

KATASTROFE-THEORIE

door

D. Siersma

Natuurkundige Voordrachten N.R. 57 (1979) , 157-178

Lezing voor de  
Koninklijke Maatschappij voor Natuurkunde Diligentia

's Gravenhage 29 januari 1979

## KATASTROFE-THEORIE

door

D. Siersma

### 1. Inleiding

Laat een verschijnsel afhangen van een aantal parameters. Voor veel waarden van deze parameters verandert zo'n verschijnsel wellicht niet als er kleine storingen optreden. De parameterwaarden, waar bij kleine storingen echter grote verschillen kunnen optreden noemt men *katastrofaal*. Deze katastrofale controle-waarden vormen tesamen de zg. *katastrofe-verzameling K*.

In veel voorbeelden komt men deze katastrofe-verzamelingen tegen. Bijvoorbeeld op de weerkaart. Er zijn hier twee parameters, nl. de plaatscoördinaten. Het verschijnsel, dat men bestudeert is het weer. Als significante interne variabele beschouwt men meestal de temperatuur.

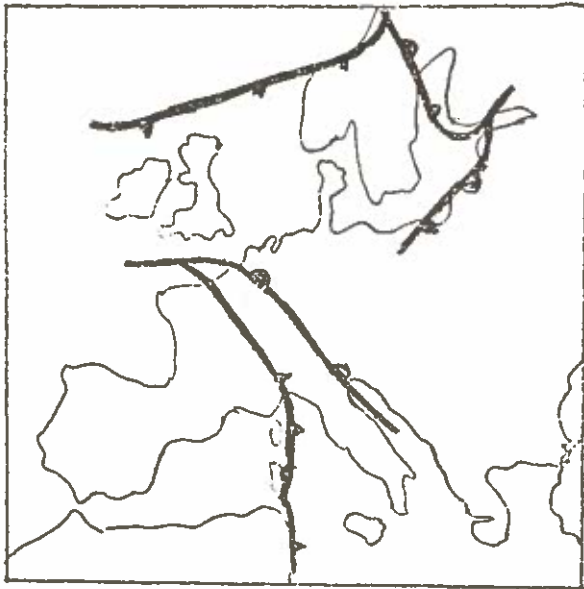


Fig. 1

De frontlijnen scheiden hier koude en warme lucht en vormen aldus de katastrofe-verzameling. Bovenstaande weerkaart is uiteraard tweedimensionaal, de katastrofe-verzameling is één-dimensionaal. Voert men de hoogte en ook de tijd als externe parameters toe (we redeneren dan in vier-dimensionale ruimte) dan zal de katastrofe-verzameling in het algemeen een drie-dimensionale deelverzameling zijn.

Een ander voorbeeld van een katastrofe-verzameling treedt op in de natuurkunde bij de zg. fase-overgangen.

Vaak kiest men de druk (P) en temperatuur (T) als externe parameters. Men komt daarbij fase-diagrammen tegen van het volgende type:

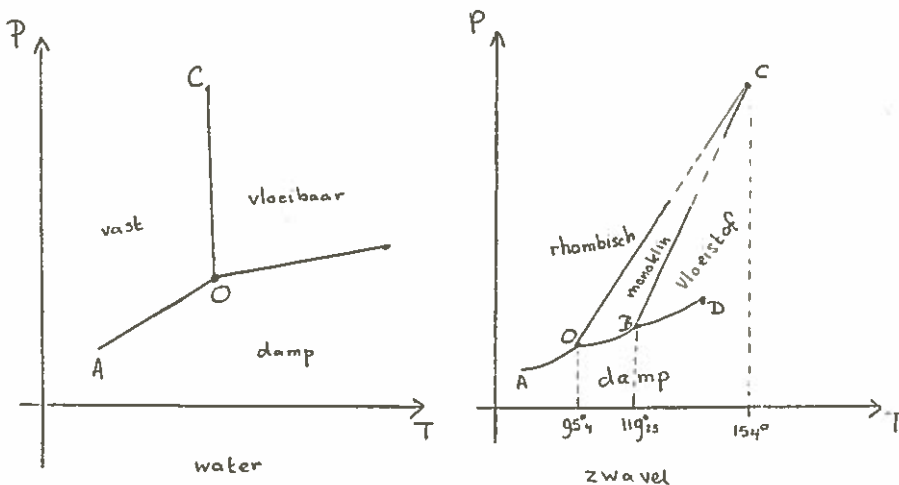


Fig. 2

De katastrofe-verzameling scheidt hierbij de verschillende toestanden: vast, vloeibaar en gas (en soms diverse vormen van de vaste toestanden). In de geologie zijn breukvlakken duidelijke voorbeelden van katastrofe-verzamelingen. Ook hier is het interessant de factor tijd in de beschouwingen te betrekken.

In de optica kan men de kaustieken zien als katastrofe-verzameling. De lijst met voorbeelden van katastrofen is eenvoudig uit te breiden met voorbeelden uit de biologie, de sociale wetenschappen, economie, linguïstiek, zelfs met stripverhalen en moppen-tappen.

## 2. Doelstellingen van de Katastrofe-Theorie

Het doel van de katastrofe-theorie (K.T.) is de studie van de katastrofe-verzameling.

We formuleren nu allereerst het *principe van de structurele stabiliteit*.

Door variatie van de externe parameters van het systeem ontstaat een familie van verschijnselen. De structurele stabiliteit van deze familie wil zeggen, dat bij kleine storingen deze familie niet significant verandert. Uitgaande van het principe van de structurele stabiliteit probeert men de elementaire bouwstenen van de catastrofe-verzameling te ontdekken en te beschrijven. Van huis uit is de K.T. dus kwalitatief en zijn fundamentele oogmerk is het uitleggen van een evolutie van vormen.

Bovenstaande opzet van de K.T. is erg vaag. Volgens René Thom, de schepper van de theorie, is het geen wiskundige theorie, maar meer een denkraam. Zodra de ideeën, die ontwikkeld werden met behulp van K.T. mathematisch geformuleerd konden worden, dan werden ze opgenomen binnen specifieke takken van de wiskunde, zoals singulariteiten van gladde afbeeldingen, stratificaties, singulariteiten van differentiaalvormen, bifurcatietheorie, kwalitatieve dynamica, etc. Daarom is K.T. geen mathematische theorie. Natuurlijk ontstond K.T. uit de wiskunde en leidde ze ook tot belangrijke ontwikkelingen in de wiskunde zelf.

### *3. Iets over Thom en Zeeman*

Het is onmogelijk een artikel over K.T. te schrijven zonder de namen van twee wiskundigen, namelijk die van René Thom en van Christoffer Zeeman.

Eerstgenoemde is een Fransman, die medio 1960-1970 deze theorie ontwikkelde en z'n gedachten neerschreef in het boek „Stabilité structurelle et Morphogénèse” [4], dat pas in 1972 verscheen, maar waarvan eerdere versies al voor 1970 circuleerden als foto-kopieën. René Thom is een beroemd wiskundige met als specialisme de topologie. Zijn wiskundig werk genoot en geniet nog steeds grote bekendheid en werd bekroond met de Field-medal, de hoogste onderscheiding binnen de wiskunde. Thans is hij verbonden aan het Institut des Hautes Etudes Scientifiques (I.H.E.S.) te Bures-sur-Yvette bij Parijs, een research-instituut waaraan uitmuntende wiskundigen en theoretisch fysici uit de gehele wereld voor korte of langere tijd verbonden zijn.

De toepassingen van de K.T., die Thom onderzoekt hebben voornamelijk betrekking op biologie, linguïstiek, filosofie, etc. In verband hiermee is lezenswaard de discussie tussen Thom en Zeeman [6].

De Engelsman Christoffer Zeeman is ook een wiskundige van grote be- gaafdheid. Hij is verbonden aan de University of Warwick (Coventry). In een iets later stadium kwam hij in contact met de K.T. en heeft hij zich opgeworpen als sterke propagandist van de theorie. Hij trachtte o.a. modellen te maken voor diverse  $\gamma$ -wetenschappen. Verscheidene artikelen gaan over: hartslag, zenuwimpuls, golfbreking, katastrofe-machines, effectenmarkt, biologie, gevangenisopstanden, Anorexia Nervosa, elasticiteitsleer, stabiliteit van schepen.

