Utrecht, 27 september 2011

Numerieke Wiskunde

Gerard Sleijpen

Universiteit Utrecht
Department of Mathematics

http://www.staff.science.uu.nl/~sleij101/

Benaderings kwaliteit

Benader $f(x)$ door $p(x)$.

Verschillende keuze $x_0, \ldots, x_k$, met $x_j < x_{j+1}$:

- **Lagrange equidistant**: $x_j = x_0 + jh$:
  - x in het 'middelste' interval (x_m, x_{m+1})
  - x in een 'rand' interval (x_0, x_1)
- **Lagrange, grotere dichtheid aan de rand**:
  $$x_j = \cos(\pi \tfrac{j+0.5}{k+1}) \qquad (j = 0, 1, \ldots, k)$$
- **Taylor**, alle x_j in het midden: $x_j = x_0$.

Schat de fout in diverse benaderingen. Schat af

$$\pi(x) \equiv (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_k) \quad \& \quad (k+1)!$$

Voor het schatten van $k!$, gebruik de

Formule van Stirling

$$\boxed{k! \approx \sqrt{2\pi k}\,\left(\frac{k}{e}\right)^k}$$

dat wil zeggen

$$k!/\left(\sqrt{2\pi k}\,\left(\frac{k}{e}\right)^k\right) \longrightarrow 1 \quad \text{voor} \quad k \longrightarrow \infty$$

Interpretatie.

Op een factor $\sqrt{2\pi k}$ na groeit $k!$ volgens $\left(\frac{k}{e}\right)^k$.

$$\pi(x) \equiv (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_k)$$

Equidistant. $h > 0$, $x_j = t_0 + jh$ voor $j = 0, 1, \dots, k$.

Voor x in het middelste interval.

$k = 2m - 1$ oneven, $x = t_m + sh$ met $s \in (0, 1)$

$$|\pi(x)|/h^{k+1} = |s(s-1)(s+1)(s-2)(s+2)\dots(s-m)|$$

$$\leq \tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\,\tfrac{3}{2}\,\tfrac{3}{2}\,\tfrac{5}{2}\,\tfrac{5}{2}\dots\tfrac{2m-1}{2} = \kappa_m\,\tfrac{1}{2}\,\tfrac{2}{2}\,\tfrac{3}{2}\,\tfrac{4}{2}\,\tfrac{5}{2}\,\tfrac{6}{2}\dots\tfrac{2m}{2} = \kappa_m\,\frac{(k+1)!}{2^{k+1}}$$

met $\kappa_m \equiv \frac{1}{2}\,\frac{3}{4}\,\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2m-1}{2m}$

$$\pi(x) \equiv (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_k)$$

Equidistant. $h > 0$, $x_j = t_0 + jh$ voor $j = 0, 1, \dots, k$.

Voor x in het middelste interval.

$k = 2m - 1$ oneven, $x = t_m + sh$ met $s \in (0, 1)$

$$|\pi(x)|/h^{k+1} = |s(s-1)(s+1)(s-2)(s+2)\dots(s-m)|$$

$$\leq \frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{3}{2}\,\frac{3}{2}\,\frac{5}{2}\,\frac{5}{2}\dots\frac{2m-1}{2} = \kappa_m\,\frac{1}{2}\,\frac{2}{2}\,\frac{3}{2}\,\frac{4}{2}\,\frac{5}{2}\,\frac{6}{2}\dots\frac{2m}{2} = \kappa_m\,\frac{(k+1)!}{2^{k+1}}$$

met $\kappa_m \equiv \frac{1}{2}\,\frac{3}{4}\,\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2m-1}{2m}$

Introduceer $\widetilde{\kappa}_m \equiv \frac{2}{3}\,\frac{4}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{2m}{2m+1}$.

