Scriptie : Zuinige C.W.-Complexen

van D. Siersma

voor het doctoraal examen wiskunde
mentor: Prof. Dr. N. H. Kuiper
26 april 1967

Master Thesis: Frugal C.W. –Complexes (in Dutch)

Dirk Siersma

supervisor: Prof. Dr. N. H. Kuiper
26 april 1967

Mathematisch Instituut
Universiteit van Amsterdam

Scriptie : Zuinige C.W.-complexen.

van D.Siersma ten behoeve van het doctoraalexamen wiskunde
mentor: Prof.Dr.N.H.Kuiper

Inleiding:

Zij X een samenhangend C.W.-complex en X^n het n-skelet (bestaande uit de cellen van dimensie $\leq$ n) van X. Er bestaat een complex van $\mathbb{Z}$-modulen (het z.g. algebraïsche C.W.-complex) C(X):

$$\cdots\cdots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{d} C_n \xrightarrow{d} C_{n-1} \longrightarrow \cdots\cdots$$

Het moduul C_n is hierin het vrije $\mathbb{Z}$-moduul met als basis de verzameling der n-cellen. De homologiegroepen van dit complex zijn isomorf met de singuliere homologiegroepen $H_i(X)$ van de ruimte X (met coëfficiënten in $\mathbb{Z}$).

Indien $H_i(X)$ eindig voortgebracht is, bestaat er een isomorfisme:

$$H_i(X) \cong \mathbb{Z}^k \oplus \mathbb{Z}_{m_1} \oplus \mathbb{Z}_{m_2} \oplus \cdots\cdots \oplus \mathbb{Z}_{m_d}$$

We noemen k het Betti-getal β_i en d het torsiegetal τ_i van $H_i(X)$.

Zij $\tilde{X}$ de universele overdekkingsruimte van X. Zij $\Lambda = \mathbb{Z}[\pi]$ de groepenring van de fundamentaalgroep $\pi = \pi_1(X)$ van X. Het $\mathbb{Z}$-complex $C(\tilde{X})$ kan men de structuur geven van een complex van Λ-modulen.

We behandelen in deze scriptie de volgende problemen:

a) Beschrijf het zuinigste complex binnen een bepaald homotopietype, d.w.z. zij gegeven een C.W.-complex X en zij Y een complex, dat homotopie-equivalent is met X en dat uit een minimaal aantal cellen is opgebouwd. Hoeveel i-cellen bevat Y?

b) Zij gegeven een groep Π en abelse groepen $H_1, \ldots, H_n, \ldots$. Bestaat er een C.W.-complex met Π als fundamentaalgroep en $H_1, \ldots, H_n, \ldots$ als homologiegroepen? Is het mogelijk een C.W.-complex aan te geven, dat met een minimaal aantal cellen aan de eis voldoet?

De oplossing van a) wordt voor X enkelvoudig-samenhangend gegeven door een propositie van Milnor (ongepubliceerd): Indien $H_i(X)$ Betti-getal $\beta_i < \infty$ en torsiegetal $\tau_i < \infty$ heeft voor elke $i \geq 0$, dan is X homotopie-equivalent met een complex met

$$\alpha_i = \tau_{i-1} + \beta_i + \tau_i$$

i-cellen voor elke i. Het bewijs hiervan kan gegeven worden met behulp van functies met niet-gedegenereerde kritieke punten op een variëteit met rand. Op een andere wijze kan men volgens Wall deze propositie bewijzen door gebruik te maken van een stelling uit [13]pag.68 . In §1 geven we aan hoe Milnor's propositie uit deze stelling volgt. Voor X niet enkelvoudig-samenhangehd worden geen gevolgtrekkingen gemaakt.

In het geval b) kan men een eis aangeven (zie §3) zodat er een C.W.-complex bestaat met gegeven fundamentaalgroep en homologie-groepen. Bij het vinden van een complex X met minimaal aantal cellen doet zich een moeilijkheid voor een geschikte presentatie voor de fundamentaalgroep te geven. In §4 en §6 herleiden we deze moeilijkheid tot een probleem van meetkundige aard.

<u>Inhoud</u>:

§1. Propositie van Milnor.

Wall bewijst in [13]pag.68:

Stelling: Zij A een ketencomplex bestaande uit vrije Λ-modulen van eindige rang en Λ-homomorfismen ; zij $f : A \to C(\tilde{X})$ een Λ-homomorfisme , dat isomorfismen van 1- en 2-ketens en isomorfismen van alle homologiegroepen induceert. Dan kan f meetkundig worden gerealiseerd door een cellulaire afbeelding $g : Y \to X$ met $A \cong C(\tilde{Y})$ en g een homotopie-equivalentie.

Met behulp hiervan bewijzen we:

Propositie[Milnor]: Zij X een enkelvoudig samenhangend C.W.-complex zodat $H_i(X)$ betti-getal $\beta_i < \infty$ en torsie-getal $\tau_i < \infty$ heeft voor elke $i \geq 0$. Dan is X homotopie-equivalent met een complex met

$$\alpha_i = \tau_{i-1} + \beta_i + \tau_i$$

i-cellen voor elke i.

Bewijs:

X is enkelvoudig samenhangend dus $\tilde{X} = X$ en $C(\tilde{X}) = C(X)$ en $H_*(\tilde{X}) = H_*(X)$. Volgens de stelling van Hurewicz geldt voor X:

$$H_1(X) = 0 = \pi_1(X)$$
$$H_2(X) = \pi_2(X)$$

Zij $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ een basis van $\pi_2(X)$. Kies voor elke i $(i=1,\ldots,n)$ een representant $\varphi_i : S^2 \to X$ uit de homotopieklasse van α_i en construeer vervolgens een afbeelding

$$\varphi : K^2 \longrightarrow X$$

van een wig K^2 van n 2-sferen naar X, zó dat φ_i de beperking van φ tot de i^e sfeer van $K^2 = \bigvee_{i=1}^{n} S^2$ is. Het getal n kan men zo kiezen, dat het aantal 2 cellen van K^2 gelijk is aan het minimum aantal voortbrengers van $\pi_2(X) = H_2(X)$, namelijk $\beta_2 + \tau_2$. Volgens lemma 1.2 uit [13] kunnen we aan K^2 cellen van dimensie ≥ 3 hechten zodat φ een homotopie-equivalentie wordt. Het is dus geen beperking als we aannemen, dat de enkelvoudig samenhangende X een wig van $\beta_2 + \tau_2$ 2-sferen als 2-skelet heeft. We vervangen nu X door zo'n C.W.-complex.

We construeren in de volgende lemma's een vrij complex A en een homomorfisme $f : A \to C(X)$, dat een isomorfisme $H_*(f) : H_*(A) \to H_*(X)$ induceert, zodat

$$\text{rang } A_i = \tau_{i-1} + \beta_i + \tau_i \, .$$

Past men vervolgens de stelling van Wall toe, dan volgt Milnor's propositie.

<u>Lemma 1</u>: Er bestaat een in elke dimensie eindig dimensionaal algebraïsch complex A met $H_*(A) = H_*(C) = H_*(X)$

<u>Bewijs:</u>

Zij $$0 \longrightarrow \overline{B}_n \longrightarrow \overline{Z}_n \longrightarrow H_n \longrightarrow 0$$
een vrije presentatie van H_n met:
$$\text{rang } \overline{B}_n = \tau_n$$
$$\text{rang } \overline{Z}_n = \beta_n + \tau_n.$$

Definieer : $A_n = \overline{Z}_n \oplus \overline{B}_{n-1}$ voor alle n.

