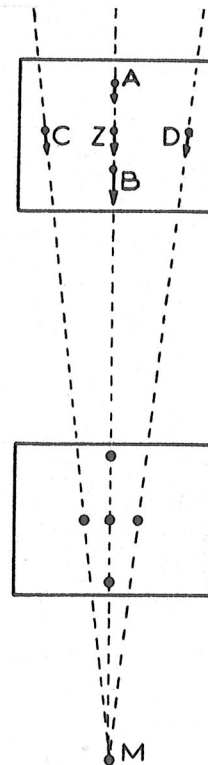


Als de sterren nog groter worden, vormen ze een gemeenschappelijke atmosfeer.

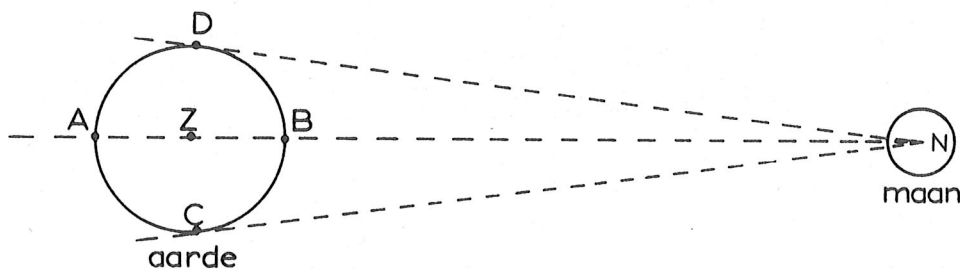
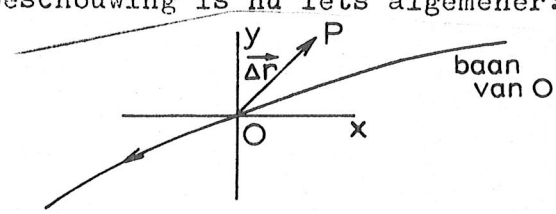


Getijden

Het bekendste voorbeeld van getijwerking is de wisselende waterhoogte op aarde. Twee maal in de 24^h50^m (gemiddeld) is er hoog water en twee maal laag water. Deze tijd is gelijk aan de gemiddelde duur van de "maandagen" en inderdaad is in hoofdzaak de maan de veroorzaker van eb en vloed. We kunnen de oorzaak van de getijden duidelijk maken met een gedachte proef met een vallende lift: een lift valt in een centraal gravitatieveld (alle krachtlijnen gaan door het middelpunt M van de aarde). De lift als geheel valt volgens de versnelling zoals die in het zwaartepunt Z heerst. In andere punten is de versnelling echter iets anders. In de figuur zien we dat A bij Z zal achter blijven, B gaat steeds meer voor Z uit lopen en C en D bewegen zich wegens de convergentie van de krachtlijnen naar Z toe. De in de figuur getekende pijltjes geven de versnellingen aan. De versnellingen van A, B, C en D t.o.v. die



van Z noemt men getijversnellingen. Daar het referentiefstelsel van Z geen inertiaalsysteem is, zijn deze getijversnellingen dus schijnversnellingen. De volgende beschouwing is nu iets algemener: een massapunt O beweegt zich in een gravitatieveld. O is de oorsprong van een bewegend, maar niet roterend coördinatenstelsel. Een punt P op afstand Δr van O ondergaat een andere versnelling. Nu is $\vec{a}_P - \vec{a}_O$ de getijversnelling in P. We zullen nu de getijversnellingen berekenen op het aardoppervlak t.g.v. de maan.



M = massa maan, Z is middelpunt aarde, N is middelpunt maan, $R = ZN$, $r =$ straal aarde.

$$\begin{aligned} \text{versn. in B} &= GM/(R - r)^2 \\ \text{" " Z} &= GM/R^2 \\ \hline \text{getijversn. in B} &= GM \left\{ \frac{1}{(R-r)^2} - \frac{1}{R^2} \right\} \end{aligned}$$

Als $r \ll R$, is dit te berekenen als:

$$-\left(\frac{d}{dR} \frac{GM}{R^2}\right) \Delta R = + \frac{2GM}{R^3} r \quad (\text{getijverwekkende versnelling})$$

In deze benadering is de versnelling in A even groot als die in B en ook van Z afgericht. Laat zelf zien dat in C en D ($N_C = N_D = N_Z = R$) de versnellingen naar Z toe gericht zijn en half zo groot zijn als die in A en B.

Het is interessant de verhouding op te maken van de getijverwekkende versnelling en de gravitatieversnelling:

$$\frac{2GM_{\text{maan}} r/R^3}{GM_{\text{aarde}}/r^2} = 2 \frac{M_{\text{maan}}}{M_{\text{aarde}}} \left(\frac{r}{R}\right)^3 = \frac{2}{81 \times 60^3} \approx 10^{-7}$$

Ook de zon oefent een getijverwekkende versnelling uit:

$$\frac{\text{getijversn. zon}}{\text{getijversn. maan}} = \frac{M_{\text{zon}}}{M_{\text{maan}}} \left(\frac{R_{\text{maan}}}{R_{\text{zon}}}\right)^3 = 0,46 \approx \frac{5}{11}$$

N.B. Daar de schijnbare diameters van zon en maan ongeveer aan elkaar gelijk zijn, moet bovenberekende verhouding ook ongeveer gelijk zijn aan $\frac{\rho_z}{\rho_m} = 1,4/3,3 = 0,42$.

Daar de getijverwekkende versnelling van de zon dus niet te verwaarlozen is t.o.v. die van de maan is er bij de aardse getijden een duidelijk verschil merkbaar tussen de gevallen waarbij zon en maan elkaar versterken en die waarbij zij elkaar tegenwerken.

VM en NM versterking: springtij

EK en LK tegenwerking: doodtij

Getijwerking i.h.a. is astronomisch zeer belangrijk.

