Деформации многочленов и их дзета-функции *

С. М. Гусейн-Заде † Д. Сирсма

Аннотация

Для аналитического по $\sigma \in (\mathbb{C}, 0)$ семейства P_σ многочленов от n переменных определено преобразование монодромии h нулевого множества уровня $V_\sigma = \{P_\sigma = 0\}$ для достаточного малого $\sigma \neq 0$. Дзета-функция этого преобразования монодроми записывается в виде интеграла по эйлеровой характеристике соответствующих локальных данных. Такой подход приводит к изучению деформаций ростков голоморфных функций и их дзета-функций. Приводятся некоторые примеры вычислений с использованием этой техники.

1 Введение

Комплексный многочлен P от n переменных определяет (полиномиальное) отображение из $\mathbb{C}^n$ в $\mathbb{C}$ (также обозначаемое через P). Это отображение является (C^∞) локально тривиальным расслоением над дополнением к некоторому конечному подмножеству образа $\mathbb{C}$ — бифуркационному множеству: [1]. Топологическое изучение полиномиальных отображений было начато в [3] и продолжено, в частности, в [8, 9]. Интерес представляют описания бифуркационного множества многочлена, его общего множества уровня, вырождения множества уровня для особых значений, монодромий, соответствующих обходам вокруг особых значений, ... Множества уровня $\{P = \sigma\}$ многочлена P являются нулевыми множествами уровня семейства многочленов $P_\sigma = P - \sigma$. Естественно попытаться изучить поведение нулевого множества уровня не конкретно этого семейства, а произвольного семейства многочленов P_σ (скажем, аналитического по σ из окрестности нуля в комплексной прямой $\mathbb{C}_\sigma$). В этой ситуации можно таже исследовать изменение топологического типа отображения $P_\sigma : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ в семействе. Такое изучение было начато в [10, 11].

*Ключевые слова: деформации многочленов, дзета-функция.

†Частично поддержано грантами РФФИ–04–01–00762, НШ–1972.2003.1, NWO-РФФИ 047.011.2004.026

Пусть $P_\sigma(x)$ — аналитическое по $\sigma \in (\mathbb{C}_\sigma, 0)$ семейство многочленов от n переменных $x = (x_1, \ldots, x_n)$: деформация многочлена $P = P_0$. Многочлен P_σ определяет отображение $P_\sigma : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$. Пусть $\mathbb{V}$ — гиперповерхность в $\mathbb{C}^{n+1} = \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}_\sigma$, определенная уравнением $P_\sigma(x) = 0$ ($x \in \mathbb{C}^n$, $\sigma \in \mathbb{C}_\sigma$). Проекция $p : \mathbb{V} \to \mathbb{C}_\sigma$ на второй сомножитель является локально тривиальным расслоением над проколотой окрестностью нуля в $\mathbb{C}_\sigma$ (см., например, [1]). Для достаточно малого $\sigma \neq 0$ обозначим через V_σ слой $\{P_\sigma = 0\} \subset \mathbb{C}^n$ этого расслоения (нулевое множество уровня общего члена семейства) и пусть $h : V_\sigma \to V_\sigma$ — преобразование монодромии этого расслоения (оно определено корректно с точностью до изотопии).

Дзета-функция $\zeta_h(t)$ преобразования $h : Z \to Z$ пространства Z — это рациональная функция

$$\prod_{q \geq 0} \{\det(id - t \cdot h_{*|H_q(Z;\mathbb{R})})\}^{(-1)^q}$$

переменной t. Степень дзета-функции (степень числителя минус степень знаменателя) равна эйлеровой характеристике $\chi(Z)$ пространства Z. Дзета-функция преобразования монодромии $h : V_\sigma \to V_\sigma$ будем называть дзета-функцией семейства P_σ.

Для семейства $P_\sigma = P + \sigma$ многообразие V_σ является общим множеством уровня многочлена P, а $\zeta_P(t) = \zeta_h(t)$ — дзета-функция классического преобразования монодромии полиномиальной функции P при обходе вокруг нулевого значения. В [6] была приведена формула, которая выражает дзета-функцию $\zeta_P(t)$ (а таким образом и эйлерову характеристику общего множества уровня многочлена P) в виде интеграла по эйлеровой характеристике соответствующих локальных данных во всех точках компактификации $\mathbb{CP}^n$ аффинного пространства $\mathbb{C}^n$. Такая "локализация" оказывается эффективной для вычисления этих инвариантов в ряде случаев.

