

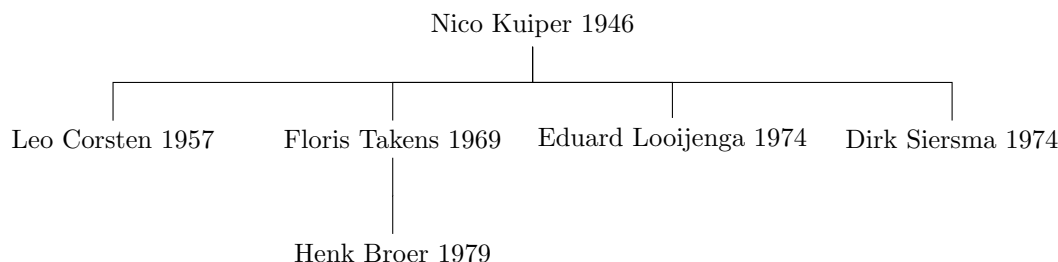
WISKUNDE MET EEN GULLE LACH

DIRK SIERSMA

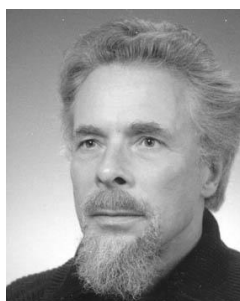
1. DE STAMBOOM

Ik herinner me nog de promotie van Henk op vrijdag 19 oktober 1979 in Groningen. Wellicht was dat de eerste keer, dat ik hem ontmoette. Op dezelfde dag was er ook de promotie van Albert Hummel. Vanuit Utrecht kwamen Hans Duistermaat en ik per trein naar Groningen en we hebben ons best gedaan om een stukje oppositie te voeren. Tenslotte kregen beide promovendi van Floris Takens hun bul uitgereikt.

Met de promotie kwam onze wiskundige familierelatie tot stand. Sindsdien is Henk mijn neefje. Zie hier een stukje van onze stamboom.



(A) Nico Kuiper



(B) Floris Takens



(c) Henk Broer

FIGUUR 1. Henk en zijn directe voorouders

Henk maakte deel uit van een goede Nederlandse meetkundige traditie, gezien de voorouders en hun promotieonderwerp:

- David Bierens de Haan, Leiden 1847, De Lemniscata Bernouillana,
- Pieter Hendrik Schoute, Leiden 1870, Homographie en hare toepassing op de theorie der oppervlakken van den tweeden graad,
- Willem van der Woude, Groningen 1908, Over elkaar snijdende normalen aan een ellipsoïde en een hyperellipsoïde,
- Nicolaas Hendrik Kuiper, Leiden 1946, Onderzoekingen over lijnmeetkunde,



(A) David Bierens de Haan



(B) Pieter Hendrik Schoute



(C) Willem van der Woude

FIGUUR 2. Dieper in de stamboom

- Floris Takens, Amsterdam(UvA) 1969, The minimal number of critical points of a function on a compact manifold and the Lyusternik-Schnirelmann category.

Op de site Mathematics Genealogy Project kan men al de neefjes en nichtjes vinden. Ook de oudoom Struik, die een hoge leeftijd bereikte.

Trouwens over het promotiediner in Huize Maas valt nog te vertellen, dat er veel werd gelachen en dat het heel gezellig was. Jammergenoeg moesten Hans en ik voor het toetje weg om nog de laatste trein naar Utrecht te kunnen halen.

2. SAMEN AAN DE SLAG

Na zijn benoeming tot hoogleraar in Groningen hebben Henk en ik samen diverse klussen voor de Nederlandse wiskunde uitgevoerd. Ik zal een tweetal hiervan noemen.

Allereerst de exercitie rond de samenstelling van de onderzoeksvisitatie commissie wiskunde in 2003-2004. Henk was toen voorzitter van de kamer Wiskunde van de VSNU. Henk en ik traden op als formateur van de visitatiecommissie. Dat betekende dat je op zoek moest naar een voorzitter en diverse leden, die het wiskundig veld in Nederland konden overzien. Een procedure met veel inspraak met een gang langs de sectie wiskunde van de KNAW en de Kamer Wiskunde. En dan ook nog de samenwerking met de medewerkers van de VSNU en de overgang daarvan naar de QANU. Geen gemakkelijke opgave; temeer omdat de meningen niet altijd eensluidend waren en de discussies op een onvoorstelbaar niveau plaats vonden. Een voorzitter kwam, maar ging ook weer. Tenslotte hadden we nog rekening te houden met de kermis in De Lutte.