Bijv.:

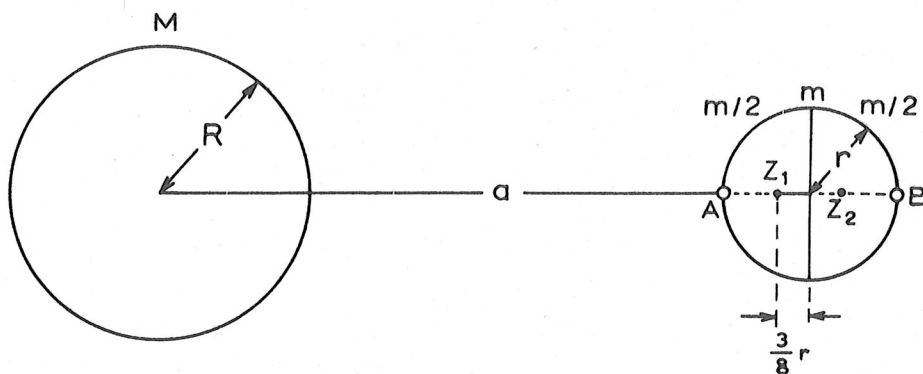
- in allerlei kosmogonische theorieën spelen getijkrachten een rol (o.a. limiet van Roche)
- in dubbelstersystemen
- in systemen van melkwegstelsels
- bij elkaar passerende melkwegstelsels
- precessie
- regressie van de knopen van de maanbaan.

Zelfs eb en vloed hebben astronomische implicaties: de aarde wordt in zijn rotatie geremd, waardoor een verlenging van de dag met 0,001 sec/eeuw optreedt. De aarde verliest dus impulsmoment. Dit impulsmoment gaat naar de maan, hierdoor neemt de afstand van de maan tot de aarde toe met 1,5 m/eeuw.

Lit.: G.H. Darwin, The tides and kindred phenomena in the solar system (een klassiek werk, dat zich laat lezen als een roman! S11-17).

Limiet van Roche

De getijkrachten willen een satelliet uiteenrukken. We beschouwen een "fluid" (d.i. nietvaste, dus vloeibare of gasvormige) satelliet, welke dus bijeengehouden wordt door de gravitatiekrachten en niet door de cohesiekrachten. We vragen ons nu af hoe dicht een satelliet bij een planeet moet komen opdat de getijkrachten gaan overheersen op de gravitatiekrachten.



We denken ons een hoofdmassa met massa M , op afstand a een satelliet met massa m en straal r . Voor een vereenvoudigde afleiding denken wij ons de satelliet te bestaan uit 2 helften met zwaartepunten Z_1 en Z_2 . Gravitatiekrachten en getidekrachten stellen wij ons voor aan te grijpen in deze zwaartepunten. Voor een homogene halve bol ligt het zwaartepunt op een afstand $\frac{3}{8}r$ van het middelpunt. De aantrekkingskracht die de helften op elkaar uitoefenen zijn:

$$G \frac{\frac{m}{2} \times \frac{m}{2}}{(2 \times \frac{3}{8}r)^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{Gm^2}{\frac{9}{16}r^2} = \frac{4}{9} \frac{Gm^2}{r^2}$$

De getidekrachten zijn:

$$\frac{2GM\frac{m}{2}}{a^3} \frac{3}{8}r = \frac{3}{4} \frac{GMm}{a^3} r$$

Laten voor $a = a_R$ deze krachten aan elkaar gelijk zijn, dan zullen voor $a < a_R$ de getidekrachten overheersen en de satelliet uiteenrukken. De limiet van Roche a_R voldoet dus aan:

$$\frac{4}{9} G \frac{m^2}{r^2} = \frac{3}{8} G \frac{Mmr}{a_R^3} \quad a_R^3 = \frac{4}{9} \frac{8}{3} \frac{32}{32} \frac{M}{m} r^3$$

dus

$$a_R = r \sqrt[3]{\frac{27}{32} \frac{M}{m}}$$

Nemen we aan dat hoofdmassa en satelliet dezelfde dichtheid hebben, dan vindt men:

$$a_R = R \sqrt[3]{\frac{27}{32}} \approx 0,94R$$

Deze afleiding was dus vereenvoudigd; Roches eigen berekening (1848) gaf:

$$a_R = 2,44R$$

Deze uitkomst wijkt dus aanzienlijk af van de onze. Redenen hiervoor zijn: 1. Het grootste verschil tussen getide- en gravitatiekrachten treedt op bij de punten A en B; dus eerder dan een opsplitsen in twee gelijke delen, zal men massaverlies in die punten krijgen. 2. We hebben een niet-vaste satelliet beschouwd; alvorens uiteen te vallen zal de satelliet dus uitrekken. Vlak voor het uiteenvallen is de assenverhouding ongeveer 1 : 2. In zo 'n uitgerekte satelliet is het verschil tussen getide- en gravitatiekrachten groter dan in een bolvormige.

Een vereenvoudigde berekening waarbij men de satelliet vervangt door twee elkaar rakende bollen (zie bijv. Minnaert, Standaarddictaat Planetenstelsel, pag. 113-114, DS1) geeft een veel beter resultaat. Deze beschouwing kan op de ringen van Saturnus toegepast worden. De straal van de buitenomtrek van de ringen is 137000 km en die van Saturnus is 60000 km; De verhouding is 2,3. De ringen liggen dus binnen de limiet van Roche en zullen dus wel niet één geheel vormen; spektroskopische waarneming heeft dit bevestigd. De cohesiekrachten zijn dus verwaarloosd. Maken we toch nog even gebruik van ons "tweehelptenmodel", dan zien we dat de gravitatiekrachten evenredig zijn met r . De cohesiekrachten zijn evenredig met r^2 (waarom?). Voor grote lichamen zijn de cohesiekrachten te verwaarlozen, maar voor kleine niet. Vandaar dat een kunstmaan zich binnen de limiet van Roche kan bevinden.
Lit.: Darwin, The tides.

