Utrecht, 25 november 2014

Numerieke Wiskunde

Gerard Sleijpen

Universiteit Utrecht
Department of Mathematics

http://www.staff.science.uu.nl/~sleij101/

$[a, b] \subset \mathbb{R}$, $: [a, b] \to \mathbb{R}$
Benader f door ‘eenvoudige’ functies

Voorbeelden eenvoudige functies.

1. **Polynomen** (lineaire combinaties van x^k).
2. Stukken Fourier reeks (lin. comb. $\sin(2\pi kx)$, $\cos(2\pi kx)$)
3. Splines (gladde stuksgewijs polynomen)
4. $\ldots \ln(x)p(x)$, p polynoom
5. Rationale functies $\frac{p(x)}{q(x)}$ met p, q polynomen
6. Bessel functies, . . .

Eigenschappen eenvoudige functies.

1. Efficiënt te evalueren
2. Efficiënt op te slaan ($\rightsquigarrow$ compressie)
3. Gemakkelijk mee te manipuleren (p', $\int p$, . . .)
   — basis voor algorithmes voor ingewikkeldere problemen
   — te gebruiken in analyse

$p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_k x^k$ **polynoom** graad $\leq k$.

Evaluatie: schema van Horner. Evalueer p in x volgens

$$\boxed{\begin{array}{l} S_0 = \alpha_k, \\ \texttt{voor}\ \ j = 1, 2, \ldots, k \\ \qquad S_j = \alpha_{k-j} + S_{j-1} * x \end{array}}$$

Kost $2k$ flop (**flo**ating **p**oint operaties): $k*$ en $k+$.

Vb. $p(x) = 3 + 2x + 7x^2 + 4x^3$:
Horner: $p(x) = 3 + (2 + (7 + 4x)x)x$

Variant:

$p(x) = 3 + 2(x-1) + 7(x-1)(x-\pi) + 9(x-1)(x-\pi)x$
Horner: $p(x) = 3 + (2 + (7 + 9x)(x-\pi))(x-1)$

Interpolatie

Zij $(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k)$ een rij getallen in $[a, b]$.

$\mu(x)$ is het aantal keren dat
het getal x in de rij $(x_0, \ldots, x_k)$ voor komt.

Terminolgie. $p = f$ op $(x_0, \ldots, x_k)$
als voor $i = 0, \ldots, k$

$p(x_i) = f(x_i)$,
$p'(x_i) = f'(x_i)$ als $\mu(x_i) > 1$
$p''(x_i) = f''(x_i)$ als $\mu(x_i) > 2$
$\ldots$

Voorbeeld. $p = f$ op $(\frac{1}{2}, 0, 0, 0, 1)$ als

$p(0) = f(0)$, $p'(0) = f'(0)$, $p''(0) = f''(0)$,
$p(\frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2})$, $p(1) = f(1)$.

Definitie. Een polynoom p **interpoleert** f **op** $(x_0, \ldots, x_k)$
als graad$(p) \leq k$ en $p = f$ op $(x_0, \ldots, x_k)$.

Interpolatie

Zij $(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k)$ een rij in $[a, b]$.

Stelling. Er bestaat precies een pol. p van gr. $\leq k$ zodat

$$p = f \text{ op } (x_0, x_1, \ldots, x_k)$$

Als f $k+1$ maal continu differentieerbaar is op $[a, b]$ dan

$$f(x) - p(x) = (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_k) \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!}$$

voor zekere ξ tussen $x_0, x_1, \ldots, x_k$ en x.

Interpolatie

Zij $(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k)$ een rij in $[a, b]$.

Stelling. Er bestaat precies een pol. p van gr. $\leq k$ zodat

$$p = f \text{ op } (x_0, x_1, \ldots, x_k)$$

Als f $k+1$ maal continu differentieerbaar is op $[a, b]$ dan

$$f(x) - p(x) = (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_k)\,\frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!}$$

voor zekere ξ tussen $x_0, x_1, \ldots, x_k$ en x.

Voorbeeld. $x_0 = x_1 = x_2 = \ldots = x_k = 0$:

p is het **Taylor** pol.: $p(x) \equiv f(0) + xf'(0) + \ldots + \frac{x^k}{k!}f^{(k)}(0)$.

$$f(x) - p(x) = \frac{x^{k+1}}{(k+1)!}f^{(k+1)}(\xi).$$

Interpolatie

Zij $(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k)$ een rij in $[a, b]$.

Stelling. Er bestaat precies een pol. p van gr. $\leq k$ zodat

$$p = f \text{ op } (x_0, x_1, \ldots, x_k)$$

Als f $k+1$ maal continu differentieerbaar is op $[a, b]$ dan

$$f(x) - p(x) = (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_k) \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!}$$

voor zekere ξ tussen $x_0, x_1, \ldots, x_k$ en x.

Voorbeeld. $x_0 = x_1 = x_2 = \ldots = x_k = 0$:

p is het **Taylor** pol.: $p(x) \equiv f(0) + xf'(0) + \ldots + \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0)$.

$$f(x) - p(x) = \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} f^{(k+1)}(\xi).$$

Lagrange: $x_i \neq x_j$ als $i \neq j$.

Interpolatie

Zij $(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k)$ een rij in $[a, b]$.

Stelling. Er bestaat precies een pol. p van gr. $\leq k$ zodat

$$p = f \text{ op } (x_0, x_1, \ldots, x_k)$$

Als f $k+1$ maal continu differentieerbaar is op $[a, b]$ dan

$$f(x) - p(x) = (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_k) \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!}$$

voor zekere ξ tussen $x_0, x_1, \ldots, x_k$ en x.

Voorbeeld. $x_0 = x_1 = x_2 = \ldots = x_k = 0$:

p is het **Taylor** pol.: $p(x) \equiv f(0) + x f'(0) + \ldots + \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0)$.

$$f(x) - p(x) = \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} f^{(k+1)}(\xi).$$

Lagrange: $x_i \neq x_j$ als $i \neq j$.

Hermite: iedere i, er is precies een $j \neq i$ met $x_i = x_j$.

Interpolatie

Zij $(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k)$ een rij in $[a, b]$.

Stelling. Er bestaat precies een pol. p van gr. $\leq k$ zodat

$$p = f \text{ op } (x_0, x_1, \ldots, x_k)$$

Als f $k+1$ maal continu differentieerbaar is op $[a, b]$ dan

$$f(x) - p(x) = (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_k)\,\frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!}$$

voor zekere ξ tussen $x_0, x_1, \ldots, x_k$ en x.

Bewijs. **Bestaan** in geval $x_i \neq x_j$ als $i \neq j$ (inductie):

$p_{k-1} = f$ op $(x_0, \ldots, x_{k-1})$ en graad$(p_{k-1}) \leq k - 1$.

$p(x) \equiv p_k(x) \equiv p_{k-1}(x) + \alpha(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{k-1})$

Dan $p = f$ op $(x_0, \ldots, x_{k-1})$ en p van graad $\leq k$

Pas α aan zodat $f(x_k) = p(x_k)$.

Interpolatie

Zij $(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k)$ een rij in $[a, b]$.

Stelling. Er bestaat precies een pol. p van gr. $\leq k$ zodat

$$p = f \text{ op } (x_0, x_1, \ldots, x_k)$$

Als f $k+1$ maal continu differentieerbaar is op $[a, b]$ dan

$$f(x) - p(x) = (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_k)\,\frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!}$$

voor zekere ξ tussen $x_0, x_1, \ldots, x_k$ en x.

Bewijs. **Uniciteit**:

Als $p = q$ op $(x_0, \ldots, x_k)$ and p, q pol. graad $\leq k$

dan $p - q = 0$ op $(x_0, \ldots, x_k)$.

Hoofdstelling Algebra: voor zeker polynoom r geldt

$$p(x) - q(x) = r(x)(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_k) \text{ alle } x.$$

Omdat $p - q$ graad $\leq k$ moet $r = 0$ alle x.

Interpolatie

Zij $(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k)$ een rij in $[a, b]$.

Stelling. Er bestaat precies een pol. p van gr. $\leq k$ zodat

$$p = f \text{ op } (x_0, x_1, \ldots, x_k)$$

Als f $k+1$ maal continu differentieerbaar is op $[a, b]$ dan

$$f(x) - p(x) = (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_k) \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!}$$

voor zekere ξ tussen $x_0, x_1, \ldots, x_k$ en x.

Bewijs. **Foutvoorstelling**: beschouw $y \notin \{x_0, \ldots, x_{k-1}\}$.

$\tilde{p}$ interpoleert f op $(x_0, \ldots, x_{k-1}, y)$.

Dan $$\tilde{p}(x) = p_{k-1}(x) + \alpha(x - x_0) \ldots (x - x_{k-1})$$

en α is zo dat $\tilde{p}(y) = f(y)$. Pas nu k maal Rolle:

$$(f - p)^{(k)}(\xi) = 0 \text{ zekere } \xi \text{ tussen } x_0, x_1 \ldots, x_{k-1}, y.$$

$$(f - p)^{(k)}(\xi) = f^{(k)}(\xi) - \alpha k!.$$

Dus $$\alpha = \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}$$

Interpolatie

Zij $(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k)$ een rij in $[a, b]$.

Stelling. Er bestaat precies een pol. p van gr. $\leq k$ zodat

$$p = f \text{ op } (x_0, x_1, \ldots, x_k)$$

Als f $k+1$ maal continu differentieerbaar is op $[a, b]$ dan

$$f(x) - p(x) = (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_k) \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!}$$

voor zekere ξ tussen $x_0, x_1, \ldots, x_k$ en x.

Bewijs. **Foutvoorstelling**: beschouw $y \notin \{x_0, \ldots, x_{k-1}\}$.

$\tilde{p}$ interpoleert f op $(x_0, \ldots, x_{k-1}, y)$.

Dan $\qquad \tilde{p}(x) = p_{k-1}(x) + \alpha(x - x_0) \ldots (x - x_{k-1})$

en α is zo dat $\tilde{p}(y) = f(y)$. Pas nu k maal Rolle:

$$(f - p)^{(k)}(\xi) = 0 \text{ zekere } \xi \text{ tussen } x_0, x_1 \ldots, x_{k-1}, y.$$

$$(f - p)^{(k)}(\xi) = f^{(k)}(\xi) - \alpha k!.$$

Dus $\tilde{p}(y) - p_{k-1}(y) = \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}(y - x_0) \ldots (y - x_{k-1})$.

Interpolatie

Zij $(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k)$ een rij in $[a, b]$.

Stelling. Er bestaat precies een pol. p van gr. $\leq k$ zodat

$$p = f \text{ op } (x_0, x_1, \ldots, x_k)$$

Als f $k+1$ maal continu differentieerbaar is op $[a, b]$ dan

$$f(x) - p(x) = (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_k) \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!}$$

voor zekere ξ tussen $x_0, x_1, \ldots, x_k$ en x.

Bewijs. **Foutvoorstelling**: $\widetilde{p} = f$ op $(x_0, \ldots, x_{k-1}, y)$.

$$\widetilde{p}(x) = p_{k-1}(x) + \alpha(x - x_0) \ldots (x - x_{k-1}).$$

Dus k maal Rolle en $\widetilde{p}(y) = f(y)$ geeft:

$$f(y) - p_{k-1}(y) = \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}(y - x_0) \ldots (y - x_{k-1}).$$

Dit is ook goed voor k ipv $k - 1$ en x ipv y.

Interpolatie

Zij $(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k)$ een rij in $[a, b]$.

Stelling. Er bestaat precies een pol. p van gr. $\leq k$ zodat

$$p = f \text{ op } (x_0, x_1, \ldots, x_k)$$

Als f $k+1$ maal continu differentieerbaar is op $[a, b]$ dan

$$f(x) - p(x) = (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_k) \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!}$$

voor zekere ξ tussen $x_0, x_1, \ldots, x_k$ en x.

Notatie. Laat $\alpha = f[x_0, \ldots, x_k]$ de leidende coëfficiënt zijn van het het interpolatie polynoom p voor f op $(x_0, x_1, \ldots, x_k)$.

Stelling. $f[x_0, \ldots, x_k] = \dfrac{f[x_1, \ldots, x_k] - f[x_0, \ldots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}$.

$f[x_0, \ldots, x_k] = \frac{1}{k!} f^{(k)}(\xi)$ voor zekere ξ tussen $x_0, \ldots, x_k$.

Interpolatie

Zij $(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k)$ een rij in $[a, b]$.

Stelling. Er bestaat precies een pol. p van gr. $\leq k$ zodat

$$p = f \text{ op } (x_0, x_1, \ldots, x_k)$$

Als f $k+1$ maal continu differentieerbaar is op $[a, b]$ dan

$$f(x) - p(x) = (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_k) \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!}$$

voor zekere ξ tussen $x_0, x_1, \ldots, x_k$ en x.

Notatie. Laat $\alpha = f[x_0, \ldots, x_k]$ de leidende coëfficiënt zijn van het het interpolatie polynoom p voor f op $(x_0, x_1, \ldots, x_k)$.

Stelling. $f[x_0, \ldots, x_k] = \dfrac{f[x_1, \ldots, x_k] - f[x_0, \ldots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}$.

$f[x_0, \ldots, x_k] = \frac{1}{k!} f^{(k)}(\xi)$ voor zekere ξ tussen $x_0, \ldots, x_k$.

Voorbeeld. $f[x_0, x_0, x_0, x_0] = \frac{1}{3!} f^{(3)}(x_0)$

Interpolatie

Zij $(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k)$ een rij in $[a, b]$.

Stelling. Er bestaat precies een pol. p van gr. $\leq k$ zodat

$$p = f \text{ op } (x_0, x_1, \ldots, x_k)$$

Als f $k+1$ maal continu differentieerbaar is op $[a, b]$ dan

$$f(x) - p(x) = (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_k) \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!}$$

voor zekere ξ tussen $x_0, x_1, \ldots, x_k$ en x.

Opmerking. De grootheid

$$\frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!}$$

in de foutvoorstelling kan geschat worden door

$$f[y_0, y_1, \ldots, y_{k+1}] \text{ voor } y_j = x_{j+i_0}$$

voor verschillende i_0 (bv, $i_0 = -2, -1, 0, +1$).

Interpolatie

Zij $(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k)$ een rij in $[a, b]$.

Stelling. Er bestaat precies een pol. p van gr. $\leq k$ zodat

$$p = f \text{ op } (x_0, x_1, \ldots, x_k)$$

Als f $k+1$ maal continu differentieerbaar is op $[a, b]$ dan

$$f(x) - p(x) = (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_k) \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!}$$

voor zekere ξ tussen $x_0, x_1, \ldots, x_k$ en x.

Evaluatie. $p(x) = p_{k-1}(x) + \alpha(x - x_0) \ldots (x - x_{k-1})$

$$\alpha = f[x_0, \ldots, x_k] = \frac{f[x_1, \ldots, x_k] - f[x_0, \ldots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}$$

Evaluatie

$$f[x_0] = f(x_0)$$

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}] \equiv \frac{f[x_0, x_1, \ldots, x_k] - f[x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}]}{x_0 - x_{k+1}}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
x_0 - f(x_0) & & & & & & \\
 & \searrow & & & & & \\
 & & f[x_0, x_1] & & & & \\
 & \nearrow & & \searrow & & & \\
x_1 - f(x_1) & & & & f[x_0, x_1, x_2] & & \\
 & \searrow & & \nearrow & & \searrow & \\
 & & f[x_1, x_2] & & & & f[x_0, x_1, x_2, x_3] \\
 & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & \\
x_2 - f(x_2) & & & & f[x_1, x_2, x_3] & & \\
 & \searrow & & \nearrow & & & \\
 & & f[x_2, x_3] & & & & \\
 & \nearrow & & & & & \\
x_3 - f(x_3) & & & & & &
\end{array}$$

$$p(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1]\,(x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2]\,(x - x_0)(x - x_1)$$
$$+ f[x_0, x_1, x_2, x_3]\,(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

Voorwaarts Newton (als $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots$)

Evaluatie

$$f[x_0] = f(x_0)$$

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}] \equiv \frac{f[x_0, x_1, \ldots, x_k] - f[x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}]}{x_0 - x_{k+1}}$$

$$
\begin{array}{llll}
x_0 - f(x_0) & & & \\
 & f[x_0, x_1] & & \\
x_1 - f(x_1) & & f[x_0, x_1, x_2] & \\
 & f[x_1, x_2] & & f[x_0, x_1, x_2, x_3] \\
x_2 - f(x_2) & & f[x_1, x_2, x_3] & \\
 & f[x_2, x_3] & & \\
x_3 - f(x_3) & & &
\end{array}
$$

$$p(x) = f[x_1] + f[x_1, x_2]\,(x - x_1) + f[x_0, x_1, x_2]\,(x - x_1)(x - x_0)$$
$$+ f[x_0, x_1, x_2, x_3]\,(x - x_1)(x - x_0)(x - x_2)$$

Gauss (als $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots$)

Evaluatie

$$f[x_0] = f(x_0)$$

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}] \equiv \frac{f[x_0, x_1, \ldots, x_k] - f[x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}]}{x_0 - x_{k+1}}$$

$$\begin{array}{lllll}
x_0 - f(x_0) & & & & \\
 & f[x_0, x_1] & & & \\
x_1 - f(x_1) & & f[x_0, x_1, x_2] & & \\
 & f[x_1, x_2] & & f[x_0, x_1, x_2, x_3] & \\
x_2 - f(x_2) & & f[x_1, x_2, x_3] & & \\
 & f[x_2, x_3] & & & \\
x_3 - f(x_3) & & & &
\end{array}$$

Voorbeeld.

$$\begin{array}{ccc}
0 & - & f(0) \\
0 & - & f(0) \\
0 & - & f(0) \\
h & - & f(h)
\end{array}$$

$$f[0,0] = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{f(0) - f(\epsilon)}{0 - \epsilon} = f'(0)$$

$$f[0,0,0] = \lim_{\epsilon} f[0, \epsilon, 2\epsilon] = \frac{1}{2} f''(0)$$

We wensen f in het punt x te benaderen door interpolatie met een $k$de graads polynoom.
Waar kunnen we het beste $x_0, \ldots, x_k$ kiezen?

We wensen f in het punt x te benaderen door interpolatie met een $k$de graads polynoom.
Waar kunnen we het beste $x_0, \ldots, x_k$ kiezen?

Hangt er van af wat we van f weten
en hoeveel werk we willen doen

We wensen f in het punt x te benaderen door interpolatie met een $k$de graads polynoom.
Waar kunnen we het beste $x_0, \dots, x_k$ kiezen?

- f is bekend op t_i met,voor 'n stapgrootte $h > 0$,
$$t_{i+1} = t_i + h \text{ alle i.}$$

We wensen f in het punt x te benaderen door interpolatie met een $k$de graads polynoom.
Waar kunnen we het beste $x_0, \ldots, x_k$ kiezen?

- f is bekend op t_i met,voor 'n stapgrootte $h > 0$,
$$t_{i+1} = t_i + h \text{ alle i.}$$

- We willen f met zo weinig mogelijk functiewaarden over een heel interval, zeg $[-1, +1]$, benaderen met een fout kleiner dan, zeg 10^{-4}.
We kunnen de steunpunten x_i overal kiezen in $[-1, +1]$.

We wensen f in het punt x te benaderen door interpolatie met een $k$de graads polynoom.
Waar kunnen we het beste $x_0, \ldots, x_k$ kiezen?

- f is bekend op t_i met,voor 'n stapgrootte $h > 0$,
  $t_{i+1} = t_i + h$ alle i.

