



student

HET INWENDIGE VAN EEN STER. februari 1972

INLEIDING. De inwendige bouw van een ster kan niet direkt waargenomen worden (zoals bv. centrale dichtheid en temperatuur). Behalve de zeer vele spektrografiese gegevens over de buitenste laag, de atmosfeer, leveren waarnemingen slechts grootheden als

- totale massa M, bv.  $M_{\odot} = 2 \cdot 10^{33}$  gram
- straal R, bv.  $R_{\odot} = 7 \cdot 10^{10}$  cm
- energie uitstraling L, bv.  $L_{\odot} = 3 \cdot 10^{33}$  erg/sek.

We leiden hieruit de structuur van een ster af en verifiëren de theorie indirect door voor vele M's, R's en L'en stermodellen te berekenen en gevonden relaties, zoals M(R) (massa-straal relatie) en L(M) (massa-lichtkracht relatie) en L( $T_{\text{buitenlaag}}$ ) (Hertzsprung-Russell diagram) te vergelijken met waargenomen relaties van verschillende groepen sterren.

DOEL. Deze proef bestaat uit het vinden van een stermodel en uit het vinden van enkele relaties tussen M, R en L onder enkele vereenvoudigende aannamen. Een sferies symmetries stermodel is een aantal functies  $\rho(r)$ ,  $p(r)$ ,  $T(r)$ ,  $L(r)$ ,  $M(r)$  met  $0 < r < R$ , de straal van de ster, die voldoen aan de zg. structuur vergelijkingen, de gas vergelijkingen en de rand voorwaarden.

(voor betekenis der symbolen zie diktaat)  
De structuur vlg. en zijn:

Hydrostaties evenwicht 1.  $\frac{dp}{dr} = \frac{-G M(r) \rho(r)}{r^2}$  (krachten compenseren elkaar)

met 2.  $\frac{dM}{dr} = 4 \pi r^2 \rho(r)$  (massa in een bolschil)

Termies evenwicht 3.  $\frac{dL}{dr} = 4 \pi \epsilon \rho(r) \cdot r^2$  (energie produktie)  $\epsilon = \rho T^{(4)}$

4.  $\frac{dT}{dr} = \frac{-3 \kappa \rho(r) L(r)}{16 \pi \sigma T^3(r) \cdot r^2}$  (energie-fluks, stralingsevenwicht)  
*stralings diffusie konstante*

Voor de gasvergelijking gebruiken we de ideale gaswet

$p = \rho \frac{RT}{\mu}$

R = universele gasconstante  
 $\mu$  = mol.gewicht in atomaire eenheden

De randvoorwaarden zijn:

$M(0) = 0$        $T(R) = 0$        $M(R) = M_{\text{totaal}}$   
 $L(0) = 0$        $P(R) = 0$

TAKEN

I. Vind met behulp van de hydrostatiese evenwicht vgl. en de ideale gaswet een stermodel voor een "ster" geheel bestaande uit waterstof, met massa M, straal R en konstante dichtheid. Geef wat getallen voor de zon en jupiter (zoals centrale druk, centrale temperatuur en gemiddelde dichtheid).

2. a. Vind de centrale druk en temperatuur in verschillende sterren afhankelijk van  $M$  en  $R$ .
- b. Vind uit de structuur vergelijkingen de massa-lichtkracht relatie  $L$  als functie van  $M$  en bespreek deze. (Daar  $\kappa$  varieert tussen 1 en 10 nemen we deze als konstante).
- c. Vind een relatie tussen de grootte  $R$ , de temperatuur van de buitenlaag  $T_{\text{eff}}$  en de helderheid  $L$  van een ster en stel hiermee weer m.b.v. de structuur vergelijkingen een relatie op tussen  $L$  en  $T_{\text{eff}}$  voor z.g. hoofdreekssterren. Gebruik hierbij de vereenvoudigende veronderstelling dat voor hoofdreekssterren de energieproductie per gr.  $\epsilon$ , uitsluitend door proton-proton reacties geschiedt. Hiervoor is  $\epsilon(\rho, T) \propto \rho T^n$  met  $n$  variërend van 3.5 tot 5.5, afhankelijk van de grootte van  $T$ . Neem  $n \approx 4$   
 [Zie Schwarzschild p. 83]
- Zet de gevonden relatie  $\log L$  tegen-  $\log T_{\text{eff}}$  uit in een Hertzsprung-Russell diagram en trek daarin lijnen van konstante straal. Bespreek in hoeverre de gevonden relatie de hoofdreeks benadert. Waar liggen de afwijkingen en waarom?