Hij is meer dan Thom geïnteresseerd in kwantitatieve gegevens. Trouwens, het optreden van Thom en dat van Zeeman toont in z'n geheel duidelijke verschillen; kort gezegd: Zeeman is een verkoper van de theorie, Thom is meer een priester.

#### 4. Elementaire Katastrofe-Theorie (E.K.T.)

Mathematisch goed te beschrijven is de zg. elementaire katastrofe-theorie (E.K.T.). We geven hier een schets van de theorie.

Men neemt aan, dat er een potentiaalfunctie  $V = V(x)$  bestaat, waarbij  $x$  een vector is in de  $t$ -dimensionale toestandsruimte  $\mathbb{R}^t$ . We stellen nu de hypothese, dat het systeem tracht de potentiaal  $V(x)$  te minimaliseren.

De evenwichtstoestanden van het systeem corresponderen met de stationaire punten van  $V(x)$  en wel de stabiele evenwichtstoestanden met de minima van  $V(x)$  (figuur 3).

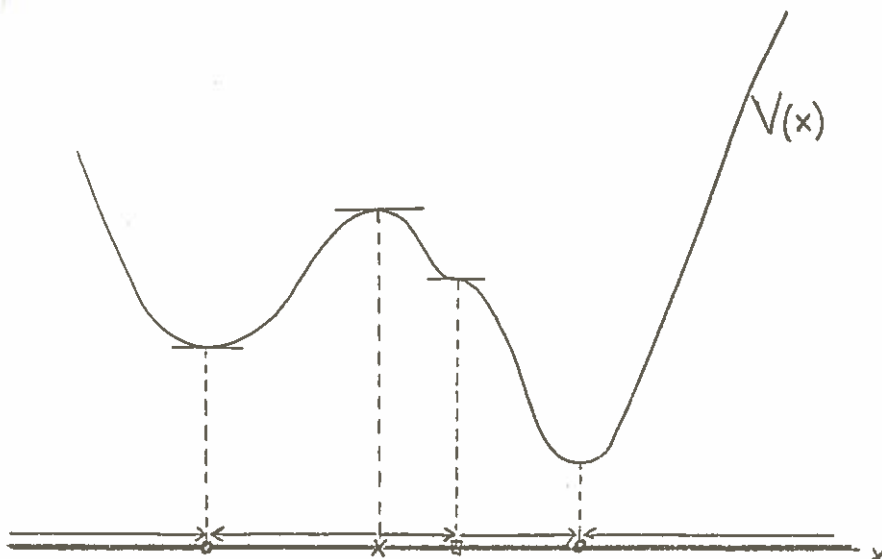


Fig. 3

In het algemeen kunnen er verschillende minima zijn. We nemen vervolgens aan, dat het minimaliseren plaatsvindt volgens de gradiëntvergelijking:

$$\dot{x} = -\text{grad } V(x)$$

waarbij  $x$  in  $\mathbb{R}^t$ ,  $x = (x_1, \dots, x_t)$  en  $\text{grad } V = (\frac{\partial V}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_t})$ .

Als er externe parameters zijn, die de potentiaalfunctie kunnen beïnvloeden, ontstaat er een familie van potentialen  $V = V(x, \lambda)$  met  $\lambda$  een vector in een  $c$ -dimensionale controle-ruimte  $\mathbb{R}^c$ .

Laat het systeem verder voldoen aan de differentiaalvergelijking:

$$\dot{x} = -\text{grad}_x V(x, \lambda)$$

De evenwichtsverzameling is nu

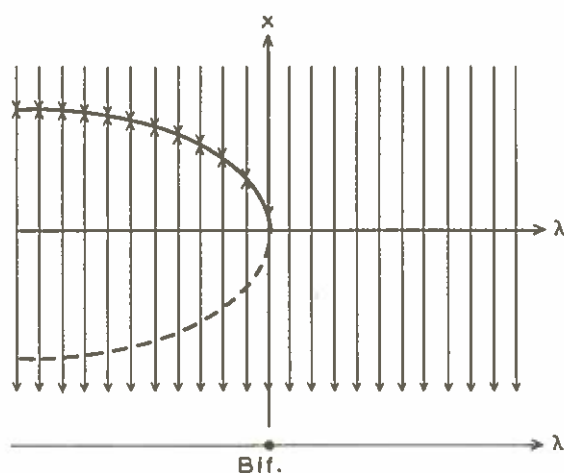
$$M = \{ (x, \lambda) \mid \text{grad}_x V(x, \lambda) = 0 \} \text{ in } \mathbb{R}^{1+c}$$

De projectie  $\chi = \chi(x, \lambda) = \lambda$  van  $M$  naar  $\mathbb{R}^c$  noemt men wel de *katastrofe-afbeelding*. Bij gegeven  $\lambda$  in  $\mathbb{R}^c$  kunnen er verschillende stationaire punten  $x$  van  $V(x, \lambda)$  zijn, dus verschillende  $x$  in  $\mathbb{R}^1$ , waarvoor  $(x, \lambda)$  in  $M$  ligt. Deze meerwaardigheid is onderwerp van onze studie.

Onder de bifurcatieverzameling  $B$  verstaan we die controle-variabelen  $\lambda$  in  $\mathbb{R}^c$ , waarbij het aantal evenwichtstoestanden verandert. Deze bifurcatieverzameling  $B$  hoeft niet dezelfde te zijn als de katastrofeverzameling  $K$ , maar is mathematisch eenvoudiger te hanteren en heeft ook betrekking op de niet-stabiele evenwichtstoestanden (zadelpunten, maxima). Soms is men ook nog geïnteresseerd in die parameterwaarden, waar stationaire punten dezelfde potentiaalwaarden hebben (de zg. Maxwell-verzameling).

Ter verduidelijking volgen nu enkele voorbeelden van gradiëntssystemen, die afhangen van een of meer parameters. Mathematisch is het niet lastig deze differentiaalvergelijkingen te integreren. In de figuren geven we het gedrag van de oplossingskrommen met pijltjes aan.

Fig. 4



Voorbeelden:

$$1. V(x, \lambda) = \frac{x^3}{3} + \lambda x$$

$$M: x^2 + \lambda = 0$$

$$\dot{x} = -(x^2 + \lambda)$$

$$\chi(x) = \lambda$$

$B$  bestaat uit  $\lambda = 0$

$$2. V(x, \lambda) = \frac{x^4}{4} + \lambda \frac{x^2}{2}$$

$$M: x^3 + \lambda x = 0$$

$$\dot{x} = -(x^3 + \lambda x)$$

$$\chi(x) = \lambda$$

B bestaat uit  $\lambda = 0$

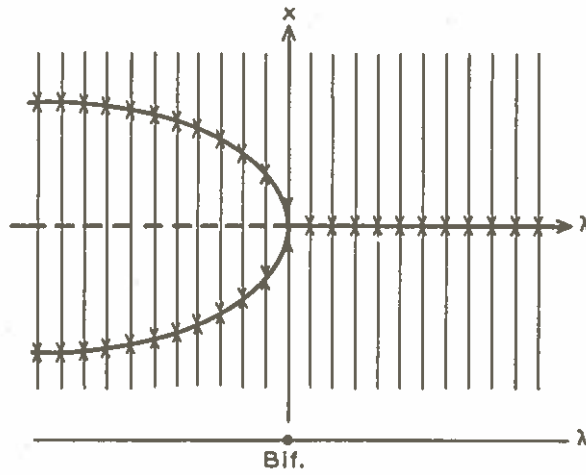


Fig. 5

$$3. V(x, \lambda) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} - \lambda x$$