Kies $x_0, \ldots, x_k$ uit $\{t_i\}$ zodat

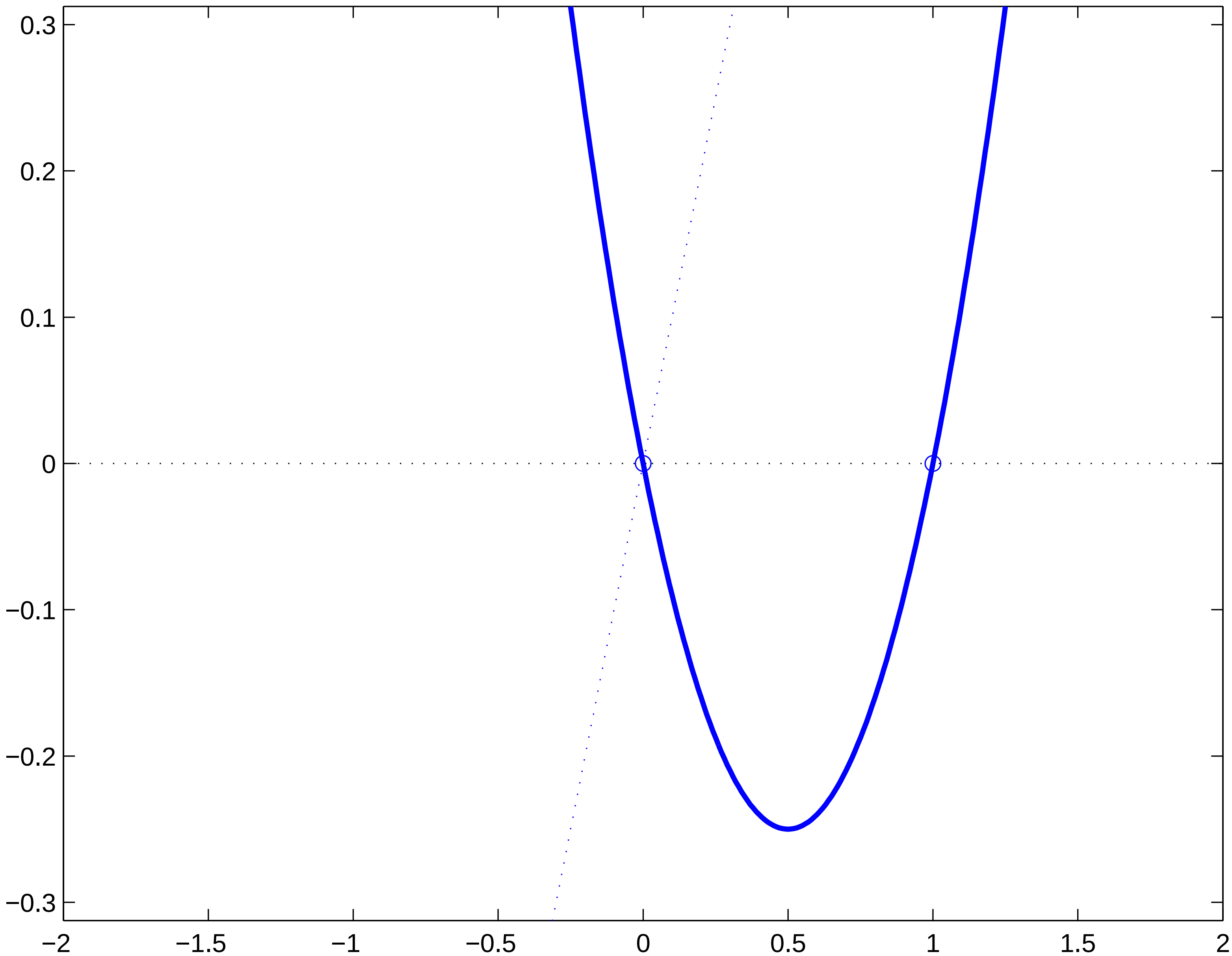
$$|(x - x_0) \cdot \ldots \cdot (x - x_k)|$$

minimaal is.

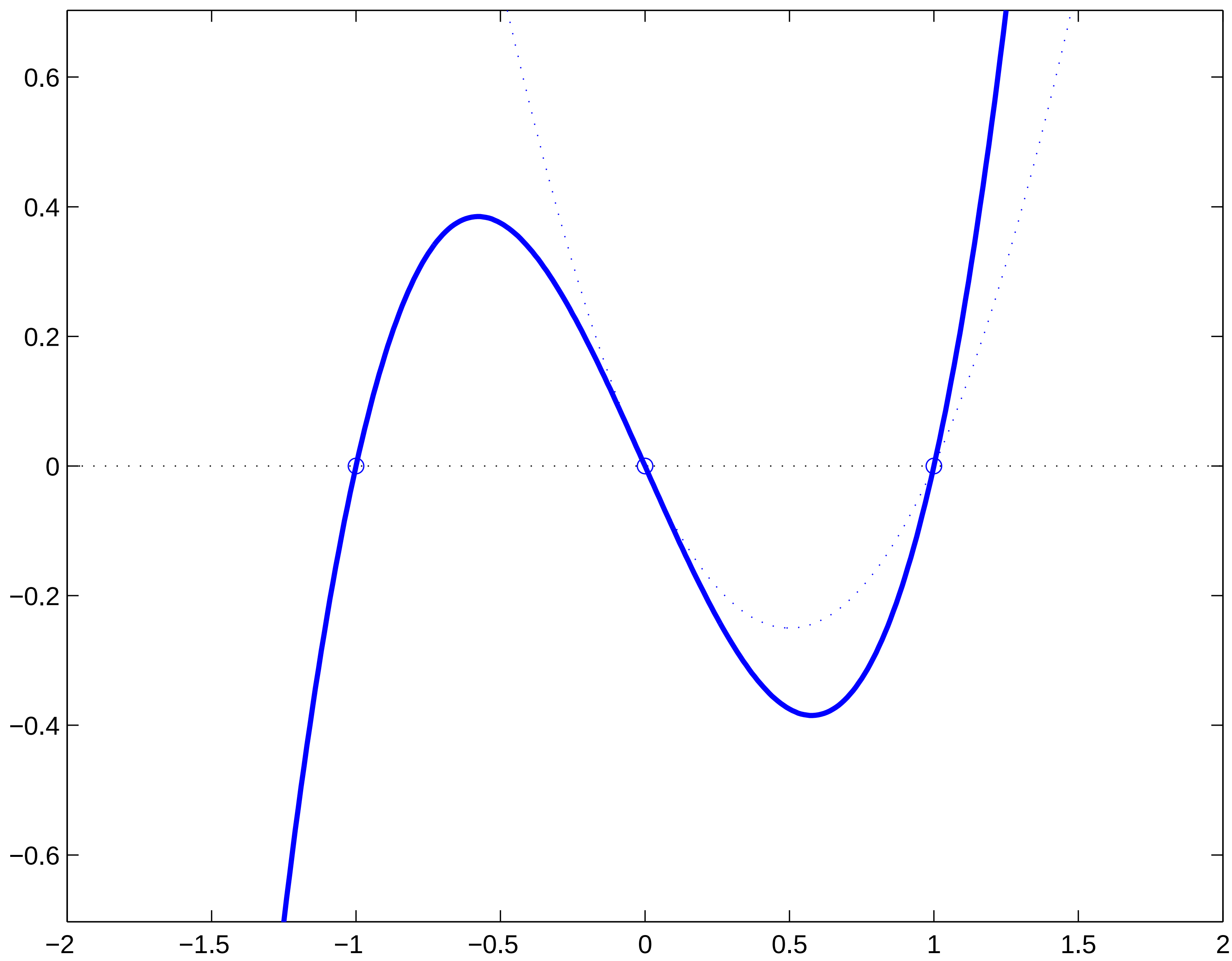
Zorg er voor dat x in het 'middelste' interval $[x_j, x_{j+1}]$ ligt:
Als $x \in (t_i, t_{i+1})$, kies

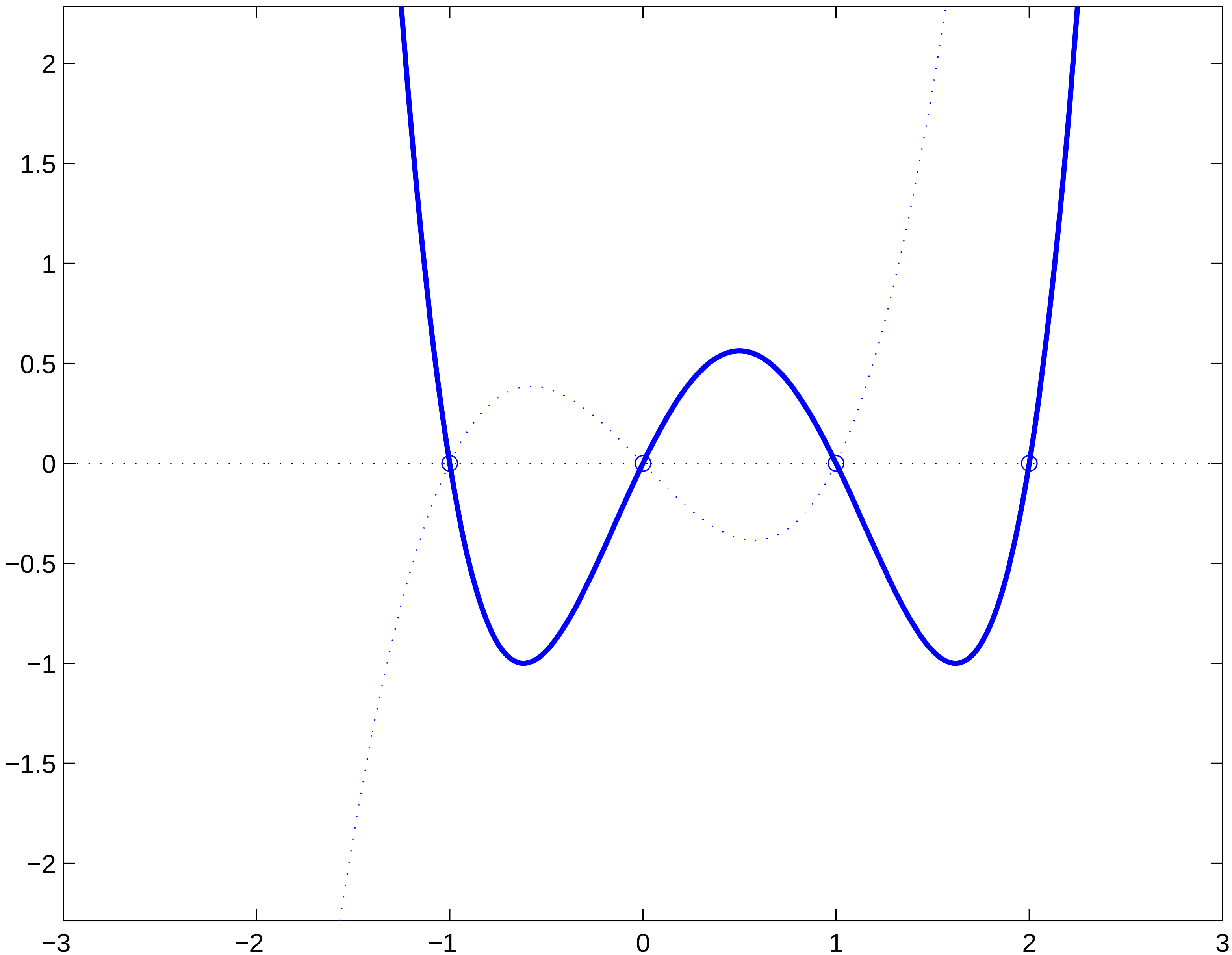
$$x_0 = t_i, x_1 = t_{i+1}, x_2 = t_{i-1}, x_3 = t_{i+2}, x_4 = t_{i-2}, \ldots$$

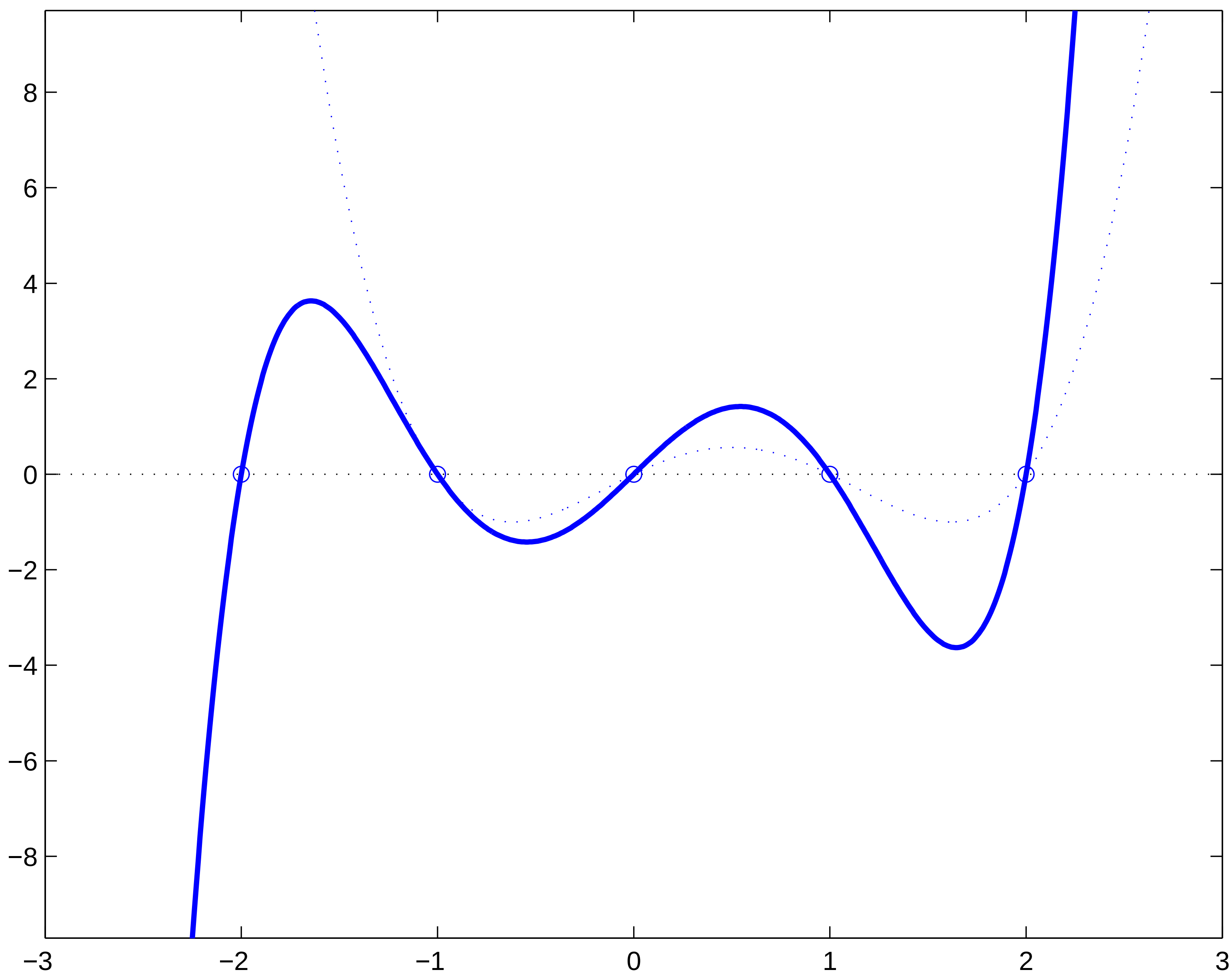
Voor motivatie: zie volgende grafieken
waarbij $t_i = i$, $(i \in \mathbb{Z})$, $x \in (0, 1)$