Merk op
$$A_2 = \overline{Z}_2 \oplus \overline{B}_1 = C_2$$
$$A_1 = \overline{Z}_1 \oplus \overline{B}_o = 0 = C_1$$
$$A_o = \overline{Z}_o \qquad = \mathbb{Z} = C_o$$

Definieer :
$$\partial_n : A_n \longrightarrow A_{n-1}$$
door: $\partial_n(z,b) = (b,0)$

Er geldt: n-zykels van $A = Z_n(A) = \overline{Z}_n$

n-randen van $A = B_n(A) = \overline{B}_n$

Dus: $H_*(A) = H_*(C)$ (als additieve groepen)

<u>Lemma 2:</u> Zij A het in lemma 1 gedefinieerde complex. Er bestaat een homomorfisme van Λ-complexen $f : A \to C$ (d.w.z. er is voor elke i een homomorfisme $f_i : A_i \to C_i$ en een commutatief diagram:

$$\begin{tikzcd} A_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "\partial_i"'] & C_i \arrow[d, "d_i"] \\ A_{i-1} \arrow[r, "f_{i-1}"] & C_{i-1} \end{tikzcd}$$
)

zodanig dat:

1^o f isomorfismen $H_i(f)$ van homologiegroepen induceert

2^o f de identiteit is op A_o, A_1 en A_2.

<u>Bewijs</u>: (=constructie van f)

Definieer f_i = identiteit voor i=0,1,2.

Zij vervolgens $f_{n-1} : A_{n-1} \to C_{n-1}$ reeds gedefinieerd, zo dat f_i commuteert met de randoperatoren voor i=1,...,n-1 en zo dat geldt: $f_{n-1}(\overline{B}_{n-1}) \subset B_{n-1}$.

Omdat $\overline{Z}_n$ vrij is kan het diagram:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \overline{B}_n \arrow[r] & \overline{Z}_n \arrow[r] & H_n \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & B_n \arrow[r] & Z_n \arrow[r] & H_n \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

worden aangevuld met afbeeldingen:
$$f_n^z : \overline{Z}_n \to Z_n$$

en $\quad f_n^b : \overline{B}_n \to B_n$

tot het commutatieve diagram:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \overline{B}_n \arrow[r] \arrow[d, "f_n^b"] & \overline{Z}_n \arrow[r] \arrow[d, "f_n^z"] & H_n \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & B_n \arrow[r] & Z_n \arrow[r] & H_n \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Het diagram:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \overline{Z}_n \arrow[r] \arrow[d, "f_n^z"] & \overline{Z}_n \oplus \overline{B}_{n-1} \arrow[r] & \overline{B}_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n-1}^b = f_{n-1}|\overline{B}_{n-1}"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & Z_n \arrow[r] & C_n \arrow[r] & B_{n-1} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

kan omdat $\overline{B}_{n-1}$ vrij is aangevuld worden met een afbeelding:

$$f_n : A_n = \overline{Z}_n \oplus \overline{B}_{n-1} \longrightarrow C_n$$

tot een commutatief diagram:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \overline{Z}_n \arrow[r] \arrow[d, "f_n^z"] & \overline{Z}_n \oplus \overline{B}_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_n"] & \overline{B}_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n-1}^b"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & Z_n \arrow[r] & C_n \arrow[r] & B_{n-1} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Hiermede is $f_n : A_n \to C_n$ gedefinieerd. Verder volgt uit het bovenstaande commutativiteit in:

$$\begin{tikzcd} A_n = \overline{Z}_n \oplus \overline{B}_{n-1} \arrow[r, "f_n"] \arrow[d, "\partial_n"] & C_n \arrow[d, "d_n"] \\ A_{n-1} = \overline{Z}_{n-1} \oplus \overline{B}_{n-2} \arrow[r] & C_{n-1} \end{tikzcd}$$

Bovendien geldt: $f_n^b = f_n^z|\overline{B}_n = f_n|\overline{B}_n$

(waarbij $\overline{B}_n \subset \overline{Z}_n$ en $\overline{B}_n \oplus 0 \subset \overline{Z}_n \oplus \overline{B}_{n-1}$ geïdentificeerd gedacht zijn

Met volledige inductie wordt $f_i : A_i \to C_i$ voor elke i gedefinieerd.

Er geldt blijkbaar:

$$H_*(f) = \text{identiteit} : H_*(A) \to H_*(C)$$

<u>Lemma 3:</u> rang $A_i = \tau_{i-1} + \beta_i + \tau_i$.

<u>Bewijs</u>: Er geldt: $A_i = \overline{Z}_i \oplus \overline{B}_{i-1}$ voor alle i.

Dus: rang A_i = rang $\overline{Z}_i$ + rang $\overline{B}_{i-1} = (\beta_i + \tau_i) + \tau_{i-1}$.

<u>Gevolg:</u> Een enkelvoudig samenhangend C.W.-complex X met eindig voortgebrachte homologiegroepen is homotopie-equivalent met een eindig (en dus ook eindig dimensionaal) complex dan en slechts dan indien $\beta_i < \infty$ en $\tau_i < \infty$ voor alle i en bovendien $H_i(X) = 0$ voor alle i groter dan een zekere N.

Opmerking: Voor X niet enkelvoudig samenhangend is nog geen generalisatie bekend. Er is wel een kleine generalisatie van Wall's stelling mogelijk. Het is voldoende, dat f_2 de identiteit is op een vrij deelmoduul A_2' en dit afbeeldt op $C_2(X_o^2)$, waarbij X_o^2 een deelcomplex is van X^{2^2} met dezelfde fundamentaalgroep als X.

§2. Presentaties van groepen.

We herhalen eerst enige definities uit de theorie der groeppresentaties. (zie bijvoorbeeld [1] Chap. IV).

Definitie vrije groep: Zij gegeven een aantal symbolen $g_1, \ldots, g_n, \ldots$ Met een woord in $g_1, \ldots, g_n$ bedoelen we een eindige geordende rij bestaande uit formele machten van $g_1, \ldots, g_n, \ldots$; bijvoorbeeld: $g_1^{-2} g_3 g_1^{\,o} g_2 g_2^{\,5} g_3$. De verzameling van de woorden vormt een halfgroep. We introduceren in deze halfgroep een equivalentierelatie, eindig voortgebracht door relaties van de vorm:

$$\text{I.} \quad w_1 g_i^{\,p} g_i^{\,q} w_2 = w_1 g_i^{\,p+q} w_2$$

$$\text{II.} \quad w_1 g_i^{\,o} w_2 = w_1 w_2$$

Indien we de woordverzameling uitdelen naar de equivalentierelatie ontstaat een groep, die de vrije groep op $g_1, \ldots, g_n, \ldots$ heet.

Men kan bewijzen, dat in elke equivalentieklasse een eenduidig bepaald woord met minimum aantal letters is. Zo'n woord zullen we gereduceerd noemen. De deelwoorden $g_i^{\,p} g_i^{\,q}$ en $g_j^{\,o}$ komen in gereduceerde woorden niet meer voor. Voorbeeld:
Bij $g_1^{-2} g_3 g_1^{\,o} g_2 g_2^{\,5} g_3$ hoort het gereduceerde woord $g_1^{-2} g_3 g_2^{\,6} g_3$.

Een groep G heet eindig voortgebracht , kort e.v. , indien er een eindig aantal elementen $g_1, \ldots, g_n$ in G bestaat, zo dat elke $g \in G$ te schrijven is als eindig produkt in de g_i's. Dezelfde g_i mag hierbij op verschillende plaatsen voorkomen en de schrijfwijze hoeft niet eenduidig te zijn.