$$M: x^3 - x - \lambda = 0$$

$$\dot{x} = -(x^3 - x - \lambda)$$

$$\chi(x) = \lambda$$

B bestaat uit  $\lambda = \pm \frac{1}{3}\sqrt{3}$

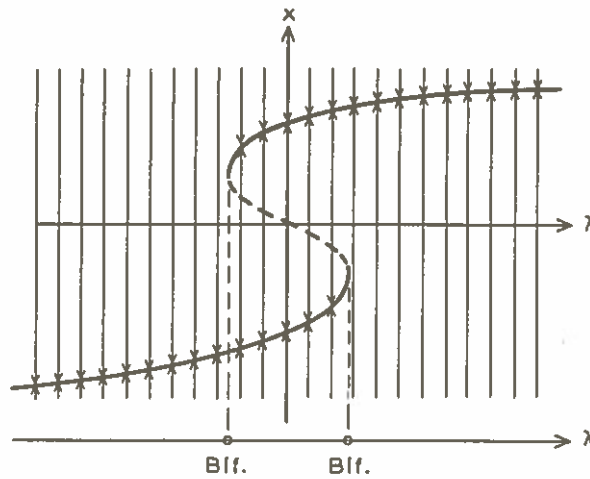


Fig. 6

#### 4. De zg. kusp-katastrofe

$$V(x, \lambda, \mu) = \frac{x^4}{4} + \frac{\lambda x^2}{2} + \mu x \quad M: x^3 + \lambda x + \mu = 0$$

katastrofe-afbeelding  $\chi(\lambda, x) = (\lambda, -x^3 - \lambda x)$

$$\text{singulariteiten van } \chi: \begin{vmatrix} 1 & -x \\ 0 & -3x^2 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad : \quad 3x^2 + \lambda = 0$$

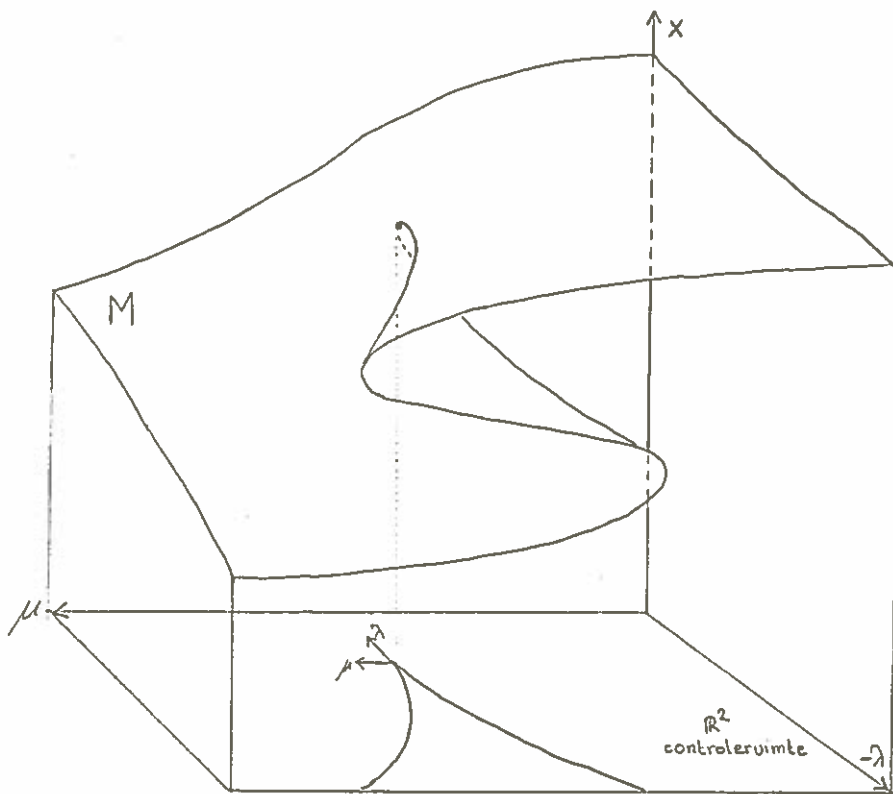


Fig. 7

De vouwkromme  $S$  wordt gegeven door:

$$\begin{aligned} x^3 + \lambda x + \mu &= 0 \\ 3x^2 + \lambda &= 0 \end{aligned}$$

d.w.z. door  $(\lambda, \mu, x) = (-3t^2, 2t^3, t)$

De bifurcatie-verzameling  $B$  wordt gegeven door

$$\begin{aligned} (\lambda, \mu) &= (-3t^2, 2t^3) \quad \text{d.w.z.} \\ 4\lambda^3 + 27\mu^2 &= 0 \end{aligned}$$

Mathematisch is het duidelijk hoe in dit geval het principe van de structurele stabiliteit vertaald dient te worden. Voor  $c \leq 4$  ziet de lijst van lokale potentiaalfamilies die structureel stabiel zijn, er als volgt uit:



*Lijst van Thom's zeven standaardmodellen*  
(de zg. elementaire katastrofen)

naam	c	t	V(potentiaalfamilie)
Vouw	$\geq 1$	1	$\frac{1}{3}x^3 - ax$
Kusp	$\geq 2$	1	$\frac{1}{4}x^4 - ax - \frac{1}{2}bx^2$
Zwaluwstaart	$\geq 3$	1	$\frac{1}{5}x^5 - ax - \frac{1}{2}bx^2 - \frac{1}{3}cx^3$
Vlinder	$\geq 4$	1	$\frac{1}{6}x^6 - ax - \frac{1}{2}bx^2 - \frac{1}{3}cx^3 - \frac{1}{4}dx^4$
Hyperbolische umbiliek	$\geq 3$	2	$x^3 + y^3 + ax + by + cxy$
Elliptische umbiliek	$\geq 3$	2	$x^3 - xy^2 + ax + by + cx^2 + cy^2$
Parabolische umbiliek	$\geq 4$	2	$x^2y + y^4 + ax + by + cx^2 + dy^2$

N.B. Als de dimensie van de toestandsruimte groter is, voegt men kwadraten toe in de overige variabelen. Deze zijn echter niet significant voor de beschrijving van de katastrofe-afbeelding. De evenwichtsverzameling en de bifurcatieverzameling volgen op dezelfde wijze als in het voorbeeld van de kusp.

Dat bovenstaande katastrofen werkelijk de elementaire bouwstenen van de katastrofe-verzameling zijn, is inderdaad bewezen (zie hiervoor bijvoorbeeld Zeeman [11]).

Voor generieke  $V(x,\lambda)$  en  $c \leq 4$  geldt namelijk:

1. de evenwichtsverzameling  $M$  is glad (zonder singulariteiten).
2. de katastrofe-afbeelding is stabiel onder kleine storingen.
3. voor punten van  $M$ , waarin bifurcatie optreedt, kan het model (na eventuele coördinatentransformatie) beschreven worden door één van Thom's zeven standaardmodellen.

Op het bewijs van deze stelling komen we later nog terug.

### 5. Agressie

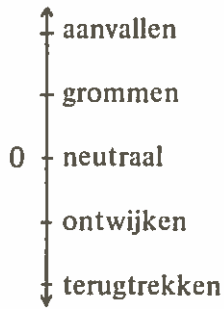
Een veel geciteerd voorbeeld is het onderzoek van Konrad Z. Lorenz naar agressie van honden. Voor een K.T.-uitwerking zie Zeeman [9]. Hier volgt slechts een korte schets.

Het gedrag van honden wordt geobserveerd naar aanleiding van twee controle-variabelen:

$p$  = woede                      en                       $q$  = angst.

De  $p$  wordt bepaald uit de stand van de mond en de  $q$  uit de stand van de oren.

Het gedrag van de hond wordt vervolgens genoteerd in een schaal, lopend van aanvallen tot terugtrekken.



De kansdichtheden zijn weergegeven in Fig. 8.  
 De punten waarin de kansdichtheden extremaal zijn, worden weer-  
 gegeven in een grafiek (1, 2 of 3-waardig).  
 (zie Fig. 9.)