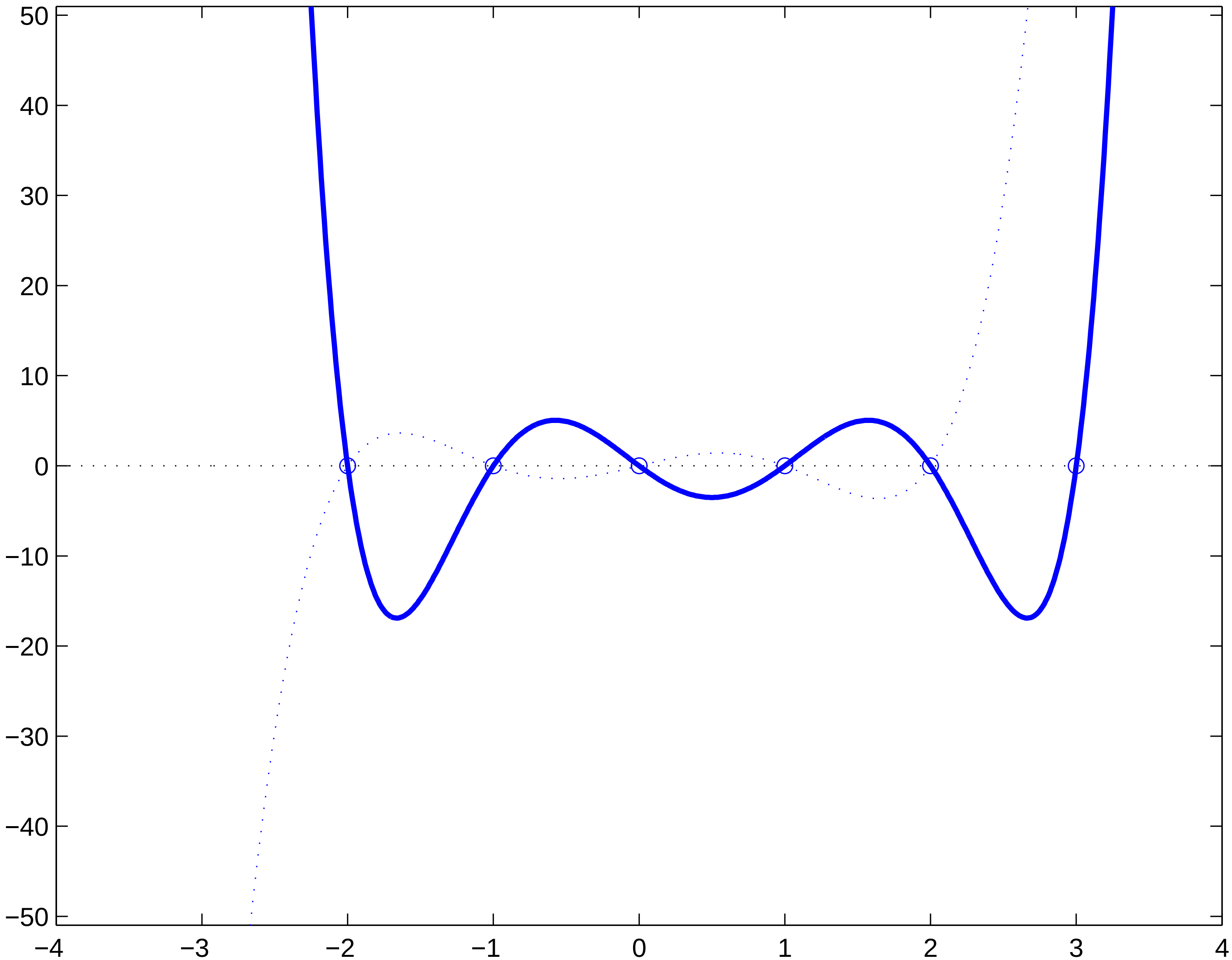


0.3
0.2
0.1
0
−0.1
−0.2
−0.3
−2
−1.5
−1
−0.5
0
0.5
1
1.5
2

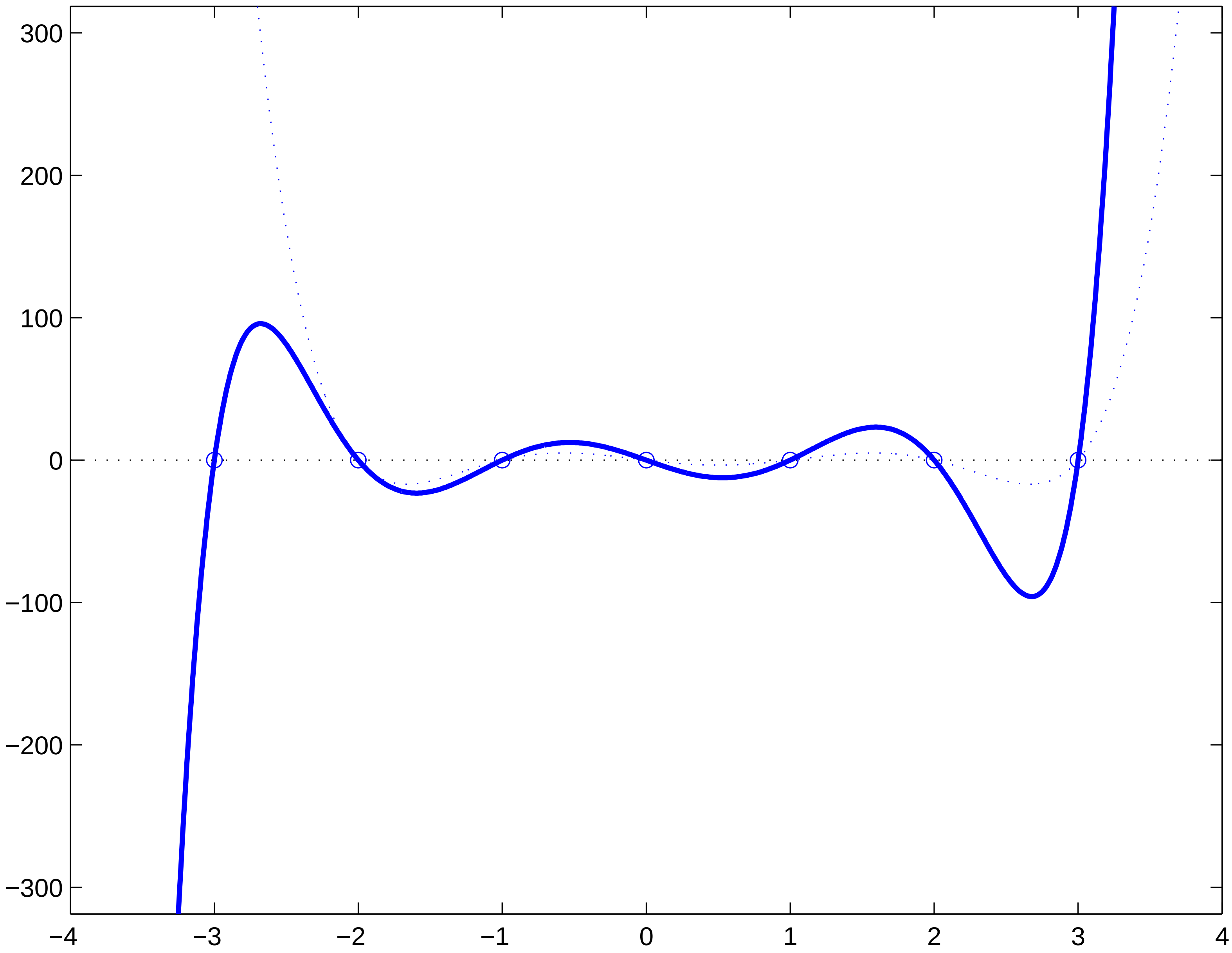

0.6
0.4
0.2
0
−0.2
−0.4
−0.6
−2
−1.5
−1
−0.5
0
0.5
1
1.5
2


2
1.5
1
0.5
0
−0.5
−1
−1.5
−2
−3
−2
−1
0
1
2
3

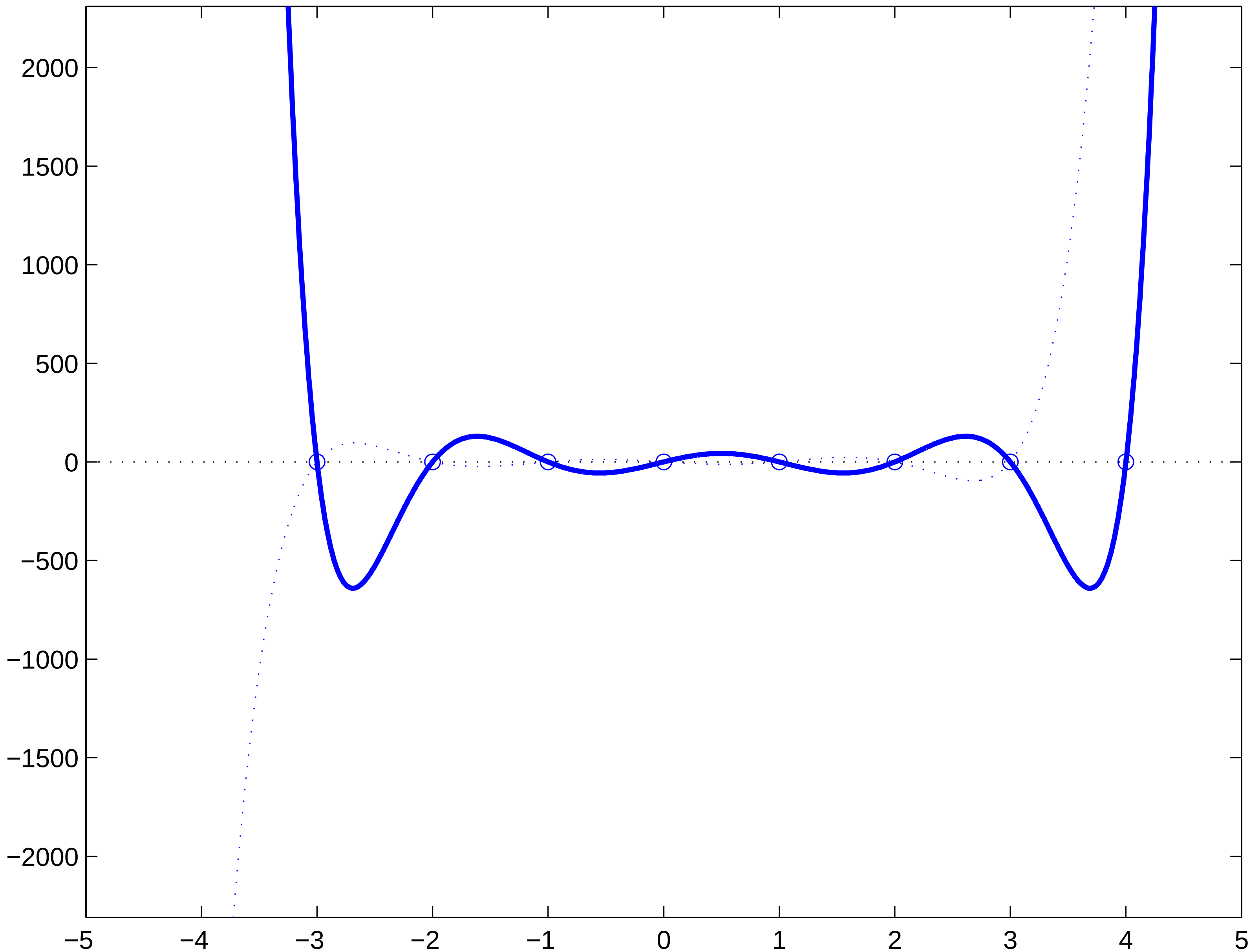

8
6
4
2
0
−2
−4
−6
−8
−3
−2
−1
0
1
2
3

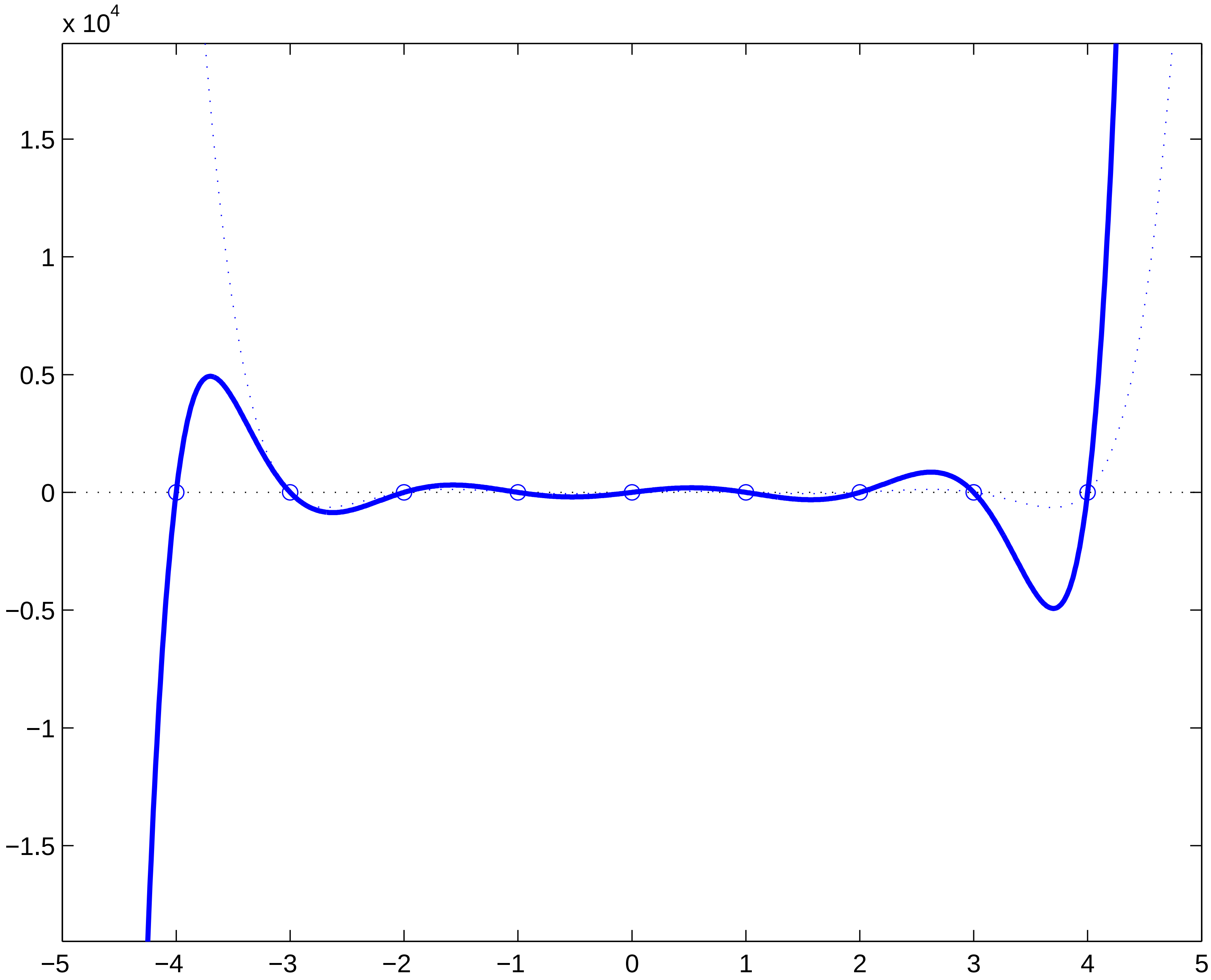


50
40
30
20
10
0
−10
−20
−30
−40
−50
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4



300
200
100
0
−100
−200
−300
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4


2000
1500
1000
500
0
−500
−1000
−1500
−2000
−5
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4
5


x 10^4
1.5
1
0.5
0
−0.5
−1
−1.5
−5
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4
5

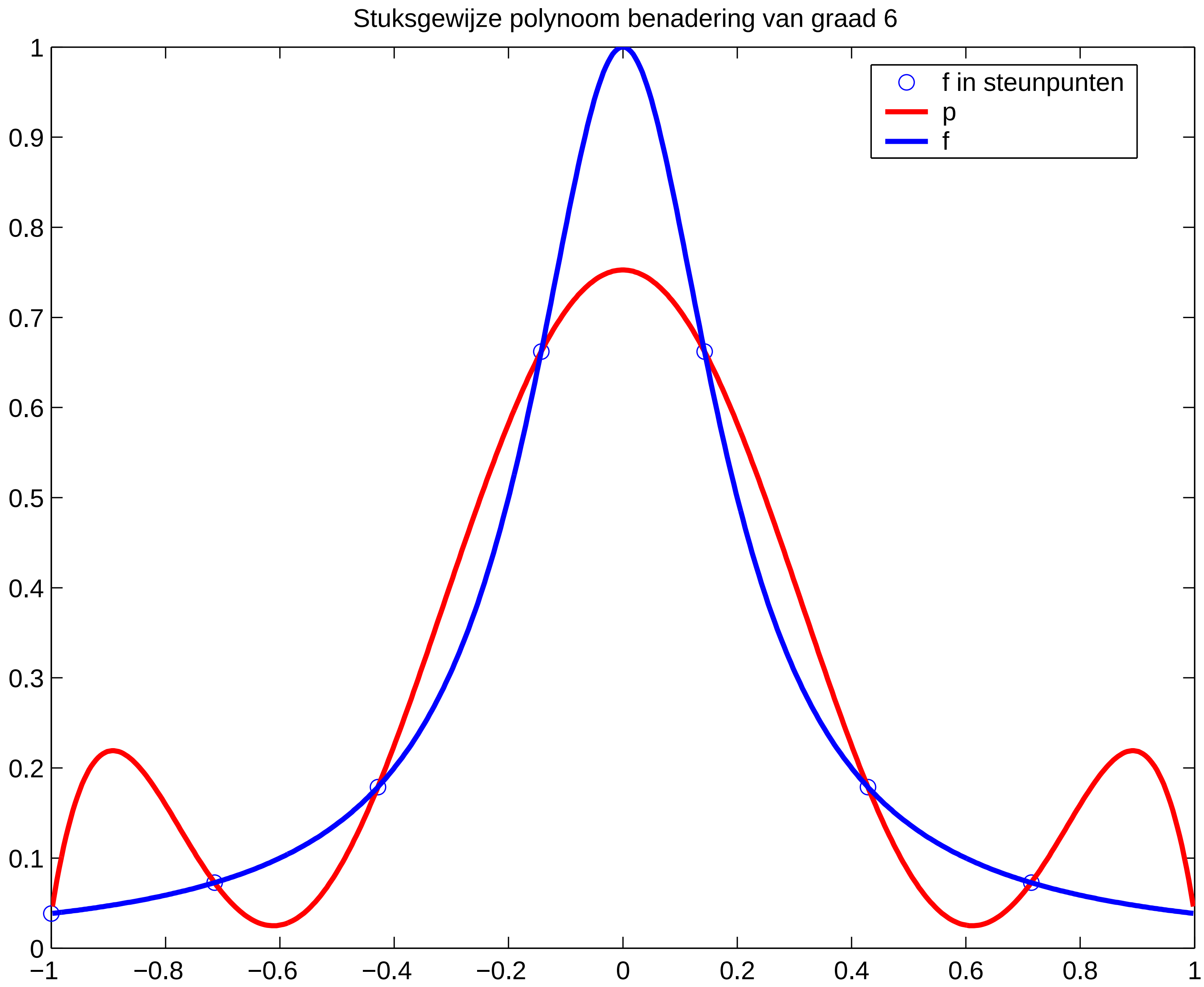
We wensen f in het punt x te benaderen door interpolatie met een $k$de graads polynoom.
Waar kunnen we het beste $x_0, \ldots, x_k$ kiezen?

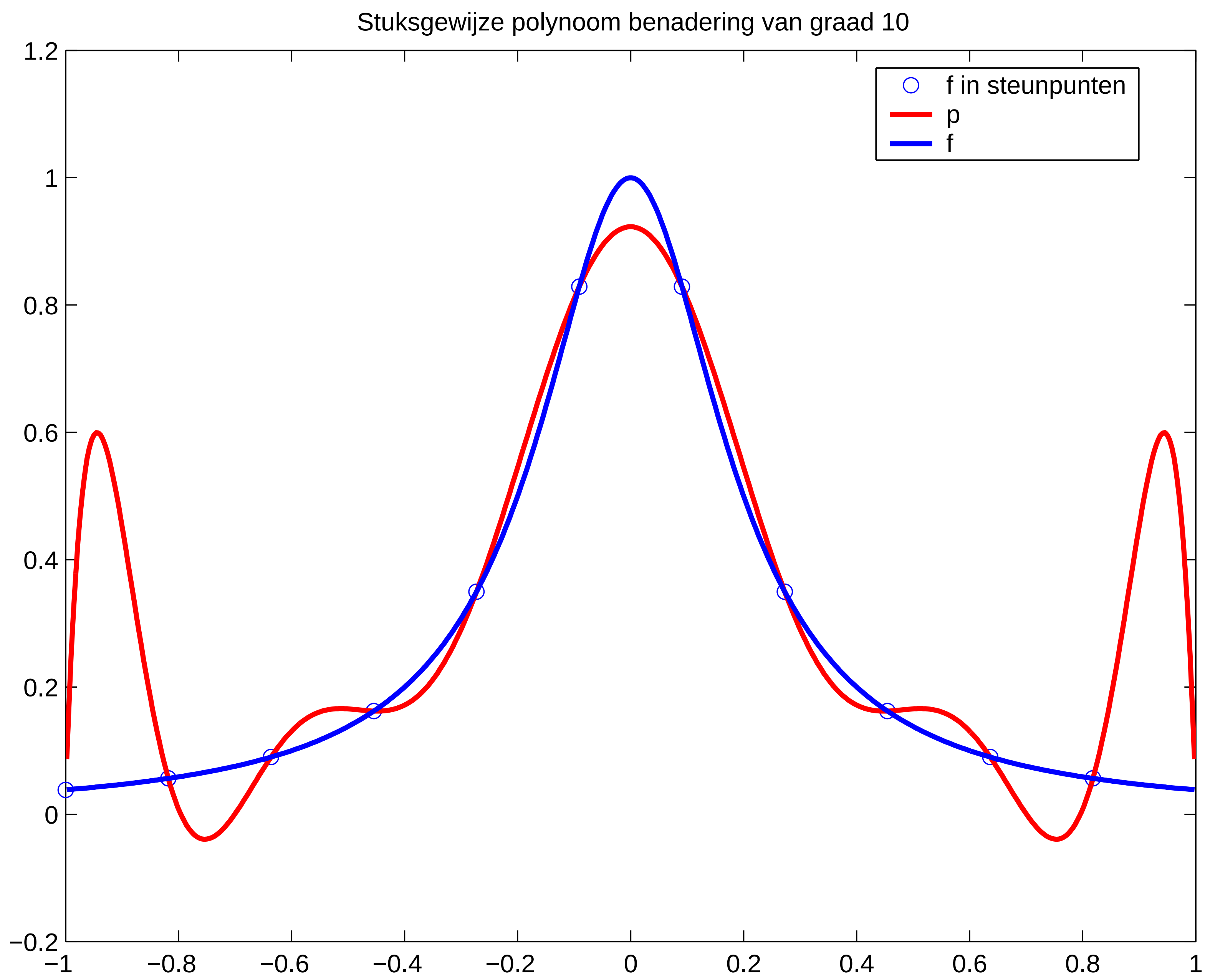
- We willen f met zo weinig mogelijk functiewaarden over een heel interval, zeg $[-1, +1]$, benaderen met een fout kleiner dan, zeg 10^{-4}.
  We kunnen de steunpunten x_i overal kiezen in $[-1, +1]$.

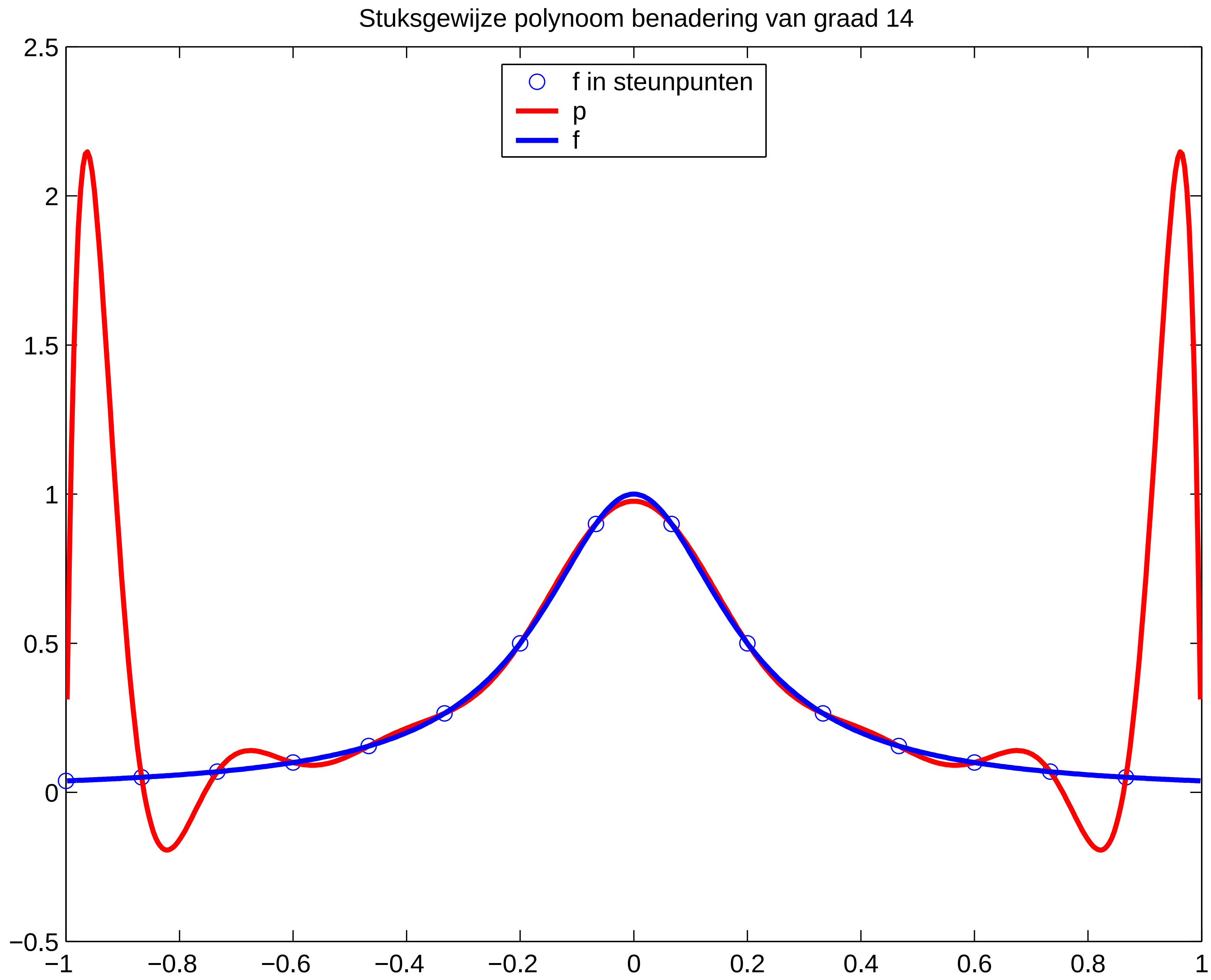
We wensen f in het punt x te benaderen door interpolatie met een $k$de graads polynoom.
Waar kunnen we het beste $x_0, \ldots, x_k$ kiezen?