Het stelsel aarde-maan

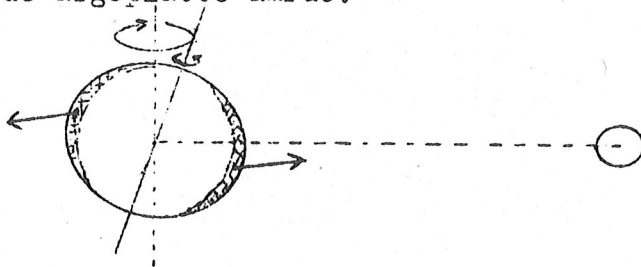
Samen met de zon vormen aarde en maan een drielichamensysteem. Door het niet-bolvormig zijn van de maan, maar vooral van de aarde, de onderlinge getijkrachten en de rotatie van de aarde zijn de bewegingen extra gecompliceerd.

Precessie en nutatie

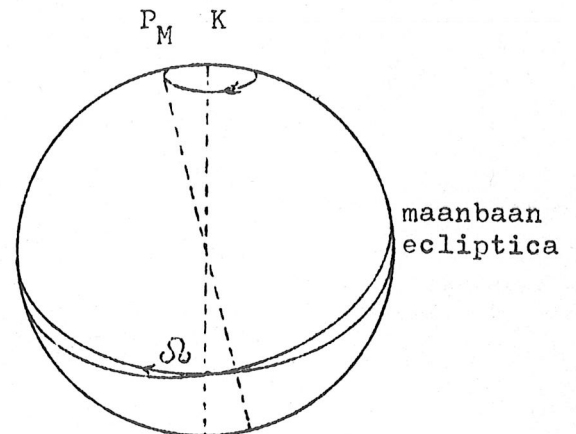
In de inleiding (hfdst. I) zijn de precessie en de nutatie reeds genoemd, maar nu kunnen wij deze verschijnselen pas goed verklaren. Het zijn effecten, die de richting van de rotatieas van de aarde beïnvloeden.

a) Precessie

De hemelpool beschrijft een cirkel om de pool van de ecliptica. Men kan ook zeggen dat de aardas een kegelmantel beschrijft; de as van de kegel is naar de pool van de ecliptica gericht. De oorzaak is de volgende: de maan staat (meestal) niet in het equatorvlak van de aarde. De getijkrachten van de maan grijpen aan op de extra ring materie bij de equator van de afgeplatte aarde.



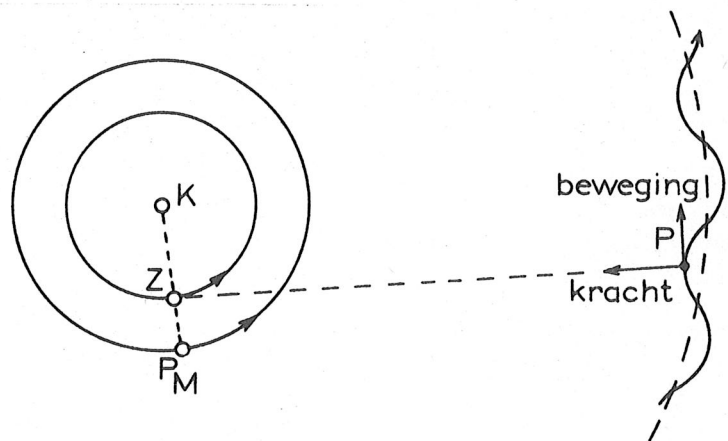
De maan wil de aardas dus "recht zetten", maar evenmin als een roterende tol omvalt, gaat de aarde overeind staan. De as van de tol beschrijft een kegelmantel en evenzo doet de aardas. De as van de kegel is gericht naar de pool van de maanbaan, die ca. 5° verwijderd is van de pool van de ecliptica. Wij hebben gezien (biz. V. 2) dat de pool van de maanbaan in ca. 19 jaar een cirkel beschrijft om de eclipticapool. Gemiddeld valt de pool van de maanbaan dus samen met de eclipticapool. De zon doet - zij het in mindere mate - hetzelfde als de maan. Men spreekt dan ook van de lunisolaire precessie.



b) Nutatie

T.g.v. allerlei effecten is de beweging van de hemelpool niet zo eenvoudig. Allerlei periodieke afwijkingen van de gemiddelde beweging vormen samen de nutatie.

De belangrijkste term heeft een periode van ca. 19 jaar. De rechttrekkende kracht is eigenlijk gericht naar een soort zwaartepunt van de eclipticapool K en de pool van de maanbaan P_M . Dit punt Z beschrijft in 19 jaar een cirkel om K . De hemelbol P beweegt zich altijd loodrecht op de verbindinglijn PZ en volgt dus golflijn. Op de precessiebeweging is een beweging in een ellips gesuperponeerd met assen van $9''21$ (gericht op K) en $6''86$.



Libraties

T.g.v. de getijdenkrachten van de aarde op de maan heeft de rotatie zich zo ingesteld, dat de rotatieduur gelijk is aan de gemiddelde omlooptijd; de maan keert daardoor steeds dezelfde kant naar de aarde. Galilei ontdekte reeds dat dat evenwel niet precies het geval is. Deze afwijkingen van de gemiddelde stand noemt men libraties.

Kleine verschillen zijn al met het oog zichtbaar: Mare Crisium en Maan-naas dicht bij rand.

Libratie in lengte: de baan van de Maan is elliptisch en de hoeksnelheid niet constant; de aswenteling is eenparig. Grootste verschil: $7^{\circ}45'$.

Libratie in breedte: blijkbaar heilt het equatorvlak der maan $6^{\circ}44'$ op haar baanvlak. Daardoor heilt de N-pool soms naar ons toe, 14^d later van ons af. De as van de maan staat bijna loodrecht op de ecliptica (1.5° afwijking).