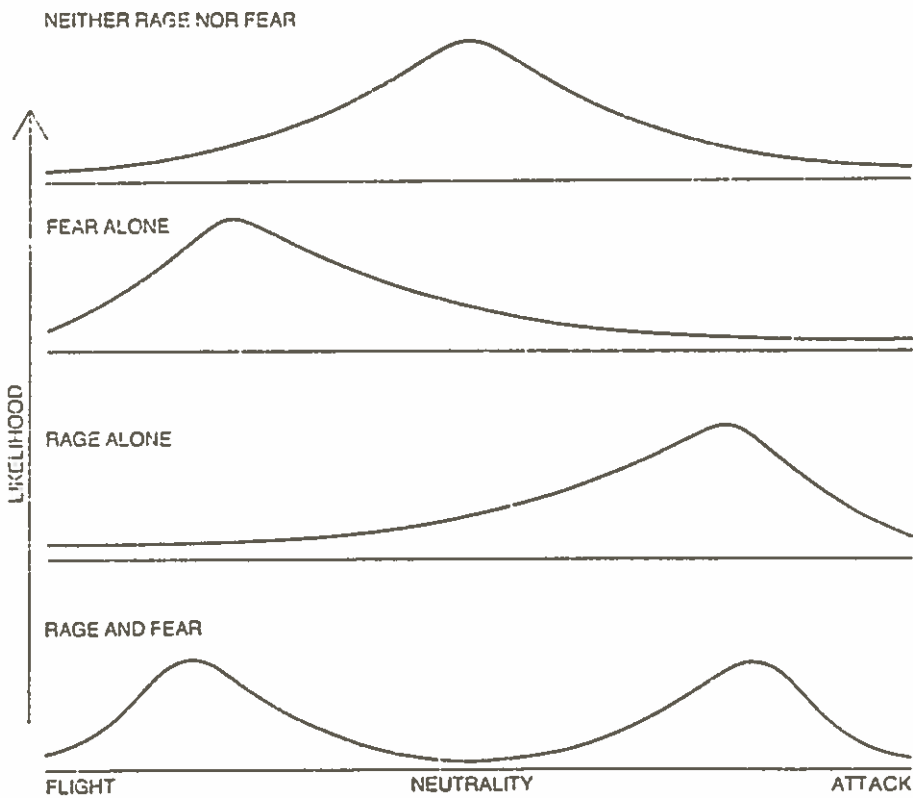


Fig. 8

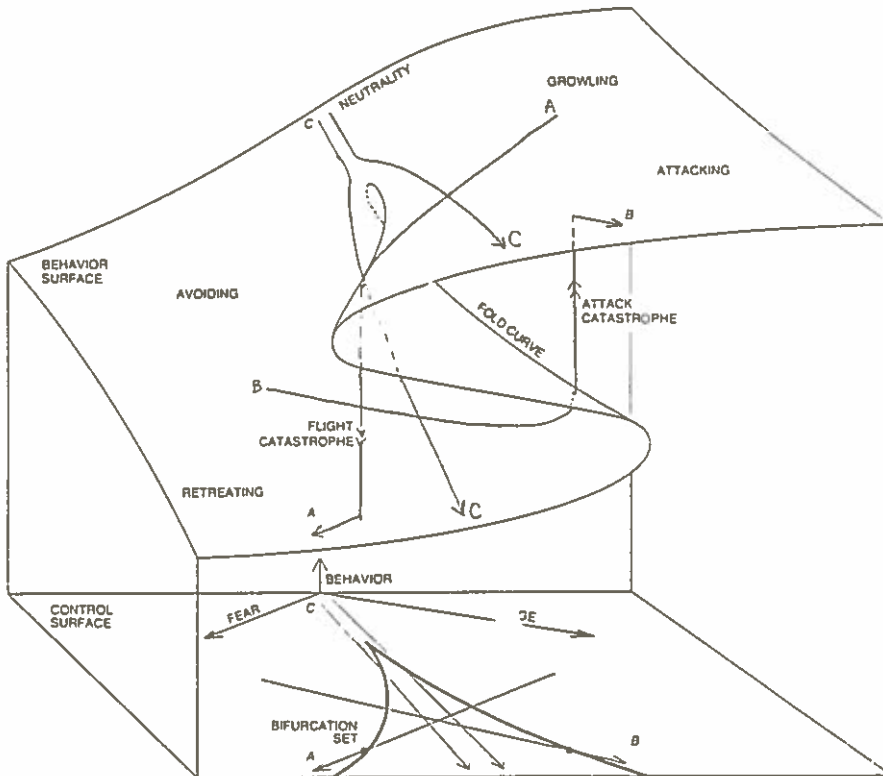


Fig. 9

De figuur is duidelijk het evenwichtsoppervlak van de kusp-katastrofe. Bij variatie van de controle-variabelen kan men uit deze figuur de gevolgen aflezen voor het gedrag van de hond.

De lezer probeer zelf de in de figuur aangegeven variaties A, B en C. Of er een catastrofale verandering optreedt hangt niet alleen af van het passeren van de bifurcatie-verzameling maar bovendien van de „etage” van het gedragsoppervlak, waarmee het gedrag van de hond correspondeert.

Een belangrijke vraag achter het geheel is natuurlijk: waar is de potentiaalfunctie? Dat zo'n functie zou bestaan is in het geheel niet duidelijk. Dit is ook niet de opzet van de K.T.. K.T. toont hier alleen aan, dat er een simpel model is met een dynamiek, die aansluit bij experimenteel bekende resultaten.

Wellicht brengt K.T. hier nieuw onderzoek op gang naar diepere oorzaken van het gedrag van de hond en treden daarbij wellicht afwijkingen aan het licht, die de kusp-katastrofe of E.K.T. uitsluiten, en die wijzen op een ingewikkelder dynamiek.

### 6. Euler-buiging

Twee massieve stangen van lengte 1 zijn via een scharnier verbonden, waarbij een veer probeert de hoek tussen de stangen maximaal te houden.

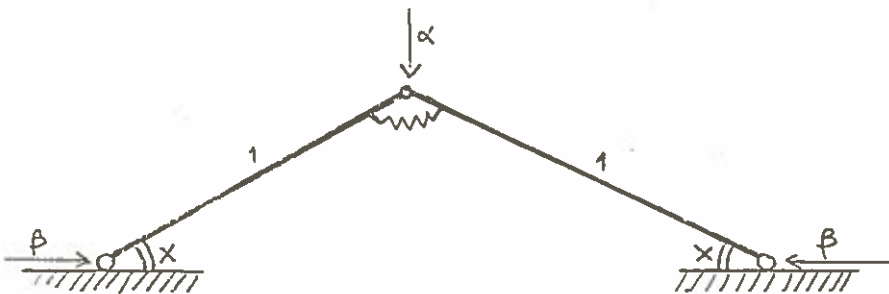


Fig. 10

Men brengt tweezijdige compressie  $\beta$  aan in de vrije eindpunten van de constructie. Bovendien wordt een lading  $a$  bevestigd op het scharnier. Bij bepaalde combinaties van  $a$  en  $\beta$  zal buiging plaatsvinden en soms kan de constructie plotseling doorknaken. De energie van het systeem wordt gegeven door

$$V = \frac{1}{2}\mu(2x)^2 + a\sin x - 2\beta(1 - \cos x)$$

waarbij de termen achtereenvolgens betrekking hebben op de elastische energie van de veer, en de potentiële energie van de krachten  $a$  en  $\beta$ .

Er geldt nu voor evenwicht:

$$\dot{V} = 4\mu x + a\cos x + 2\beta\sin x = 0$$

Verder is:

$$\ddot{V} = 4\mu - a\sin x - 2\beta\cos x = 0\zeta$$

Bij een uitgangssituatie  $a = \beta = 0$  en  $x = 0$  laten we  $\beta$  vanuit 0 stijgen. Het punt  $x = 0$  blijft stationair, want  $V(0) = 0$ . We zien aan de vergelijking, dat  $\ddot{V}(0) = 0$  als  $4\mu = 2\beta$ .