- We willen f met zo weinig mogelijk functiewaarden over een heel interval, zeg $[-1, +1]$, benaderen met een fout kleiner dan, zeg 10^{-4}.
  We kunnen de steunpunten x_i overal kiezen in $[-1, +1]$.

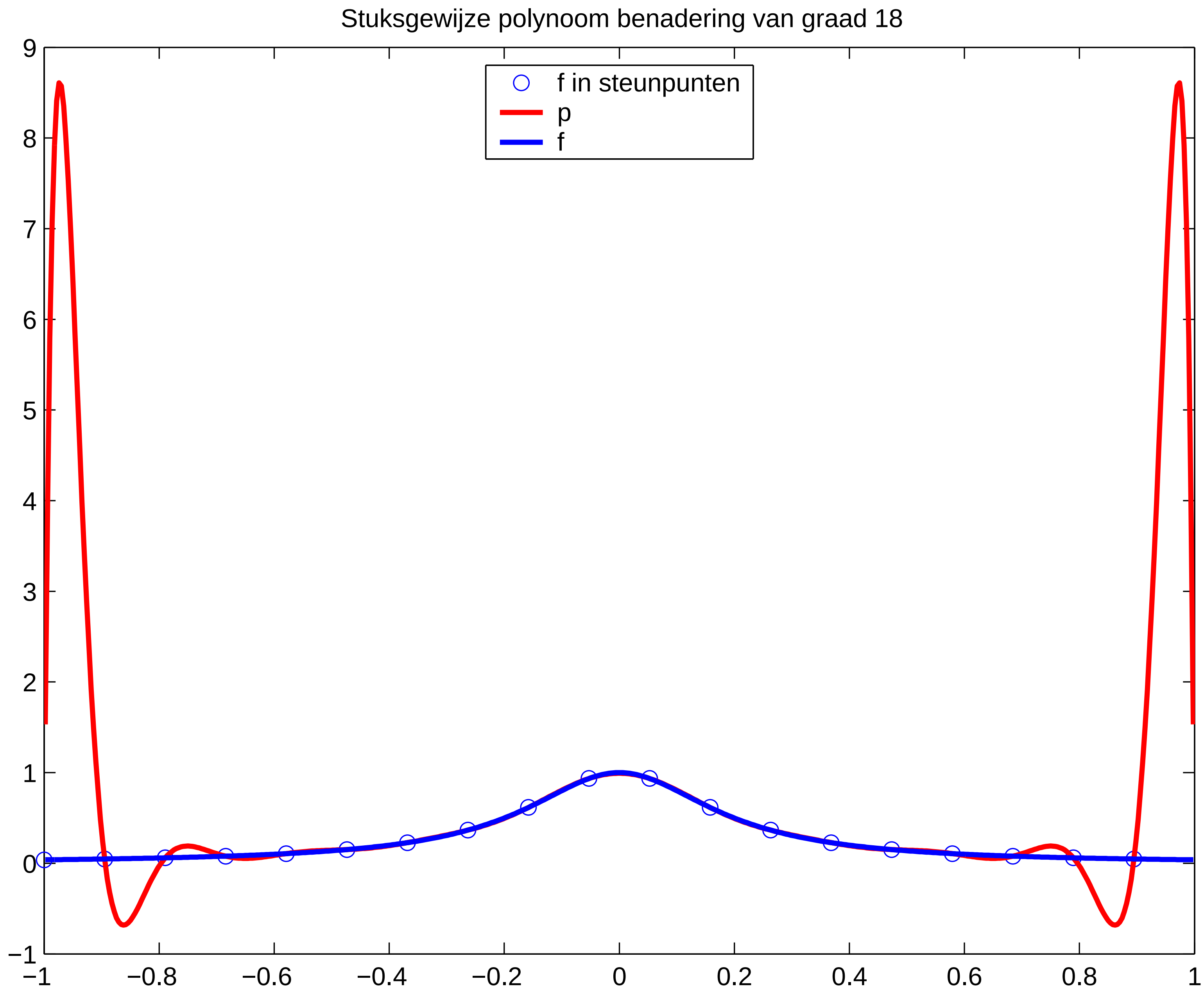
Equidistant: $x_j = -1 + jh$ $(j = 0, \ldots, k)$ met $h = 2/k$?

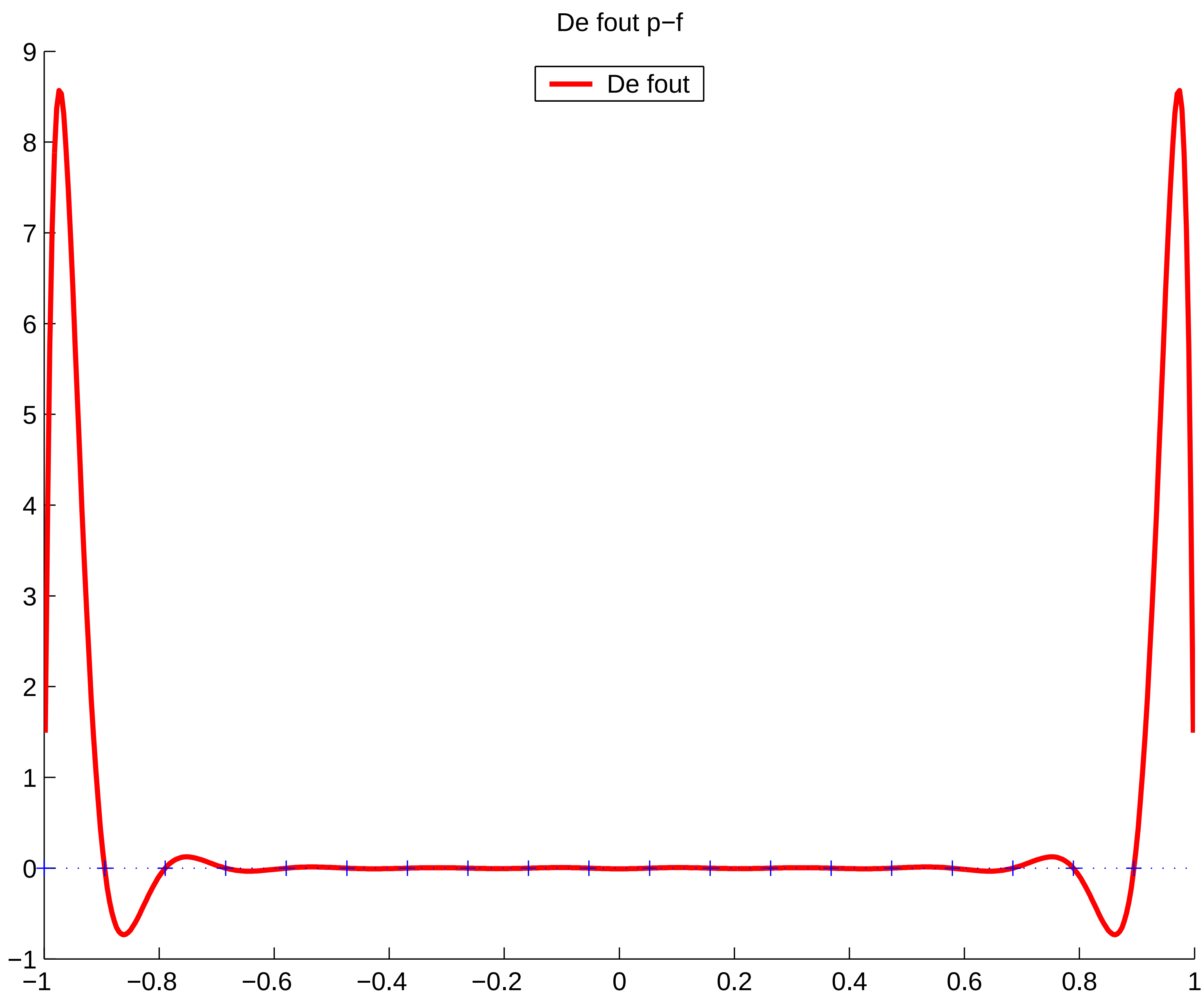

Stuksgewijze polynoom benadering van graad 6
f in steunpunten
p
f
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
−1
−0.8
−0.6
−0.4
−0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1


Stuksgewijze polynoom benadering van graad 10
f in steunpunten
p
f
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
−0.2
−1
−0.8
−0.6
−0.4
−0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1



Stuksgewijze polynoom benadering van graad 14
f in steunpunten
p
f
2.5
2
1.5
1
0.5
0
−0.5
−1
−0.8
−0.6
−0.4
−0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1


Stuksgewijze polynoom benadering van graad 18
f in steunpunten
p
f
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
−1
−1
−0.8
−0.6
−0.4
−0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1

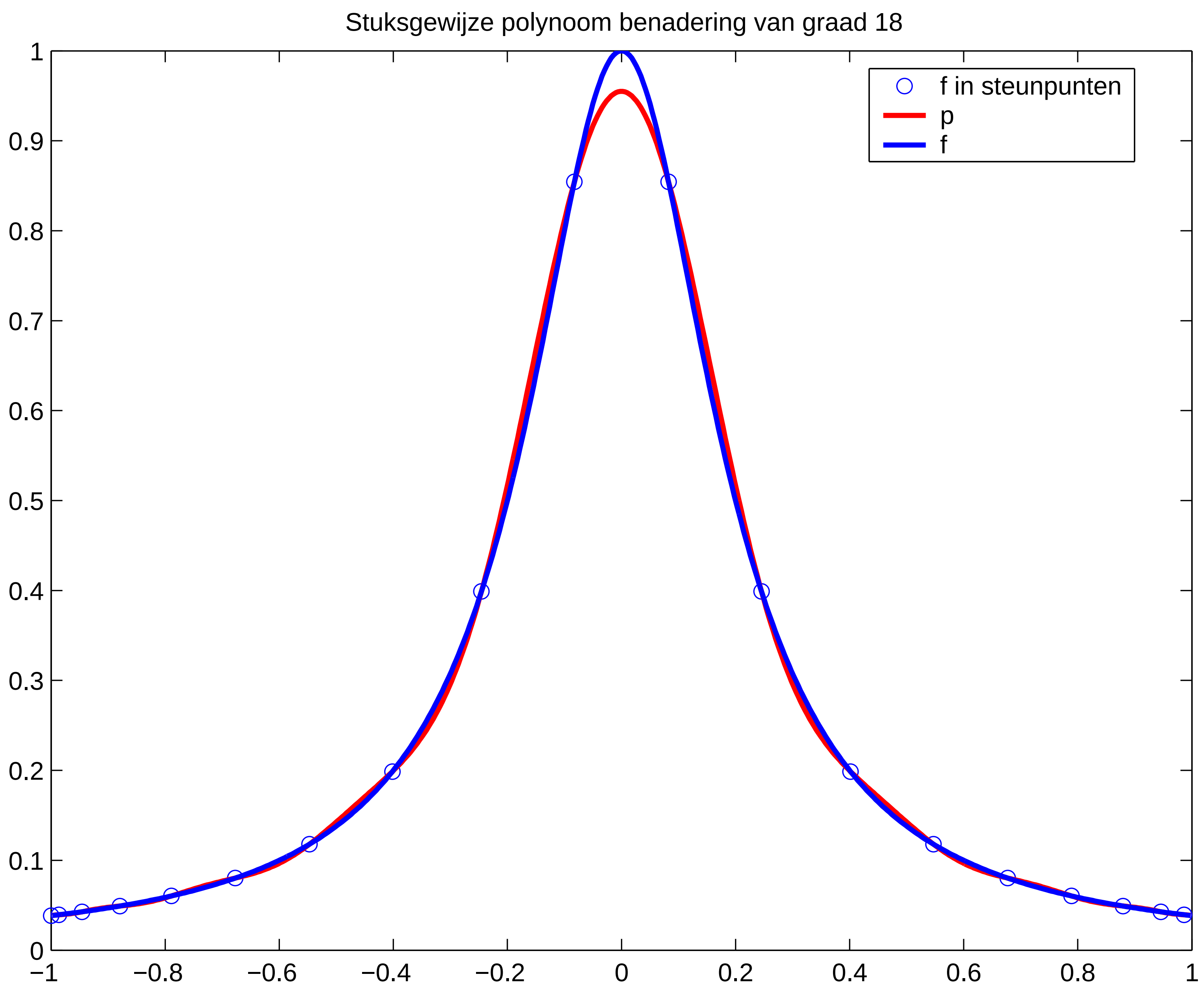

De fout p−f
De fout
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
−1
−1
−0.8
−0.6
−0.4
−0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1

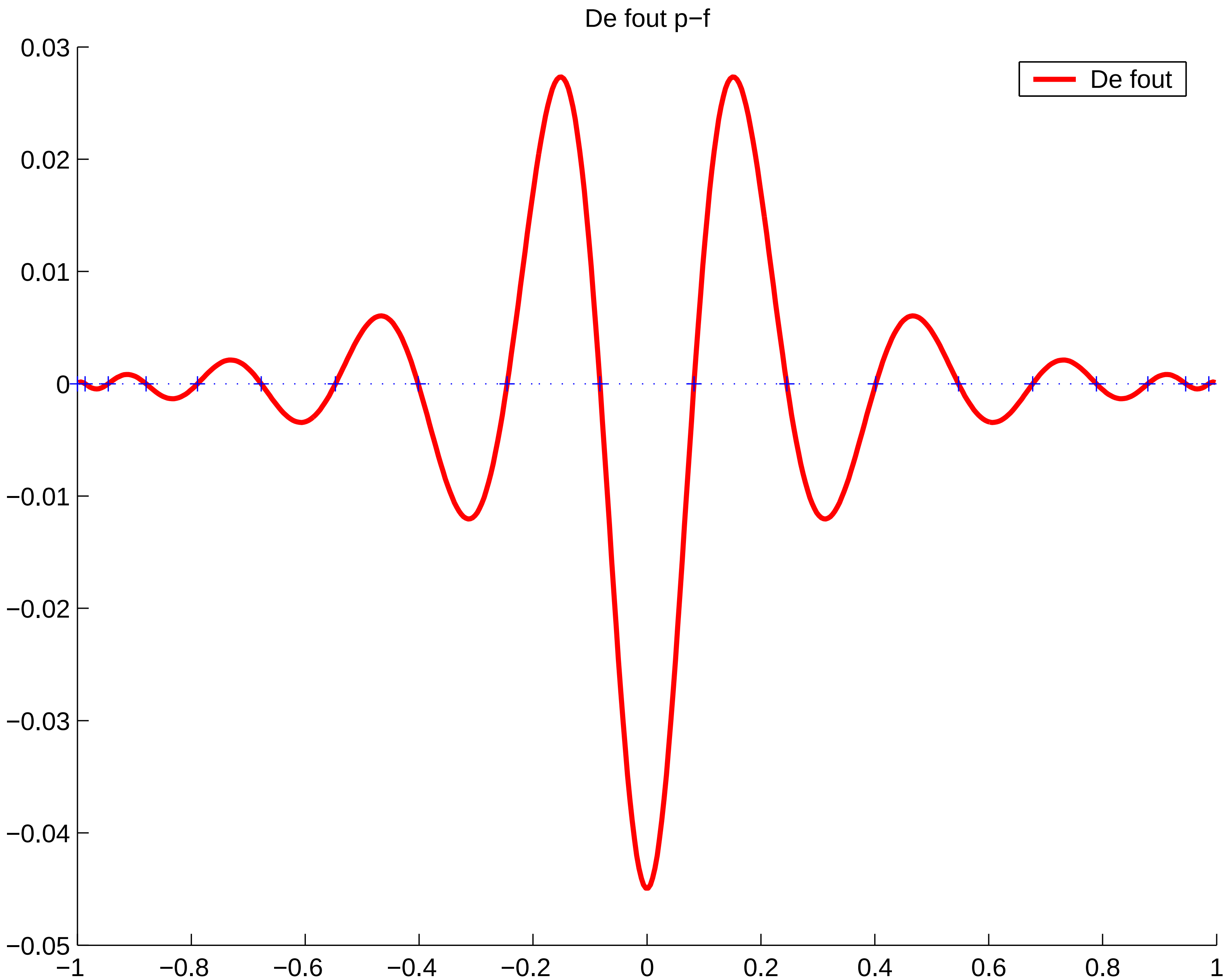
We wensen f in het punt x te benaderen door interpolatie met een $k$de graads polynoom.
Waar kunnen we het beste $x_0, \ldots, x_k$ kiezen?

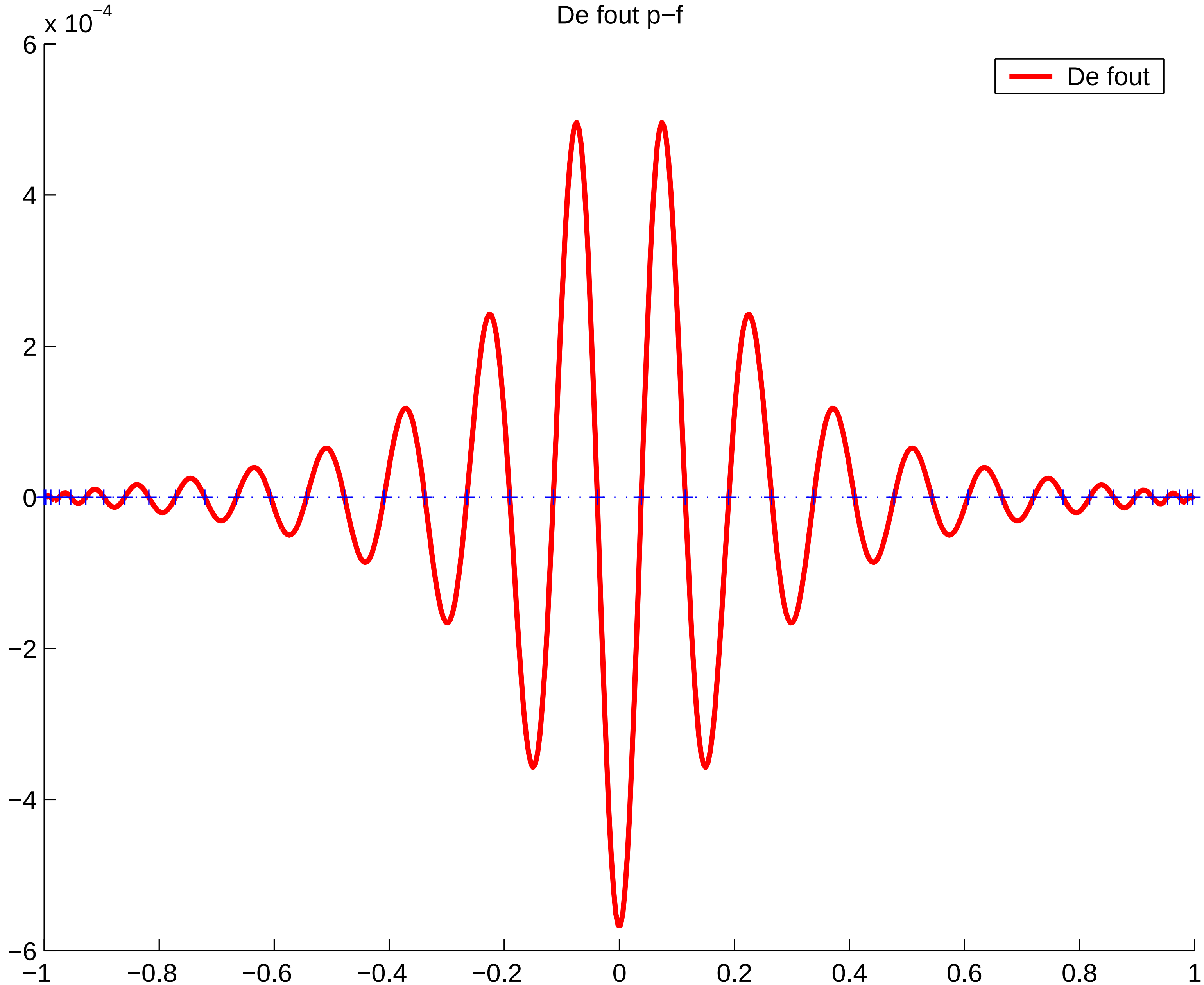
- We willen f met zo weinig mogelijk functiewaarden over een heel interval, zeg $[-1, +1]$, benaderen met een fout kleiner dan, zeg 10^{-4}.
  We kunnen de steunpunten x_i overal kiezen in $[-1, +1]$.