3. Een belangrijke begrip in allerlei natuurkundige processen en dus ook ster-evolutie, is de tijdschaal waarop iets gebeurt. Het gaat hierbij om een globale aanduiding (we kijken niet op factoren kleiner dan 10) of een proces seconden, minuten, uren, dagen, jaren etc. duurt.
- N.B. de eerder gegeven structuur vergelijkingen zijn die voor evenwichts-situaties; ze bevatten geen tijdsafhankelijkheid en beschrijven dus nooit de evolutie van een ster.
- a. Schat de tijd dat de zon al zijn kern-energie uit zou stralen. Veronderstel dat 0.8% van de rustmassa in energie omgezet kan worden en dat de lichtkracht de huidige blijft.
- b. Schat de tijd die de zon nodig heeft zijn totale kinetische energie uit te stralen.

Deze laatste tijdschaal is belangrijk. Het geeft aan op welke schaal er iets gebeurt als er een afwijking is van termies evenwicht, dus als aan vgl. 3 niet geheel voldaan is. Licht dit nader toe. Deze tijd heet Kelvin-kontraktie tijd of ook termiese tijdschaal.

3c) We kunnen ons ook afvragen op welke tijdschaal er iets gebeurt als er t.g.v. een of andere oorzaak niet geheel voldaan wordt aan de hydrodynamiese evenwichts-vergelijking (bv. doordat de ster even samengeknepen wordt o.i.d.).

Op welke tijdschaal zal zich een supernova explosie manifesteren? Op welke schaal merken we veranderingen in een ster als de kernenergiebron "op" is? Op welke tijdschaal zien we sommige variabele sterren? Waar is/dit vergelijkbaar mee, en wat zou dit kunnen betekenen?

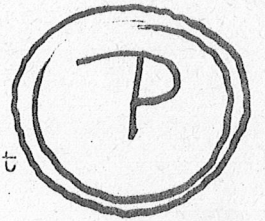
*termiese schaal*

Literatuur:

M. Schwarzschild, Structure and evolution of stars, H. II

Allen, Astrophysical Quantities

G. Stevens, juli 1972



HET INWELDIEN VAN WEL STER

student

Correctie op de instructie van februari 1972.

2. We willen nu relaties zoeken tussen  $M$ ,  $L$ ,  $T_{\text{buitenlaag}}$  e.d. voor verschillende sterren. Hiervoor moeten dus de structuurvergelijkingen voor verschillende randvoorwaarden  $M_{\text{totaal}}$  opgelost moeten worden. I.l.a. zal dat numeriek moeten gebeuren. Toch kunnen we analytisch een globale indruk krijgen van de te verwachten resultaten. Wij doen dit door de variabelen in de vergelijkingen dimensieloos te maken door ze uit te drukken in hun maximale waarden, bijv.  $r^* = r/R$ ,  $m^* = M(r)/M_{\text{tot.}}$ ,  $p^* = p/p_c$  enz. Transformeer de structuurvergelijkingen nu naar vergelijkingen in  $m^*$ ,  $p^*$ ,  $L^*$ ,  $T^*$ . De oplossingen hiervan hebben de vorm  $p^* = f_1(r^*, C_1)$ ,  $m^* = f_2(r^*, C_2)$  enz. Hierin zijn  $C_1$  t/m  $C_4$  functies van  $M_{\text{tot.}}$ ,  $p_c$  enz. Als de fysische processen die zich in de sterren afspelen dezelfde zijn, is het redelijk te veronderstellen dat de waarden van alle variabelen  $p$ ,  $M$ ,  $L$  en  $T$  als functie van  $r$  "schalen" op  $R$ , d.w.z. de gereduceerde grootheden zijn voor alle sterren dezelfde functies van  $r^*$ . Dit betekent dat voor alle sterren  $C_1$  t/m  $C_4$  dezelfde waarden hebben. Wanneer zal dat niet meer het geval zijn?

(Dan als in oude instructie de taken a), b) en c).)

1/3  
3c. Probeer deze dynamische tijdschaal te vinden. Veronderstel bijv. dat een massaelement  $4\pi r^2 \rho dr$  niet op plaats  $r$  zit waar drukkracht en gravitatiekracht elkaar opheffen, maar op plaats  $r + r_1$  met  $r_1 \ll r$ . Geef een eerste orde-benadering voor de kracht die op dit massaelement werkt. Hoe luidt de bewegingsvergelijking? Geef de oplossing en schat de oscillatietijd.