Dan $\kappa_m^2 \leq \kappa_m\widetilde{\kappa}_m = \frac{1}{2m+1} = \frac{1}{k+2} \leq \frac{1}{k+1}$

$$\pi(x) \equiv (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_k)$$

Equidistant. $h > 0$, $x_j = t_0 + jh$ voor $j = 0, 1, \dots, k$.

Voor x in het middelste interval.

$k = 2m - 1$ oneven, $x = t_m + sh$ met $s \in (0, 1)$

$$|\pi(x)|/h^{k+1} = |s(s-1)(s+1)(s-2)(s+2)\dots(s-m)|$$

$$\le \tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\,\tfrac{3}{2}\,\tfrac{3}{2}\,\tfrac{5}{2}\,\tfrac{5}{2}\dots\tfrac{2m-1}{2} = \kappa_m\,\tfrac{1}{2}\,\tfrac{2}{2}\,\tfrac{3}{2}\,\tfrac{4}{2}\,\tfrac{5}{2}\,\tfrac{6}{2}\dots\tfrac{2m}{2} = \kappa_m\,\tfrac{(k+1)!}{2^{k+1}}$$

met $\kappa_m \equiv \frac{1}{2}\,\frac{3}{4}\,\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2m-1}{2m}$

Introduceer $\widetilde{\kappa}_m \equiv \frac{2}{3}\,\frac{4}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{2m}{2m+1}$.

Dan $\kappa_m^2 \le \kappa_m\widetilde{\kappa}_m = \frac{1}{2m+1} = \frac{1}{k+2} \le \frac{1}{k+1}$

en $\kappa_m^2 \ge \frac{1}{2}\kappa_m\widetilde{\kappa}_{m-1} = \frac{1}{2(k+1)}$.

$$\pi(x) \equiv (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_k)$$

Equidistant. $h>0$, $x_j = t_0 + jh$ voor $j = 0, 1, \dots, k$.

Voor x in het middelste interval.

$k = 2m-1$ oneven, $x = t_m + sh$ met $s \in (0,1)$

$$|\pi(x)|/h^{k+1} = |s(s-1)(s+1)(s-2)(s+2)\dots(s-m)|$$

$$\leq \tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\,\tfrac{3}{2}\,\tfrac{3}{2}\,\tfrac{5}{2}\,\tfrac{5}{2}\dots\tfrac{2m-1}{2} = \kappa_m\,\tfrac{1}{2}\,\tfrac{2}{2}\,\tfrac{3}{2}\,\tfrac{4}{2}\,\tfrac{5}{2}\,\tfrac{6}{2}\dots\tfrac{2m}{2} = \kappa_m\,\frac{(k+1)!}{2^{k+1}}$$

met $\kappa_m \equiv \frac{1}{2}\,\frac{3}{4}\,\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2m-1}{2m}$

Introduceer $\widetilde{\kappa}_m \equiv \frac{2}{3}\,\frac{4}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{2m}{2m+1}$.

Dan $\kappa_m^2 \leq \kappa_m\widetilde{\kappa}_m = \frac{1}{2m+1} = \frac{1}{k+2} \leq \frac{1}{k+1}$

en $\kappa_m^2 \geq \frac{1}{2}\kappa_m\widetilde{\kappa}_{m-1} = \frac{1}{2(k+1)}$.

$$\boxed{\frac{(k+1)!}{\sqrt{2}\sqrt{k+1}}\left(\frac{h}{2}\right)^{k+1} \leq |\pi(x)| \leq \frac{(k+1)!}{\sqrt{k+1}}\left(\frac{h}{2}\right)^{k+1}}$$

$$\pi(x) \equiv (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_k)$$

Equidistant. $h > 0$, $x_j = t_0 + jh$ voor $j = 0, 1, \ldots, k$.

Voor x in het rand interval.