Verder geldt: voor  $\beta < 2\mu$  is  $x = 0$  een minimum van  $V(x)$   
 voor  $\beta > 2\mu$  is  $x = 0$  een maximum van  $V(x)$

Als  $\beta = 2\mu$  begint de buiging:

De Taylorbenadering om  $x = 0$  van

$$V = 2\mu x^2 + a\sin x - 2\beta(1 - \cos x)$$

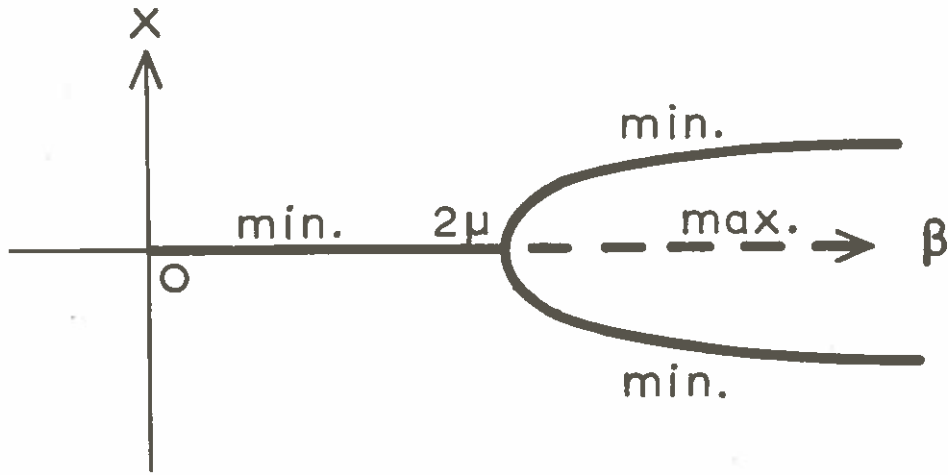


Fig. 11

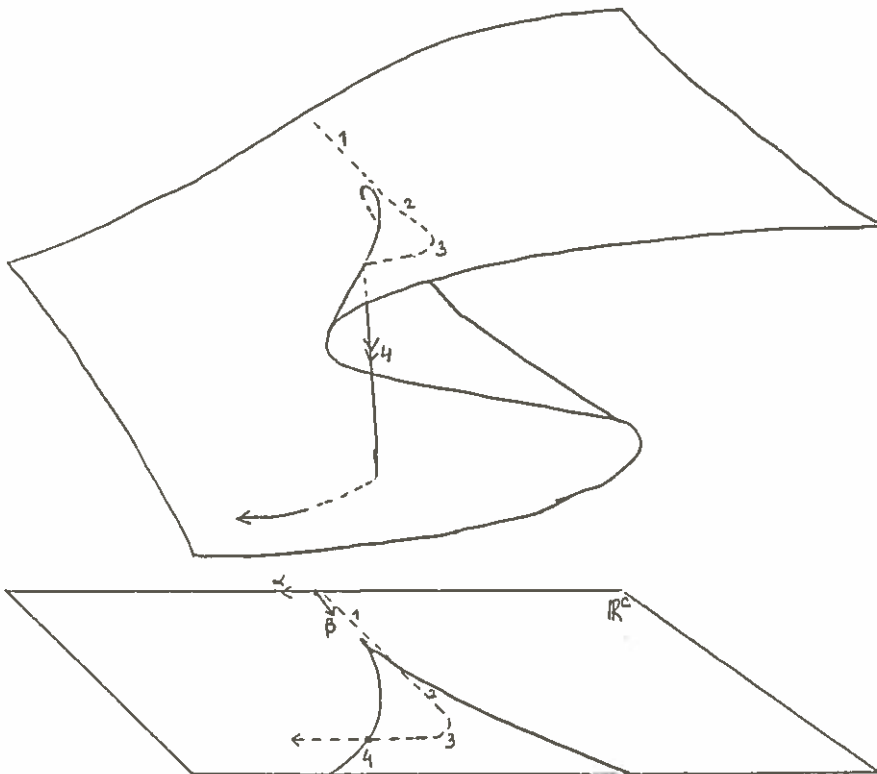


Fig. 12

is nu:

$$V = 2\mu x^2 + a(x - \frac{x^3}{6}) + 2\beta(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}) + O(x^5)$$

$$V = ax - (\beta - 2\mu)x^2 - \frac{a}{6}x^3 + \frac{\beta}{12}x^4 + O(x^5)$$

Dit is nabij  $x = 0$ ,  $a = 0$ ,  $\beta = 2\mu$  om te schalen tot

$$V = V_{0,2\mu} + px + q\frac{x^2}{2} + \frac{\mu}{6}x^4$$

Door  $x := x + \frac{a}{2\beta}$  verdwijnt eerst de  $x^3$ -term en  $O(x^5)$  verdwijnt met behulp van de algemene theorie.

De in de figuur aangegeven weg in de controleruimte  $\mathbb{R}^c$  laat voor  $a = 0$  de  $\beta$  toenemen van 0 tot voorbij  $\beta = 2\mu$ , waarbij, dankzij een kleine storing in  $a$ , de uitwijking naar boven plaatsvindt. Daarna houdt men  $\beta$  constant en laat  $a$  toenemen.

In positie 4 vindt een plotselinge knak naar beneden plaats.

Uiteraard geeft K.T. hier weinig nieuws. Dit is ook niet te verwachten omdat de formules zo expliciet bekend zijn. Dit geldt ook voor andere toepassingen in de fysica, omdat juist in de fysica de evolutie van een proces tamelijk precies beschreven kan worden door fysische wetten.

In de elasticiteitsleer, waaraan bovenstaand voorbeeld is ontleend, poneerden twee Engelse ingenieurs, Hunt en Thompson [7] een algemene bifurcatietheorie, waarbij een lading-parameter en diverse zg. imperfectie-parameters optraden als uitwendige variabelen. Ze vonden daarbij onafhankelijk van Thom alle katastrofemodellen. Dankzij de wiskundige ontwikkeling van de E.K.T. bleek echter, dat er op grond van hun aannamen niet meer modellen te verwachten waren.

Ook hier gaf K.T. aanleiding tot analogieën. Dit is volgens Thom ook één van de doeleinden van de K.T. Zo is bijvoorbeeld de kusp-katastrofe bij veel onderzoeken in diverse gebieden van de wetenschap steeds weer opnieuw ontdekt, geïnterpreteerd, de vergelijkingen berekend, het dynamisch gedrag onderzocht, etc. Nadat via K.T. het verband gelegd is met de kusp, kan men zich beperken tot één bepaalde (eenvoudige) standaard-vergelijking, waarvan het gedrag systematisch onderzocht is.

### 7. Differentiaalvergelijkingen voor de hartslag

Zeeman [8] gaat uit van de volgende kwalitatieve beschrijving van de hartslag:

1. het systeem heeft een stabiele evenwichtstoestand.

2. er is een drempel voor het op gang brengen van actie.  
 3. er is een spronggewijze terugkeer naar de evenwichtstoestand.  
 Zeeman probeert een zo eenvoudig mogelijk model op te stellen, dat bovenstaand gedrag vertoont. We slaan een aantal stappen in zijn redenering over en beschouwen allereerst model A, dat ontleend is aan de K.T.

A)  
 $\epsilon \dot{x} = -(x^3 - x + b)$   
 $\epsilon \ll 1$ .

