J.v. Dorp — Nieuwe Gracht 161 Utr.

7 (met spiraalstruktuur samen) Ad Moelands

Dichtheidsverdeling en massa in het Melkwegstelsel

In de proef over de spiraalstructuur is de rotatiekromme bepaald, tussen 3 en 10 kpc afstand van het melkwegcentrum.

1. Deze kromme moet nu nog worden geëxtrapoleerd naar R = 0.
   Doe dit op een manier die U aannemelijk lijkt
   Hoe zou de extrapolatie eruit moeten zien als er zich een sterke concentratie van massa in het melkwegcentrum zou bevinden?

2. Stel dat de massa tussen R = 0 en R = 10 kpc bolvormig verdeeld zou zijn en zich buiten R = 10 kpc geen massa meer zou bevinden,
   a. Hoeveel zou dan de totale massa van het melkwegstelsel, uitgedrukt in zonsmassa's, bedragen?
   b Wat zou de ontsnappingssnelheid V_{esc} zijn ter plaatse van de zon (R = 10 kpc)?
   c. Hoe zou de rotatiekromme moeten worden geëxtrapoleerd voorbij R = = 10 kpc? Sluit deze extrapolatie goed aan bij de voorhanden rotatiekromme?

3. J.C. Brandt (Ap.J. 131, 293, 1960) heeft een formule aangegeven die rekenschap geeft van het algemene verloop van het soort rotatiekrommes zoals die voor extragalactische nevels gevonden worden:

$$V(r) = \frac{\alpha r}{(1 + \beta^n r^n)^{3/2n}} \quad , \qquad (1)$$

waarbij n zo kan worden gekozen dat V(r) de waarnemingen bevredigend weergeeft.
   a. Controleer dat voor $r \to \infty$ (en $r \to 0$) deze formule de juiste vorm heeft.
   b. Neem eens n = 3; dan kunnen we schrijven

$$V = r \left[\frac{\delta}{1 + \gamma R^3}\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (2)$$

   c. Bepaal γ en δ uit de waarden van V en van dV/dR bij R = 10 kpc zoals die volgen uit de constanten A = 15 km/s.kpc en B = -10 km/s.kpc.
   d. Bepaal vervolgens de maximale rotatiesnelheid V_m en de waarde R_m waarbij deze optreedt. Vergelijk met de rotatiekromme.
   e. Gebruik de gevonden waarden van γ en δ om nu wederom de totale massa van het melkwegstelsel te schatten.

4. De verdeling van de massa in het melkwegstelsel probeert men veelal voor te stellen door een superpositie van homogene ellipsoïden van dezelfde eccentriciteit en met verschillende afmetingen en dichtheden. Uit de theorie van de gravitationele werking van een ellipsoïde volgt:

$$V^2(r) = G \int_0^r \frac{dM}{(r^2 - a^2e^2)^{\frac{1}{2}}} \quad \text{waarbij} \qquad (3)$$

M(10) = 0,800 · 10^11

dM = massa-increment (toename) tussen ellipsoïde met halve grote as a en ellipsoïde met halve grote as a + da; $e = \frac{1}{a}\sqrt{a^2 - c^2}$.

Voor e → 1 krijgt dit de vorm van Abel's vergelijking. De oplossing is

$$M(R) = \frac{2}{G\pi} \int_0^R \frac{V^2(r)\, r\, dr}{\sqrt{R^2 - r^2}} \qquad (4)$$