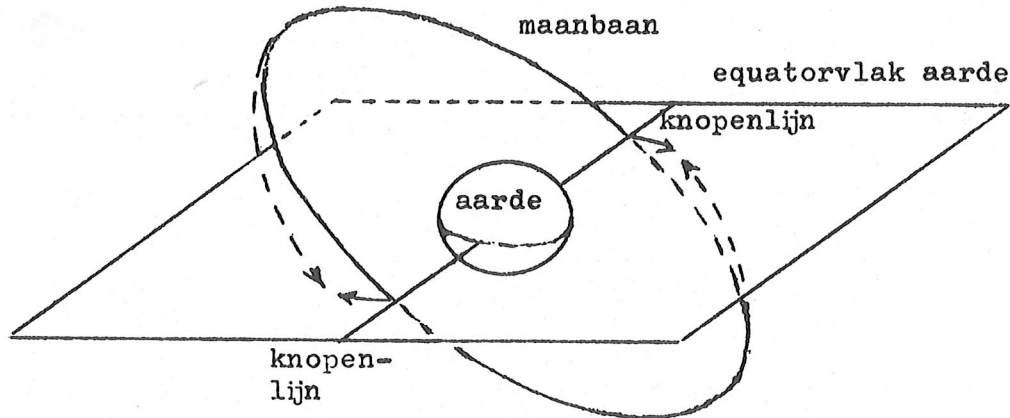
Dagelijkse libratie: als de Maan bij de horizon staat zien we iets verder om de ene of om de andere rand $\pm 1^\circ$. Hieruit kan men ook de afstand bepalen.

Fysische libratie

De Maan is niet geheel bolrond. Langste diam. gericht naar de aarde. Als dit niet precies het geval is, tengevolge van de libratie in lengte en breedte, zwaait de lange as iets heen en weer.

Invloed getijkracht op de beweging van de maan

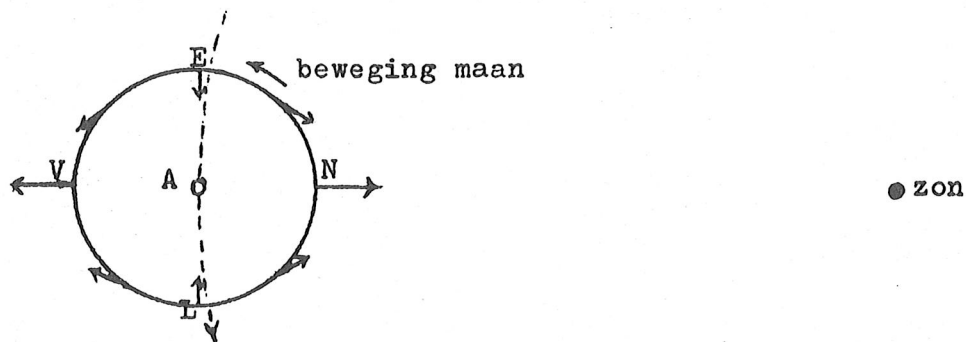
Op blz. V. 22 werd de regressie van de knopenlijn genoemd. De maan oefent een koppel op de aarde uit dat de aardas loodrecht op de maanbaan tracht trekken; omgekeerd zullen er op de maan krachten werken die proberen her naar het equatorvlak van de aarde te trekken. Hoek tussen baanvlak en equatorvlak verandert echter niet, maar omdat de maan steeds iets eerder het equatorvlak bereikt dan anders het geval geweest zou zijn, krijgen we een teruglopen van de knopenlijn. (Zie figuur.)



Over de voorwaartse draaiing van de apsidenlijn is ook op blz. V. 22 reeds gesproken. Deze verschijnselen kunnen we inderdaad bij de beweging van de maan constateren, maar zij worden slechts voor een klein gedeelte op deze wijze veroorzaakt. Veel belangrijker is de invloed van de zon.

Invloed van de zon op de beweging van de maan

De getijkrachten van de zon werken ook op de maan in zijn beweging om de aarde (eigenlijk: om het zwaartepunt aarde-maan).



Gemiddeld verzwakt de zon de aantrekking van de aarde. Dit verlengt de omloopstijd van de maan (waarom?) met gemiddeld ca. 1 uur.

Dit effect is 's winters sterker dan 's zomers omdat in de winter de aarde door zijn perihelium gaat. 's Winters beweegt de maan zich langzamer dan 's zomers: de jaarlijkse ongelijkheid (ontdekt door Tycho, verplaatsing tot ca. 10').

Seculaire versnelling: Halley liet zien dat de siderische maand in zijn tijd merkbaar korter was dan in de Oudheid.

Oorzaak: de excentriciteit van de aardbaan neemt t.g.v. storingen door planeten langzaam af; a blijft evenwel onveranderd. Gemiddeld

komt de aarde dus verder van de zon te staan; de invloed van de zon neemt af en de maan gaat sneller bewegen. De omloopstijd is nu $\frac{1}{2}$ sec. korter dan 2000 jaar geleden. Het effect accumuleert zich en wordt daarvoor waarneembaar. Over 25000 jaar gaat e weer toenemen.

De variatie: op het traject NE werkt de storing vertragend, op EV versnellend, in E is de snelheid dus minder dan in V. Dit is een halfmaandelijks effect, verplaatsing tot ca. 39'.

De evectie is een periodieke verandering van de excentriciteit (0,044 - 0,066). Tevens schommelt de apsidenlijn, evenwel zo dat hij gemiddeld voorwaarts beweegt (in 9 jaar de hemel rond). Het totale effect verplaatst de maan over max. ca. $1^{\circ}15'$ met een periode van 31,8; reeds bekend aan Hipparchus en Ptolemeus.

Tenslotte noemen we nog de regressie van de knopenlijn: de zon trekt de maan naar het eclipticavlak, wat resulteert in een draaiing van de knopenlijn (vgl. de redenatie op blz. V.37). Dit kan ook beschreven worden als een cirkelbeweging van P_M om K (zie blz. V. 36). De periode is gemiddeld ongeveer 18,6 jaar.