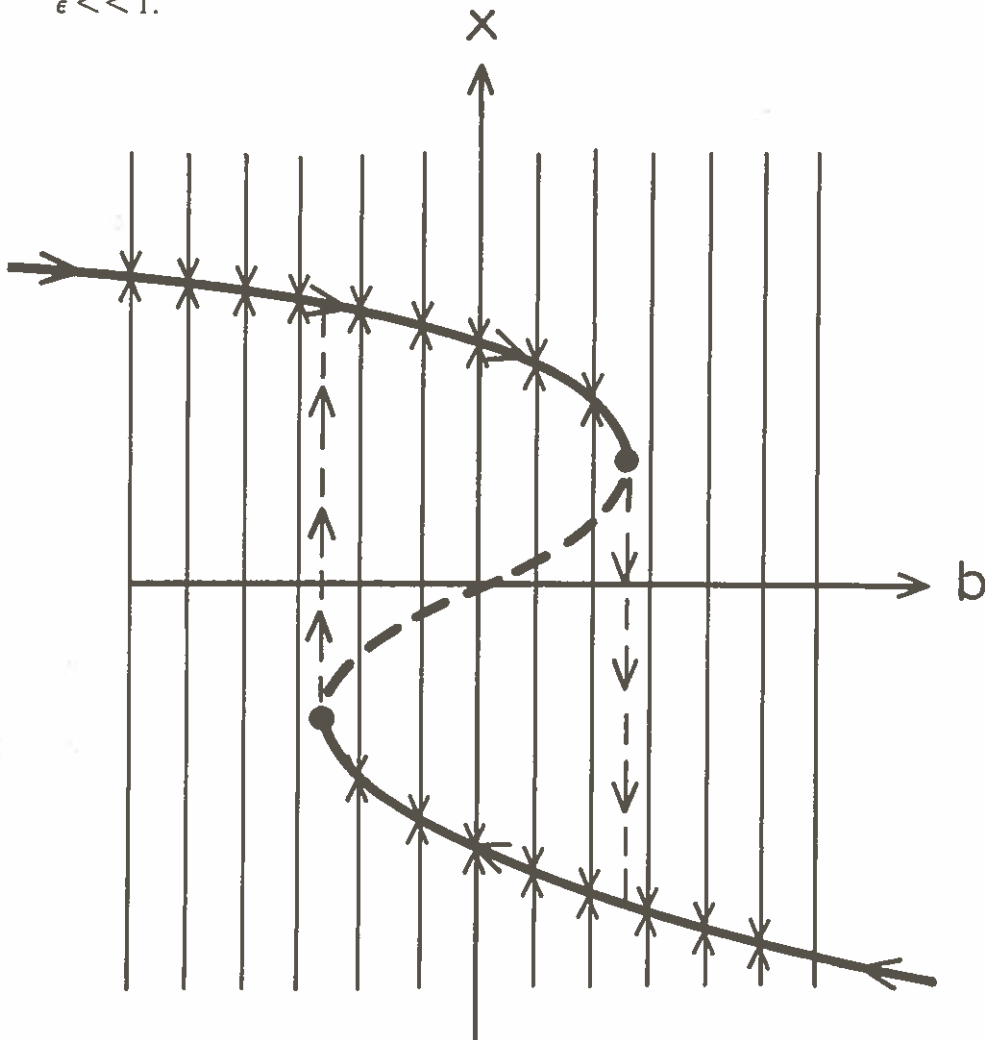


Fig. 13

In dit model zijn snelle sprongen mogelijk in de punten P en Q waar de evenwichtsverzameling M:  $x^3 - x + b = 0$  van richting verandert. Wat allereerst ontbreekt is een mechanisme dat er voor zorgt, dat zo'n positie bereikt wordt. We moeten als het ware de variabele b met de hand bijsturen. In model B is dit geautomatiseerd.

B)

$$\epsilon \dot{x} = -(x^3 - x + b)$$

$$\dot{b} = x$$

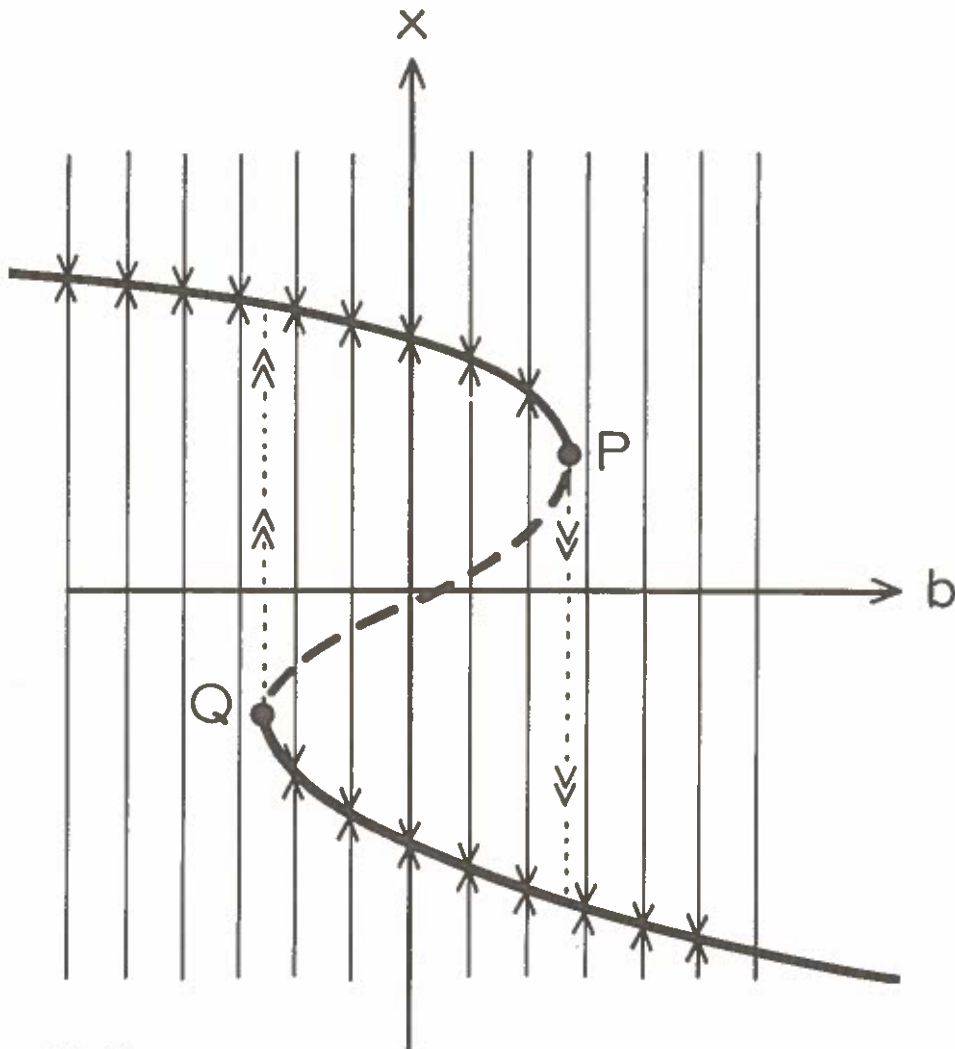


Fig. 14



We veronderstellen  $\epsilon \ll 1$  en daarom is de beweging in de  $x$ -richting veel sneller dan die in de  $b$ -richting. Schematisch gezegd: de beweging verloopt eerst snel naar  $M$  en vervolgens langzaam via  $M$  verder, totdat  $M$  van richting verandert en er een snelle sprong plaatsvindt naar een ander deel van  $M$ . We hebben als het ware een hystereselus. Wat nu nog ontbreekt is een stabiele evenwichtstoestand. Deze is wel aanwezig in model C:

C)