Meer verdichten aan de rand: met $h = 2/k$

$$x_j = \sin(\tfrac{\pi}{2}(-1 + jh)) = \cos(-\tfrac{\pi}{2} jh) \ (j = 0, \ldots, k)?$$


Stuksgewijze polynoom benadering van graad 18
f in steunpunten
p
f
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
−1
−0.8
−0.6
−0.4
−0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1


De fout p−f
De fout
0.03
0.02
0.01
0
−0.01
−0.02
−0.03
−0.04
−0.05
−1
−0.8
−0.6
−0.4
−0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1



De fout p−f
x 10^−4
De fout
6
4
2
0
−2
−4
−6
−1
−0.8
−0.6
−0.4
−0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1

Hieronder $f \in C^{(1)}([-1,1])$

en p_k interpoleert f op $(x_0, x_1, \ldots, x_k)$.

$x_j = -1 + j\,\frac{2}{k}$	$\exists f$	$p_k \not\to f$	x in de buurt van 1
$x_j = 0$	$\exists f$	$p_k \not\to f$	x in de buurt van 1
$x_j = \cos(\frac{\pi\, j}{k})$	$\forall f$	$p_k \to f$	ook x in de buurt van 1
$x_j = \cos(\pi\,\frac{j+0.5}{k+1})$	$\forall f$	$p_k \to f$	ook x in de buurt van 1

Opmerkingen:

$\exists f$ zelfs $\exists f \in C^{(\infty)}([-1,1])$.

$\forall f$ geldt niet $\forall f \in C([-1,1])$

Convergentie volgt niet uit schattingen

voor $(x - x_0)\ldots(x - x_k)$ en $f^{(k+1)}(\xi)$.

Effecten van (afrond)fouten in f-waarden

Voorbeeld. LIp op x_0, x_1, x_2, x_3: $x_i \neq x_j$ voor $i \neq j$.

Definieer

$$L_0(x) \equiv \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)}$$

Effecten van (afrond)fouten in f-waarden

Voorbeeld. LIp op x_0, x_1, x_2, x_3: $x_i \neq x_j$ voor $i \neq j$.

Definieer

$$L_1(x) \equiv \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}$$

Effecten van (afrond)fouten in f-waarden

Voorbeeld. LIp op x_0, x_1, x_2, x_3: $x_i \neq x_j$ voor $i \neq j$.

Definieer

$$L_2(x) \equiv \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}$$

Effecten van (afrond)fouten in f-waarden

Voorbeeld. LIp op x_0, x_1, x_2, x_3: $x_i \neq x_j$ voor $i \neq j$.

Definieer

$$L_3(x) \equiv \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}$$

Effecten van (afrond)fouten in f-waarden

Voorbeeld. LIp op x_0, x_1, x_2, x_3: $x_i \neq x_j$ voor $i \neq j$.

Definieer

$$L_0(x) \equiv \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)}$$

Dan $L_j(x_i) = 0$ als $i \neq j$ en $L_j(x_j) = 1$.

Als $p = f$ op (x_0, x_1, x_2, x_3), dan

$$p(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x) + f(x_3)L_3(x)$$

Effecten van (afrond)fouten in f-waarden

Voorbeeld. LIp op x_0, x_1, x_2, x_3: $x_i \neq x_j$ voor $i \neq j$.

Definieer

$$L_0(x) \equiv \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}$$

Dan $L_j(x_i) = 0$ als $i \neq j$ en $L_j(x_j) = 1$.

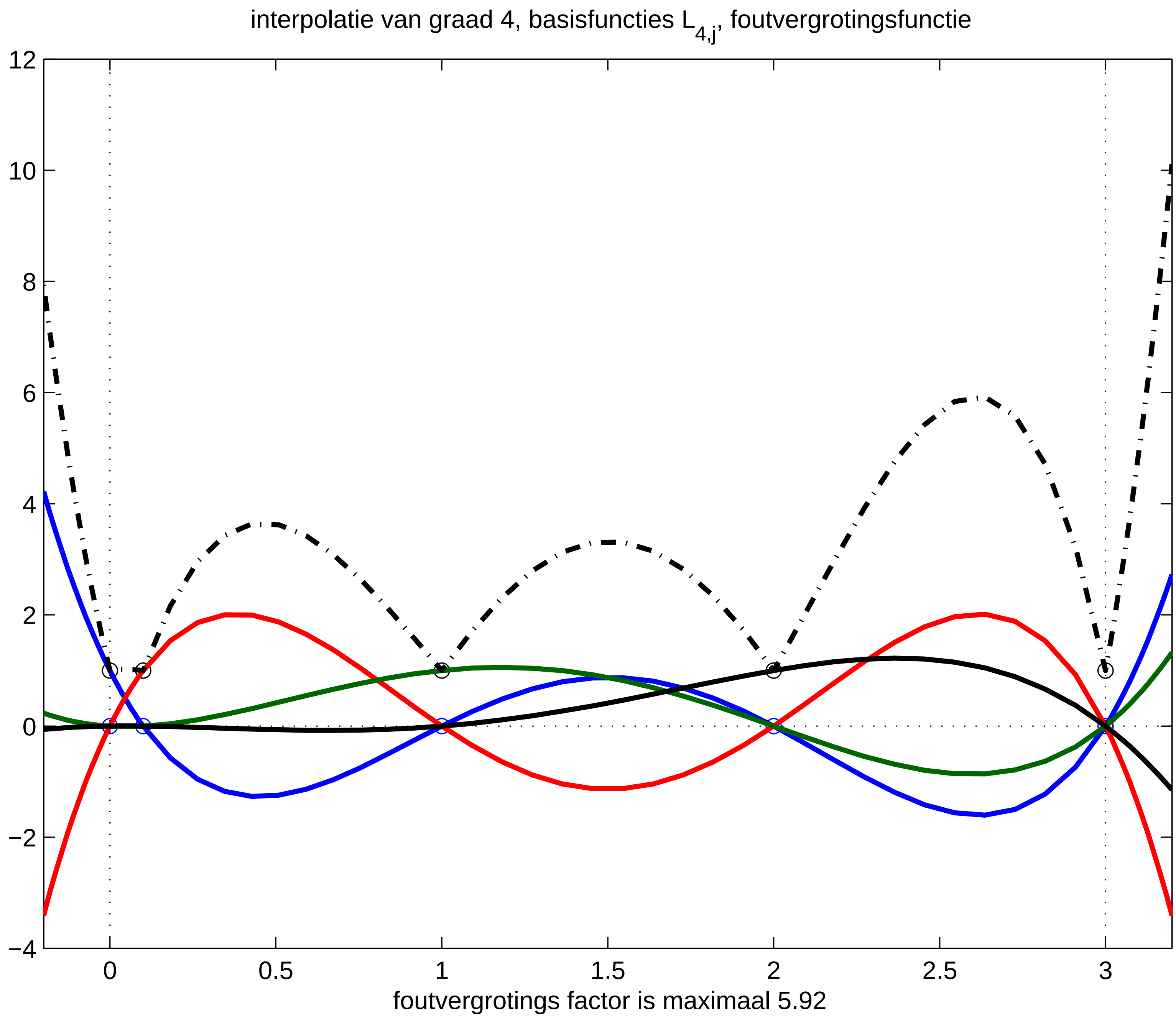
Als $p = f$ op (x_0, x_1, x_2, x_3), dan

$p(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x) + f(x_3)L_3(x)$

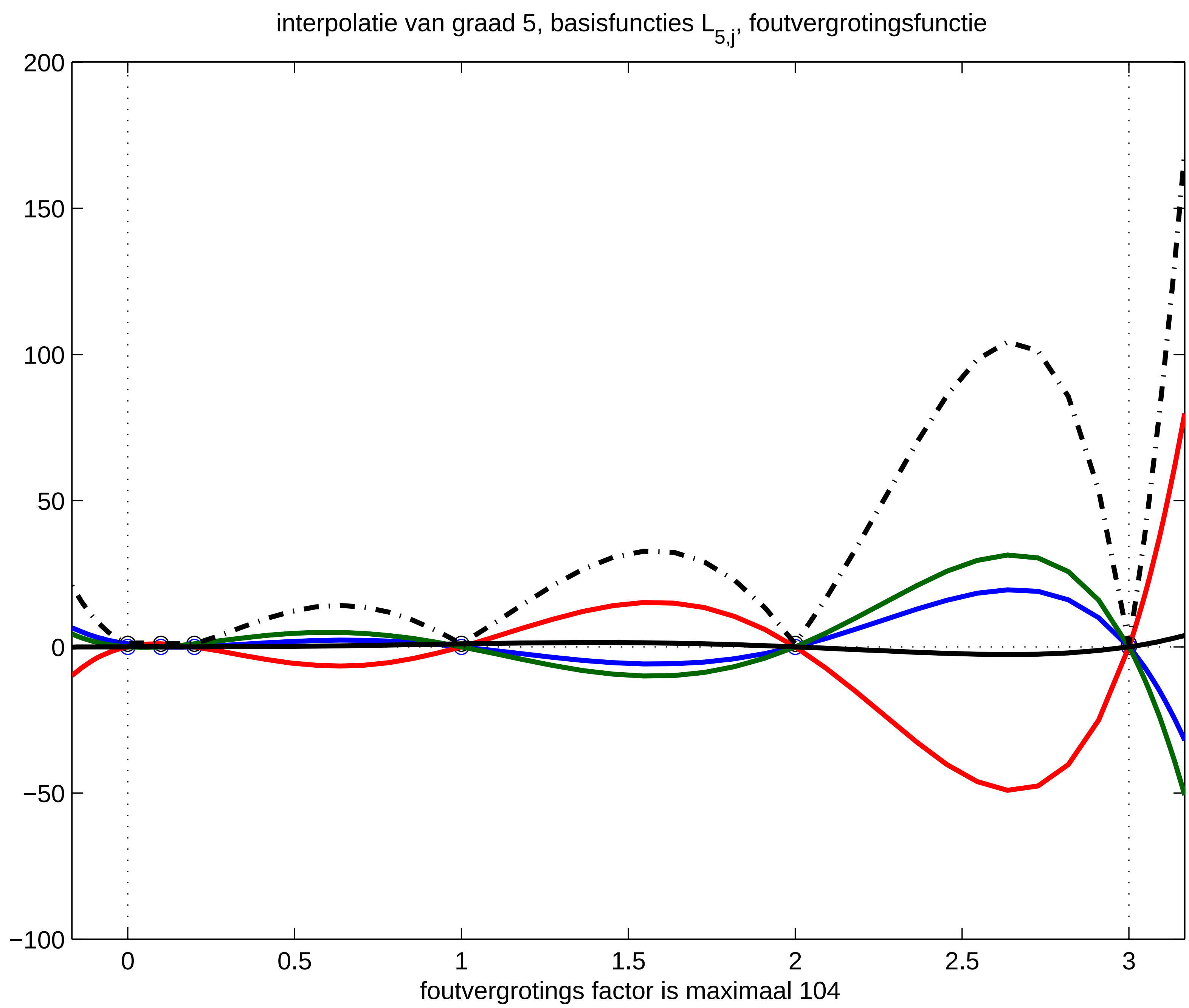
$f^\star(x_j) = f(x_j) + \epsilon_j$ met $|\epsilon_j| \leq \epsilon$:

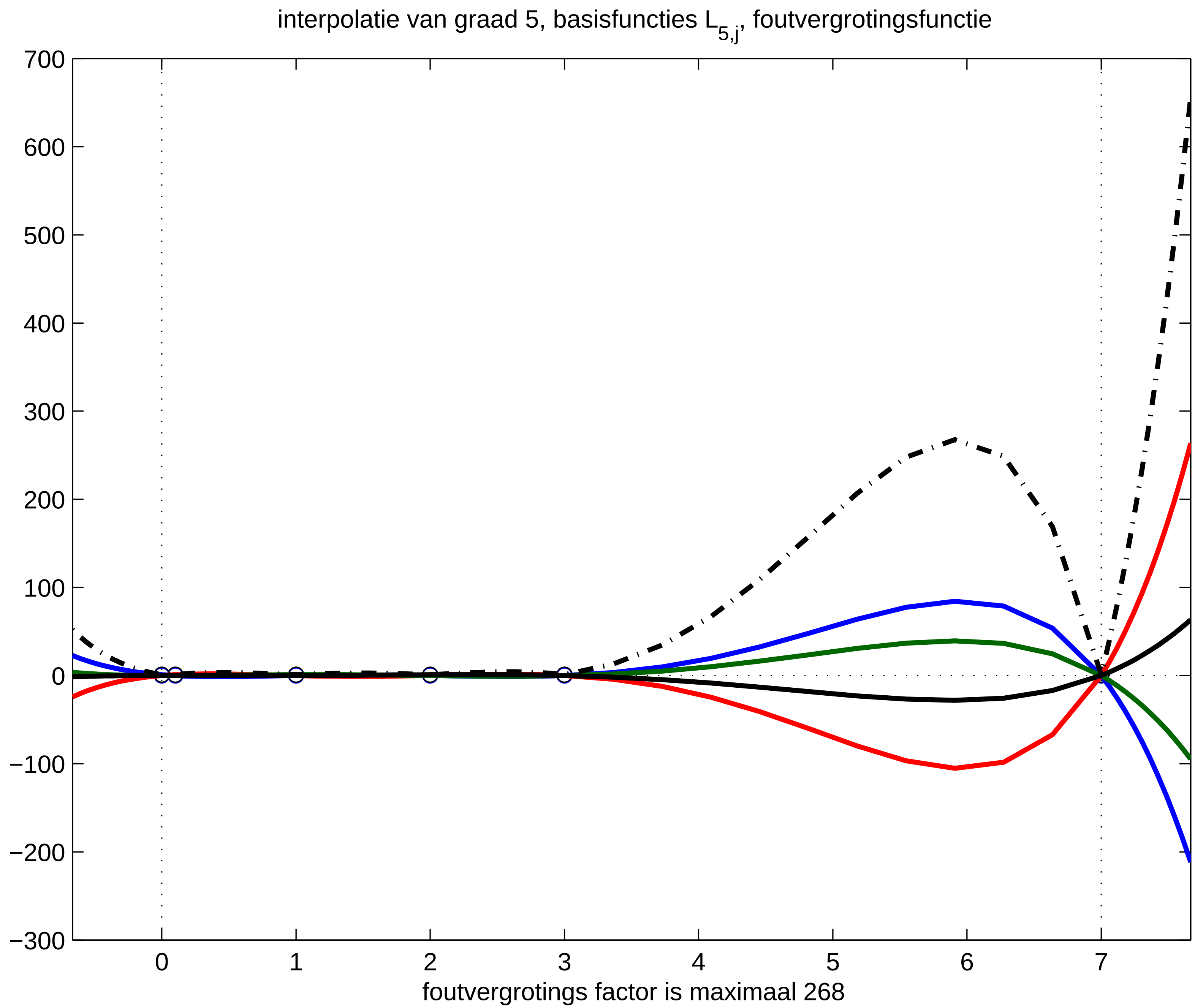
$$|p^\star(x) - p(x)| \leq \epsilon \sum_j |L_j(x)|$$

Op volgende pagina's: grafieken L_j en $\sum_j |L_j(x)|$ $(- \cdot - \cdot)$



interpolatie van graad 4, basisfuncties $L_{4,j}$, foutvergrotingsfunctie
12
10
8
6
4
2
0
−2
−4
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
foutvergrotings factor is maximaal 5.92


interpolatie van graad 5, basisfuncties $L_{5,j}$, foutvergrotingsfunctie
200
150
100
50
0
−50
−100
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
foutvergrotings factor is maximaal 104



interpolatie van graad 5, basisfuncties $L_{5,j}$, foutvergrotingsfunctie
700
600
500
400
300
200
100
0
−100
−200
−300
0
1
2
3
4
5
6
7
foutvergrotings factor is maximaal 268

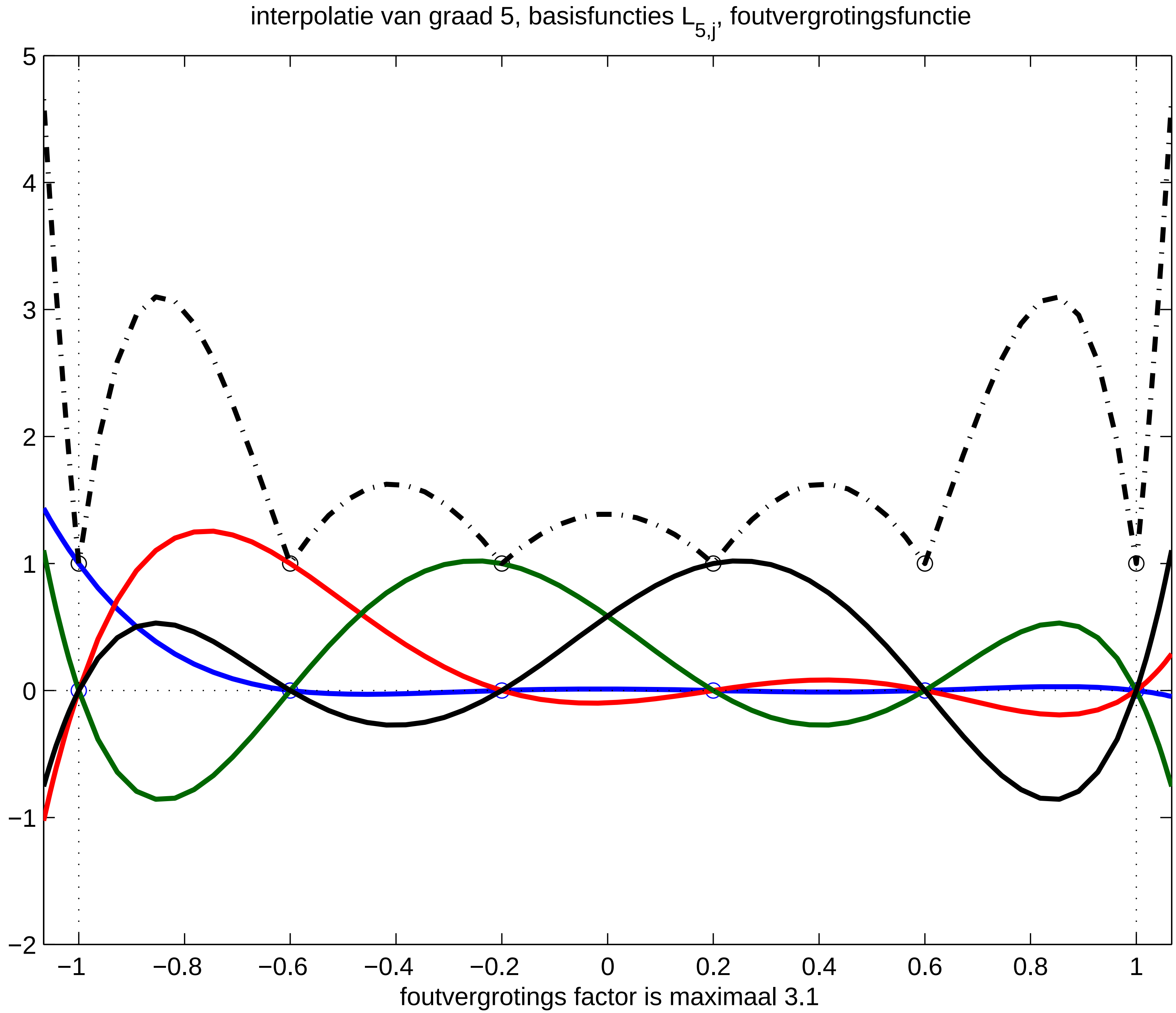
Effecten van (afrond)fouten in f-waarden