Theorie van Brown

Alles is veel gecompliceerder. De invloed van de afplatting van de aarde is al genoemd, daarbij komen nog de storingen door de planeten en de wisselwerking der storingen.

Brown beschrijft de beweging van de maan met periodieke termen.

Lengte: 155 termen hebben elk een amplitudo $> 0''1$;

500 termen kunnen samen nog een dergelijk bedrag uitmaken.

Breedte: half zoveel termen. Parallax: ca. 150 termen.

Er blijven afwijkingen tot $10''$, die men verklaart met de onregelmatige rotatie van de aarde. Hier zijn twee oorzaken voor aan te geven:

1. Plotselinge veranderingen door krimpen of uitzetten der aardkorst.
2. Vertraging door getijwrijving (speciaal in ondiepe zeeën).

Daarom invoering van de ephemeridetijd (hfdst. I).

De belangrijkste termen van de reeksontwikkeling voor de lengte

$$\lambda = L + 377' \sin l + 13' \sin 2l + 76' \sin (2D - l) + 40' \sin 2D - 11' \sin l' + \dots$$

Om de uiteenzetting wat minder abstract te maken zijn hierboven de eerste van de ca. 650 termen voor de lengte gegeven (zie Russell-Dugan-Stewart I, blz. 287). Hierin is L de middelbare lengte van de maan, dat is dus de hoekafstand tot het lentepunt onder aannahme dat de maan met eenparige snelheid de ecliptica doorloopt; l is de afstand van de middelbare maan tot het middelbare perigeum; D zijn afstand tot de middelbare zon; en l' is de afstand van de middelbare zon tot zijn middelbare perigeum. De termen in l en 2l worden de elliptische termen genoemd, zij hebben betrekking op de ongestoorde Keplerbeweging. De term in 2D-l is de evectie, de term in 2D is de variatie en die in l' is de jaarlijkse ongelijkheid.

Het planetenstelsel als geheel

De astronomische eenheid

Zoals we reeds hebben gezien bij de behandeling van het werk van Kepler is het in principe niet moeilijk een beeld te maken van het planetenstelsel met de juiste verhoudingen van alle afstanden. Men hoeft dan nog slechts één afstand in kilometers te kennen om alle afstanden te kennen. (Kan men de afstand van de maan hier ook voor gebruiken?) Dan is de astronomische eenheid ook bekend.

a) Geometrische methoden

De eerste bepaling van de parallax van een planeet was die van Mars door Cassini. In 1672 naderde Mars de aarde tot op 0,37 A.E.; de parallax werd bepaald door Parijse waarnemingen te vergelijken met die uit Cayenne. Hij vond een waarde van 9"5 (moderne waarde 8"794). Later is men planetoiden die nog dichterbij de aarde komen gaan gebruiken om de astronomische eenheid te bepalen (Eros, Icarus).

b) Gravitationele methoden

Uit de storingen van de aarde op een planeet, kan men de verhouding van de massa van de aarde tot die van de zon vinden M_A/M_Z (waarom?) We hadden de volgende formule (3e wet van Kepler):

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{G(M_Z + M_A)} a^3$$

of:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_A (M_Z/M_A + 1)} a^3$$

Hierin is a (de astronomische eenheid) de enige onbekende, die dan uitgerekend kan worden.

c) Methoden gebaseerd op de lichtsnelheid of de snelheid van de radiogolven.

Men kan de aberratieconstante bepalen of de baansnelheid van de aarde uit Dopplereffecten bepalen. De nauwkeurigste bepaling is echter directe bepaling van de afstand van Venus d.m.v. radar.

Regelmatigheden en eigenaardigheden in de bouw van het zonnestelsel die niet volgen uit de wetten van de hemelmechanica

a) The two solar families (Chamberlin)

Chamberlin merkte op dat het zonnestelsel bestaat uit twee groepen lichamen met zeer verschillende eigenschappen. De eerste groep, bestaande uit de planeten en hun satellieten, de planetoiden en de kort-periodieke kometen, is "straf" georganiseerd: de baanvlakken maken geringe hoeken met elkaar, overal dezelfde rotatie- en omloopszin, genoeg cirkelvormige banen. De tweede groep bestaat uit de lang-periodieke kometen met zeer lang gerekte banen en geen voorkeursrichtingen, ook niet in de oriëntering van de baanvlakken.

b) De regel van Titius en Bode

Bode vestigde in 1772 de aandacht op een regel, die wel de "wet van Bode" wordt genoemd, hoewel Titius hem een paar jaar daarvoor ontdekt schijnt te hebben. Met de regel kunnen we de afstanden van de planeten tot de zon "berekenen". Schrijf een reeks 4'en op. Tel bij de tweede 3 op, bij de derde $2 \times 3 = 6$, bij de vierde $4 \times 3 = 12$ enz.; verdubbel dus iedere keer het getal dat bij 4 opgeteld moet worden.

| | | | | | | | |
|---------|-----|----------|----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 |
| | — | <u>3</u> | <u>6</u> | <u>12</u> | <u>24</u> | <u>48</u> | <u>96</u> |
| som | 4 | 7 | 10 | 16 | 28 | 52 | 100 |
| afstand | 3,9 | 7,2 | 10,0 | 15,2 | | 52,0 | 95,4 |
| planeet | M | V | A | M | | J | S |