$$\epsilon \dot{x} = -(x^3 - x + b)$$

$$\dot{b} = x - x_0$$

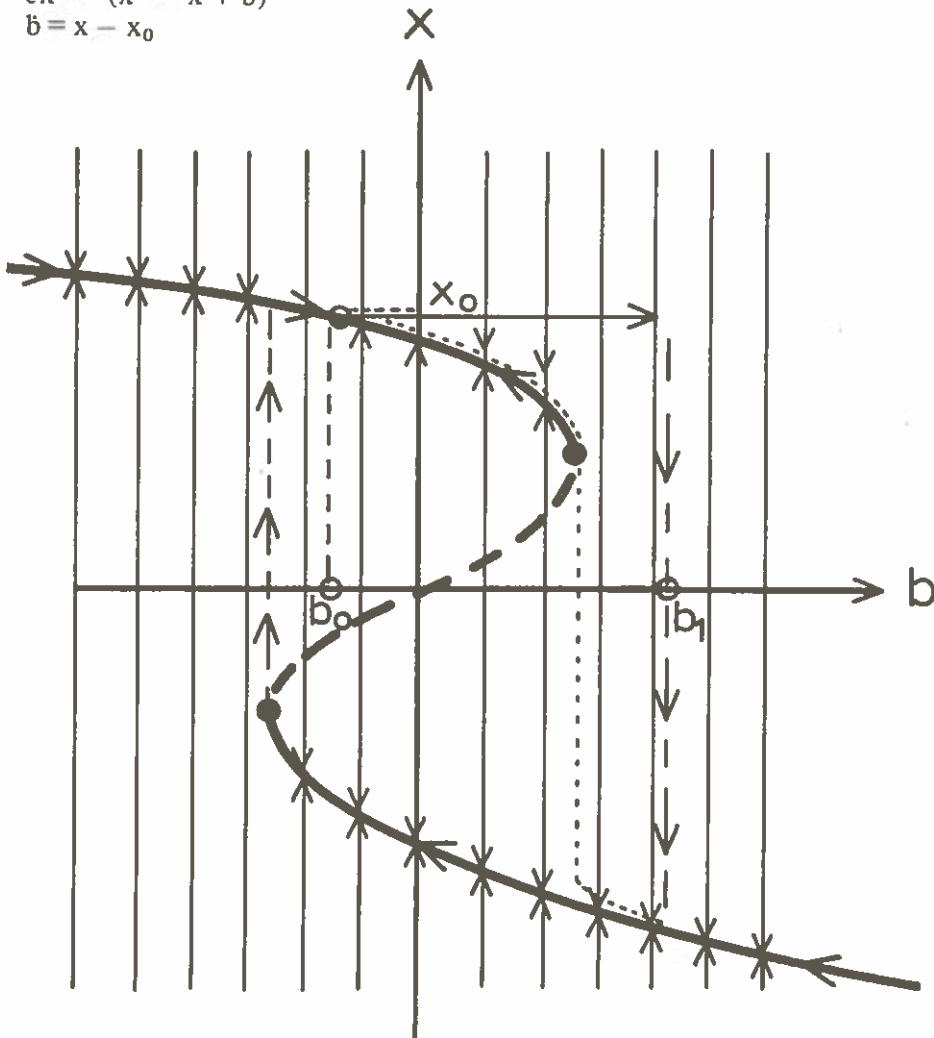


Fig. 15

De stabiele evenwichtstoestand is nl. het punt  $(x_0, b_0)$ . De drempel voor actie ligt bij de waarde  $b = \frac{1}{3}\sqrt{3}$ . Als door uitwendige oorzaak  $b$  plotseling stijgt van  $b_0$  tot een waarde  $b_1 > \frac{1}{3}\sqrt{3}$  dan vertoont het model het gewenste gedrag.

Voor de variabelen in dit model kan men denken aan:

$x$  = lengte hartspier

$b$  = elektrochemische controle

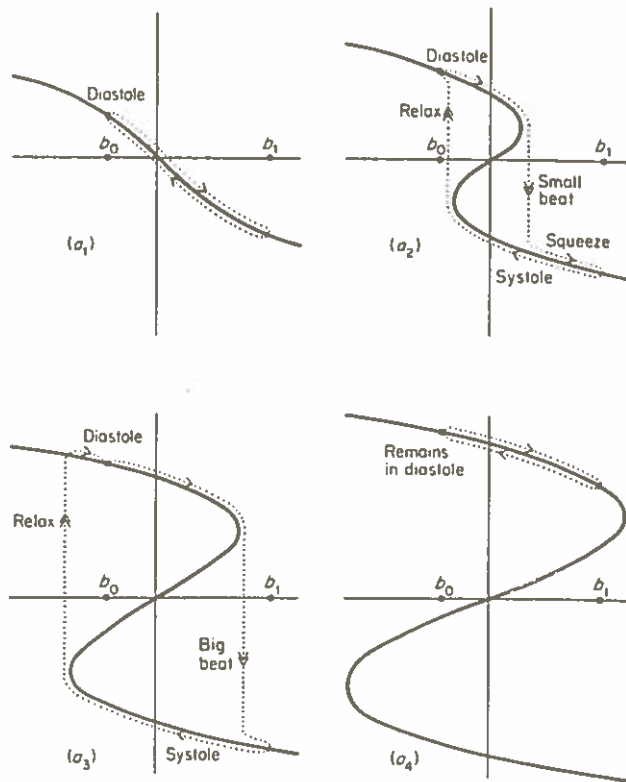
$b_0 \rightarrow b_1$  is de zg. pace-maker-wave.

De modellen B en C behoren niet tot de E.K.T., omdat we hier een extra dynamisch gedrag hebben ingevoerd voor de controle-variabele  $b$ .

Het is ook mogelijk de spierspanning  $a$  in het model op te nemen.

$$\epsilon \dot{x} = -(x^3 - ax + b)$$

$$\dot{b} = x - x_0$$



$(a_1)$  No tension, bypassed heart;  $(a_2)$  low tension, atrial fiber;  $(a_3)$  high tension, ventricular fiber;  $(a_4)$  very high tension, overstretched fiber.

Fig. 16

De lezer interpreteer deze figuren zelf. Voor meer details zie Zeeman [8]. In dat artikel wordt op soortgelijke wijze ook de zenuwimpuls behandeld.

Dergelijke stelsels differentiaalvergelijkingen als hierboven worden systematisch bestudeerd in Takens [3].

### 8. Iets over de wiskunde

Laat gegeven zijn de potentiaal  $V = V(\lambda, x)$  met  $\lambda$  in  $\mathbb{R}^c$  en  $x$  in  $\mathbb{R}^t$ . We nemen de Taylorontwikkeling van  $V$  naar  $x$ , rondom  $x = a$ :

$$V = V(a, \lambda) + \sum c_i(a, \lambda) (x_i - a_i) + \sum \sum d_{ij}(a, \lambda) (x_i - a_i) (x_j - a_j) + \\ + \sum \sum \sum e_{ijk}(a, \lambda) (x_i - a_i) (x_j - a_j) (x_k - a_k) + \dots$$

$$\text{waarbij } c_i = \frac{\partial V}{\partial x_i} \quad d_{ij} = \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{1}{2!} \quad e_{ijk} = \frac{\partial^3 V}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \cdot \frac{1}{3!}$$

Uit de zg. Nakayama-lemma volgt, dat het voor ons doel voldoende is slechts het Taylorpolynoom van eindige orde  $r$  te bestuderen ( $r$  hangt daarbij af van  $c$ ).

Beschouw nu de afbeelding

$$F : \mathbb{R}^c \times \mathbb{R}^t \rightarrow \mathbb{R}^N$$

die aan elke  $(\lambda, a)$  uit  $\mathbb{R}^c \times \mathbb{R}^t$  toekent  $F(\lambda, a) =$  het Taylorpolynoom in  $a$  van graad  $r$ .

De verzameling van dergelijke polynomen is een  $\mathbb{R}^N$ , waarbij  $N$  gelijk is aan het aantal coëfficiënten.

Vervolgens wordt deze  $\mathbb{R}^N$  opgedeeld in gladde stukken (men noemt dit een stratificatie van  $\mathbb{R}^N$  in gladde deelvariëteiten). Elk zo'n stuk bestaat daarbij uit polynomen, die onderling een (willekeurige) coördinatentransformatie schelen. (modulo termen van orde groter of gelijk aan  $r + 1$ )

We schetsen vervolgens deze stratificatie.

Laat bijvoorbeeld het polynoom  $P$  gegeven zijn door

$$P = \sum c_j z_j + \sum \sum d_{ij} z_i z_j + \sum \sum \sum e_{ijk} z_i z_j z_k$$

Voor  $c = 2$  bestaat de stratificatie nu uit 4 gladde stukken:

$A_0, A_1, A_2$  en  $A_3$  en een restant  $\Sigma$ :

	Normaalvorm	Voorwaarden	dimensie
$A_0$	$P = z_1$	$c_1 \cdot c_2 \cdot \dots \cdot c_t \neq 0$	$N$
$A_1$	$P = \pm z_1^2 \pm z_2^2 \pm \dots \pm z_t^2$	$c_1 = c_2 = \dots = c_t = 0$ $\text{Rang}(d_{ij}) = t$	$N - t$
$A_2$	$P = z_1^3 \pm z_2^2 \pm \dots \pm z_t^2$	$c_1 = c_2 = \dots = c_t = 0$ $\text{Rang}(d_{ij}) = t - 1$ $\frac{\partial^3 \varphi}{\partial z_1^3} \neq 0 \quad (*)$	$N - t - 1$
$A_3$	$P = \pm z_1^4 \pm z_2^2 \pm \dots \pm z_t^2$	$c_1 = c_2 = \dots = c_t = 0$ $\text{Rang}(d_{ij}) = t - 1$ $\frac{\partial^3 \varphi}{\partial z_1^3} = 0 \quad \frac{\partial^4 \varphi}{\partial z_1^4} \neq 0 \quad (*)$	$N - t - 2$
$\Sigma$	overigen	$c_1 = c_2 = \dots = c_t = 0$ $\text{Rang}(d_{ij}) \leq t - 2$ of $\frac{\partial^4 \varphi}{\partial z_1^4} = 0 \quad (*)$	$N - t - 3$