$k = 2m - 1$ oneven, $x = t_0 + sh$ met $s \in (0, 1)$

$$|\pi(x)|/h^{k+1} = |s(s-1)(s-2)(s-3)\ldots(s-k)|$$

$$\leq \tfrac{1}{4}|(s-2)(s-3)\ldots(s-k)| \leq \tfrac{1}{4}\, 2\, 3 \cdot \ldots \cdot k = \tfrac{k!}{4}$$

$$\geq \tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\,\tfrac{3}{2}\,\tfrac{5}{2}\,\tfrac{7}{2}\,\tfrac{9}{2}\ldots\tfrac{2k-1}{2} = \tfrac{1}{2}\,\kappa_k \tfrac{2}{2}\,\tfrac{4}{2}\,\tfrac{6}{2}\,\tfrac{8}{2}\,\tfrac{10}{2}\ldots\tfrac{2k}{2} = \tfrac{1}{2}\,\kappa_k\, k!$$

met $\kappa_k \equiv \tfrac{1}{2}\,\tfrac{3}{4}\,\tfrac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \tfrac{2k-1}{2k} \geq \tfrac{1}{2\sqrt{k}}$

$$\boxed{\frac{k!}{4\sqrt{k}}\, h^{k+1} \leq |\pi(x)| \leq \frac{k!}{4}\, h^{k+1}}$$

Verschil met x in het midden $\approx \frac{2^{k-1}}{\sqrt{k+1}}$; $k = 11 \quad \Rightarrow \approx 300$

Equidistant. $h > 0$, $x_j = t_0 + jh$ voor $j = 0, 1, \ldots, k$.

- Voor x in het '**middelste**' interval

$$|\text{fout}| \leq \frac{1}{\sqrt{k+1}} \left(\frac{h}{2}\right)^{k+1} |f^{(k+1)}(\xi)|$$

- Voor x in het '**rand**' interval

$$|\text{fout}| \leq \frac{1}{4(k+1)} h^{k+1} |f^{(k+1)}(\xi)|$$

Equidistant. $h > 0$, $x_j = t_0 + jh$ voor $j = 0, 1, \ldots, k$.

- Voor x in het '**middelste**' interval

$$|\text{fout}| \leq \frac{1}{\sqrt{k+1}}\,(\tfrac{h}{2})^{k+1}|f^{(k+1)}(\xi)|$$

- Voor x in het '**rand**' interval

$$|\text{fout}| \leq \frac{1}{4(k+1)}\,h^{k+1}\,|f^{(k+1)}(\xi)|$$

Voorbeeld. Op $[-1, 1]$, $t_0 = -1$, $h = 2/k$.

x '**middelste**' int. $\quad |\text{fout}| \leq \frac{1}{\sqrt{k+1}}\,(\frac{1}{k})^{k+1}\,|f^{(k+1)}(\xi)|,$

x '**rand**' interval $\quad |\text{fout}| \leq \frac{1}{4(k+1)}\,(\frac{2}{k})^{k+1}\,|f^{(k+1)}(\xi)|.$

$$\pi(x) \equiv (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_k)$$

Grotere dichtheid aan de rand: $x_j = \cos(\pi \frac{j+0.5}{k+1})$.

Voor x in $[-1, 1]$ geldt:

$$\pi(x) = 2^{-k} T_{k+1}(x) \equiv 2^{-k} \cos\left((k+1)\arccos(x)\right)$$

$$\pi(x) \equiv (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_k)$$

Grotere dichtheid aan de rand: $x_j = \cos(\pi\, \frac{j+0.5}{k+1})$.

Voor x in $[-1, 1]$ geldt:

$$\pi(x) = 2^{-k} T_{k+1}(x) \equiv 2^{-k} \cos\left((k+1)\arccos(x)\right)$$

$$|\pi(x)| \leq 2^{-k} \qquad (x \in [-1, +1])$$

$$\pi(x) \equiv (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_k)$$

Grotere dichtheid aan de rand: $x_j = \cos(\pi \frac{j+0.5}{k+1})$.