De getallen die men zo vindt zijn ongeveer gelijk aan de "gemiddelde" afstanden (gemiddelde van grootste en kleinste afstand, dus a) van de planeten tot de zon, waarbij de afstand zon-aarde gelijk aan 10 is. Toen de regel werd opgesteld waren de planeten voorbij Saturnus nog niet ontdekt. Om overeenstemming tussen regel en de werkelijkheid te krijgen moest men wel tussen Mars en Jupiter een plaats open laten. Nu had Kepler reeds opgemerkt dat er tussen Mars en Jupiter een gaping was; hij heeft zelfs gepoogd, maar tevergeefs, daar een verklaring voor te vinden! Op grond van de wet van Bode ging men nu vermoeden dat er zich tussen Mars en Jupiter een nog onontdekte planeet bevond. In 1781 ontdekte Herschel de planeet die wij nu Uranus noemen (Herschel doopte hem ter ere van de Engelse koning Georgium Sidus). Er waren toen weer 7 planeten, net als in de Oudheid toen men de zon en de maan ook tot de planeten rekende, maar de aarde niet. Het vertrouwen in de wet van Bode nam toe toen bleek dat Uranus' gemiddelde afstand tot de zon 19,19 A.E. er goed aan voldeed. Men ging zelfs zoeken naar de ontbrekende planeet. Hegel toonde in zijn dissertatie (1801) op filosofische gronden aan dat er slechts 7 planeten konden zijn! Op 1 januari 1801 (de eerste nacht van de 19e eeuw) werd door Piazzi (Palermo) de onbekende planeet ontdekt (Ceres, naar de schutsgodin van Sicilië). Piazzi nam hem enige weken nauwkeurig waar, werd toen ziek en voor hij beter was, was de planeet verloren gegaan in de avondschemering. Na een klein jaar werd hij herontdekt dank zij de berekeningen van Gauss (toen 24 jaar oud), die voor deze gelegenheid een methode uitvond om uit 3 waargenomen posities van een planeet de baanelementen te berekenen. Ceres voldeed ook goed aan de wet van Bode ($a = 2,77$ A.E.) Voor Neptunus en Pluto gaat de "wet" niet op en eigenlijk voor Mercurius ook niet (waarom?). Toch is het bestaan van een zekere regelmaat onloochenbaar.

c) De Kirkwood gaps

Olbers ontdekte in 1802, toen hij Ceres zocht, Pallas. Harding vond Juno in 1804, Olbers in 1807 Vesta - die soms met het blote oog waargenomen kan worden. Allen bevinden ze zich op min of meer dezelfde gemiddelde afstand tot de zon. Het zijn de planetoiden (Eng. asteroids). In 1845 werd nr. 5 gevonden en vanaf 1847 is er ieder jaar minstens één planetoïde ontdekt; in een bepaald jaar zelfs 380. Veel ontdekkingen zijn echter niet blijvend omdat men maar één of twee posities heeft kunnen waarnemen. Van ca. 1600 zijn de baanelementen bekend. Baade en Hubble hebben geschat dat men met de 100-inch-telescoop minstens 30 000 planetoiden zou kunnen waarnemen.

De excentriciteiten en de baanellingen zijn in vergelijking met die van de planeten groot. De perioden lopen uiteen van 1,12 jaar (Icarus) tot 13,7 jaar (Hidalgo). Een frequentieverdeling van de perioden vertoont gapingen bij 3,97, 4,76 en 5,95 jaar, naar hun ontdekker "Kirkwood's gaps" genoemd. De gapingen bevinden zich bij precies $1/3$, $2/5$ en $1/2$ maal de periode van Jupiter en kunnen begrepen worden als een resonantie-effect. Het vreemde en onverklaarde is echter dat als $a > 3,5$ A.E. bij de commensurable perioden zich juist concentraties bevinden.

Zo zijn er bijv. 20 planetoiden met $3,88 < a < 3,99$; dat komt overeen met perioden $\approx 2/3 \times T_{\text{Jupiter}}$. Ter vergelijking: er is maar één plane- toide met een a tussen $3,65$ en $3,88$ A.E.

d) Het impulsmoment

Zoals we vroeger (hfdst. I) reeds hebben gezien is de totale massa van het planetenstelsel slechts $1/743$ -ste zonsmassa; vrijwel alle massa van het zonnestelsel zit dus in de zon zelf. Het vreemde is echter, dat het impulsmoment voor $27/28$ -ste in de planeten zit en dus voor $1/28$ -ste in zon.

De hierboven behandelde regelmatigheden en bijzonderheden kunnen niet zo maar begrepen worden uit de wetten van de hemelmechanica (misschien de Kirkwood gaps en de concentraties); zij hangen samen met het ont- staan en de evolutie van het zonnestelsel.

Mechanica van het zonnestelsel

Daar het zonnestelsel in zijn geheel een veellichamenprobleem vormt, zijn er geen exacte analytische oplossingen voor de bewegingen van de planeten te geven. Numerieke integraties, hoewel altijd uitvoerbaar, hebben het bezwaar dat ze niet tot algemene formules leiden.

a) Oplossingen door achtereenvolgende benaderingen. In de meeste geval- len doet zich in het zonnestelsel de gelukkige omstandigheid voor dat de aantrekkingskracht van één lichaam domineert: bij de planeten die van de zon, bij de maan die van de aarde enz. Berekening van de gewone Keplerbeweging geeft dus een goede 1ste benadering. Zo vinden we onge- veer juiste posities van de planeten voor ieder willekeurig tijdstip en desgewenst hun wederzijdse aantrekkingskrachten. Ook kunnen we dan berekenen hoe de bewegingen worden veranderd t.g.v. deze aantrekkings- krachten. Zo komen we tot een 2de benadering van de posities, die nauw- keuriger zijn dan die van de 1ste benadering. Zo kunnen we doorgaan. Het proces convergeert snel. Voor de kleinere planeten is de 2de be- nadering al haast voldoende, terwijl de 3de zelfs voor Jupiter en Satur- nus bijna perfect is.

b) Storingen

De afwijkingen van de zuivere Keplerbeweging noemt men storingen (Eng. perturbations). Zowel de baan zelf, als de plaats in de baan kan ge- stoord worden.