В настоящей работе мы формулируем общий принцип локализации для дзета-функции и его конкретизацию для семейств многочленов. Для этого мы описываем локальные данные, соответствующие задаче вычисления дзета-функции семейства многочленов. Таковыми являются деформации ростков (комплексно аналитических) функций на аффинном пространстве $\mathbb{C}^n$ или на аффинном пространстве $\mathbb{C}^n$ с выделенной гиперплоскостью ("границей") $\mathbb{C}^{n-1}$ и их дзета-функции. Мы приводим примеры использования формулы локализациию

2 Принцип локализации

Пусть X — компактное комплексно аналитическое пространство (вообще говоря, особое) и пусть Y — компактное комплексно аналитическое подпространство в X. Пусть L — линейное расслоение над X и пусть s_σ — аналитическое по $\sigma \in (\mathbb{C}_\sigma, 0)$ семейство сечений линейного расслоения L. Пусть $\mathbb{V} \subset X \times \mathbb{C}_\sigma$

задается уравнением $s_\sigma(x) = 0$. Ограничение проекции $p : X \times \mathbb{C}_\sigma \to \mathbb{C}_\sigma$ на второй множитель на дополнение $\mathbb{V} \setminus (Y \times \mathbb{C}_\sigma)$ является локально тривиальным расслоением над проколотой окрестностью начала координат в $\mathbb{C}_\sigma$: [1]. Для достаточно малого $\sigma \neq 0$ обозначим через V_σ слой $p^{-1}(\sigma) \cap (\mathbb{V} \setminus (Y \times \mathbb{C}_\sigma))$ этого расслоения (нулевое множество уровня в $X \setminus Y$ общего сечения из семейства) и пусть $h : V_\sigma \to V_\sigma$ — преобразование монодромии этого расслоения (оно определено корректно с точностью до изотопии). Пусть $\zeta_{s_\sigma}(t)$ — дзета-функция преобразования монодромии h.

Опишем локальные аналоги этих объектов. Заметим, что над окрестностью точки линейное расслоение тривиально и поэтому его сечения могут рассматриваться как функции. Пусть $(X, x_0) \subset (\mathbb{C}^N, x_0)$ — ростоккомплексно аналитического пространства, а (Y, x_0) — его подпространство (возможно пустое). Пусть s_σ — аналитическая по $\sigma \in (\mathbb{C}_\sigma, 0)$ деформация ростка s функции на (X, x_0), т.е. $s_\sigma = S(\cdot, \sigma)$, где S — росток голоморфной функции на $(X \times \mathbb{C}_\sigma, (x_0, 0))$, $s_0 = s$. Пусть $\mathbb{V}_{x_0} \subset (X \times \mathbb{C}_\sigma, (x_0, 0))$ — росток подпространства, задаваемый уравнением $s_\sigma(x) = 0$. Пусть положительное ε столь мало, что все страты стратификации Уитни пары $(X, \{s = 0\})$ трансверсальны сфере $S_{\varepsilon'}(x_0)$ радиуса ε' с центром в точке x_0 в $\mathbb{C}^N$ для любого положительного $\varepsilon' \leq \varepsilon$. Пусть $B_\varepsilon(x_0)$ — шар радиуса ε с центром в точке x_0. Ограничение проекции $X \times \mathbb{C}_\sigma \to \mathbb{C}_\sigma$ на второй сомножитель на дополнение $(\mathbb{V}_{x_0} \cap (B_\varepsilon(x_0) \times \mathbb{C}_\sigma)) \setminus (Y \times \mathbb{C}_\sigma)$ является локально тривиальным расслоением над проколотой окрестностью нуля в $\mathbb{C}_\sigma$: [7]. Пусть V_{σ, x_0} и $\zeta_{s_\sigma}(t)$ — слой (локльное множество нулевого уровня в $(X \setminus Y, 0)$ общей функции семейства) и дзета-функция преобразования монодромии этого расслоения.