Voor x in $[-1, 1]$ geldt:

$$\pi(x) = 2^{-k} T_{k+1}(x) \equiv 2^{-k} \cos\left((k+1)\arccos(x)\right)$$

Bewijs. $\cos(\phi + \psi) + \cos(\phi - \psi) = 2\cos(\phi)\cos(\psi)$.

Met $\phi \equiv k \arccos(x)$ en $\psi \equiv \arccos(x)$, vinden we

$$T_{k+1}(x) = 2xT_k(x) - T_{k-1}(x),\ T_0(x) = 1,\ T_1(x) = x.$$

Inductie levert

$$T_{k+1}(x) = 2^k x^{k+1} + \text{lager graads termen}$$

Invullen toont aan dat $T_{k+1}(x_j) = 0$ voor $j = 0, \dots, k$.

Dus: π en $2^{-k} T_{k+1}$

- zijn beide van graad $k + 1$,
- hebben dezelfde nulpunten, en
- hebben beide leidende coëfficiënt 1

$$\Rightarrow \pi = T_{k+1}.$$

Equidistant. $h > 0$, $x_j = t_0 + jh$ voor $j = 0, 1, \ldots, k$.

- Voor x in het '**middelste**' interval

$$|\text{fout}| \leq \frac{1}{\sqrt{k+1}} \left(\frac{h}{2}\right)^{k+1} |f^{(k+1)}(\xi)|$$

- Voor x in het '**rand**' interval

$$|\text{fout}| \leq \frac{1}{4(k+1)} h^{k+1} \, |f^{(k+1)}(\xi)|$$

Voorbeeld. Op $[-1, 1]$, $t_0 = -1$, $h = 2/k$.

x '**middelste**' int. $\quad |\text{fout}| \leq \frac{1}{\sqrt{k+1}} \left(\frac{1}{k}\right)^{k+1} |f^{(k+1)}(\xi)|$,

x '**rand**' interval $\quad |\text{fout}| \leq \frac{1}{4(k+1)} \left(\frac{2}{k}\right)^{k+1} |f^{(k+1)}(\xi)|$.

Grotere dichtheid aan de rand: $x_j = \cos(\pi \, \frac{j+0.5}{k+1})$.

x in $[-1, 1]$: $\quad |\text{fout}| \leq \left(\frac{e}{2k}\right)^{k+1} |f^{(k+1)}(\xi)|$

Alles in het midden (Taylor): $x_0 = x_j = x_k$.

x in $[-1, 1]$: $\quad |\text{fout}| \lesssim \frac{1}{\sqrt{2\pi k}} \left(\frac{e}{k}\right)^{k+1} |f^{(k+1)}(\xi)|$

Equidistant. $h > 0$, $x_j = t_0 + jh$ voor $j = 0, 1, \ldots, k$.

- Voor x in het '**middelste**' interval

$$|\text{fout}| \leq \frac{1}{\sqrt{k+1}} \left(\frac{h}{2}\right)^{k+1} |f^{(k+1)}(\xi)|$$

- Voor x in het '**rand**' interval

$$|\text{fout}| \leq \frac{1}{4(k+1)} h^{k+1} |f^{(k+1)}(\xi)|$$

Voorbeeld. Op $[-1, 1]$, $t_0 = -1$, $h = 2/k$.

x '**middelste**' int. $\quad |\text{fout}| \leq \frac{1}{\sqrt{k+1}} \left(\frac{1}{k}\right)^{k+1} |f^{(k+1)}(\xi)|$,

x '**rand**' interval $\quad |\text{fout}| \leq \frac{1}{4(k+1)} \left(\frac{2}{k}\right)^{k+1} |f^{(k+1)}(\xi)|$.

Grotere dichtheid aan de rand: $x_j = \cos(\pi \, \frac{j+0.5}{k+1})$.

x in $[-1, 1]$: $\quad |\text{fout}| \leq \left(\frac{e}{2k}\right)^{k+1} |f^{(k+1)}(\xi)|$

Merk op $\quad 1 < \frac{e}{2} < 2 < e$.