Als de banen nagenoeg cirkelvormig zijn (en dat is voor de planeten en hun satellieten het geval) kan men analytische uitdrukkingen voor deze storingen vinden d.m. waarvan men hen voor ieder tijdstip kan berekenen. Deze uitdrukkingen noemt men algemene storingen. Zij hebben de vorm van oneindige reeksen en om nauwkeurige resultaten te krijgen moet men veel termen meenemen (vgl. V. 38). De berekening van deze storingen is zeer ingewikkeld. Bij zeer excentrische banen (kometen) moeten de storingen door numerieke integraties berekend worden voor het tijdsinterval waarin men geïnteresseerd is. Dit zijn de speciale storingen.

c) Storingen van de planeten (algemene storingen).

De feitelijke bewegingen van planeten kunnen beschreven worden als volgt:

1. De baanelementen veranderen geleidelijk, evenwel zo langzaam, dat zij gedurende een omloop als constant beschouwd kunnen worden. Men noemt dit de seculaire storingen; zij hangen af van de onderlinge liggingen van de planetenbanen, dus van de baan- elementen van de andere planeten.
2. De beweging in de baan verloopt niet precies als een Keplerbe- weging; hij kan vóór of achter lopen, dichter bij of verder van de zon staan en tenslotte kan hij zelfs een beetje buiten het baanvlak terecht komen. Dit zijn de periodieke storingen,

die afhangen van de posities van de andere planeten in hun baan. Zij kunnen worden geschreven als een som van periodieke termen - de meesten met een korte periode.

d) Hoe groot zijn de periodieke storingen?

De maximale periodieke storingen in de heliocentrische lengten zijn als volgt:

| | |
|-----------|-------|
| Mercurius | - 15" |
| Venus | - 30" |
| Aarde | - 1' |
| Mars | - 2' |
| Jupiter | - 30' |
| Saturnus | - 70' |
| Uranus | - 60' |
| Neptunus | - 35' |

I.n.a. hebben de grootste termen ook de grootste perioden - 913 jaar in het geval van Jupiter en Saturnus.

De grootte van de periodieke storingen is evenredig met de massa van de storende planeet en deze kan uit de waargenomen storingen worden afgeleid (vgl. blz. V.39). Men vindt dan de totale massa van de planeet en zijn satellieten, wat alleen in het geval aarde-maan een belangrijk verschil is met de massa van de planeet alleen.

e) Seculaire storingen.

De seculaire storingen (Lat. saecularis = (o.a.) zich over een lange reeks van jaren uitstrekkend) veranderen "met de eeuw", maar zijn in feite ook periodiek. De perioden lopen uiteen van 50 000 tot 2 miljoen jaar. Laplace en Lagrange hebben aangetoond dat deze veranderingen het algemene bouwplan van het zonnestelsel niet doen veranderen.

a en T: seculair constant

e: schommelt, nooit groot (banen altijd bijna cirkelvormig)

$\bar{\omega}$: schommelt, maar wordt gemiddeld groter (draaiing van de apsidenlijn)

Ω : schommelt, maar wordt gemiddeld kleiner (regressie van de knopenlijn)

i: schommelt, nooit groot

Een gevolg van de storingen is dat de 3de wet van Kepler niet precies geldt, zelfs niet als men rekening houdt met de massa van de planeet zelf. Meer naar de zon toe gelegen planeten doen n.l. de centrale aantrekking toenemen, terwijl planeten buiten de baan van de gegeven planeet de centrale aantrekking verminderen. Zo is de omlooptijd van Jupiter $1\frac{1}{2}$ uur langer en die van Saturnus ca. 1 week korter dan zij zouden zijn als de andere planeten hierop geen invloed zouden hebben.

f) IJstijden

Milankovitsj berekende, rekening houdende met de seculaire verandering van de baanelementen van de aarde en met die van ϵ (de helling van de ecliptica), voor verschillende breedten op aarde de hoeveelheid invallende zonnestraling. Deze hangt af van ϵ , $\bar{\omega}$ en Ω . Op deze wijze meende hij de ijstijden te kunnen verklaren. Een bevestiging hiervan is verkregen door het werk van Emiliani, die er in geslaagd is de temperatuur van het zeewater te bepalen voor de laatste 300 000 jaar. Deze temperatuur bepaalt n.l. de verhouding O^{18}/O^{16} in de kalkskelletjes van foraminiferen. Door nu deze isotopenverhouding te bepalen voor verschillende lagen diepzeeslik kon hij de temperaturen van het zeewater in het verleden vinden. Volgens de theorie van Milankovitsj kan men over 20 à 30 duizend jaar een nieuwe ijstijd verwachten (zie E.P.J. van den Heuvel,

Hemel en Dampkring 63, 60, 96 en 168 (1965))

g) Stabiliteit van het zonnestelsel

Volgens Laplace en Lagrange is het zonnestelsel dus stabiel. Afgezien van de planetoiden zullen er geen planeten in hyperbolische banen terecht komen en het zonnestelsel verlaten, of op de zon storten, of met elkaar in botsing komen. Laplace en Lagrange hebben evenwel de oneindige reeksen ergens moeten afbreken en volgens Brown hoeven de conclusies die juist zijn voor miljoenen omlopen dat niet te zijn voor honderden miljoenen omlopen. De stabiliteit van het zonnestelsel is dus wiskundig niet bewezen. Gezien de ouderdom van het leven op aarde (blz. I. 5) en de gevoeligheid van het leven voor temperatuurwisselingen en dus voor veranderingen van de baanelementen van de aarde lijkt het echter dat die stabiliteit wel verzekerd is geweest over een kleine miljard jaar.

h) Plan invariable.