Для конструктивной функции Ψ на конструктивном множестве Z со значениями в абелевой группе A определено понятие интеграла $\int_Z \Psi d\chi$ функции Ψ по множеству Z по отношению к эйлеровой характеристике (см., например, [12]). Например, если A — мультипликативная группа ненулевых рациональных функций переменной t, а $Z = \bigcup \Xi$ — конечная стратификация множества Z (без каких-либо условий регулярности), такая что функция $\Psi_x = \Psi(x)$ одна и та же для всех точек x каждого страта Ξ и равна Ψ_Ξ для них, то по определению

$$\int_Z \Psi d\chi = \prod_\Xi (\Psi_\Xi(t))^{\chi(\Xi)}.$$

Теорема 1 *Имеем*

$$\zeta_{s_\sigma}(t) = \int_{\{x \in X : s(x) = 0\}} \zeta_{s_{\sigma,x}}(t) d\chi,$$

и поэтому

$$\chi(V_\sigma) = \int_{\{x \in X : s(x) = 0\}} \chi(V_{\sigma,x}) d\chi.$$

Доказательство. Можно предполагать, что преобразование монодромии h согласовано с (некоторой) стратификацией Уитни пары (X, Y) (т.е. сохраняет ее страты). В связи с мультипликативностью дзета функции достаточно доказать утверждение только для одного страта. Используя индукцию, можно предполагать, что утверждение уже доказано для стратов меньшей размерности. Разрешая особенности пространства, мы сводим задачу к случаю неособого X. В этой ситуации доказательство практически совпадает с приведенным в [5]. $\square$

Замечание. Это утверждение может рассматриваться как обобщение принципов локализации, сформулированных для частных случаев, в частности, в [5, 6]. Оно может быть также выведено из общих утверждений, описанных в [4].

3 Локализация для семейств многочленов

Пусть P_σ — аналитическое по $\sigma \in (\mathbb{C}_\sigma, 0)$ семейство многочленов и пусть d — степень общего многочлена семейства (т.е. — степень многочлена P_σ для достаточно малого $\sigma \neq 0$; $\deg P_0 \leq d$). Пусть $X = \mathbb{CP}^n$ — (стандартная) компактификация аффинного пространства $\mathbb{C}^n$ и пусть $Y = \mathbb{CP}^{n-1}_\infty$ — его бесконечно удаленная гиперплоскость. Семейство многочленов P_σ может рассматриваться как семейство сечений линейного расслоения $\mathcal{O}(-d)$ над проективным пространством $\mathbb{CP}^n$ (если степень многочлена P_0 меньше d, то соответствующее сечение обращается в нуль на всей бесконечно удаленной гиперплоскости $\mathbb{CP}^{n-1}_\infty$).

Таким образом, мы находимся в ситуации, описанной в предыдущем разделе. Для точки $x \in \mathbb{CP}^{n-1}_\infty \subset \mathbb{CP}^n$ обозначим через $p_{\sigma,x}$ росток голоморфной функции (сечения) P_σ в этой точке (в действительности в аффинной карте $p_{\sigma,x}$ является многочленом), пусть $\hat{p}_{\sigma,x} = p_{\sigma,x|(\mathbb{CP}^{n-1}_\infty, x)} : (\mathbb{CP}^{n-1}_\infty, x) \to \mathbb{C}$ и $\hat{\zeta}_{p_{\sigma,x}}(t) := \zeta_{p_{\sigma,x}}(t)/\zeta_{\hat{p}_{\sigma,x}}(t)$. Пусть также $\hat{\chi}(\{p_{\sigma,x} = 0\}) := \chi(\{p_{\sigma,x} = 0\}) - \chi(\{\hat{p}_{\sigma,x} = 0\})$. Пусть $\widetilde{P}_\sigma(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ — однородный многочлен степени d, соответствующий многочлену $P_\sigma(x_1, \ldots, x_n)$:

$$\widetilde{P}_\sigma(x_0, x_1, \ldots, x_n) = x_0^d P_\sigma\left(\frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0}\right)$$

(если $\deg P_0 < d$, то многочлен $\widetilde{P}_0$ не является обычным однородным многочленом, соответствующим многочлену P_0, а отличается от него множителем $x_0^{d-\deg P_0}$). Теорема 1 дает следующее утверждение.