Equidistant. $h > 0$, $x_j = t_0 + jh$ voor $j = 0, 1, \ldots, k$.

- Voor x in het '**middelste**' interval

$$|\text{fout}| \leq \frac{1}{\sqrt{k+1}} (\tfrac{h}{2})^{k+1} |f^{(k+1)}(\xi)|$$

- Voor x in het '**rand**' interval

$$|\text{fout}| \leq \frac{1}{4(k+1)} h^{k+1} |f^{(k+1)}(\xi)|$$

Voorbeeld. Op $[-1, 1]$, $t_0 = -1$, $h = 2/k$.

$f(x) \equiv e^x$ voor $x \in [-1, +1]$.

$\Rightarrow$ $$|f^{(k+1)}(\xi)| = e^{\xi} \leq e$$

Equidistant. $h > 0$, $x_j = t_0 + jh$ voor $j = 0, 1, \ldots, k$.

- Voor x in het '**middelste**' interval

$$|\text{fout}| \leq \frac{1}{\sqrt{k+1}} \left(\frac{h}{2}\right)^{k+1} |f^{(k+1)}(\xi)|$$

- Voor x in het '**rand**' interval

$$|\text{fout}| \leq \frac{1}{4(k+1)} h^{k+1} |f^{(k+1)}(\xi)|$$

Voorbeeld. Op $[-1, 1]$, $t_0 = -1$, $h = 2/k$.

$f(x) \equiv \frac{1}{1+25x^2} = \frac{i}{2}\left(\frac{1}{i+5x} + \frac{1}{i-5x}\right)$ voor $x \in [-1, +1]$.

$$\Rightarrow \qquad f^{(k+1)}(\xi) = \frac{i}{2}\left(\frac{(-5)^{k+1}(k+1)!}{(i+5\xi)^{k+2}} + \ldots\right)$$

$$|f^{(k+1)}(\xi)| \leq 5^{k+1}(k+1)!$$

Equidistant. $h > 0$, $x_j = t_0 + jh$ voor $j = 0, 1, \ldots, k$.

- Voor x in het '**middelste**' interval

$$|\text{fout}| \leq \frac{1}{\sqrt{k+1}} \left(\frac{h}{2}\right)^{k+1} |f^{(k+1)}(\xi)|$$

- Voor x in het '**rand**' interval

$$|\text{fout}| \leq \frac{1}{4(k+1)}\, h^{k+1}\, |f^{(k+1)}(\xi)|$$

Voorbeeld. Op $[-1, 1]$, $t_0 = -1$, $h = 2/k$.
$f(x) \equiv \frac{1}{1+25x^2}$ voor $x \in [-1, +1]$.

$\Rightarrow$ $$|f^{(k+1)}(\xi)| \leq 5^{k+1}(k+1)!$$

Equidistant. $h > 0$, $x_j = t_0 + jh$ voor $j = 0, 1, \ldots, k$.

- Voor x in het '**middelste**' interval

$$|\text{fout}| \leq \frac{1}{\sqrt{k+1}} \left(\frac{h}{2}\right)^{k+1} |f^{(k+1)}(\xi)|$$

- Voor x in het '**rand**' interval

$$|\text{fout}| \leq \frac{1}{4(k+1)} h^{k+1} |f^{(k+1)}(\xi)|$$

Voorbeeld. Op $[-1, 1]$, $t_0 = -1$, $h = 2/k$.
$f(x) \equiv \frac{1}{1+25x^2}$ voor $x \in [-1, +1]$.

$$\Rightarrow \qquad |f^{(k+1)}(\xi)| \leq 5^{k+1}(k+1)!$$

x middelste interval: $|\text{fout}| \leq (\frac{5}{k})^{k+1}(k+1)!$

x rand interval: $|\text{fout}| \leq (\frac{10}{k})^{k+1}(k+1)!$