De 10 bewegingsintegralen (blz. V. 10 en 11) bestaan voor het zonnestelsel in zijn geheel, tenminste als er geen uitwendige krachten op werken. Deze uitwendige krachten zouden van de vaste sterren moeten komen. Nu vormen volgens Oort de langperiodieke kometen een enorme wolk om het centrale zonnestelsel, die zich uitstrekt tot op een afstand van ruim 100 000 A.E. en dus tot halverwege de meest nabije sterren. Dan kunnen dus de aantrekkingskrachten van die sterren van dezelfde grootte-orde worden als die van de zon en de beweging van die kometen beïnvloeden. Komen dergelijke kometen dan in het centrale zonnestelsel, dan zouden zij dáár weer invloed op kunnen hebben. Deze laatste mogelijkheid is echter theoretisch - men heeft nog nooit waargenomen dat een komeet een ander hemellichaam in zijn beweging beïnvloedde. Hieruit heeft men geconcludeerd dat de massa's van de kometen heel klein zijn. Oort schat dat er 10⁴ kometen in de wolk zijn met een totale massa van 0,01 à 0,1 aardmassa.

I.h.b. kan men dus het totale impulsmoment van het centrale zonnestelsel (straal bijv. 100 A.E.) als constant beschouwen. Het vlak loodrecht op de impulsmomentvector is het eigenlijke fundamentele vlak van het zonnestelsel. Dit "plan invariable" maakt een hoek van ca. 1½° met het eclipticavlak en de klimmende knoop ervan heeft een lengte van 107°. Het ligt tussen de baanvlakken van Jupiter en Saturnus, wat niet verwonderlijk is, want dit zijn de zwaarste planeten.

Literatuur

Bij het samenstellen van dit college is intensief gebruik gemaakt van de volgende werken:

| | |
|---|-------|
| Russel-Dugan-Stewart, Astronomy I (1945) en II (1938) | S1-8 |
| H.H. Voigt, Abriss der Astronomie I (en II) (1969) | S1-62 |
| M.G.J. Minnaert, Standaarddictaat Algemene astronomie, deel A, Het Planetenstelsel (1961) | DS-1A |

De eenvoudige hemelverschijnselen konden wegens tijdgebrek in dit college niet behandeld worden, bovendien moet men die door eigen waarneming leren kennen. Voor a.s. leraren is het zeker gewenst (misschien voor hen nog meer dan voor a.s. astronomen) dat zij deze kennen. Goede handleidingen bij het waarnemen zijn:

| | |
|--|-------|
| J. van der Bilt, De astronomische hemelverschijnselen | S1-19 |
| Sterrengids van de Nederlandse Vereniging voor Weer- en Sterrenkunde (verschijnt ieder jaar) | S2-6 |

Wil men gestimuleerd door deze inleiding wat meer te weten komen over de hemelmechanica, dan kan de volgende literatuur aangeraden worden:

| | |
|---|------|
| Y. Ryabov, Celestial mechanics (1959, populair) | S4-8 |
|---|------|

- P. van der Kamp, Elements of astrodynamics (1964, zeer elementair) S4-12
 F.R. Moulton, An introduction to celestial mechanics (1914), S4-5
 J.M.A. Danby, Fundamentals of celestial mechanics (1962) S4-3
 Th. E. Sterne, An introduction to celestial mechanics (1960) S4-10
 R.M.L. Baker & M.W. Makemson, An introduction to astrodynamics (1967) S4-19
 V.M. Blanco & S.W. McCuskey, Basic physics of the solar system (1961, ongeveer voor de helft hemelmechanica) S12-2
 A.I. Berman, The physical principles of astronautics (1961, mechanica toegepast op hemellichamen en ruimtevoertuigen) S10-9
- Niet velen zullen er toe komen de Almagest van Ptolemeus te bestuderen, maar het loont de moeite eens een blik te slaan in de Duitse vertaling van K. Manitius (en daar bijv. de oudste sterrencatalogus in op te zoeken):
 Ptolemäus, Handbuch der Astronomie (1963) S3-15
 Ten einde enigszins een indruk te krijgen van de "impact" van het Copernicaanse wereldbeeld op de wereld van toen, leze men
 W. Bixby & G. de Santillana, Galilei en Newton (1964) S3-23
 maar vooral het toneelstuk van Brecht:
 B. Brecht, Leben des Galilei (1939) S3-2
 Opmerkelijk en ook boeiend is:
 A. Koestler, The sleepwalkers (1959) S3-13 (zie ook S3-10)
 Misschien wel het beste boek over de geschiedenis van de sterrenkunde (zowel in het Engels als het Russisch vertaald) is:
 A. Pannekoek, De groei van ons wereldbeeld (1951) S3-6
 Een ander Nederlands boek met internationale faam over de geschiedenis van de natuurkunde, met tal van astronomische aspecten, is:
 E.J. Dijksterhuis, De mechanisering van het wereldbeeld (1950) N14-15
 Vergelijkbaar, maar meer populair:
 E.J. Dijksterhuis, Overwinning door gehoorzaamheid (1961) N14-16
- Bij de studie van welk hoofdstuk ook van dit college algemene sterrenkunde is het nuttig om een algemeen leerboek of overzicht bij de hand te hebben ten einde de basiskennis nog eens op te frissen of gebruik te maken van de goede foto's en de tekeningen, die in de gestencilde syllabi meestal een beetje primitief uitvallen. De volgende greep (min of meer in volgorde van toenemende moeilijkheid) uit de Transitoriumbibliotheek is zeker niet volledig:
- A.J.M. Wanders, Beknopte sterrekunde (1968) S1-64
 A.J.M. Wanders, Sterrekunde (z.j., ca. 1960) S1-13
 R.H. Baker, Astronomy (1964) S1-18
 R.H. Baker & L.W. Frederick, An introduction to astronomy (1968) S1-49
 D. Scott Birney, Modern astronomy (1969) S1-56
 S. von Hoerner & K. Schaifers, Meyers Handbuch über das Weltall (1967) S1-7
 O. Struve, Elementary astronomy (1959) S1-11
 S.P. Wyatt, Principles of astronomy (1964) S1-37
 G. Abeil, Exploration of the universe (1969) S1-36
 W.S. Krogdahl, The astronomical universe (1962) S1-4
 L. Motz & A. Duveen, Essentials of astronomy (1966) S1-46

Utrecht, 27 september 1972 (correcties aug. '73)

H. Hubenet

Handwritten initials