Теорема 2 *Имеет место формула*

$$\zeta_{P_\sigma}(t) = \int_{\{x\in\mathbb{C}^n : P_0(x)=0\}} \zeta_{P_{\sigma,x}}(t) d\chi \;\cdot \int_{\{x\in\mathbb{CP}^{n-1}_\infty : \widetilde{P}_0(x)=0\}} \hat{\zeta}_{p_{\sigma,x}}(t) d\chi$$

и поэтому

$$\chi(V_\sigma) = \int_{\{x\in\mathbb{C}^n : P_0(x)=0\}} \chi(V_{\sigma,x}) d\chi \; + \int_{\{x\in\mathbb{CP}^{n-1}_\infty : \widetilde{P}_0(x)=0\}} \hat{\chi}(\{p_{\sigma,x} = 0\}) d\chi.$$

Замечания. **1.** Если $\deg P_0 = d_0 < d$, то $\{x \in \mathbb{CP}^{n-1}_\infty : \widetilde{P}_0(x) = 0\} = \mathbb{CP}^{n-1}_\infty$ и общей точке бесконечно удаленной гиперплоскости $\mathbb{CP}^{n-1}_\infty$ имеем $\widetilde{\zeta}_{p_{\sigma,x}}(t) = 1 - t^{d-d_0}$, $\widetilde{\chi}(\{p_{\sigma,x} = 0\}_x = d - d_0$.
2. Теорема 2 сводит вычисление дзета-функции семейства многочленов к вычислению дзета-функций семейств голоморфных ростков. Интересным частным случаем являются линейные семейства многочленов и соответственно линейные семейства голоморфных ростков. В несколько других терминах этот случай рассматривался в рамках изучения мероморфных ростков, предназначенного для исследования полиномиальных отображений: [2, 6]. Пусть $s_\sigma = f + \sigma g$ — линейное семейство голоморфных ростков (семейство нулевых множеств уровня ростков s_σ является пучком). Тогда с точностью до множества неопределенности $\{f = g = 0\}$ общее локальное множество уровня и преобразование монодромии семейства s_σ совпадает с нулевым слоем Милнора $\mathcal{M}^0_\varphi$ и с соответствующим преобразованием монодромии h^0_φ мероморфного ростка $\varphi = \frac{f}{g}$, определенным в [5]. Если $g(0) \neq 0$, то множество неопределенности пусто и указанные объекты совпадают (и совпадают с обычным слоем Милнора ростка f и с его преобразованием классической монодромии). Если $f(0) = g(0) = 0$, то множество неопределенности (локально) стягиваемо и преобразование монодромии может быть выбрано тождественным на нем. Поэтому $\chi(V_{\sigma,0}) = \chi(\mathcal{M}^0_\varphi) + 1$, $\zeta_{s_\sigma,0}(t) = \zeta^0_\varphi(t)(1-t)$. Это позволяет применять методы, разработанные для мероморфных ростков, к линейным семействам голоморфных ростков. В частности, имеется формула типа Варченко, выражающая дзета-функцию $\zeta^0_\varphi(t)$ в терминах диаграмм Ньютона ростков f и g (в случае, когда мероморфный росток φ невырожден по отношению к паре диаграмм Ньютона): [2].
3. Предположим, что $P_\sigma(x) = f(x) + \sigma g_d(x)$, где f — многочлен степени d, такой что проективное замыкание любого слоя ростка f и его пересечение с бесконечно удаленной гиперплоскостью имеют изолированные особенности (в действительности — изолированные краевые особенности), а g является достаточно общим однородным многочленом степени d, таким что компактификации слоев многочленов трансверсально пересекают бесконечно удаленную гиперплоскость при $\sigma \neq 0$ (например, $g = \ell^d$ для общей линейной функции ℓ). В [10, раздел 7] показано, что дзета-функция этой деформации равна

$$\zeta_{P_\sigma}(t) = (1-t)^{\chi(V_0)} \prod \zeta_{Z_i}(t)$$

где V_0 — слой $\{f = 0\}$ (предполагаемый гладким), а ζ_{Z_i} — дзета-функции преобразований монодромии указанных выше краевых особенностей. Эта формула является непосредственным следствием Теоремы 2.