Te pas en te onpas ging er bij ons thuis de telefoon, waarbij Henk met volle lach de volgende katastrofe kon melden. Ina riep dan: ‘Dat moet Henk weer zijn!’.

Tussendoor waren we nog bezig met een Masterplan Wiskunde en de nieuwe plannen rond Bachelor en Master.

De tweede belangrijke exercite was rond de vernieuwing van het wiskundeonderwijs in Nederland. In de tijden van boze beta's en Lieve Maria's (wie weet haar achternaam nog?) vond ik Henk bereid om in cTWO (commissie Toekomst Wiskunde Onderwijs) te gaan zitten om samen met leraren, vakdidactici en wetenschappers een hedentijds wiskundeprogramma voor vwo en havo te ontwerpen. Ook hier kwamen we in een strijdperk terecht, waarin strekkenden met luide stem de rekkelijken tot de orde wilden roepen. Gelukkig kwam er een sterk Gronings geluid: Stop Kaalslag Wiskunde. Tenslotte is het weer goed geworden met Henk en de tijd als bondgenoot. Na 8 jaar werk werd het programma door de Minister geaccordeerd. Zoals altijd blijft de vraag, wat er van terecht komt. De tijd zal dat leren.

3. COULOMB EVENWICHT OP EEN ELLIPS

Na dit organisatorisch gedoe, wil ik Henk nog een stukje wiskunde aanbieden. Ik verwacht, dat onderstaand onderwerp in zijn interessesfeer past. Recent kwam ik met mijn collega's Gaiane Panina en Georgi Khimshiashvili het volgende probleem tegen:

“Neem 3 puntladingen op een ellips, wat zijn de equilibria onder de Coulomb potentiaal?”

Fysici [1] hadden hieraan al gerekend. Hun observaties riepen de nodige vraagtekens op. Met zijn drieën gingen we aan de slag tijdens een Recherche en Trinome op het CIRM in Luminy bij Marseille (Henk's voorkeur gaat uit naar Barcelona). Tenslotte kregen wij een rigorous resultaat, dat geldig is voor gesloten krommen in het algemeen; zie [2]. Ook vonden we een onverwachte relatie met kaustieken. Ik presenteer de resultaten nu voor een ellips. Ik geloof, dat dit een lievingskromme van Henk is. Het interressante is ook, dat soortgelijke resultaten gelden zijn voor andere centrale krachten.

3.1. Drie puntladingen in evenwicht. Neem drie punten P_1, P_2, P_3 op een ellips in het platte vlak, voorzien van ladingen $q = (q_1, q_2, q_3)$.

De Coulomb potentiaal is

$$E_q = - \sum_{i < j} \frac{q_i q_j}{d_{ij}},$$

waar $p_i = \overrightarrow{OP_i}$, en $d_{ij} = \|p_i - p_j\|$. De Coulomb-krachten zijn $F_{ji} = \frac{q_i q_j}{d_{ij}^3} (p_i - p_j)$ met resultanten $F_i = \sum_{j \neq i} F_{ji}$. Laat T_i de raakvektor aan de ellips zijn in het punt P_i .

Definitie 1. *Drie puntladingen op een ellips zijn in Coulomb-evenwicht indien in elk punt P_i de resultante van de krachten loodrecht op T_i staat.*

$$\langle F_i, T_i \rangle = \sum_{j \neq i} \frac{q_i q_j}{d_{ij}^3} \langle p_i - p_j, T_i \rangle = 0 \quad \forall i.$$

We noemen de ladingen q evenwichtsladingen voor P_1, P_2, P_3 .

Dit levert de volgende matrix vergelijking:

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = 0, \text{ waarbij } a_{ij} = \frac{\langle p_i - p_j, T_i \rangle}{d_{ij}^3}.$$

Als de rang van de matrix 3 is, dan bestaat er alleen de nul-oplossing. Voor een niet triviale oplossing moet de rang van de matrix kleiner of gelijk aan 2 zijn.

Definitie 2. *De punten P_1, P_2, P_3 voldoen aan de corang 1 voorwaarde als rang van de matrix*

$$(a_{ij}) = \left(\frac{\langle p_i - p_j, T_i \rangle}{d_{ij}^3} \right)$$

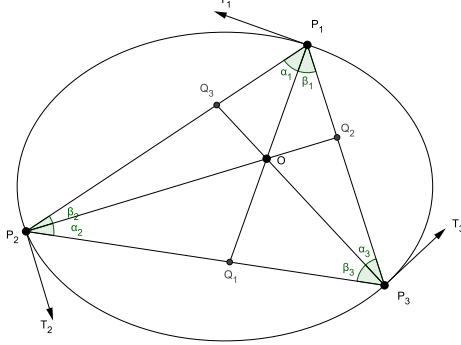
kleiner of gelijk aan 2 is.