Bij een eindig voortgebrachte groep bestaat een z.g. presentatie:

$$0 \to R \to F \xrightarrow{p} G \to 0$$

waarbij F de vrije groep is voortgebracht door elementen $x_1, \ldots, x_n$ en p gedefinieerd wordt door $p(x_i) = g_i$. Verder is R = Ker p. Omdat F e.v. is (nl. door de x_i's) heet de presentatie eindig voortgebracht. (e.v.). Men kan bewijzen, dat elke ondergroep van een vrije groep vrij is. Dientengevolge is ook R vrij. De elementen van R noemen we relaties.

Indien R een e.v. ondergroep van F is noemen we de presentatie *eindig* . De groep G heet van *eindige presentatie* (*e.p.*) indien er een eindige presentatie bestaat:

$$0 \to R \to F \to G \to 0$$

Laten $r_1,\ldots,r_k$ voortbrengers van R zijn. R is ondergroep van F, dus elke r_i kunnen we schrijven als een woord in $x_1,\ldots,x_n$. De eindige presentatie kunnen we dus geven door de n voortbrengers $(x_1,\ldots,x_n)$ en de k woorden $(r_1,\ldots,r_k)$. Dus als volgt:

$$G = |(x_1,\ldots,x_n):(r_1,\ldots,r_k)| = |x:r|$$

Door Rabin is bewezen, dat er geen algemene methode bestaat om aan te geven of twee presentaties dezelfde groep beschrijven. (zie [9]).

Twee presentaties, die eenzelfde (of isomorfe) groep voorstellen noemen we *equivalent* . We beschrijven vervolgens een viertal soorten transformaties, de zg. *Tietze-transformaties* :

$$T : |x:r| \to |y:s|$$

die aan een presentatie $|x:r|$ een equivalente presentatie $|y:s|$ toekennen.

Zij $x=(x_1,\ldots,x_n)$ en $r = (r_1,\ldots,r_k)$.

TIETZE-I : Zij r_{k+1} een woord in $r_1,\ldots,r_k$ en zij $s=(r_1,\ldots,r_k,r_{k+1})$. Dan is $|x:r| \to |x:s|$ een equivalentie.

TIETZF-I' : Is r_k te schrijven als een woord in $r_1,\ldots,r_{k-1}$ en zij $s=(r_1,\ldots,r_{k-1})$. Dan is $|x:r| \to |x:s|$ een equivalentie.

TIETZE-II : Zij ξ een woord in $x_1,\ldots,x_n$. We breiden $x=(x_1,\ldots,x_n)$ met een extra element x_{n+1} uit tot $y=(x_1,\ldots,x_n,x_{n+1})$ en aan r voegen we het element $r_{k+1} = x_{n+1}\xi^{-1}$ toe. Zij $s=(r_1,\ldots,r_k,r_{k+1})$. Dan is $|x:r| \to |y:s|$ een equivalentie.

TIETZE-II' : Indien één der x_i's, zeg x_n, slechts in één van de r_i's, zeg r_k, voorkomt in de gedaante $r_k=x_n\xi^{-1}$, kunnen we beide weglaten, d.w.z. zij $y=(x_1,\ldots,x_{n-1})$ en $s=(r_1,\ldots,r_{k-1})$, dan is $|x:r| \to |y:s|$ een equivalentie.

<u>TIETZE-THEOREMA</u>: Indien twee eindige presentaties $|x:r|$ en $|y:s|$ equivalent zijn, dan bestaat er een eindig aantal Tietze-transformaties $T_1,\ldots,T_p$ met als compositie de equivalentie: $|x:r| \to |y:s|$

Bij een groeppresentatie $|x:r|$ kunnen we een C.W.-complex bouwen. We gaan nl. uit van een wig van 1-sferen, waarin elke 1-sfeer correspondeert met een voortbrenger uit x. Vervolgens hechten we 2-cellen aan volgens voortbrengers van de relaties r. Indien de groep G een eindige presentatie toelaat ontstaat er een eindig C.W.-complex van dimensie 2.

We noemen dit complex de meetkundige presentatie P van $|x:r|$ of ook wel het C.W.-complex, dat $|x:r|$ realiseert. Bij verschillende presentaties van eenzelfde groep ontstaan verschillende C.W.-complexen.

De fundamentaalgroep van P is gelijk aan:

$$\pi_1(P) = G$$

Hiermede ligt ook de eerste homologiegroep van P vast:

$$H_1(P) = G_{abels}$$

De tweede homologiegroep $H_2(P)$ van P noemen we de tweede homologiegroep van de presentatie $|x:r|$. Deze is géén invariant van de groep G maar zij onderscheidt nog sommige presentaties van dezelfde groep.

De Tietze-transformaties veroorzaken de volgende veranderingen in de C.W.-complexen:

Toepassen van TIETZE-I komt neer op het aanhechten van een extra 2-cel aan P. De fundamentaalgroep verandert hierbij niet (blijft nl. gelijk aan G). De aanhechting moet dus homotoop triviaal zijn, d.w.z. homotopie-equivalent met aanhechten in één punt. In de tweede homologiegroep komt er een voortbrenger bij. Deze groep is voor de nieuwe presentatie dus gelijk aan: $H_2(P) \oplus \mathbb{Z}$.

Evenzo komt TIETZE-I' neer op een vermindering van het aantal voortbrengers met een.

Men gaat eenvoudig na, dat de equivalenties TIETZE-II en TIETZE-II' de tweede homologiegroep ongewijzigd laten. TIETZE-II komt bijvoorbeeld neer op het aanhechten van een 1-sfeer, die door middel van een "kraag" met het complex P verbonden wordt.

§3. Zuinige complexen bij gegeven π_1 en H_*(add.).

Volgens H.Hopf (zie [4]) bestaat er bij elke groep π voor elke .. een groep $H_2(\pi)$. De definitie van deze groepen is een louter algebraïsche zaak. Indien de groep π door voortbrengers en relaties gegeven is:

$$0 \to R \to F \to \pi \to 0$$

kan men de groep $H_2(\pi)$ als volgt beschrijven:

$$H_2(\pi) = \frac{R \cap [F:F]}{[F:R]}$$

waarbij: [F:F] de commutatorondergroep is, dus voortgebracht door elementen van de vorm $x^{-1}y^{-1}xy$ $(x,y \in F)$.

en [F:R] de ondergroep is voortgebracht door elementen van de vorm $x^{-1}r^{-1}xr$ $(x\in F, r\in R)$.

In hetzelfde artikel beschreef H.Hopf ook de belangrijke betekenis van deze groepen voor de algebraïsche topologie.Het artikel werd gevolgd door [5],[6] en [7] over het verband tussen hogere homotopie- en homologiegroepen van ruimten.

$H_2(G)$ is berekend voor willekeurige e.v. abelse groepen.

Zij $G = \Sigma_{i=1}^{q} \mathbb{Z}_{m_i}$ met $m_i \in \mathbb{N}\cup\{\infty\}$, waarbij

$\mathbb{Z}_{m_i} = \mathbb{Z}$ voor $m_i=\infty$

$\mathbb{Z}_{m_i}$ = restklassering modulo m_i voor $m_i \in \mathbb{N}$

en definieer $ggd(m_i,\infty)=m_i$.

Dan geldt :

$$H_2(G) = \Sigma_{1\leq i<j\leq q} \mathbb{Z}_{ggd(m_i,m_j)}$$

Definitie: Een 2-zykel c van een C.W.-complex K heet sferisch als er een afbeelding $f : S^2 \to K$ bestaat,zo dat c het beeld in $Z_2(K)$ is van een voortbrenger van $Z_2(S^2)\cong \mathbb{Z}$ onder $f_*=H_2(f)$.