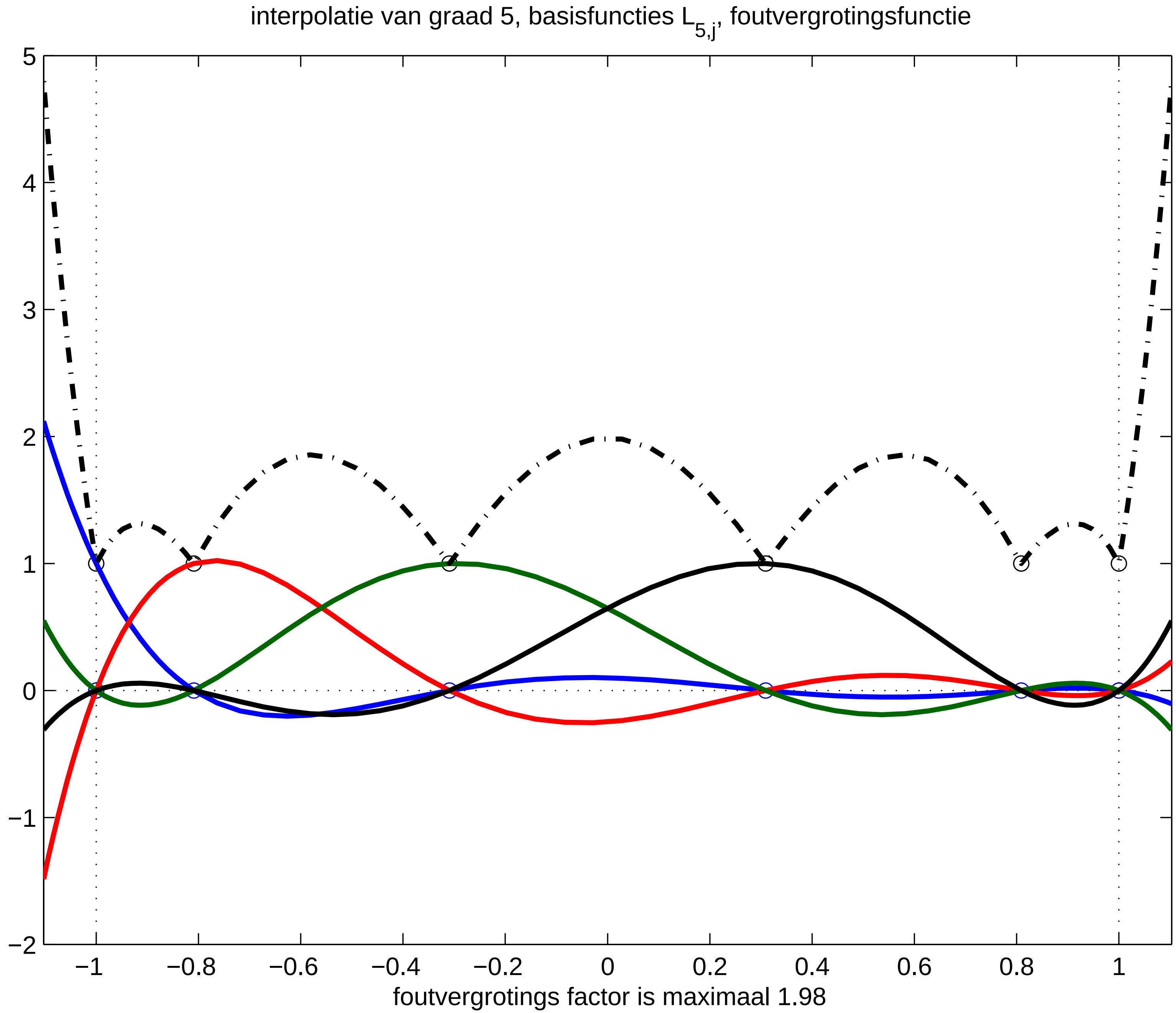
Voorbeeld. LIp op x_0, x_1, x_2, x_3: $x_i \neq x_j$ voor $i \neq j$.

Op volgende pagina's: grafieken L_j en $\sum_j |L_j(x)|$ $(- \cdot - \cdot)$
Voor verschillende k en
voor achtereenvolgens $x_j = -1 + j\,\frac{2}{k}$

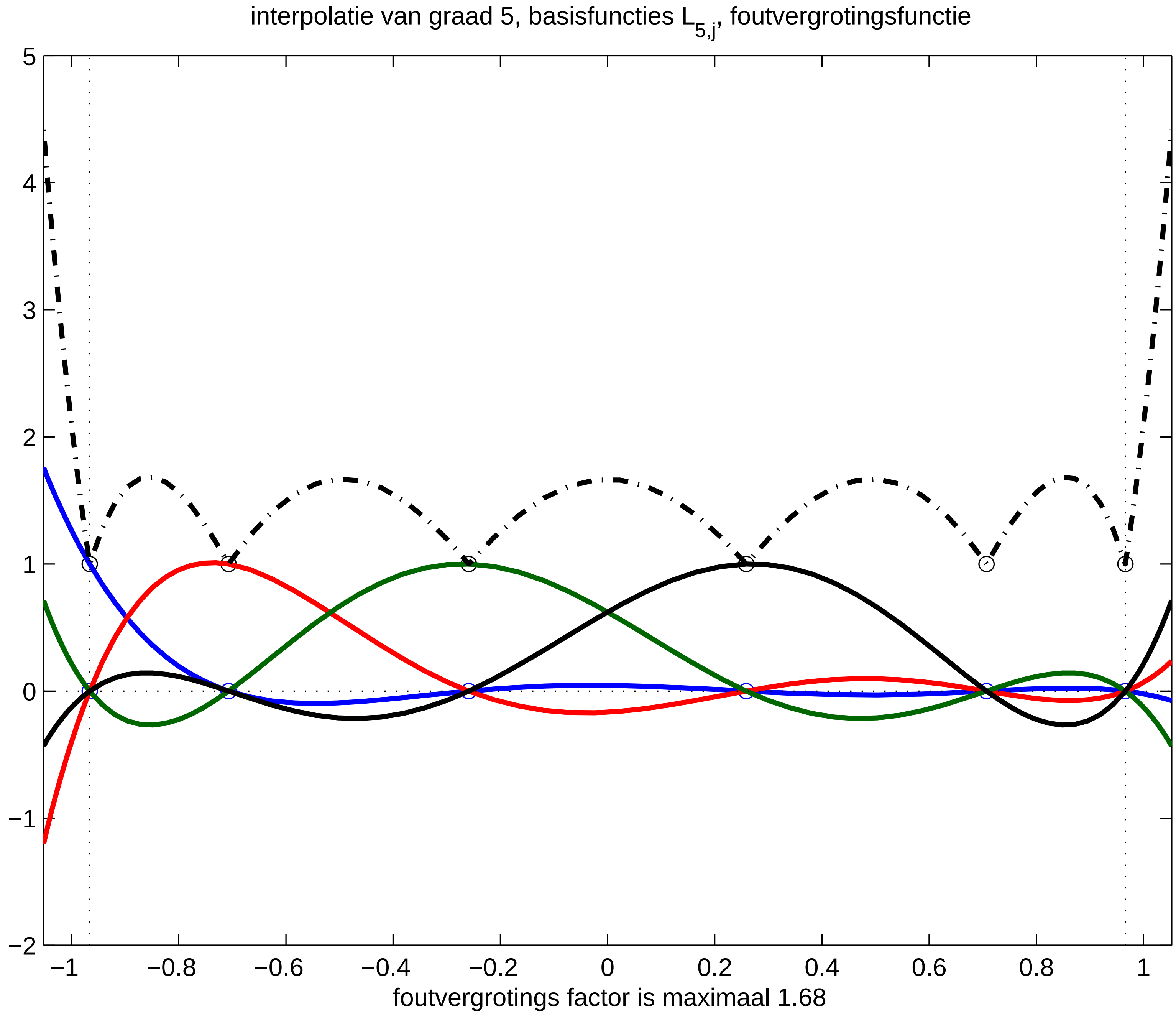
$$x_j = \cos(\tfrac{\pi\, j}{k})$$

$$x_j = \cos(\pi\, \tfrac{j+0.5}{k+1})$$


interpolatie van graad 5, basisfuncties $L_{5,j}$, foutvergrotingsfunctie
5
4
3
2
1
0
−1
−2
−1
−0.8
−0.6
−0.4
−0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
foutvergrotings factor is maximaal 3.1

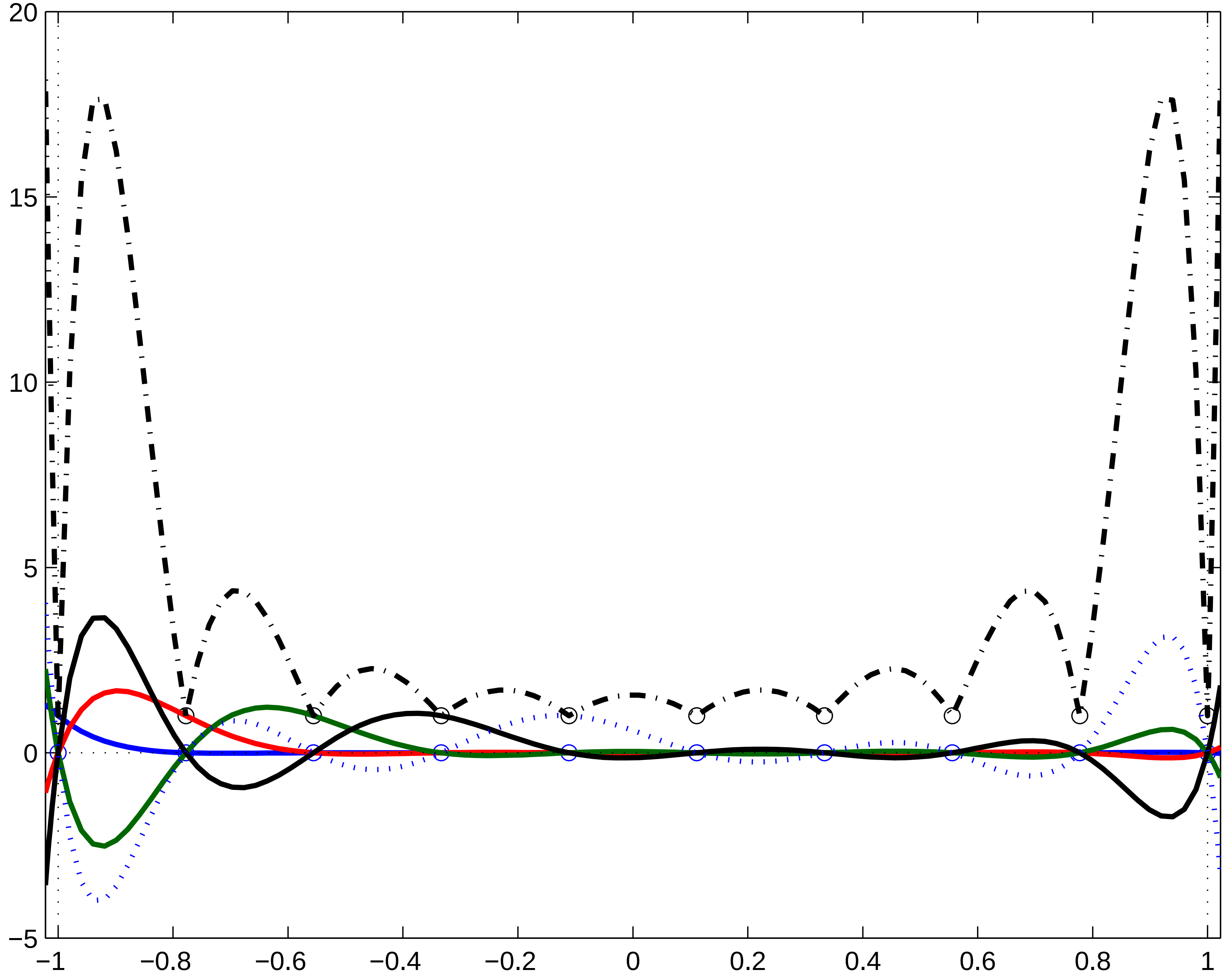


interpolatie van graad 5, basisfuncties $L_{5,j}$, foutvergrotingsfunctie
5
4
3
2
1
0
−1
−2
−1
−0.8
−0.6
−0.4
−0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
foutvergrotings factor is maximaal 1.98

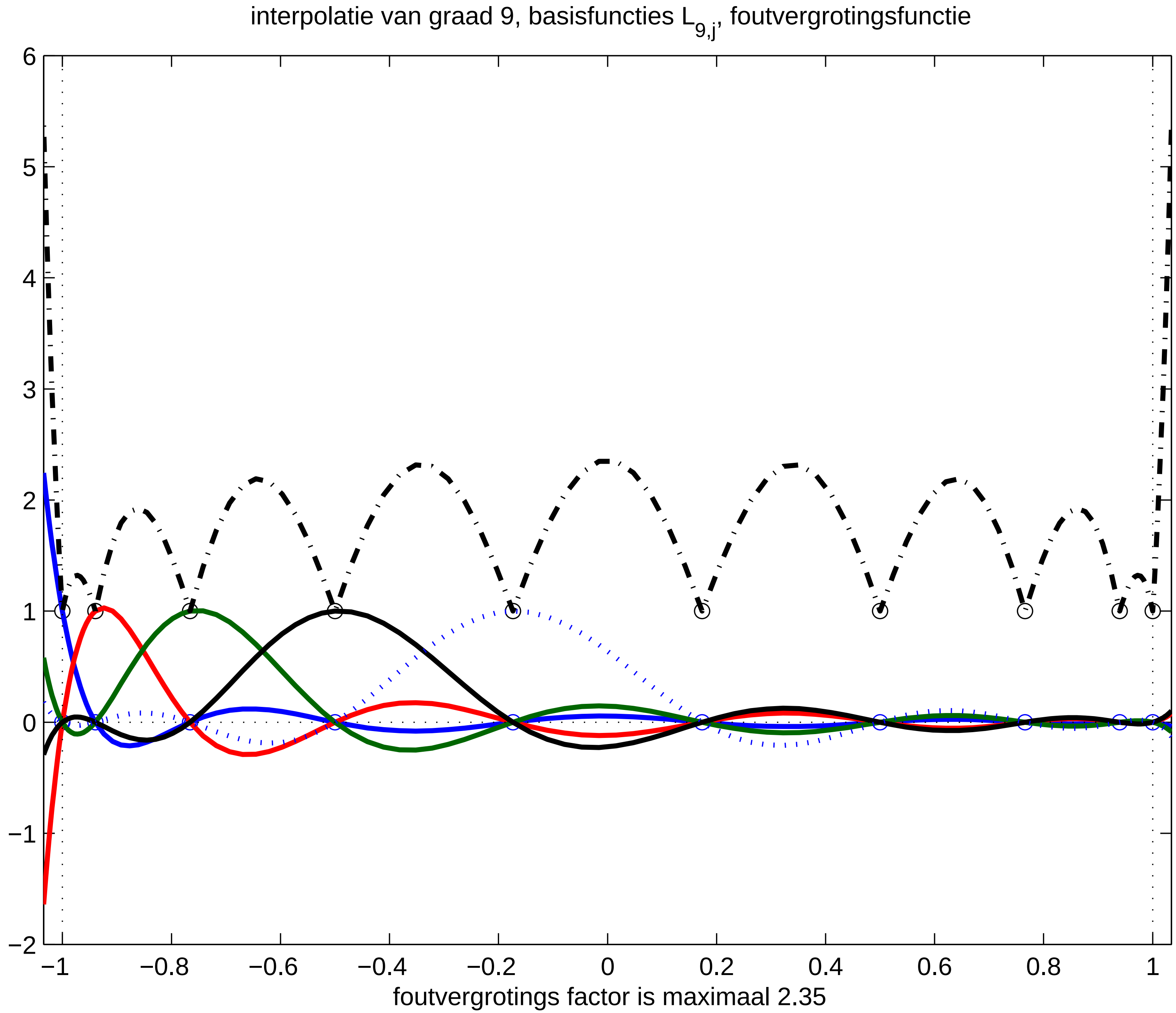


interpolatie van graad 5, basisfuncties $L_{5,j}$, foutvergrotingsfunctie
5
4
3
2
1
0
−1
−2
−1
−0.8
−0.6
−0.4
−0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
foutvergrotings factor is maximaal 1.68

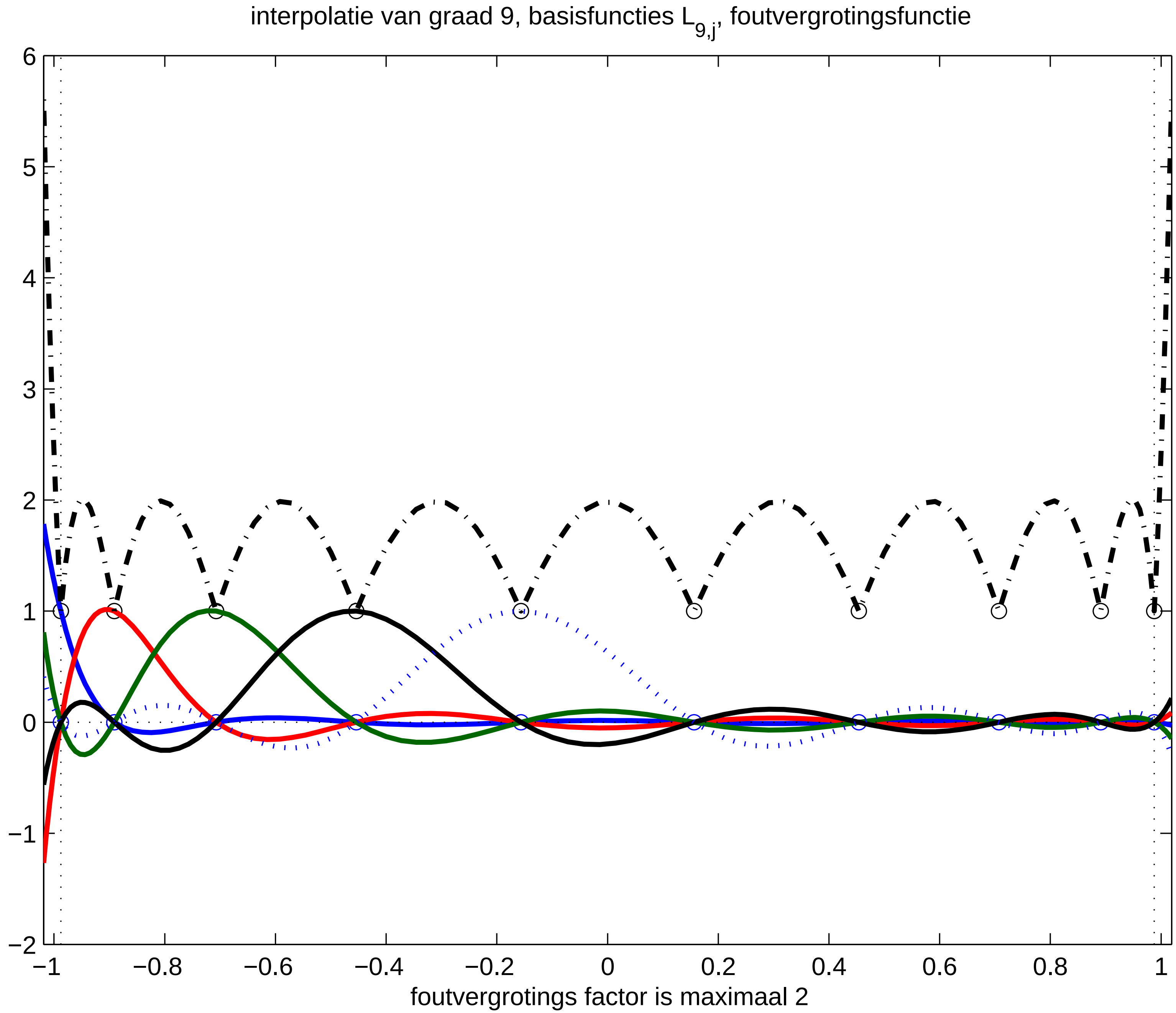
interpolatie van graad 9, basisfuncties $L_{9,j}$, foutvergrotingsfunctie