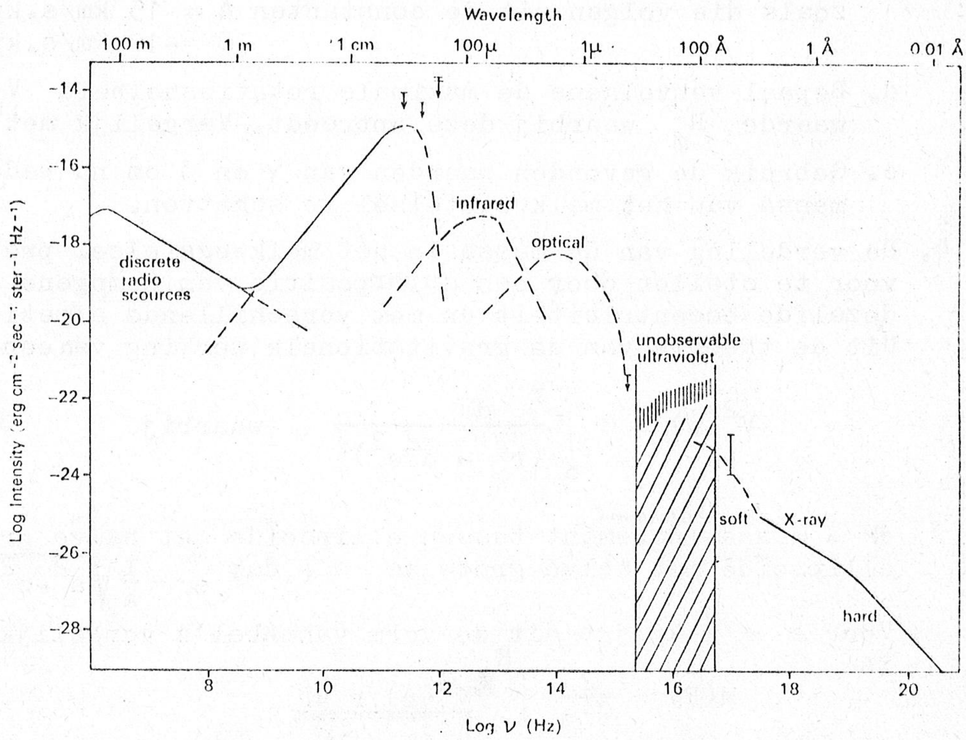
waarbij M(R) = massa in alle ellipsoïden met halve grote assen tussen a = 0 en a = R.
Uitgaande van de rotatiekromme kunnen we door numerieke integratie M(R) bepalen voor een gegeven R.

z.o.

Eén groep studenten doet dit voor R = 5 kpc, een andere groep voor R = 10 kpc.
Voor een beperkt aantal waarden van r moet daartoe $\frac{rV^2(r)}{\sqrt{R^2-r^2}}$ worden bepaald en in grafiek gebracht.
De integraal wordt gevonden door het ingesloten oppervlak te bepalen.
Wat zoudt U met het uiterste stukje, waar $\frac{1}{\sqrt{R^2-r^2}}$ zeer groot wordt, willen doen?
Geef de massa weer in zonsmassa's.

5. Ga na hoe uit (2) de ontsnappingssnelheid vanuit de afstand R = 10 kpc kan worden bepaald. De hierbij nodige integraal kan weer gemakkelijk numeriek worden bepaald (voorbij R = 30 kpc bij benadering door directe integratie, met $V \sim R^{-\frac{1}{2}}$).
Vergelijk deze uitkomst met de grootst waargenomen tangentiële snelheid van sterren in een richting evenwijdig aan de rotatierichting in de buurt van de zon: $V_{max} \approx 250 + 65$ km/s.
Welke gevolgtrekking maakt U uit het feit dat V_{esc} en V_{max} verschillen?

Opmerking. Het is niet de bedoeling dat U veel tijd verliest aan moeizame numerieke integraties. Probeer om op een vlotte en handige manier een redelijk goede benadering van zo'n integraal te verkrijgen.



The complete background spectrum in the range $10^{6} < \nu < 10^{21}$ Hz. Where direct observations are available full lines are drawn. Where only theoretical estimates are available, these are drawn with a dashed line.

M.S LONGAIR & R.A. SUNYAEV Ap LETT 4, 66, 1969