Laten $e_1,\ldots,e_n,\ldots$ de 2-cellen van X zijn. Zij vormen een basis van het moduul der 2-ketens.Zij $c = \lambda_1 e_1 + \ldots\ldots + \lambda_n e_n$ een sferische 2-zykel,dan is λ_i gelijk aan de graad van f op de cel e_i.

H.Hopf bewijst o.a. de volgende stelling: Het quotient van de groep der 2-zykels en de ondergroep der sferische 2-zykels hangt slechts af van de fundamentaalgroep π van het complex en niet van de wijze,waarop het complex is opgebouwd,noch van de presentatie van de groep π . Dit quotient is juist gelijk aan $H_2(\pi)$.

Definitie: Een ruimte X heet een $K(\pi,n)$-ruimte (of Eilenberg-Mac Lane-ruimte)indien $\pi_k(X) = 0$ voor $k \neq n$

en $\pi_n(X) = \pi$.

Lemma: De 2^e homologiegroep van een $K(\pi,1)$-ruimte is gelijk aan $H_2(\pi)$.

bewijs:De 2-randen van een $K(\pi,1)$-ruimte zijn sferische 2-zykels.Verder representeert elke 2-zykel,die sferisch is een element van $\pi_2(K(\pi,1))=0$ en is dus een 2-rand.

Stelling 1:Bij gegeven aftelbare groepen $\pi,H_1,\ldots,H_n,\ldots$ met de eigenschappen:

1. $H_1,\ldots,H_n,\ldots$ zijn commutatief
2. $H_1 = \pi/[\pi:\pi]$
3. er bestaat een surjectie $H_2 \to H_2(\pi) \to 0$

bestaat steeds een C.W.-complex met de groepen $H_1,\ldots,H_n,\ldots$ als homologiegroepen en π als fundamentaalgroep.

Bewijs:

Beschouw een presentatie:

$$0 \to R \to F \to \pi \to 0$$

van de groep π .

Zij K^1 een wig van 1-sferen, waarvan elke 1-sfeer correspondeert met een vrije voortbrenger van F. Zij K_o^2 het complex, dat uit K^1 ontstaat door 2-cellen aan te hechten volgens een stelsel voortbrngers van R. Indien het aantal voortbrengers van $H_2(K_o^2)$ kleiner is dan dat van H_2, maak dan een wig K^2 van K_o^2 met zoveel 2-sferen, dat het aantal voortbrengers van $H_2(K^2)$ gelijk is aan dat van H_2. Neem in het andere geval $K^2 = K_o^2$.

Vervolgens maken we K^2 tot een $K(\pi,1)$-ruimte door eerst alle mogelijke 3-cellen aan te hechten en daarna alle mogelijke cellen van hogere dimensies (in volgorde van oplopende dimensie).

De 2^e homologiegroep van $K(\pi,1)$ is volgens het lemma gelijk aan $H_2(\pi)$. Zij Z_2 de verzameling der 2-zykels van $K(\pi,1)$ (en dus ook van K^2). $Z_2 = H_2(K^2)$ en heeft dus minstens evenveel voortbrengers als H_2. Er bestaat dus een ondergroep B_2 van Z_2 met de eigenschap:

$$H_2 = Z_2/B_2$$

Uit de surjectie:

$$H_2 \to H_2(\pi) \to 0$$

volgt, dat B_2 een ondergroep van $B_2(\pi,1)$, de verzameling van de 2-randen in $K(\pi,1)$, is.

Selecteer een basis $\{b_i\}$ van de vrije ondergroep B_2 van $B_2(\pi,1)$. Elke b_i is een sferische 2-zykel. Er bestaan dus bijbehorende afbeeldingen

$$f_i : S^2 \to K^2$$

Voor het complex K^3, dat uit K^2 ontstaat door 3-cellen volgens de afbeeldingen f_i aan te hechten geldt:

$$B_2(K^3) = B_2.$$

K^3 heeft fundamentaalgroep π . De 1^e en de 2^e homologiegroep van K^3 is resp. gelijk aan H_1 en H_2. De derde homologiegroep van K^3 is nul, want K^3 heeft geen 3-zykels, omdat $\{b_i\}$ een bais van B_2 vormt.

Hecht vervolgens voor elke $i \geq 3$ evenveel i-cellen aan K^3 (met behulp van triviale aanhechtingen) als H_i voortbrengers heeft en hecht vervolgens $(i+1)$-cellen aan het i-skelet volgens de relaties in H_i.

Het complex dat aldus ontstaat voldoet aan de eizen.

Definitie: Een $M(\pi,n)$-ruimte (zg. Moore-ruimte) is een topologische ruimte M met: $\pi_i(M) = 0$ voor $1 \leq i < n$ en $H_i(M) = 0$ voor $i > n$ en : $\pi_n(M) = \pi$.

Gevolg: Voor elke groep π met $H_2(\pi) = 0$ bestaat een $M(\pi,1)$-ruimte. (zie ook [12];de daar gestelde eis : π abels is overbodig).

Notaties:Zij gegeven een groep π door een eindige presentatie $p = |x:r|$.We noteren:

v = aantal voortbrengers van de presentatie

r = aantal relaties van de presentatie

β_π = Betti-getal van $H_2(\pi)$

τ_π = torsiegetal van $H_2(\pi)$

$\beta_2(p)$=aantal voortbrengers van de 2^e homologiegroep van de presentatie.

Zij gegeven abelse groepen $H_1,\ldots,H_n,\ldots$. We noteren:

β_i = Betti-getal van H_i

τ_i = torsiegetal van H_i

γ = aantal vb. van H_2 - aantal vb. van $H_2(p) = \beta_2 + \tau_2 - \beta_2(p)$.

(γ hangt af van de presentatie en van H_2 en kan zowel positief als negatief zijn)

Stelling 2: Zij gegeven een groep π ,die een eindige presentatie bezit en eindig voortgebrachte abelse groepen $H_1,\ldots,H_n,\ldots$,die aan de eigenschappen 1,2 en 3 van stelling 1 voldoen. Dan bestaat er een C.W.-complex met π als fundamentaalgroep en $H_1,\ldots,H_n,\ldots$ als homologiegroepen met in de dimensie i het aantal α_i cellen,waarbij:

$$\alpha_0 = 1$$
$$\alpha_1 = v$$
$$\text{a) } \alpha_2 = r \qquad \text{als } \gamma > 0.$$
$$\text{b) } \alpha_2 = r - \gamma \qquad \text{als } \gamma \leq 0.$$
$$\text{a) } \alpha_3 = \tau_2 + \beta_3 + \tau_3 + \gamma \qquad \text{als } \gamma > 0.$$
$$\text{b) } \alpha_3 = \tau_2 + \beta_3 + \tau_3 \qquad \text{als } \gamma \leq 0.$$

en voor $i \geq 3$: $\alpha_i = \tau_{i-1} + \beta_i + \tau_i$

Bewijs:

We volgen het bewijs van stelling 1 en tellen steeds het aantal aangehechte cellen.Voor de dimensie 2 en 3 geldt:

Indien $\beta_2(p) > \beta_2 + \tau_2$ (d.w.z. $\gamma < 0$),worden er geen extra 2-cellen meer aangehecht.Het aantal voortbrengers,dat $H_2(K_0^2)$ teveel had moet door γ 3-cellen gedood worden.