Als de rang van de matrix (a_{ij}) gelijk is aan 2, dan heeft de matrixvergelijking en 1-dimensionale oplossingsruimte en definieert een unieke verhouding $[q_1 : q_2 : q_3]$ in $\mathbb{P}^2$.

Propositie 1. *Drie punten op de ellips P_1, P_2, P_3 voldoen aan de corang 1 voorwaarde dan en slechts dan als de drie normalen elkaar in slechts één punt snijden (figuur 3).*

Bewijs. Na de invoering van de hoeken $\alpha_i = \angle P_{i+1}, P_i Q_i$, $\beta_i = \angle Q_i P_i P_{i-1}$ (met mod 3 regel) en eenheidsraakvectoren T_i , merken we op dat

$$a_{12} = \frac{\langle p_1 - p_2, T_1 \rangle}{d_{12}^3} = -\frac{\sin \alpha_1}{d_{12}^2}, \quad a_{13} = \frac{\langle p_1 - p_3, T_1 \rangle}{d_{13}^3} = \frac{\sin \beta_1}{d_{13}^2}, \quad \text{etc.}$$



FIGUUR 3. Ortho3been en de stelling van Ceva

Dus geldt, dat de rang van (a_{ij}) kleiner gelijk aan 2 is dan en slechts dan als

$$a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} = 0.$$

Deze laatste conditie is equivalent met

$$\sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin \alpha_3 = \sin \beta_1 \sin \beta_2 \sin \beta_3.$$

Via de Stelling van Ceva geldt dat de rechten P_1Q_1, P_2Q_2, P_3Q_3 door één punt gaan dan en slechts dan als de lengten (voorzien van een teken) van de segmenten aan de volgende relatie voldoen.

$$\frac{P_2Q_1}{Q_1P_3} \cdot \frac{P_3Q_2}{Q_2P_1} \cdot \frac{P_1Q_3}{Q_3P_2} = 1,$$

en dat is in ons geval equivalent met

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \beta_1} \cdot \frac{\sin \alpha_2}{\sin \beta_2} \cdot \frac{\sin \alpha_3}{\sin \beta_3} = 1.$$

□

Definitie 3. Een ortho3been is gedefinieerd als een ongeordend drietal (verschillende) punten op de ellips, zodat de normalen door één punt gaan. Het gemeenschappelijke punt noemen we het ortho3centrum.

Het is nu direct duidelijk dat

Stelling 1. Voor 3 punten op een ellips dan bestaan er ladingen $(q_1 : q_2 : q_3)$ zo, dat de punten in Coulomb-evenwicht zijn dan en slechts dan als ze een ortho3been vormen.

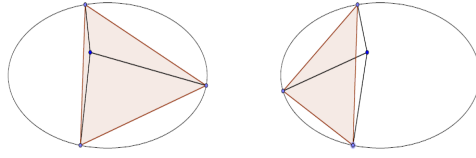
Voor positieve ladingen geldt:

Propositie 2. Als P_1, P_2, P_3 aan de corang 1 voorwaarde voldoen, dan bestaan er positieve evenwichtsladingen dan en slechts dan als de drie normalen in de punten P_i elkaar snijden in het inwendige van de driehoek $\triangle P_1P_2P_3$ (figuur 4).

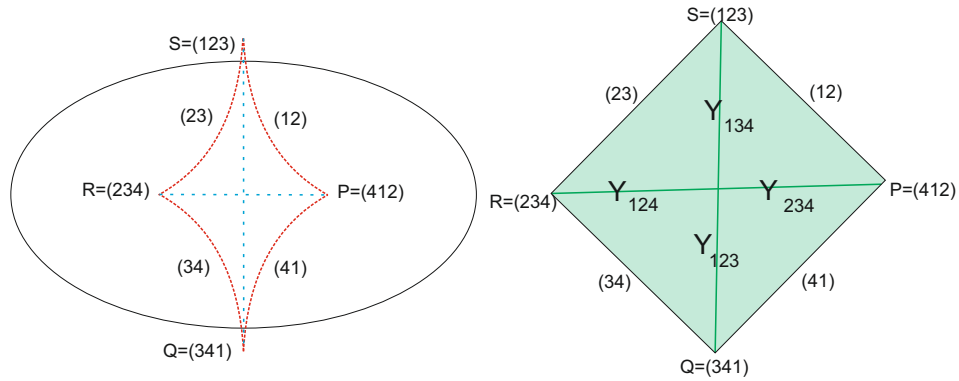
Bewijs. Voor een oplossing (q_1, q_2, q_3) met alle $q_i > 0$, hebben we

$$\begin{aligned} \text{sign } a_{12} &= -\text{sign } a_{13} \\ \text{sign } a_{21} &= -\text{sign } a_{23} \\ \text{sign } a_{31} &= -\text{sign } a_{32}. \end{aligned}$$