4 Examples

1. Пусть $P_\sigma(x,y) = x^{d_0} + \sigma(x^d + y^d)$ (n=2). Имеются 3 различных случая.
1) $d_0 > d$. В этом случае $\{\widetilde{P}_0 = 0\} \subset \mathbb{CP}^2$ является замыканием прямой $\{x=0\}$. На нем имеются 3 типа точек:
a) Начало координат $0 = (0,0)$. Формула типа Варченко дает

$$\zeta_{P_{\sigma,0}}(t) = (1-t)(1-t^{d_0-d})^{1-d}.$$

b) Другие точки аффинной прямой $\{x=0\}$, т.е. $y \neq 0$. Для таких точек имеем $\zeta_{P_{\sigma,x}}(t) = (1-t^{d_0})$. Однако, эйлерова характеристика множества этих точек равна нулю и поэтому этот страт не вносит вклад в $\zeta_{P_\sigma}(t)$.
c) Бесконечно удаленная точка прямой $\{x=0\}$. Легко видеть, что $\widetilde{\zeta}_{p_{\sigma,x}}(t) = 1$.

Интегрируя эти локальные данные, получаем

$$\zeta_{P_\sigma}(t) = (1-t)(1-t^{d_0-d})^{1-d}.$$

Можно сказать, что эта дзета-функция по сути происходит из начала координат в $\mathbb{C}^2$.
2) $d_0 = d$. Этот случай неинтересен: простые вычисления (или рассмотрения) дают $\zeta_{P_\sigma}(t) = (1-t)$.
3) $d_0 < d$. В этом случае $\{\widetilde{P}_0 = 0\} \subset \mathbb{CP}^2$ является объединением прямой $\{x=0\}$ в аффинной плоскости и бесконечно удаленной прямой $\mathbb{CP}^1_\infty$. На нем имеются 5 типов точек:
a) Начало координат $0 = (0,0)$. Имеем (например, из формулы типа Варченко) $\zeta_{P_{\sigma,0}}(t) = (1-t)$.
b) Другие точки аффинной прямой $\{x=0\}$. Опять $\zeta_{P_{\sigma,x}}(t) = (1-t^{d_0})$, но эйлерова характеристика этого страта равна нулю.
c) Бесконечно удаленная точка прямой $\{x=0\}$: $\widetilde{\zeta}_{p_{\sigma,x}}(t) = 1$.
d) Точки пересечения бесконечно удаленной прямой $\mathbb{CP}^1_\infty$ с замыканием кривой $\{x^d + y^d = 0\}$; имеется d таких точек. Нетрудно видеть, что для них $\widetilde{\zeta}_{p_{\sigma,x}}(t) = 1$.
e) Наконец, имеются все остальные (общего положения) точки бесконечно удаленной прямой. Эйлерова характеристика этого страта равна $2-(1+d) = 1-d$. Как было объяснено в рамечании в концу раздела 3, $\widetilde{\zeta}_{p_{\sigma,x}}(t) = 1 - d^{d-d_0}$.

Интегрируя эти локальные данные, получаем

$$\zeta_{P_\sigma}(t) = (1-t)(1-t^{d-d_0})^{1-d}$$

(почти как в случае 1). Можно сказать, что эта дзета-функция по сути происходит из открытого страта бесконечно удаленной прямой.
2. Пусть $P_\sigma(x_1,x_2,x_3) = x_1^4 + x_2^3 + x_3^2 + \sigma x_2^4$ (в этом примере наблюдаются некоторые специальные изменения поведения на бесконечности). Проективное многообразие $\{\widetilde{P}_0 = 0\} \subset \mathbb{CP}^3$ пересекает бесконечно удаленную плоскость

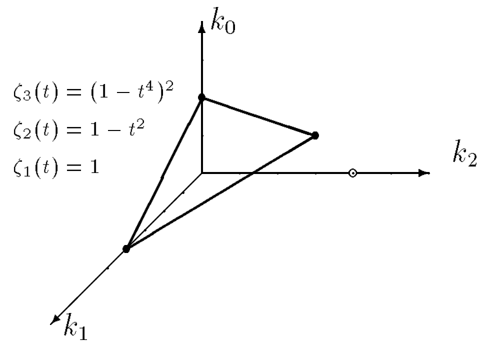

Рисунок 1: Даграммы Дынкина слагаемых, соответствующих деформации в точке $(0:0:0:1)$ (помечены $\bullet$ и $\circ$ соответственно).