Indien $\beta_2(p) \leq \beta_2 + \tau_2$ (d.w.z. $\gamma \geq 0$),kunnen we K construeren met $\beta_2 + \tau_2$ 2-zykels.Hierbij moeten we nog het aantal 2-cellen tellen, die geen zykels zijn,nl. $r - \beta_2(p)$.

Voor de andere dimensies gaat men het gestelde eenvoudig na.

anders $n = ggd(n_1,\dots,n_k)$ als $r_i = v^{n_i}$.
Voor n=0 kan men de relatie weglaten en geldt $\pi = \mathbb{Z}$.
Voor n=1 kan men zowel de voortbrenger als de relatie weglaten en geldt $\pi = 0$.
Voor alle andere n geldt : $\pi = \mathbb{Z}_n$
De homologiegroep van de presentatie , die uiteindelijk ontstaat is steeds 0. Er geldt dus $\Lambda_p = 0$.

<u>Voorbeeld 2</u>: Groep met één relatie.
Uit [4]pag.284 volgt:
<u>Stelling</u>: Zij gegeven door een presentatie met één relatie r.
Als $r \notin [F:F]$ geldt : $H_2(P) = 0$ en $H_2(\pi) = 0$

Als $r \in [F:F]$ geldt : $H_2(P) = \mathbb{Z}$ en $H_2(\pi) = 0$ als $r=e$
$H_2(P) = \mathbb{Z}$ en $H_2(\pi) = \mathbb{Z}$ als $r \neq e$

<u>Gevolg</u>:Alleen indien r=e geldt $\Lambda_p \neq 0$.In dat geval ontstaat er na weglaten van r=e een equivalente presentatie met $\Lambda_p = 0$.

<u>Voorbeeld 3</u>: eindig voortgebrachte abelse groepen.
Een e.v. abelse groep π is isomorf met:

$$\mathbb{Z}_{m_1} \oplus \mathbb{Z}_{m_2} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{m_t} \oplus \mathbb{Z}^s$$

π heeft dus een presentatie van de vorm:

$$r_i = x_i^{m_i} \quad \text{voor } i=1,\dots,t.$$

met bovendien een $\frac{1}{2}(s+t)(s+t-1)$ -tal relaties in de commutator-ondergroep,die ervoor zorgen,dat π abels wordt.
Volgens [4] geldt:

$$H_2(\pi) = \Sigma_{1\leq i<j\leq s+t}\ \mathbb{Z}_{ggd(m_i,m_j)}$$

(zie voor de notaties ook pag.9)
Dus $H_2(\pi)$ heeft $\frac{1}{2}(s+t)(s+t-1)$ voortbrengers. Hieruit volgt $\Lambda_p = 0$.

§4. <u>Pré-abelse groeppresentaties</u>.

Zij F_n de vrije groep voortgebracht door $x_1,\dots,x_n$.Een 3-tal automorfismen van F_n,de zg. <u>Nielsentransformaties</u> worden als volgt gedefinieerd:

N1: $x_i \to x_i x_j$
$x_k \to x_k$ voor alle $k \neq i$

N2: $x_i \to x_i^{-1}$
$x_k \to x_k$ voor alle $k \neq i$

N3: $$\begin{aligned} x_i &\to x_j \\ x_j &\to x_i \\ x_k &\to x_k \quad \text{voor alle } k\neq i,j \end{aligned}$$

Stelling 1: De Nielsentransformaties vormen een eindige basis van de groep der automorfismen van F_n.
Bewijs: zie [8], stelling 3.2.

De Nielsentransformaties geven aanleiding tot Nielsen-equivalenties van presentaties. Er bestaan twee soorten Nielsenequivalenties:

1e soort:

Zij $|x:r|$ een presentatie van een groep π met n voortbrengers.
Dus $\pi = F_n/R$
Zij gegeven een automorfisme Φ van F_n. Stel de basis $x_1,\dots,x_n$ gaat onder Φ over in de basis $y_1,\dots,y_n$. We kunnen de elementen van F_n nu schrijven met behulp van de nieuwe basis. In het biezonder:

$$x_i = W_i(y_1,\dots,y_n)$$

en dus: $r_i(x_1,\dots,x_n) = r_i(W_1(y_1,\dots,y_n),\dots\dots\dots,W_n(y_1,\dots,y_n)) =$
$= s_i(y_1,\dots,y_n)$

De presentatie $|y:s|$ is equivalent met $|x:r|$, immers:

$$F_n/S = \Phi(F_n)/R = F_n/R = \pi.$$

De equivalentie, die ontstaat als Φ één der automorfismen N1, N2 of N3 is, zullen we Nielsen-equivalenties (van de eerste soort) noemen.

Lemma 2: Indien de presentatie $|y:s|$ uit $|x:r|$ kan worden afgeleid door een Nielsentransformatie van de eerste soort, is de tweede homologiegroep van $|y:s|$ gelijk aan die van $|x:r|$.

Bewijs: Zij e_i een 2-cel met rand r_i en f_j een 2-cel met rand s_j.
Zij $c = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$ een 2-zykel
Er geldt: $r_1^{\lambda_1}\cdot\dots\cdot r_n^{\lambda_n} \in [F_n:F_n]$

Automorfismen laten de commutatorondergroep invariant, dus:

$$s_1^{\lambda_1}\cdot\dots\cdot s_n^{\lambda_n} \in [F_n;F_n]$$

Hieruit volgt: $d = \lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_n f_n$ is een 2-zykel.
De 2-zykels worden ééneenduidig op elkaar afgebeeld. De 2e homologiegroepen zijn dus isomorf.

2e soort:

Zij $|x:r|$ een presentatie van een groep π. Onder Nielsenequivalenties van de tweede soort verstaan we één der volgende 3 equivalenties:

1. $|x:r| \leftrightarrow |x:s|$ met $s_i = r_i r_j$
   $s_k = r_k$ voor alle $k \neq i$

2. $|x:r| \leftrightarrow |x:s|$ met $s_i = r_i^{-1}$
   $s_k = r_k$ voor alle $k \neq i$

3. $|x:r| \leftrightarrow |x:s|$ met $s_i = r_j$
   $s_j = r_i$
   $s_k = r_k$ voor alle $k \neq i, j$

De equivalenties van de presentaties $|x:r|$ en $|x:s|$ volgens uit het feit, dat de r_i's en de s_i's dezelfde normaaldeler van F_n voortbrengen.

Lemma 3: Indien een presentatie $|x:s|$ uit een presentatie $|x:r|$ kan worden afgeleid door een Nielsentransformatie van de tweede soort, is de 2^e homologiegroep van $|x:r|$ gelijk aan die van $|x:s|$.

Bewijs:

1. De equivalentie kan worden tot stand gebracht door 2 Tietze-transformaties, nl.: I : $s_i = r_i r_j$ toevoegen
I': $r_i = s_i s_j^{-1}$ weglaten,
De homologiegroep blijft dan onveranderd.

2. De 2-complexen van $|x:r|$ en $|x:s|$ zijn gelijk

3. idem.

Stelling 4: Laat F_n de vrije groep op $x_1,\dots,x_n$ zijn en H de ondergroep, die voortgebracht wordt door woorden:

$$W_1(x),\dots\dots,W_m(x) \qquad (m \geq n)$$

Dan bestaat er een verzameling vrije generatoren $v_1,\dots,v_m$ voor H en $y_1,\dots,y_n$ voor F_n zo dat:

$$v_i \equiv y_i^{d_i} \quad (\mathrm{mod}[F_n:F_n]) \quad \text{voor } i=1,\dots,n$$
$$v_j \equiv e \quad (\mathrm{mod}[F_n:F_n]) \quad \text{voor } j=n+1,\dots,m$$

waarbij $0 \leq d_i$ deelt d_{i+1} en de d_i's eenduidig bepaald zijn door H.