Op een positieve faktor na is $a_{12} = \langle p_1 - p_2, T_1 \rangle$ and $a_{13} = \langle p_1 - p_3, T_1 \rangle$. Dus volgt dat P_1P_2 and P_1P_3 aan verschillende kanten van de normaal in P_1 liggen. □



FIGUUR 4. Ortho3benen met positieve ladingen (links) en verschillend teken (rechts)



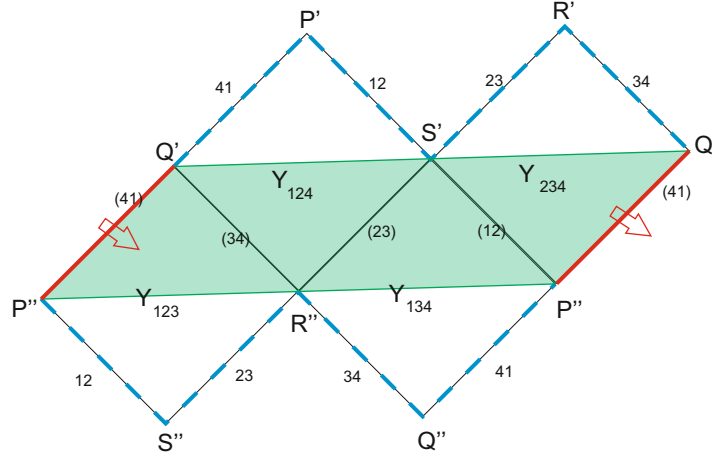
FIGUUR 5. De ellips en zijn kaustiek (links); gebieden met positieve ladingen (links)

3.2. Kaustieken. De evoloot of kaustiek van een gesloten kromme bestaat uit de krommingscentra van alle punten van de kromme. Een andere beschrijvingen is als de omhullende van de normalen op de kromme. De kaustiek van een ellips staat in het linkerplaatje van figuur 5.

Wat is nu de relatie tussen de kaustiek en ortho3benen ?

Voor een ellips geldt, dat elk punt in het inwendige van de kaustiek op precies 4 normalen ligt. Op de randen vallen er 2 samen en in de kusp punten zelfs 3.

3.3. Topologie van de verzameling ortho3benen. Elk punt binnen de kaustiek correspondeert met 4 verschillende ortho3benen (van de 4 normalen, steeds één weglaten). Alsdus kan de configuratieruimte van de ortho3benen worden gemaakt, door 4 kopiën van het (gesloten) kaustiekgebied via de kaustiek aan elkaar te plakken. Hierbij moet er goed opgepast worden welken randen aan elkaar geplakt worden en welke niet worden geplakt. Een voor de hand liggende nummering Y_{123} , etc is daarbij nuttig. Op de randen worden steeds 2 kopiën geplakt; bij een kusp spelen er 3 een rol. Dit plakwerk levert dan het volgende resultaat (Zie de figuren 5 en 6 voor details):



FIGUUR 6. Cilinder van ortho3benen op de ellips. De blauwe stippel-lijnen zijn de rand van de cilinder. De twee rode dikke lijnen zijn de segmenten, die worden geplakt. Het groene gebied betreft positieve ladingen.

Propositie 3. *Voor een ellips geldt:*

- (1) *De afsluiting van de verzameling ortho3benen is homeomorf met een cilinder (inclusief de 2 randcomponenten).*
- (2) *Ook de ruimte van ortho3benen met positieve ladingen is een cilinder.*

Tot zover dit stukje wiskunde. Tot slot nog een opgave voor Henk: Wat valt er te zeggen over de stabiliteit van de evenwichtspunten en de stroming, die de Coulomb potentiaal veroorzaakt ?

REFERENCES

- [1] J.Aguirregabiria, A.Hernandez, M.Rivas, M.Valle, *On the equilibrium configuration of point charges placed on an ellipse*, Computers in Physics 4, 1990, 60-63.
- [2] G.Khimshiashvili, G.Panina, D.Siersma, *Equilibrium of point charges on convex curves*, Journal of Geometry and Physics (to appear)
- [3] S.Tabachnikov, *The Four Vertex Theorem Revisited*, Amer. Math. Monthly, 102, 1995, 912-916.

UNIVERSITY OF UTRECHT, UTRECHT, THE NETHERLANDS, E-MAIL: D.SIERSMA@UU.NL.