(\*) Als  $\text{rang}(d_{ij}) = t - 1$  dan kan men het polynoom als volgt transformeren  $p \sim \varphi(z_1) \pm z_2^2 \pm \dots \pm z_t^2$

Het principe van de structurele stabiliteit vertaalt zich nu in het volgende algemene positieargument (zg. transversaliteitstelling): Het beeld van  $F: \mathbb{R}^c \times \mathbb{R}^t \rightarrow \mathbb{R}^N$  en gladde oppervlakken snijden elkaar transversaal (of helemaal niet).

$$\mathbb{R}^N = \text{raakruimte} + \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_i}, \frac{\partial F}{\partial \lambda_j} \right\rangle$$

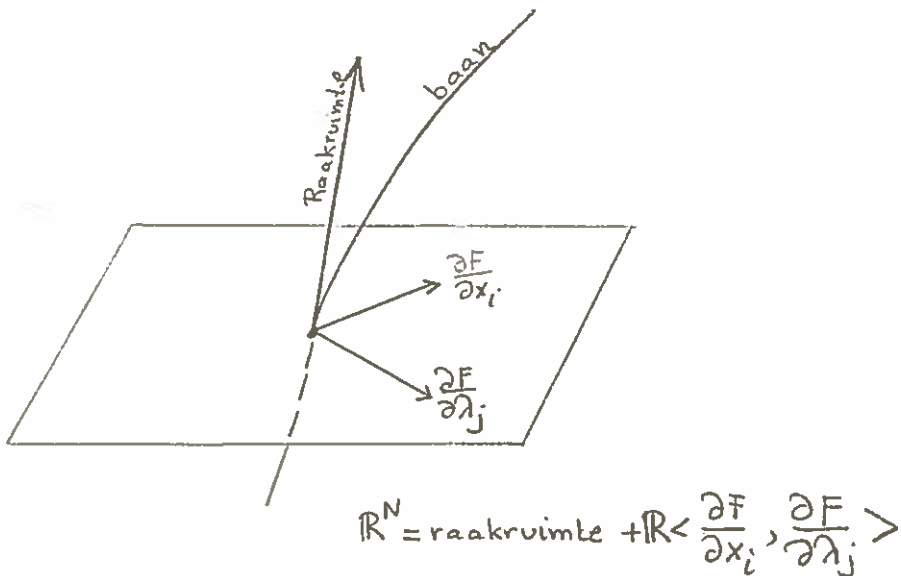


Fig. 17

De gevolgen zijn nu:

- er zijn geen snijpunten met  $\Sigma$ .
- de evenwichtsverzameling  $M = F^{-1} \{ c_1 = c_2 = \dots = c_l = 0 \}$  is glad en 2-dimensionaal.
- als  $(a, \mu)$  in  $M$  ligt, dan is  $V(x, \mu)$  nabij  $x = a$  te transformeren in één van de normaalvormen  $A_1$ ,  $A_2$  of  $A_3$  (deze komen voor in Thom's lijst met controle-waarden gelijk aan nul).

In de laatste stap wordt tenslotte aangetoond, dat niet alleen  $V(x, \mu)$  voor vaste  $\mu$  voorkomt in Thom's lijst, maar dat de gehele familie  $V(x, \lambda)$  nabij  $(a, \mu)$  getransformeerd kan worden in één van de standaardvormen uit Thom's lijst. Met behulp van de transversaliteit wordt eerst infinitesimale gelijkheid van beide families bewezen, waarna vervolgens uit Malgrange's preperatiestelling het resultaat volgt:

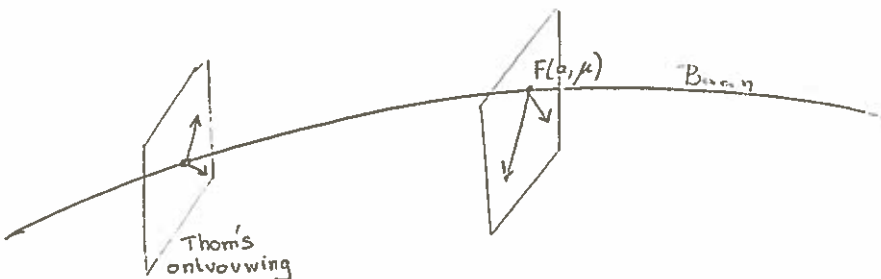


Fig. 18

We noemen tenslotte nog de onderwerpen van verder wiskundig onderzoek rond de K.T.

1. Tijdkatastrofe-theorie [Wasserman].
2. Symmetrieën en randverschijnselen [Wasserman, Bierstone, Poenaru, Pitt, Siersma].
3. Topologische equivalentie [Mather, Looijenga, Varchenko].
4. Impliciete differentiaalvergelijkingen [Takens].
5. Algemene theorie van vectorvelden [Takens en vele anderen].
6. Onderzoek naar soortgelijke problemen bij complexe functies [o.a. Arnol'd].

#### 9. Literatuur

De literatuurlijst over K.T. en aanverwante wiskunde is in enkele jaren tijds zeer snel uitgegroeid tot circa 400 artikelen en boeken. Allereerst noemen we natuurlijk „Stabilité Structurelle et Morphogénèse” van R. Thom [4].

Thom's boek gaat voor moeilijk leesbaar door. Een goede inleiding voor de katastrofetheorie is het boek „Catastrophe Theory and its Applications” van I. Stewart en T. Poston [2]. De nadruk valt echter sterk op de E.K.T. De literatuurlijst is zeer uitgebreid en wijst de weg naar verdere literatuur over K.T.. We noemen nog enkele populair-wetenschappelijke artikelen; namelijk van E.C. Zeeman in *Scientific American* [9] en van I. Stewart in *New Scientist* [1].

#### 10. Referenties

- 1 Stewart, I.N. The seven elementary catastrophes. *New Scientist* 68, 447–454, 1975.
- 2 Stewart, I.N., Poston, T. *Catastrophe Theory and its Applications*. Pitman, London, 1978.
- 3 Takens, F. Constrained differential equations. In *structural stability, the theory of catastrophes, and the applications in the sciences*. (P.J. Hilton, ed.) Springer 1976 pp. 143–234.
- 4 Thom, R. *Stabilité Structurelle et Morphogénèse*. Benjamin, New York 1972. Engelse vertaling: *Structural Stability and Morphogenesis*. Benjamin-Addison Wesley, New York, 1975.
- 5 Thom, R. Structural stability, catastrophe theory and applied mathematics. *SIAM Review* 19, 189–201, 1977.
- 6 Thom, R., Zeeman, E.C.: Discussie opgenomen in *Dynamical Systems, Warwick 1974* (A. Manning ed.) Springer 1975, pp. 366–389.

- 7 Thompson, J.M.T., Hunt, G.W. *A general theory of elastic stability*, Wiley, London and New York, 1973.
- 8 Zeeman, E.C. Differential equations for the heartbeat and nerve impuls. In *Dynamical Systems, Brazil 1971* (M. Peixoto, ed.) Academic Press, New York and London, 1971 pp. 683–741.
- 9 Zeeman, E.C. Catastrophe theory. *Scient. Am.* 234, 65–83, 1976.
- 10 Zeeman, E.C. *Catastrophe Theory: Selected papers (1972-1977)* Addison-Wesley Reading, Mass., 1977.
- 11 Zeeman, E.C., Trotman, D.J.A. Classification of elementary catastrophes of codimension  $\leq 5$ . In *Structural Stability, the theory of catastrophes and applications in the sciences* (P.J. Hilton, ed.) Springer 1976, pp. 263–327.