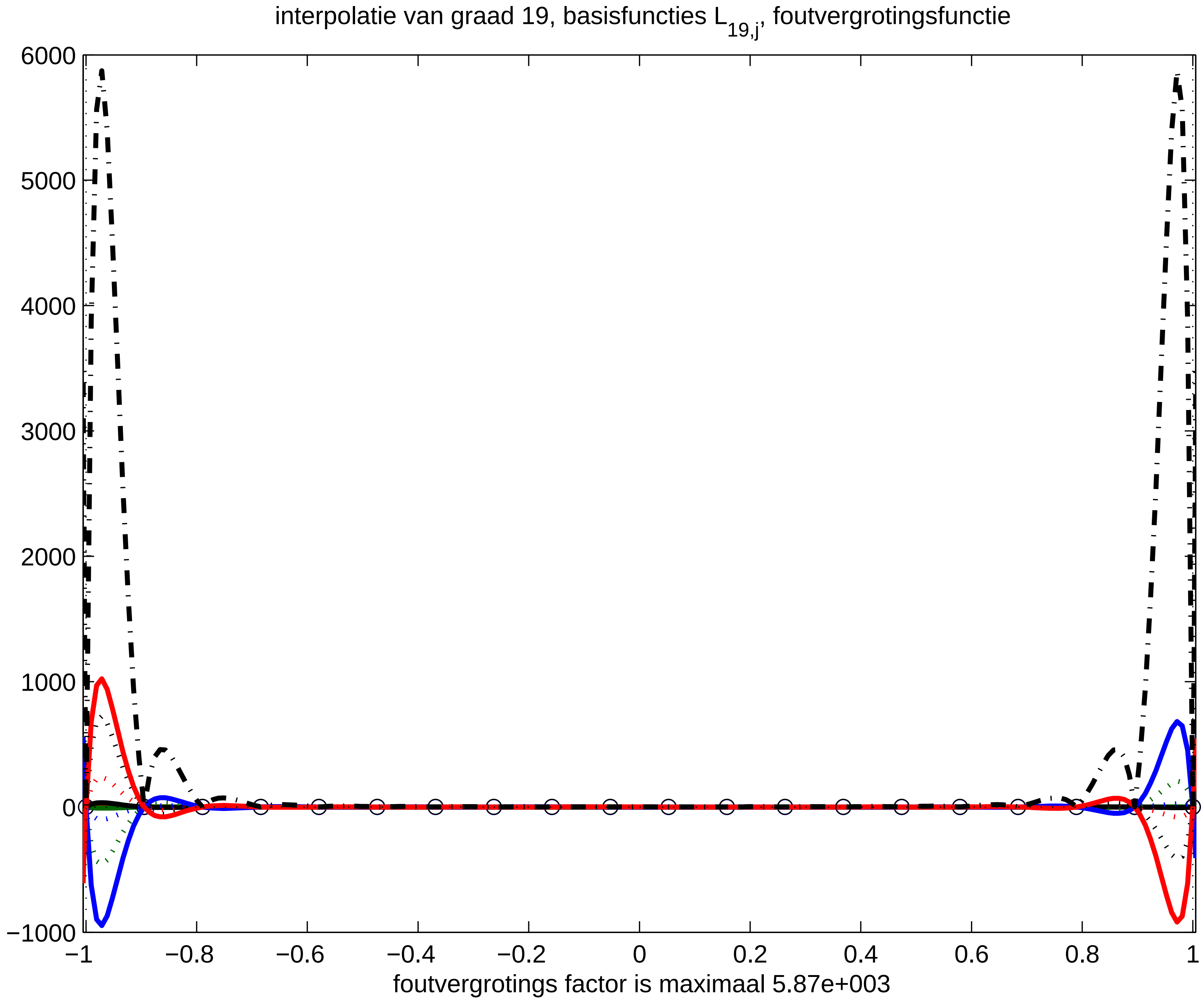


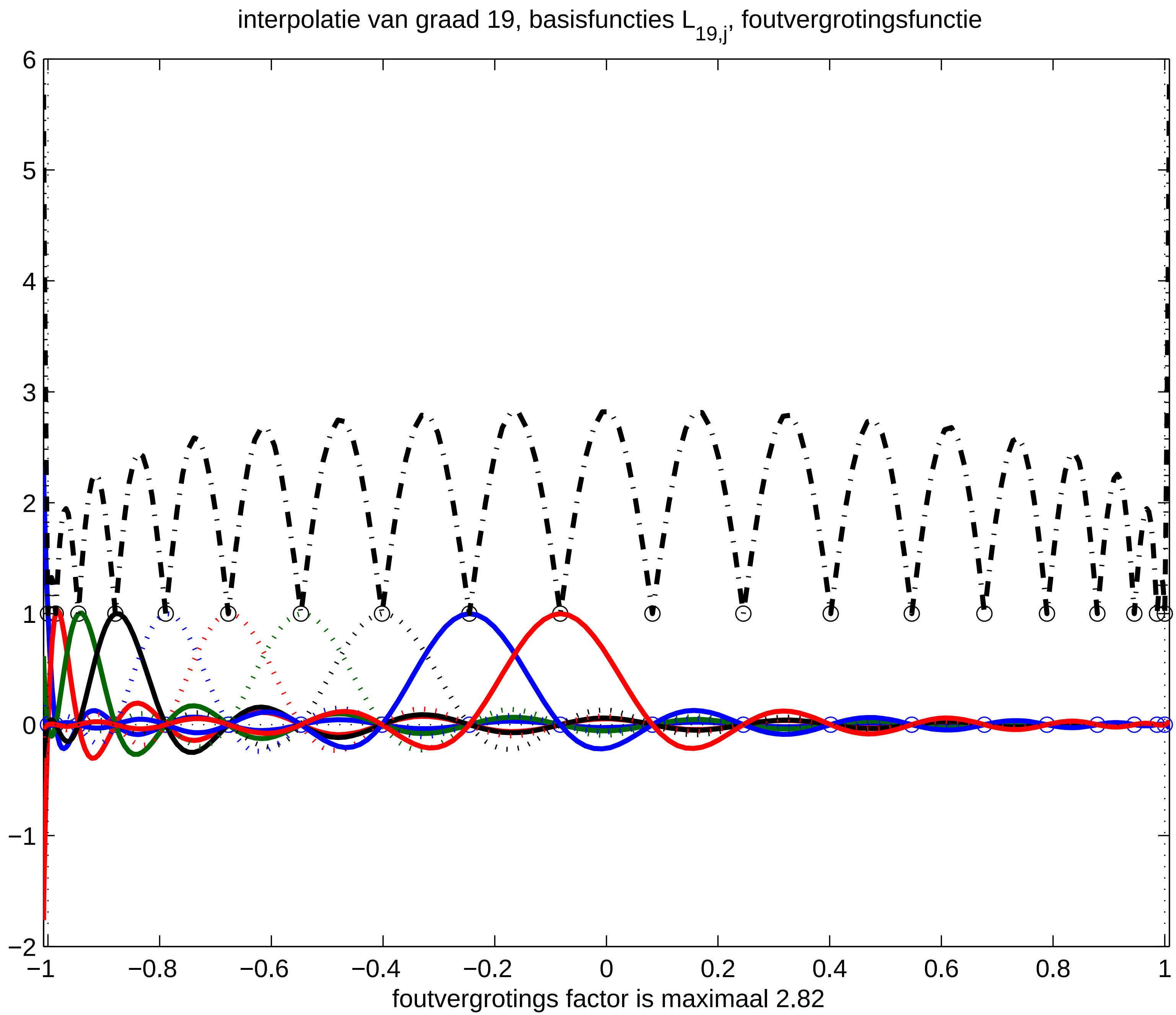
foutvergrotings factor is maximaal 17.6

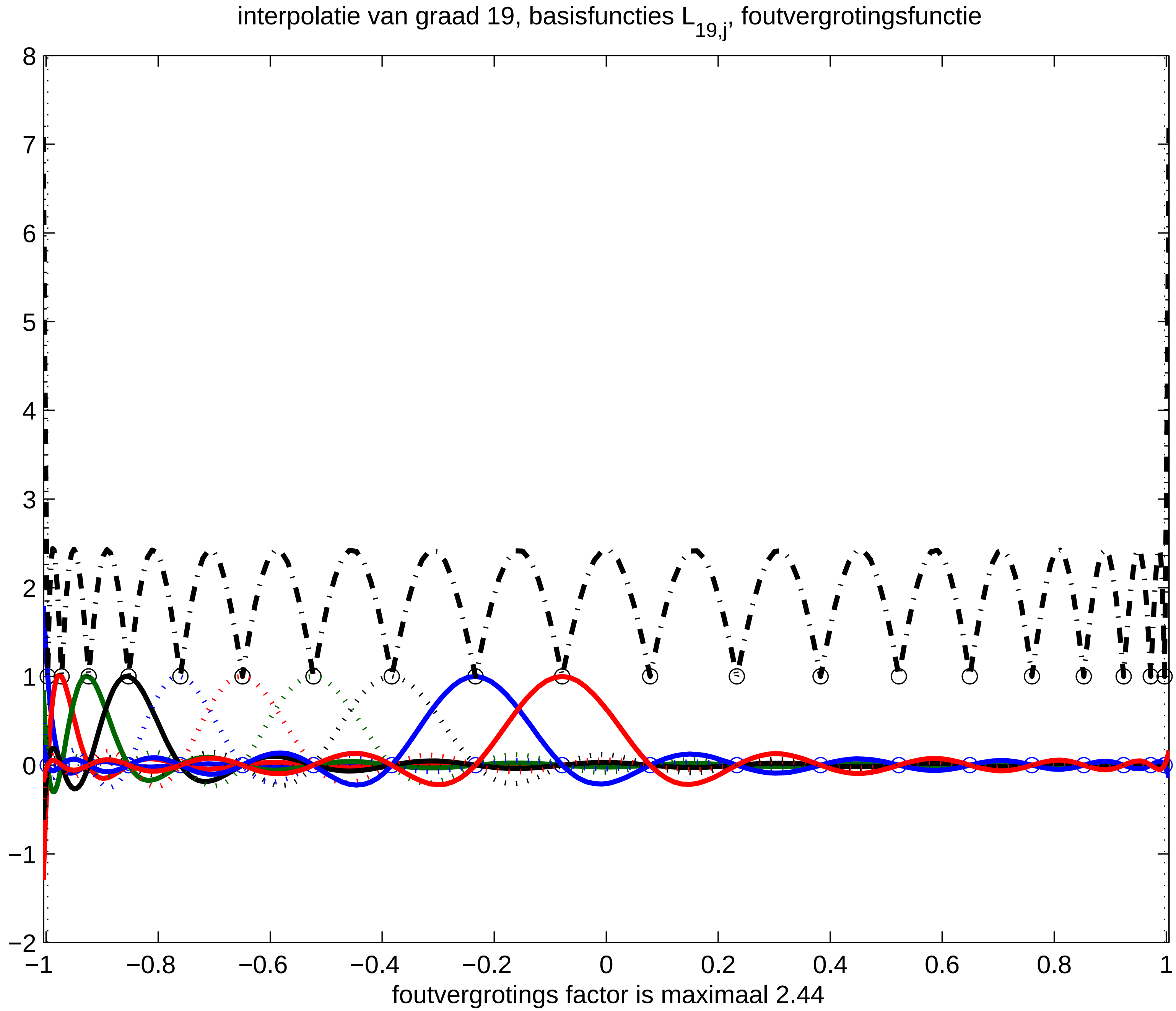


interpolatie van graad 9, basisfuncties $L_{9,j}$, foutvergrotingsfunctie
6
5
4
3
2
1
0
−1
−2
−1
−0.8
−0.6
−0.4
−0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
foutvergrotings factor is maximaal 2.35

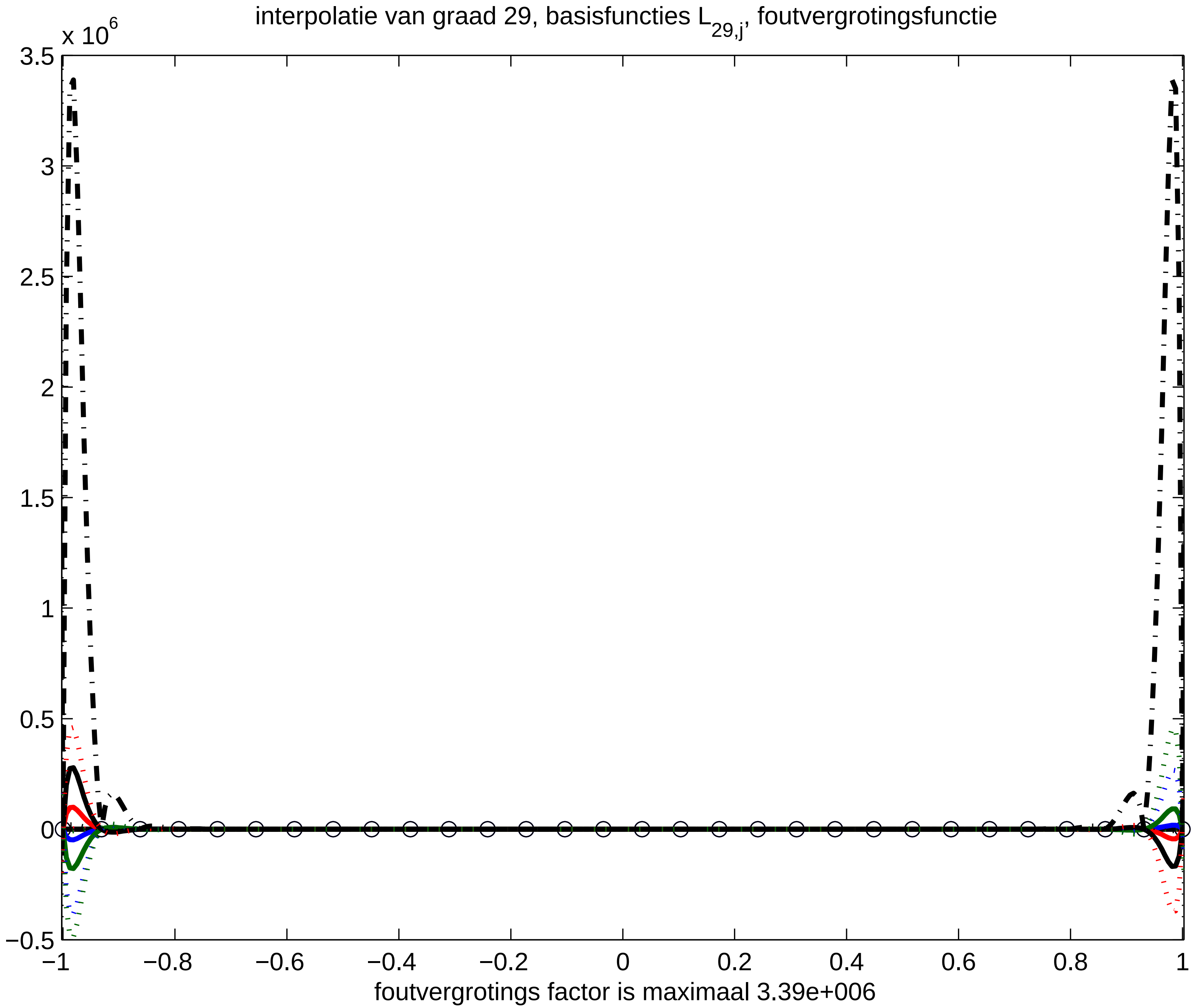

interpolatie van graad 9, basisfuncties $L_{9,j}$, foutvergrotingsfunctie
6
5
4
3
2
1
0
−1
−2
−1
−0.8
−0.6
−0.4
−0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
foutvergrotings factor is maximaal 2

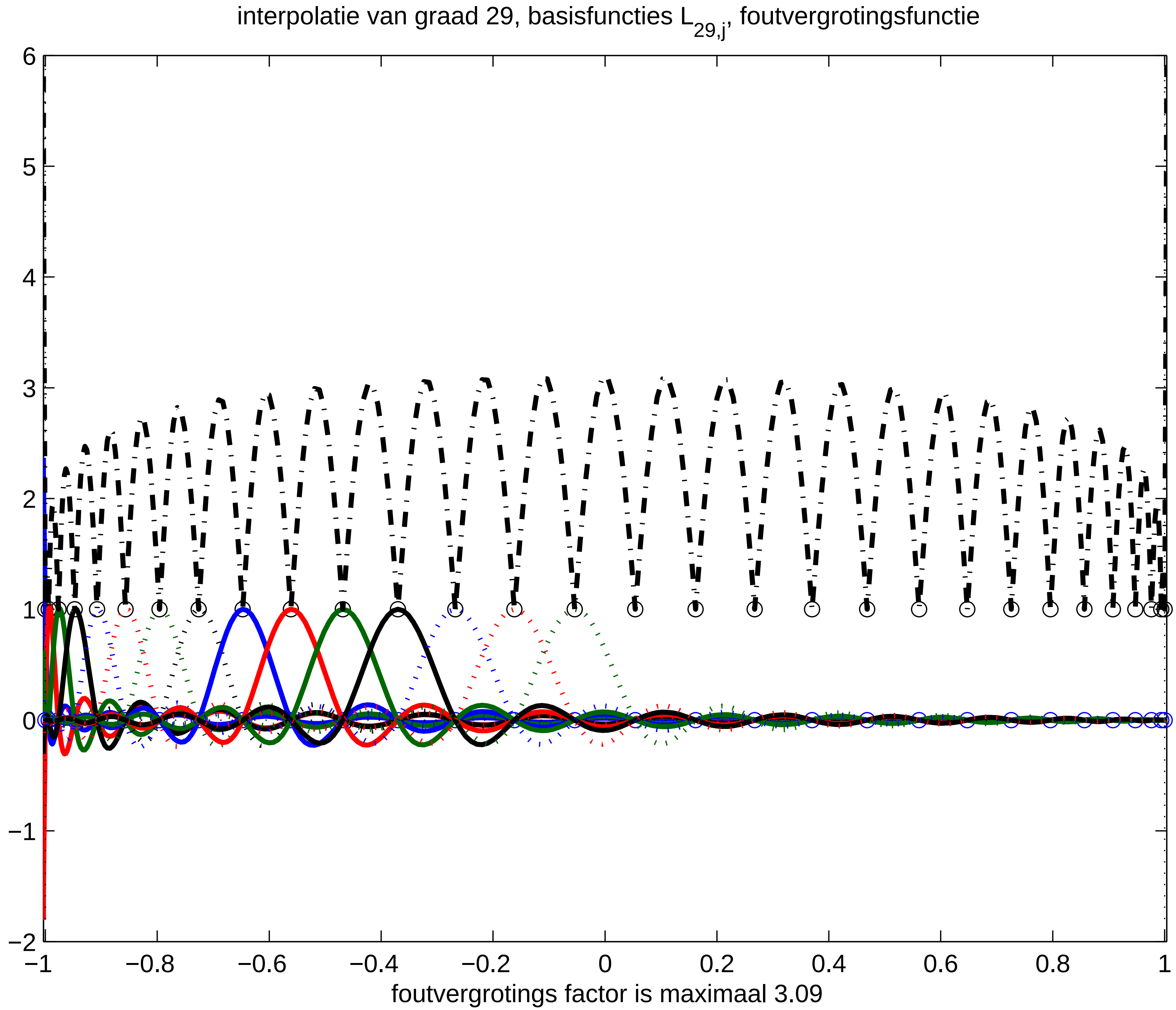

interpolatie van graad 19, basisfuncties $L_{19,j}$, foutvergrotingsfunctie
6000
5000
4000
3000
2000
1000
0
−1000
−1
−0.8
−0.6
−0.4
−0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
foutvergrotings factor is maximaal 5.87e+003

