Tentamen Numerieke Wiskunde
dinsdag, 4 januari 2011, 9.00 – 12.00

1. Zet op ieder vel dat je inlevert je naam en op het eerste vel bovendien nog je studierichting en studentnummer.
2. Je mag het dictaat gebruiken, de uitwerkingen van de opgaven echter niet. Als je een resultaat uit het dictaat gebruikt geef dan duidelijk aan welk resultaat (nummer, pagina, etc.). Resultaten uit een vorig onderdeel mag je gebruiken ook al lukte het je niet om dat onderdeel te bewijzen.
3. Geef bij het beantwoorden van de vragen een duidelijke argumentatie (ook als dat niet expliciet gevraagd wordt).
4. $f \equiv g$ betekent 'f is *per definitie* gelijk aan g'.
5. Succes.

1. We willen een aangepaste kwadratuurformule maken voor integralen van het type

$$I(f) \equiv \int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x.$$

Beschouw daartoe de kwadratuurformule

$$Q(f) \equiv w_0\, f(0) + w_1\, f'(0) + w_2\, f(1).$$

(a) Bepaal de gewichten w_0, w_1, w_2 zo dat voor polynomen p van zo hoog mogelijke graad geldt $I(p) = Q(p)$.

Laat nu bij gegeven f, p het interpolatiepolynoom zijn van graad hoogstens 2 met $p(0) = f(0)$, $p'(0) = f'(0)$ en $p(1) = f(1)$.

(b) Bewijs dat $Q(f) = I(p)$.

(c) Bewijs dat $I(f) - Q(f) = -\frac{2}{105} f^{(3)}(\xi)$ voor zekere $\xi \in (0, 1)$.

(d) Beschouw nu voor $h > 0$ de integraal $I_h(f) = \int_0^h \frac{f(x)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$. Transformeer bovenstaande kwadratuurformule $Q(f)$ naar een kwadratuurformule $Q_h(f)$ voor het benaderend uitreken van $I_h(f)$. Geef een uitdrukking voor $I_h(f) - Q_h(f)$.

(e) Heeft het zin om een n maal gerepeteerde kwadratuurformule te maken met h zo dat $nh = 1$ om $I(f)$ benaderend uit te rekenen? Zo ja, geef een uitdrukking voor deze gerepeteerde variant.

2. We willen in deze opgave de functie $f(x) \equiv 1 + \sin^2(\pi x^2)$ integreren tussen 0 en 1 en gebruiken daartoe de gerepeteerde trapeziumregel met verschilende stapgrootten $h > 0$. We vinden de volgende resultaten

$1/h$	$T_h(f)$
8	1.37783845638733
16	1.37793137490955
32	1.37793633086465
64	1.37793662881191
128	1.37793664725466
256	1.37793664840455

(a) Passen deze resultaten redelijk bij een fout die evenredig is met h^2? Was dit te verwachten? Is de fout wel evenredig met een andere macht van h? Welke?

(b) Schat de fout in het resultaat voor $h = 1/256$. Hoe gebruik je deze schatting om een nauwkeuriger antwoord te kijgen?

(c) Stel dat je, onder de aanname dat de fout evenredig is met h^2, de fout schat en het resultaat corrigeert (hoe doe je dat?). Kan je dan, zonder te rekenen, iets zeggen over de 'struktuur' van de fout in de 'gecorrigeerde benadering'?

3. In deze opgave werken we met een machine die iedere elementaire bewerking (optelling, aftrekken, delen, vermenigvuldigen) uitvoert met een absolute relatieve fout van ten hoogste $\bar{\xi}$, indien toegepast op machinegetallen. Je mag "ξ^2-termen" verwaarlozen.

Als $x = (x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}$ een n-vector is, dan is de n-vector $|x|$ gedefinieerd door $|x| \equiv (|x_1|, \ldots, |x_n|)^{\mathrm{T}}$. Voor een scalair α is $\alpha x \equiv (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n)^{\mathrm{T}}$.

We berekenen het inproduct $< x, y > \equiv \sum_{i=1}^n x_i y_i$ tussen de twee reële n-vectoren $x = (x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}$ en $y = (y_1, \ldots, y_n)^{\mathrm{T}}$ van machine getallen. Beschouw de volgende uitspraak voor het door de machine berekende inproduct $<x, y>^\star$

$$<x, y>^\star = <x, y> + <|x|, |y|> \; n\,\xi. \tag{1}$$

(a) Bewijs uitspraak (1) voor $n = 2$.

(b) Bewijs uitspraak (1) voor algemene waarde van n ($n \in$).

(c) Stel dat de twee vectoren x en y min of meer loodrecht op elkaar staan. Verwacht je dan dat het inproduct tussen deze vectoren in een groot aantal cijfers (zo'n 10 cijfers voor $n \leq 10^5$) nauwkeurig uitgerekend kan worden?

(d) Laat $x = (x_1, x_2)^{\mathrm{T}}$ een 2-vector zijn van machine getallen. We berekenen αx. Hierbij is de scalair α een machine getal. $(\alpha x)^\star$ is het door de computer berekende resultaat. Is de bewering

$$(\alpha\, x)^\star = \alpha\, x + (|\alpha|\, \xi)\, |x|$$

correct? Als dat niet zo is, wat is dan de correcte uitspraak?