Bewijs: zie [8] stelling 3.5.

Opmerking: De eis $m \geq n$ is niet wezenlijk. Indien $m<n$ kan men de W_i's aanvullen met:

$$W_{m+1} = \dots\dots\dots = W_n = e \ .$$

Uit een nauwkeurige bestudering van het bewijs blijkt dan:

$$v_{m+1} = \dots\dots\dots = v_n = e$$

Bij een gegeven presentatie $|x:r|$ kunnen we de stelling toepassen op de normaaldeler R opgespannen door de relaties $r_1,\dots,r_k$. (We vervangen indien $k<n$ is $|x:r|$ door een equivalente presentatie,

waarbij r aangevuld is met $r_{k+1}=\ldots=r_n=e.$)
De veranderingen , die de $x_1,\ldots,x_n$ en $r_1,\ldots,r_k$ bij het bewijs van stelling 4 ondergaan blijken steeds neer te komen op Nielsenequivalenties. De presentatie, die tenslotte ontstaat (nadat we eventueel een (n-k)-tal relaties $s_i=e$ hebben weggelaten) heet een <u>pré-abelse presentatie</u> van .

We vatten het bovenstaande als volgt samen:

<u>Stelling 5</u>: Bij een groeppresentatie $|(x_1,\ldots,x_n):(r_1,\ldots,r_m)|$ bestaat een préabelse presentatie $|(y_1,\ldots,y_n):(s_1,\ldots,s_m)|$ en een $k \leq m$ met de eigenschap:

$$s_i \equiv y_i^{d_i} \quad \mathrm{mod}[F:F] \quad \text{voor } 1 \leq i \leq k$$
$$s_i \equiv e \quad \mathrm{mod}[F:F] \quad \text{voor } k+1 \leq i \leq m$$

waarbij $0 \leq d_i$ deelt d_{i+1} en de d_i's allen van de groeppresentatie $|x:r|$ afhangen. Verder is de tweede homologiegroep van $|x:r|$ gelijk aan die van $|y:s|$.

<u>Gevolg</u>: Zij Q de meetkundige presentatie van $|y:s|$. De 2-cellen $f_{k+1},\ldots,f_m$, die aangehecht zijn volgens $s_{k+1},\ldots,s_m$ zijn vrije voortbrengers van de groep $Z_2(Q)$ der 2-zykels .

<u>Bewijs</u>: Zij $z = \lambda_1 f_1 + \ldots\ldots + \lambda_m f_m$ een 2-zykel, dan geldt:

$$s_1^{\lambda_1} \cdot \ldots\ldots \cdot s_m^{\lambda_m} \in [F:F]$$

Hieruit volgt: $$s_1^{\lambda_1} \cdot \ldots\ldots\ldots \cdot s_k^{\lambda_k} \in [F:F]$$

Er bestaat voor elke i een c_i met $s_i = c_i y_i^{d_i}$, dus

$$(c_1 y_1^{d_1})^{\lambda_1} \cdot \ldots\ldots \cdot (c_k y_k^{d_k})^{\lambda_k} \in [F:F]$$

Omdat een woord in de commutatorondergroep de eigenschap heeft dat de som der exponenten van een y_i nul moet zijn voor elke i, geldt:

$$\lambda_i = 0 \text{ voor } i=1,\ldots,k$$

Zij nu $|x:r|$ een pré-abelse presentatie van een groep en zij P heet C.W.-complex, dat $|x:r|$ meetkundig realiseert. De groep van de sferische 2-zykels $B_2(\pi,1)$ is een ondergroep van $Z_2(P)$. Omdat $|x:r|$ pré-abels is, zijn $e_{k+1},\ldots,e_m$ voortbrengers van $Z_2(P)$. Volgens de theorie van de abelse groepen bestaat er een basis $a_{k+1},\ldots,a_m$ van $Z_2(P)$ en een basis $b_{k+1},\ldots,b_r$ van $B_2(\pi,1)$ zodat geldt:

$$b_i = n_i a_i \quad \text{met } n_i | n_{i+1} \quad \text{voor } k+1 \leq i \leq r$$

De basis $a_{k+1},\ldots,a_m$ bestaat echter niet noodzakelijk uit 2-ketens, waarin slechts één cel voorkomt, zoals het geval is met de 2-ketens $e_{k+1},\ldots,e_m$.

<u>Propositie 6</u>: Bij een pré-abelse presentatie $|x:r|$ bestaat een equivalente pré-abelse presentatie $|x:s|$, zodat voor het complex Q,

dat $|x:s|$ meetkundig realiseert geldt:

Er bestaat een basis $b_{k+1},\dots,b_r$ van $B_2(\pi,1) \subset Z_2(Q)$ met de eigenschap:

$$b_i = m_i f_i \qquad \text{met } m_i | m_{i+1} \qquad \text{voor } k+1 \leq i \leq r$$

waarbij $f_{k+1},\dots,f_m$ een bais van $Z_2(Q)$ is en f_i de 2-cel aangehecht volgens s_i.

Gevolg: Bij elke e.p. groep bestaat een presentatie van de vorm:

$$\begin{array}{llll} r_i & \equiv x_i^{d_i} & \mathrm{mod}[F:F] & \text{voor} \quad 1 \leq i \leq k_1 \\ r_i & \equiv e & \mathrm{mod}[F:R] & \text{voor } k_1+1 \leq i \leq k_2 \\ r_i^{c_i} & \equiv e & \mathrm{mod}[F:R] & \text{voor } k_2+1 \leq i \leq k_3 \\ r_i & \equiv e & \mathrm{mod}[F:F] & \text{en niet } \mathrm{mod}[F:R] \\ & & & \text{voor } k_3+1 \leq i \leq m \end{array}$$

met $d_i \geq 0$ en $d_i | d_{i+1}$ en $c_i > 1$ en $e_i | e_{i+1}$.

Bewijs van propositie 6:

We geven de cellen en relaties een andere index. Zij $e_1,\dots,e_k$ de 2-cellen, die aangehecht zijn volgens relaties $r_1,\dots,r_k$ en die corresponderen met een stelsel voortbrengers van de 2-zykels $Z_2(P)$.

Hecht een cel e_k' aan volgens $r_k' = r_1 r_k$. De rang van het 2-zykelmoduul neemt nu met één toe:

$$Z_2(P') = Z_2(P) \oplus \mathbb{Z}$$

Zij $b_1,\dots,b_g$ een basis van de sferische 2-zykels van P. Definieer:

$$b_g' = e_1 + e_k - e_k'$$

Het stelsel $b_1,\dots,b_g,b_g'$ vormt nu een basis van de sferische 2-zykels van P'.

Er geldt: $r_1 r_k = r_k'$ dus $r_k = r_1^{-1} r_k'$. Hieruit volgt:

r_k is homotoop nul in P' (homotopie buiten e_k !)

Er is dus een afbeelding: $e_k \to P' \setminus \overset{o}{e}_k$. We kunnen deze afbeelding uitbreiden tot $P' \to P' \setminus \overset{o}{e}_k$ met de identiteit op $P \setminus \overset{o}{e}_k$.

Laat $f_i : S^2 \to P'$ de sferische 2-zykel b_i induceren. Laat f_i nu volgen door $P' \to P' \setminus \overset{o}{e}_k$ en noem de geïnduceerde 2-zykel c_i. $(i=1,\dots,g)$

Zet bovendien: $c_g' = b_g'$

Er geldt: $c_1,\dots,c_g,c_g'$ vormen een basis van de sferische 2-zykels in $Z_2(P')$.