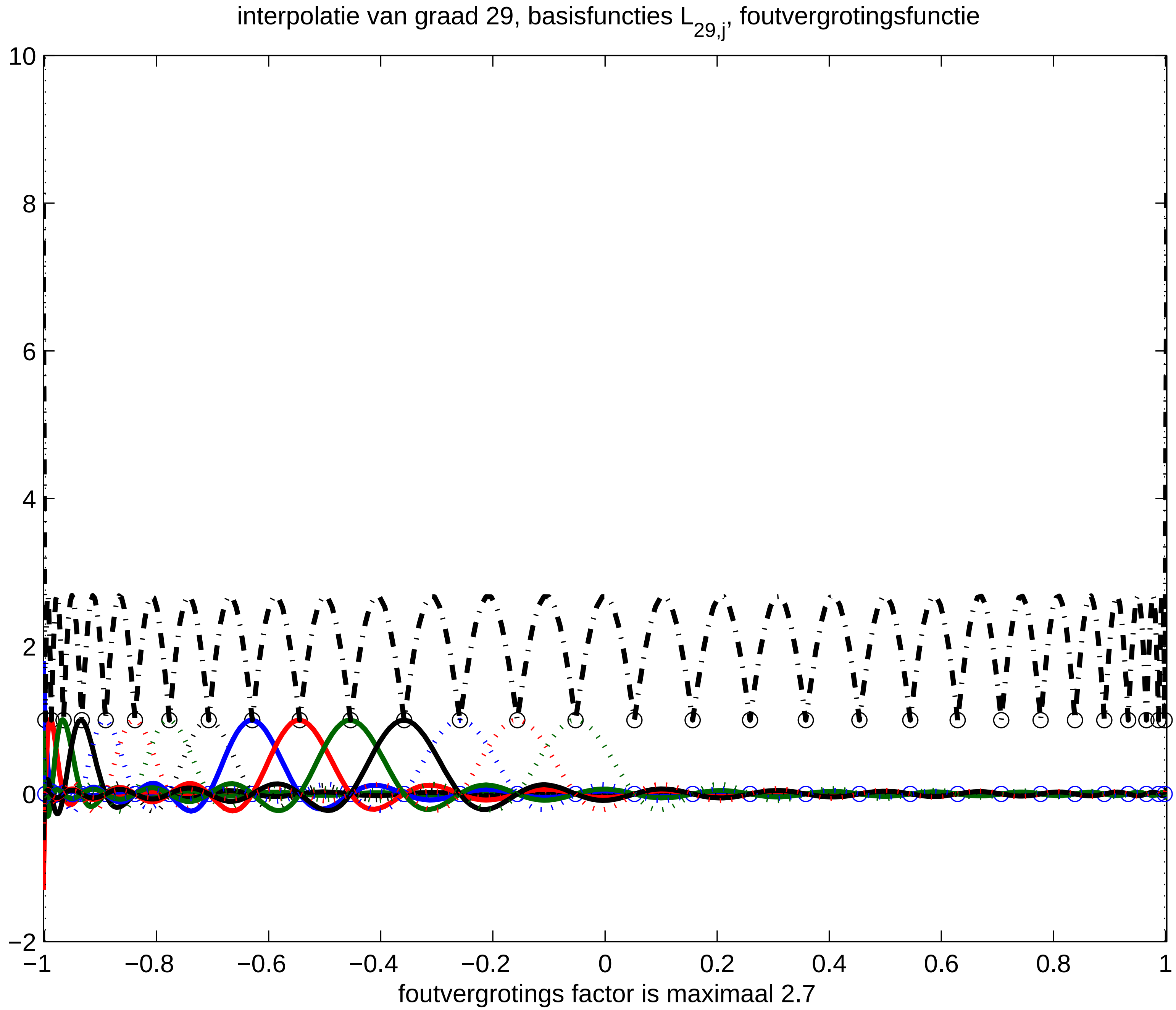

interpolatie van graad 19, basisfuncties $L_{19,j}$, foutvergrotingsfunctie
6
5
4
3
2
1
0
−1
−2
−1
−0.8
−0.6
−0.4
−0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
foutvergrotings factor is maximaal 2.82



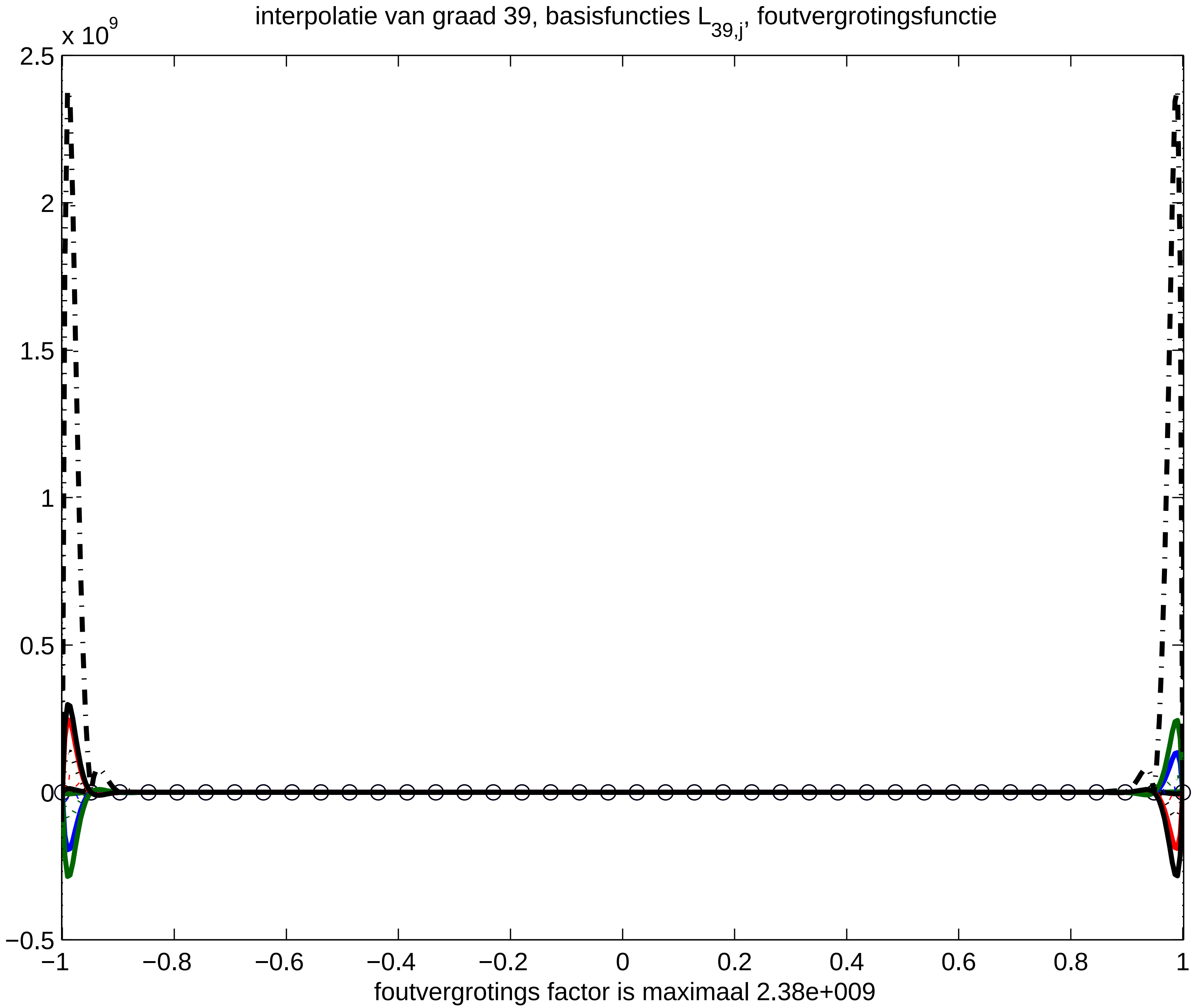
interpolatie van graad 19, basisfuncties $L_{19,j}$, foutvergrotingsfunctie
8
7
6
5
4
3
2
1
0
−1
−2
−1
−0.8
−0.6
−0.4
−0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
foutvergrotings factor is maximaal 2.44


interpolatie van graad 29, basisfuncties $L_{29,j}$, foutvergrotingsfunctie
x 10^6
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
−0.5
−1
−0.8
−0.6
−0.4
−0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
foutvergrotings factor is maximaal 3.39e+006

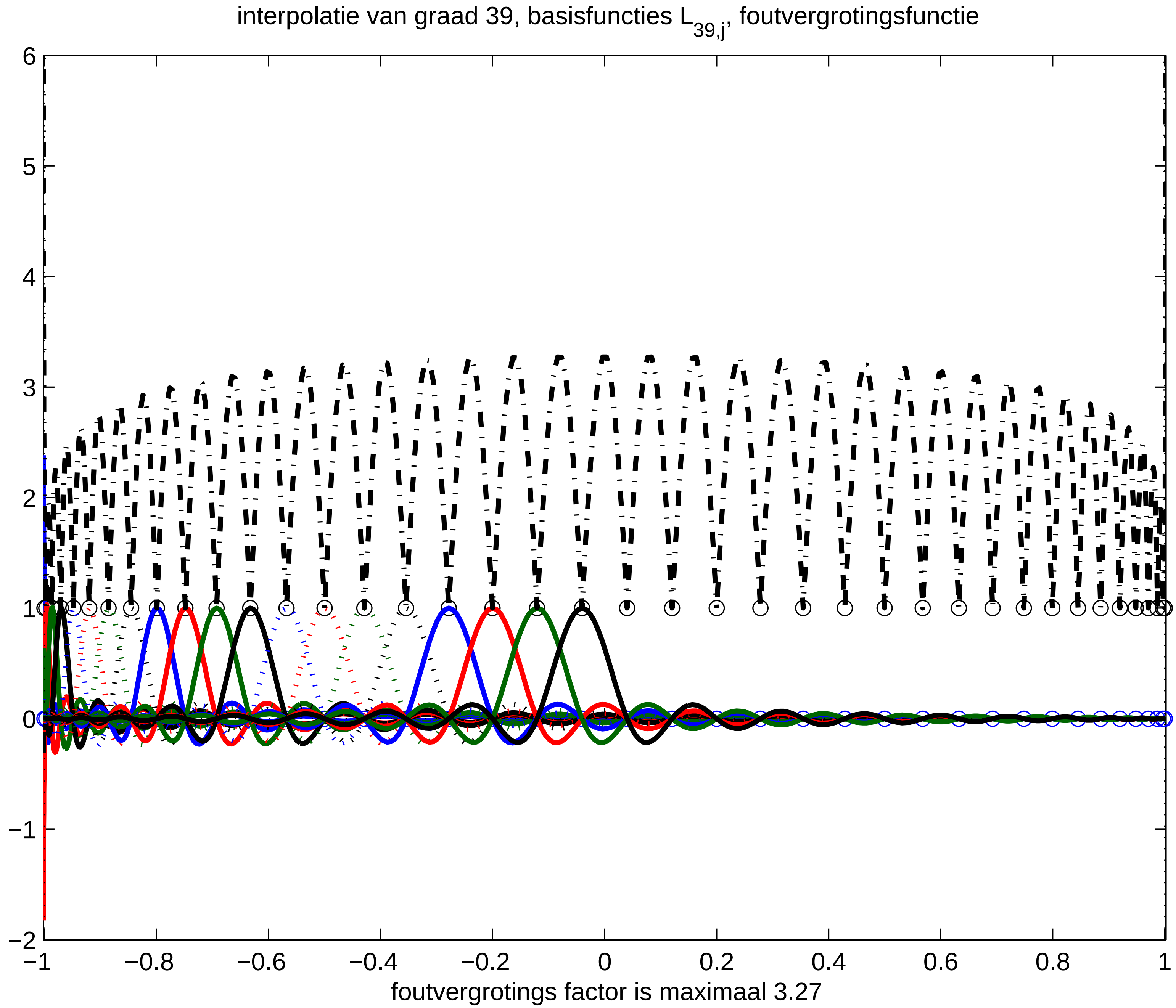

interpolatie van graad 29, basisfuncties $L_{29,j}$, foutvergrotingsfunctie
6
5
4
3
2
1
0
−1
−2
−1
−0.8
−0.6
−0.4
−0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
foutvergrotings factor is maximaal 3.09

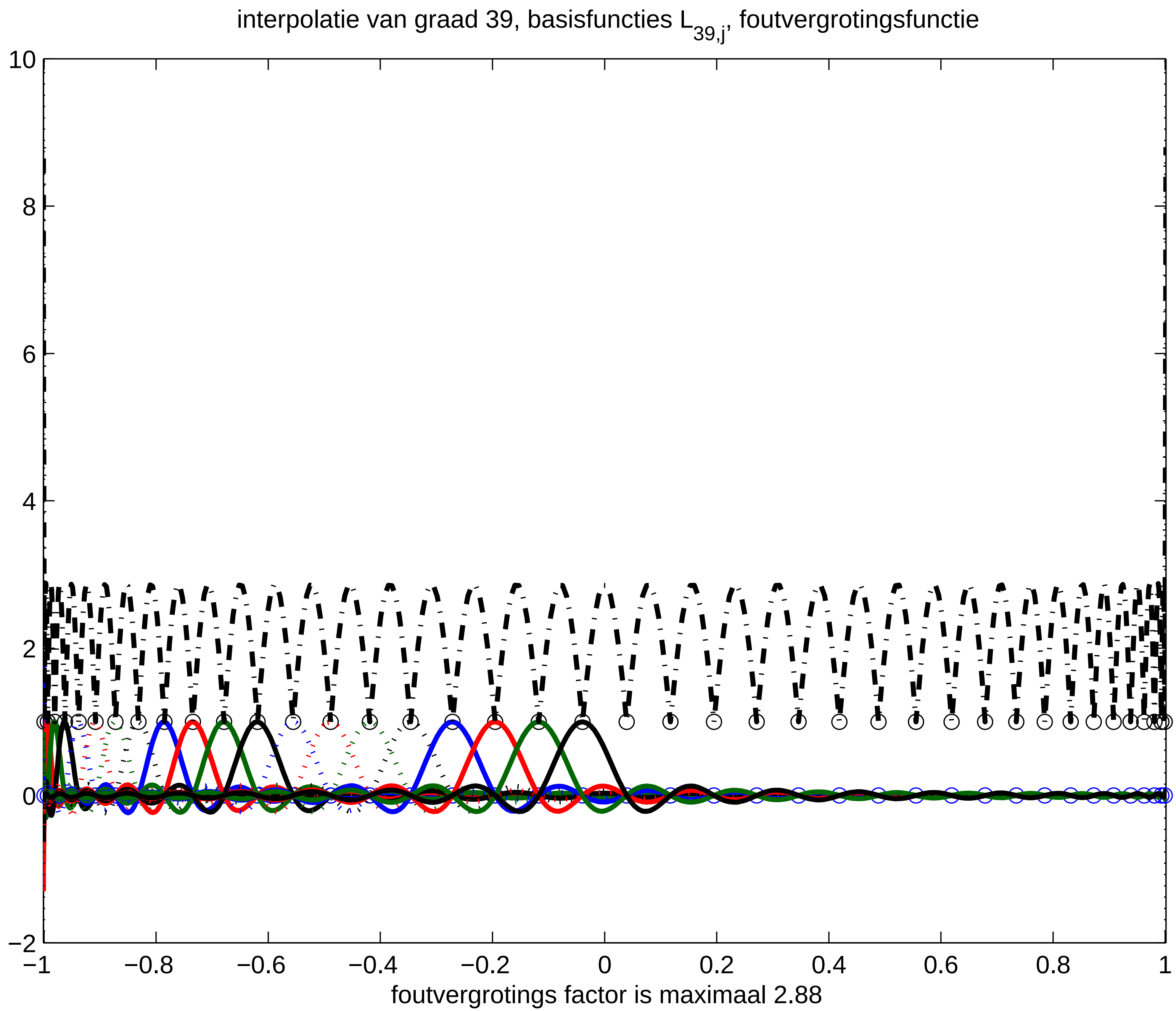


interpolatie van graad 29, basisfuncties $L_{29,j}$, foutvergrotingsfunctie
10
8
6
4
2
0
−2
−1
−0.8
−0.6
−0.4
−0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
foutvergrotings factor is maximaal 2.7



interpolatie van graad 39, basisfuncties $L_{39,j}$, foutvergrotingsfunctie
x 10^9
2.5
2
1.5
1
0.5
0
−0.5
−1
−0.8
−0.6
−0.4
−0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
foutvergrotings factor is maximaal 2.38e+009


interpolatie van graad 39, basisfuncties $L_{39,j}$, foutvergrotingsfunctie
6
5
4
3
2
1
0
−1
−2
−1
−0.8
−0.6
−0.4
−0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
foutvergrotings factor is maximaal 3.27

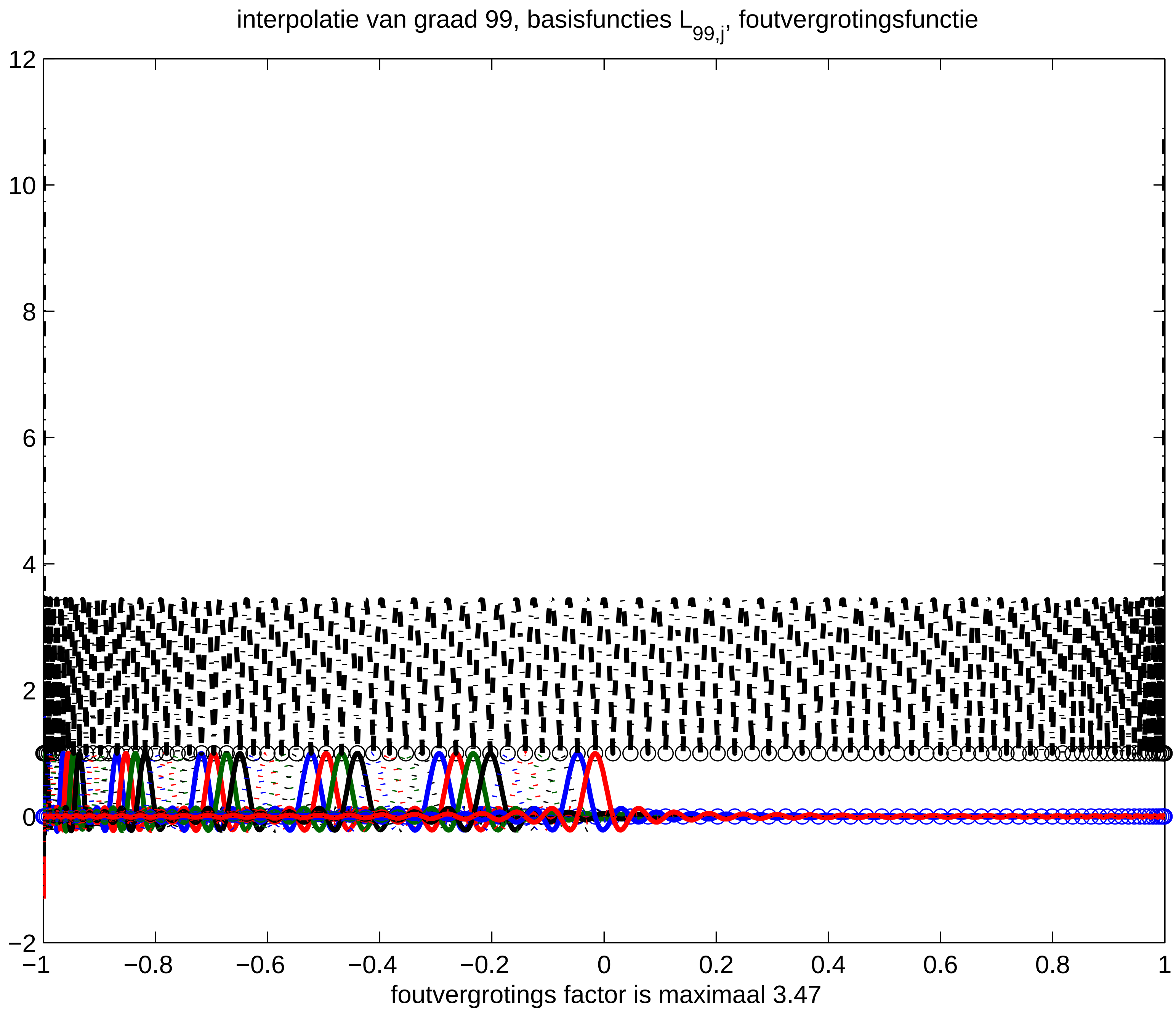


interpolatie van graad 39, basisfuncties $L_{39,j}$, foutvergrotingsfunctie
10
8
6
4
2
0
−2
−1
−0.8
−0.6
−0.4
−0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
foutvergrotings factor is maximaal 2.88

Effecten van (afrond)fouten in f-waarden

Voorbeeld. LIp op x_0, x_1, x_2, x_3: $x_i \neq x_j$ voor $i \neq j$.

Op volgende pagina's: grafieken L_j *en* $\sum_j |L_j(x)|$ *(*$- \cdot -\cdot$*)*
Voor verschillende k en voor $x_j = \cos(\pi\,\frac{j+0.5}{k+1})$


interpolatie van graad 99, basisfuncties $L_{99,j}$, foutvergrotingsfunctie
12
10
8
6
4
2
0
−2
−1
−0.8
−0.6
−0.4
−0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
foutvergrotings factor is maximaal 3.47

Conclusies.

• Interpoleren op een equidistante punten rij

$$x_j = -1 + \frac{2j}{k} \qquad (j = 0, \ldots, k)$$

is, vooral in ‘rand intervallen’ gevoelig voor fouten op f waarden.

• Interpoleren op een puntenrij die zich verdicht aan de rand volgens

$$x_j = \cos(\pi\, \tfrac{j}{k}) \quad \text{of} \quad x_j = \cos(\pi\, \tfrac{j+0.5}{k+1}) \quad (j = 0, \ldots, k)$$

is vrijwel ongevoelig voor fouten op f (groei ten hoogste met een factor van orde $\log k$).