$\mathbb{CP}^2_\infty = \{x_0 = 0\}$ вдоль прямой $\{x_1 = 0\}$ и состоит из следующих (гладких) стратов.
a) Начало координат $\{0\}$ в $\mathbb{C}^3$. В ней мы имеем эквисингулярную деформацию особенности поверхности E_6 и поэтому $\zeta_{P_\sigma,0}(t) = 1-t$.
b) Множество $\{P_0 = 0\}\setminus\{0\}$. Во всех точках x этого страта имеем $\zeta_{P_\sigma,x}(t) = 1-t$, однако эйлерова характеристика самого страта равна нулю и поэтому он не вносит вклад в дзета-функцию семейства P_σ.
c) "Выделенная точка" $(0:0:0:1)$ на бесконечно удаленной проективной прямой $\{x_0 = x_1 = 0\}$. С помощью формулы типа Варченко ([2]; see Fig. 1) получаем для этой точки $\zeta_{P_\sigma,x}(t) = \frac{(1-t^4)^2}{1-t^2}$.
d) Аффинная прямая $\{x_0 = x_1 = 0\}\setminus\{(0:0:0:1)\}$. Ее эйлерова характеристика равна 1. В ее точках многообразие $\widetilde{P}_0(0) = 0$ неособо, однако, его пересечение с бесконечно удаленной плоскостью состоит из прямой кратности 4, которая при $\sigma \neq 0$ расщепляется на 4 различные прямые, песекающие друг друга в точке $(0:0:0:1)$. Поэтому для точек этого страта имеем $\zeta_{P_\sigma,x}(t) = \frac{1-t}{1-t^4}$.
Собирая вместе все эти локальные данные, получаем $\zeta_{P_\sigma}(t) = \frac{(1-t^4)(1-t)^2}{1-t^2}$.
3. Пусть $P_\sigma(x) = f_{d_0}(x)+\sigma g_d(x)$, где $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{C}^n$, f_{d_0} — невырожденный однородный многочлен степени d_0 (т.е. он имеет изолированную критическую точку в начале координат), g_d — однородный многочлен степени d общего положения, т.е. многочлен g_d невырожден и гиперповерхности $\{f_{d_0=0}\}$ и $\{g_d = 0\}$ в $\mathbb{CP}^{n-1}_\infty$ пересекаются трансверсально.
1) $d_0 > d$. В множестве $\{\widetilde{P}_0 = 0\} \subset \mathbb{CP}^n$ имеются 3 типа точек:
a) Начало координат в $\mathbb{C}^n$. Формула типа Варченко дает

$$\zeta_{P_\sigma,0}(t) = (1-t)\cdot\left(1-t^{d_0-d}\right)^{(-1)^{n-1}((d_0-1)^n-(d-1)^n)/(d_0-d)}.$$

b) Другие точки гиперповерхности $\{P_0 = 0\}$ в аффинном пространстве $\mathbb{C}^n$. Для этих точек $\zeta_{P_\sigma,x}(t) = (1-t)$. эйлерова характеристика множества этих точек равна нулю.

c) Бесконечно удаленные точки множества $\{\widetilde{P}_0 = 0\}$, т.е. точки из $\{f_{d_0=0}\} \subset \mathbb{CP}^{n-1}_\infty$. Для этих точек имеем $\hat{\zeta}_{p\sigma,x}(t) = 1$.
Собирая вместе локальные данные, получаем

$$\zeta_{P_\sigma}(t) = \zeta_{P_\sigma,0}(t) = (1-t)\cdot\left(1-t^{d_0-d}\right)^{(-1)^{n-1}((d_0-1)^n-(d-1)^n)/(d_0-d)}.$$

2) $d_0 = d$. Очевидно, что $\zeta_{P_\sigma}(t) = 1-t$.
3) $d_0 < d$. Множество $\{\widetilde{P}_0 = 0\}$ является объединением $\{x \in \mathbb{C}^n : P_0 = 0\} \cup \mathbb{CP}^{n-1}_\infty$.
a) Для всех точек множества $\{x \in \mathbb{C}^n : P_0 = 0\}$ имеем $\zeta_{P_\sigma,x}(t) = (1-t)$. Эйлерова характеристика этого множества равна 1.
b) В точках множества $\{f_{d_0} = 0\} \subset \mathbb{CP}^{n-1}_\infty$ и в точках множества $\{g_d = 0\} \subset \mathbb{CP}^{n-1}_\infty$ имеем $\hat{\zeta}_{p\sigma,x}(t) = 1$.
c) В точках дополнения $\mathbb{CP}^{n-1}_\infty \setminus (\{f_{d_0} = 0\} \cup \{g_d = 0\})$ имеем $\hat{\zeta}_{p\sigma,x}(t) = 1 - t^{d-d_0}$. Эйлерова характеристика этого множества равна $(-1)^{n-1}((d-1)^n - (d_0-1)^n)/(d-d_0)$.