We hebben nu de basis $b_1,\dots,b_g,b_g'$ vervangen door $c_1,\dots,c_g,c_g'$, waarbij in $c_1,\dots,c_g$ de cel e_k niet meer voorkomt.

We laten nu de relatie r_k weg. De presentatie $|x:s|$, die nu ontstaat is equivalent met $|x:r|$. Zij Q het complex, dat deze presentatie meetkundig realiseert. Q vormt een deelcomplex van P'; alleen de cel e_k

Er geldt:
$$\beta_2(p) = k_4-k_1$$
$$\beta_\pi+\tau_\pi = k_4-k_2$$
$$\Delta_p = k_2-k_1.$$

We kunnen ons afvragen of de cellen $e_{k_1+1},\dots,e_{k_2}$ homotoop triviaal zijn aangehecht, d.w.z. of de relaties $r_{k_1+1},\dots,r_{k_2}$ kunnen worden weggelaten. Er bestaat voor een dergelijke cel e_i een afbeelding $f : S^2 \to P$, die graad +1 heeft op e_i en graad 0 elders. Indien f niet alleen graad +1 heeft op e_i, maar bovendien e_i precies éénmaal bedekt met een stukje $f(S^2)$ volgt dat r_i reeds bevat is in de normaaldeler opgespannen door de andere e_j's en dus kan worden weggelaten. Indien dit achtereenvolgens zou gelden voor alle $e_i (i=k_1+1,\dots,k_2)$ zou het presentatieprobleem uit §3 zijn opgelost.

§5. Groepen met twee voortbrengers.

We nemen aan, dat de groep gegeven is in z'n pré-abelse presentatie. In het algemeen hebben de relaties dan de volgende vorm:

$$r_1 = c_1a^p \text{ voor zekere } c_1\in[F:F] \text{ en } p \in \mathbb{Z}$$
$$r_2 = c_2a^q \text{ voor zekere } c_2\in[F:F] \text{ en } q \in \mathbb{Z}$$
$$r_i = c_i \quad \text{ voor zekere } c_i\in[F:F]\ (i=3,\dots,m)$$

Er geldt blijkbaar: $\Delta_p = m-2$

We zullen, dit m-tal relaties verminderen tot m=3 en $\Delta_p=1$. Relaties $r_i=e$ kunnen worden weggelaten en hierbij wordt telkens Δ_p met één verlaagd. De c_i's zijn geconjugeerden van machten van $a^{-1}b^{-1}ab$. We kunnen relaties steeds door geconjugeerden vervangen, zodat we mogen aannemen , dat:
$$r_i = (a^{-1}b^{-1}ab)^{n_i} \qquad (i=3,\dots,m) \text{ met } n_i\in\mathbb{Z}$$
Voeg nu een nieuwe relatie toe:
$$r = (a^{-1}b^{-1}ab)^n \qquad \text{met } n=\text{ggd}(n_3,\dots,n_m)$$
r is nu produkt van $r_3,\dots,r_m$ en de presentatie blijft dus dezelfde groep voorstellen. We kunnen nu echter elke r_i $(i=3,\dots,m)$ schrijven als macht van r. Hieruit volgt, dat we $r_3,\dots,r_m$ mogen weglaten. De presentatie, die ontstaat heeft $\Delta_p = 1$.

We kunnen ons dus beperken tot presentaties met maximaal de volgende 3 relaties:
$$r_1 = c_1a^p$$
$$r_2 = c_2a^q$$
$$r_3 = (a^{-1}b^{-1}ab)^n$$
Presntaties, waarin r_3 voorkomt hebben $\Delta_p = 1$. Indien r_3 niet voorkomt

is $\Delta_p = 0$. Groepen met alleenrelatie r_3 hebben $H_2(\pi) = \mathbb{Z}$ indien $n \neq 0$ en $H_2(\pi) = 0$ voor $n=0$,maar dan kunnen we r_3 weglaten en geldt. $= \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$

We beperken ons nu verder tot presentaties met $n=1$.
Zij $c_1 = x^{-1}(a^{-1}b^{-1}ab)^{\alpha}x$ en $c_2 = y^{-1}(a^{-1}b^{-1}ab)^{\beta}y$. Vervang de relaties $r_1$en $r_2$door respectievelijk $x^{-1}r_3^{-\alpha}x$ en $y^{-1}r_3^{-\beta}y$,dan ontstaat een equivalente presentatie met:

$$r_1 = a^p$$
$$r_2 = b^q$$
$$r_3 = a^{-1}b^{-1}ab$$

<u>Voorbeeld 1</u>: $r_1 = a$; $r_3 = a^{-1}b^{-1}ab$.
Er geldt nu $H_2(\pi) = 0$ immers

$$a^{-1}b^{-1}ab \equiv a^{-1}ab^{-1}b \equiv e \quad \mathrm{mod}[F:R]$$

Dus $\Delta_p = 1$. We kunnen echter r_3 weglaten,want r_3 is produkt van r_1^{-1} en $b^{-1}r_1b$. Vervolgens kunnen we nog r_1 en a weglaten,zodat $\pi = \mathbb{Z}$.

<u>Voorbeeld 2</u>: $r_1 = a^2$; $r_3 = a^{-1}b^{-1}ab$

Er geldt: $$a^{-1}r_3 \equiv a^{-2}b^{-1}a^{-1}b \equiv b^{-1}a^{-1}b \qquad \mathrm{mod}[F:R]$$
$$a^{-2}r_3^{\,2} \equiv (a^{-1}r_3)^2 \equiv b^{-1}a^{-2}b \equiv a^{-2} \qquad \mathrm{mod}[F:R]$$

Dus: $$r_3^{\,2} \equiv e \qquad \mathrm{mod}[F:R]$$

Omdat $r_3 \not\equiv e \mod[F:R]$ geldt $H_2(\pi) = \mathbb{Z}_2$ en dus $\Delta_p = 0$.

<u>Voorbeeld 3</u>: $r_1 = a^p$; $r_3 = a^{-1}b^{-1}ab$

Analoog aan voorbeeld 2 geldt:

$$r_3^{\,p} \equiv e \quad \mathrm{mod}[F:R] \quad \text{en } H_2(\pi) = \mathbb{Z}_p \quad \text{en dus } \Delta_p = 0.$$

<u>Voorbeeld 4</u>: $r_1 = a$; $r_2 = b^q$; $r_3 = a^{-1}b^{-1}ab$
Volgens voorbeeld 1 kunnen we r_3 weglaten en vervolgens r_1 en a.
Er blijft over de presentatie $|b, r_2 = b^2|$. Dus $\pi = \mathbb{Z}_2$.

<u>Algemeen geval</u>: $r_1 = a^p$; $r_2 = b^q$; $r_3 = a^{-1}b^{-1}ab$ met $p|q$

Er geldt: $$r_3^{\,p} \equiv e \quad \mathrm{mod}[F:R] \quad \text{en} \quad \pi = \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_q$$

en: $$H_2(\pi) = \mathbb{Z}_p \quad \text{en } \Delta_p = 0 \text{ als } p \neq 1.$$

Alleen indien $p=1$ geldt $H_2(\pi) = 0$ en $\Delta_p = 1$. We kunnen dan echter r_3 weglaten (vgl. voorbeeld 4) en houden over $|b : r_2 = b^q|$. Dus $\pi = \mathbb{Z}_q$

§6. Sferische 2-zykels en overdekkingsruimten.

Zij $(\tilde{X},\tilde{x}_o) \to (X,x_o)$ een fibrarie met UPLP (voor definities, zie bijvoorbeeld [11])

Stelling 1: Een afbeelding $f : (Y,y_o) \to (X,x_o)$ heeft een lift $\tilde{f} : (Y,y_o) \to (\tilde{X},\tilde{x}_o)$ dan en slechts dan als

$$f_*\pi_1(Y,y_o) \subset p_*\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_o)$$

Bewijs: zie [11](Chapter II Sec.4,Th.5)

Gevolg: Voor $\tilde{X}$ is universele overdekkingsruimte van X en S^2 (enkelvoudigsamenhangend) geldt dus : Een afbeelding $f: S^2 \to X$ heeft altijd een lift $\tilde{f} : S^2 \to \tilde{X}$.

Hieruit volgt:

Propositie 2: De projectie $p: \tilde{X} \to X$ induceert een ketenmorfisme

$$f_*: Z_2(\tilde{X}) \to Z_2(X)$$

dat sferische 2-zykels van $\tilde{X}$ surjectief afbeeldt op de sferische 2-zykels van X.

Voorbeeld 1: De torus T^2 heeft geen sferische 2-zykels. De universele overdekkingsruimte van T^2 is namelijk samentrekbaar.

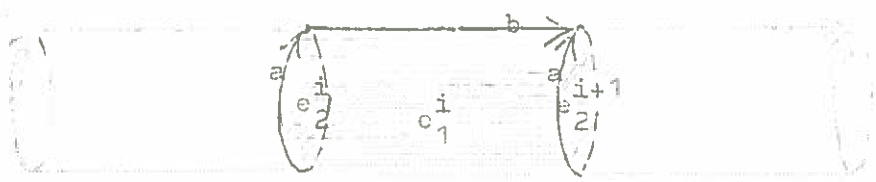
Propositie 3: Elk enkelvoudig samenhangend 2-complex is homotopie-equivalent met een wig van 2-sferen.

Bewijs: volgt uit [13]

Voorbeeld 2: Zij P de ruimte, die de groeppresentatie:

$$|(a,b):(r_1=a^{-1}b^{-1}ab, r_2=a)|$$

realiseert. De universele overdekkingsruimte $\tilde{P}$ is als volgt voor te stellen:



De sferische 2-zykels zijn hier van de vorm:

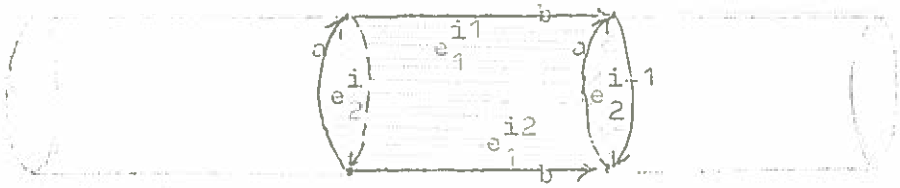
$$e_2^i + e_1^i - e_2^{i+1}$$

Projectie van deze 2-zykel op $Z_2(P)$ levert de sferische 2-zykel e_1, (dit is de cel aangehecht volgens r_1), die de enige voortbrenger is van de groep der sferische 2-zykels . De bijbehorende afbeelding $f : S^2 \to P$ dekt e_1 precies éénmaal en heeft op e_2 graad 0 . De cel e_2 wordt echter twee keer gedekt, maar met tegengestelde graad. Dit komt omdat f de graad +1 heeft op e_2^i en de graad -1 op e_2^{i+1} en de projectie $p : \tilde{P} \to P$ deze 2 cellen identificeert.

<u>Voorbeeld 3</u>: Zij P de ruimte, die de groeppresentatie

$$|(a,b):(r_1=a^{-1}b^{-1}ab\ ,\ r_2=a^2)|$$

realiseert. De universele overdekkingsruimte van P is dezelfde als in voorbeeld 2. De celstructuur en de projectie p: $\tilde{P} \to P$ zijn echter anders:



De sferische 2-zykels zijn hier van de vorm:

$$e_2^{i} + e_1^{i1} + e_1^{i2} - e_2^{i+1}$$

Projectie van deze 2-zykel op $Z_2(P)$ levert de sferische 2-zykel $2e_1$, (e_1 is de cel aangehecht volgens r_1), die de enige voortbrenger is van de groep der sferische 2-zykels. De bijbehorende afbeelding $f : S^2 \to P$ dekt e_1 precies tweemaal en heeft op e_2 graad 0. De cel e_2 wordt echter tweemaal gedekt maar met tegengesteld teken.
Uit de structuur van P en de projectie $p : \tilde{P} \to P$ volgt verder, dat e_1 geen sferische 2-zykel kan zijn.

<u>Conclusie:</u> In de universele overdekkingsruimte van een 2-complex kunnen we de sferische 2-zykels eenvoudig aangeven. Elke zykel is daar nl. sferisch. De projectie van deze zykels op P levert alle sferische 2-zykels van P. Stel P heeft een sferische 2-zykel bestaande uit één cel, zeg e_i. Het presentatieprobleem uit §3 is nu te herleiden tot de vraag: Bestaat er een zykel $z \in Z_2(\tilde{P})$ met $p_*(z) = e_i$, zo dat in z maar één cel $\tilde{e}_i$ met $p_*(\tilde{e}_i) = e_i$ voorkomt?

Mathematisch Instituut
Universiteit van Amsterdam

Litteratuur:

[1] R.H.Crowel-R.H.Fox : Introduction to Knottheorie.
(serie:Introd.to Higher Mathematics;Ginn and Comp.,

[2] D.B.A.Epstein : Finite presentations of groups and 3-manifolds
Quart.J.Oxford (1961) 205-212.

[3] H.Freudental : Der Einfluss derFundamentalgruppe auf die zweite
Bettische Gruppe.
Annals of Math. 47(1946) pag.274-316

[4] H. Hopf : Fundamentalgruppe und zweite Bettische Gruppe.
Comment.Math.Helv.14(1941/42) pag.257-309
Ook: Selecta Heinz Hopf ; Springer 1964

[5] H.Hopf : Nachtrag zur Arbeit "Fundamentalgruppe und zweite
Bettische Gruppe.
Comment.Math.Helv.15(1942/43) pag.27-32
Ook: Selecta Heiz Hopf

[6] H.Hopf : Ueber Bettische Gruppen,die zu einer beliebigen Gruppe
gehören.
Comment.Math.Helv.17(1944/45) pag.39-79
Ook: Selecta Heinz Hopf

[7] H.Hopf : Beitrage zur Homotopietheorie.
Comment.Math.Helv.17(1944/45) pag.307-326

[8] W.Magnus-A.Karrass-D.Solitar : Combinatorial grouptheory.
Interscience publicers.(1966)

[9] M.A.Rabin : Recursive Unsolvability of grouptheoretic problems.
Annals of Math.67(1958) pag.172-194

[10] K.Reidemeister : Complexes and Homotopy chains
Bulletin of the A.M.S. 56(1950) pag.297-307

[11] E.H.Spanier : Algebraic Topology
McGraw-Hill series in Higher Mathematics.(1966)

[12] K.Varadarajan : Groups for which Moore-spaces M(A,1) exist.
Annals of Math. 82(1966)(sept.)

[13] C.T.C.Wall : Finitenessconditions for C.W.-complexes.
Annals of Math.81(1965) pag.56-69

[14] C.T.C.Wall : Finitenessconditions for C.W.-complexes II.
Proc. of the Royal Society,A,295(1966),pag.129-139