Собирая вместе локальные данные, получаем

$$\zeta_{P_\sigma}(t) = (1-t)\cdot\left(1-t^{d-d_0}\right)^{(-1)^{n-1}((d-1)^n-(d_0-1)^n)/(d-d_0)}.$$

Хотя для $d_0 > d$ и $d_0 < d$ ответы похожи, как и в Примере 1 можно сказать, что "происхождение" дзета функции (и/или исчезающих циклов) в этих случаях различно: начало координат в $\mathbb{C}^n$ и бесконечно удаленная гиперплоскость $\mathbb{CP}^{n-1}_\infty$ соответственно.
4. Пусть $P_\sigma(x) = f_{d_0}(x) + \sigma(\ell(x))^d$, где $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{C}^n$, f_{d_0} — невырожденный однородный многочлен степени d_0, ℓ — (однородная) линейная функция общего положения, т.е. гиперповерхности $\{f_{d_0=0}\}$ и $\{\ell = 0\}$ в $\mathbb{CP}^{n-1}_\infty$ пересекаются трансверсально. Рассмотрения, подобные приведенным в Примере 3, дают:

$$\zeta_{P_\sigma}(t) = \begin{cases} (1-t)\cdot(1-t^{d_0-d})^{(1-d_0)^{n-1}} & \text{для } d_0 > d, \\ 1-t & \text{для } d_0 = d, \\ (1-t)\cdot(1-t^{d-d_0})^{(1-d_0)^{n-1}} & \text{для } d > d_0. \end{cases}$$

Список литературы

[1] А. Н. Варченко. Теоремы топологической эквисингулярности семейств алгебраических многообразий и семейств полиномиальных отображений. Изв. АН СССР, сер. матем. **36** (1972), вып.5, 957–1019.

[2] С. М. Гусейн-Заде, И. Луенго, А. Мелье–Эрнандез. Дзета–функции ростков мероморфных функций и диаграмма Ньютона. Функциональный анализ и его приложения, 1998, **32** (1998), вып.2, 26–35.

[3] S. A. Broughton. On the topology of polynomial hypersurfaces. Proceedings A.M.S. Symp. in Pure. Math., vol. 40, I (1983), 165–178.

[4] A. Dimca. Sheaves in topology. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 2004.

[5] S. M. Gusein-Zade, I. Luengo, A. Melle-Hernández. Partial resolutions and the zeta-function of a singularity. Comment. Math. Helv. **72** (1997), no.2, 244–256.

[6] S. M. Gusein-Zade, I. Luengo, A. Melle-Hernández. On the zeta-function of a polynomial at infinity. Bull. Sci. Math. **124** (2000), no.3, 213–224.

[7] Lê Dũng Tráng. Some remarks on relative monodromy. In: Real and complex singularities, Oslo, 1976, Sijthoff and Noordhoff, Alphen a.d. Rijn, 1977, pp.397–403.

[8] A. Parusiński. On the bifurcation set of complex polynomial with isolated singularities at infinity. Compositio Math. **97** (1995), no.3, 369–384.

[9] D. Siersma, M. Tibăr. Singularities at infinity and their vanishing cycles. Duke Math. Journal, **80** (1995), no.3, 771–783.

[10] D. Siersma, M. Tibăr. Deformations of polynomials, boundary singularities and monodromy. Mosc. Math. J. **3** (2003), no.2, 661–679.

[11] D. Siersma, M. Tibăr. Singularity exchange at infinity. Preprint math.AG/0401396.

[12] O. Y. Viro. Some integral calculus based on Euler characteristic. In: Topology and Geometry – Rohlin seminar. Lecture Notes in Math. **1346**, Springer, Berlin–Heidelberg–New-York, 1988, pp.127–138.

Московский Государственный Университет, механико-математический факультет
Воробьевы Горы, Москва, 119992, Россия
E-mail: sabir@mccme.ru

Universiteit Utrechts, Mathematisch Instituut
P.O.Box 80.010, 3508 TA Utrecht, The Netherlands
E-mail: siersma@math.uu.nl