Utrecht, 9 december 2014

Numerieke Wiskunde

Gerard Sleijpen

Universiteit Utrecht

Department of Mathematics

http://www.staff.science.uu.nl/~sleij101/

Evaluatiefouten

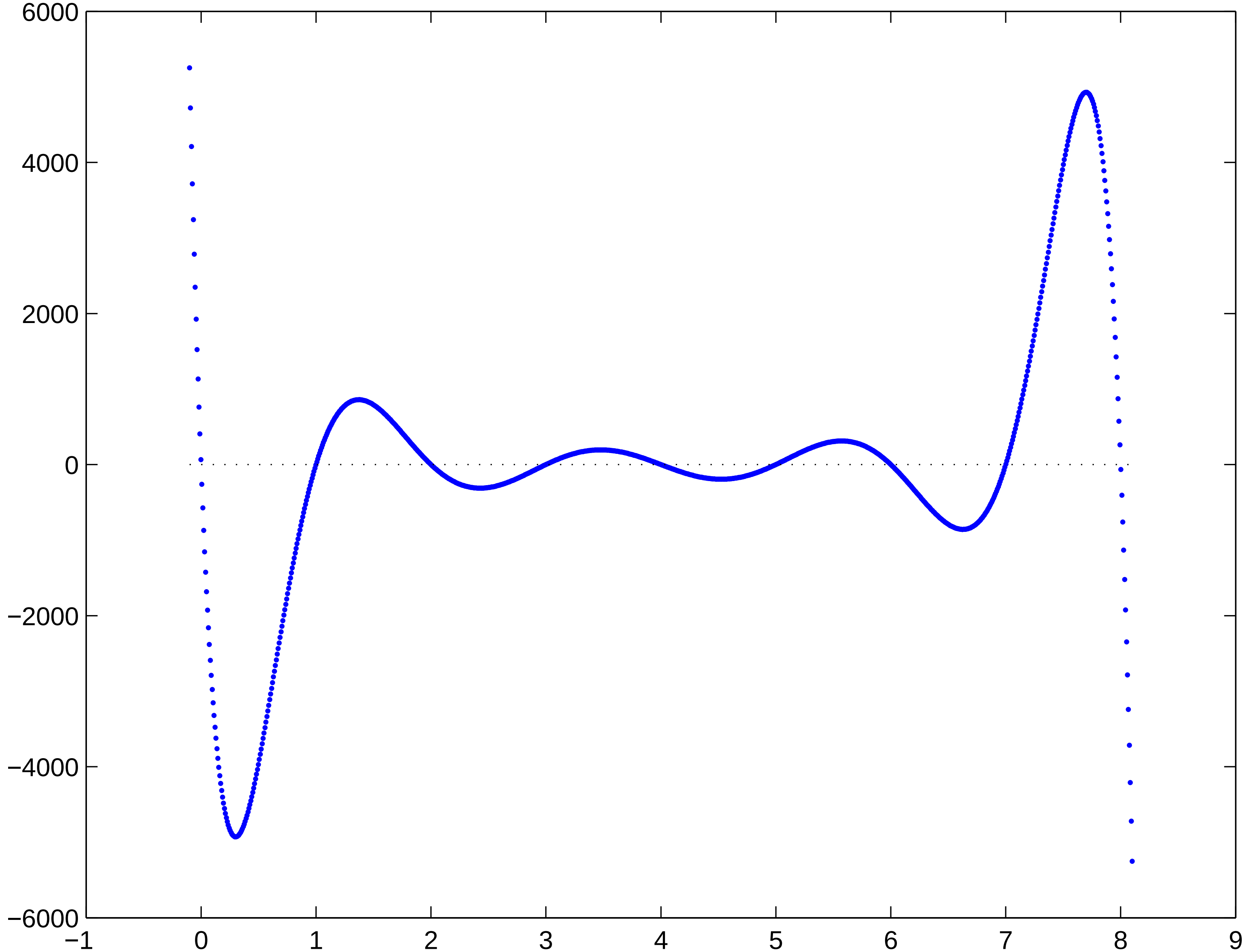
Voorbeeld. Beschouw $f(x) \equiv -x(x-1)(x-2)\cdot\ldots\cdot(x-8)$.
Hoe groot is de evaluatie fout in $f(7)$?

Schrijf uit als machten van x:

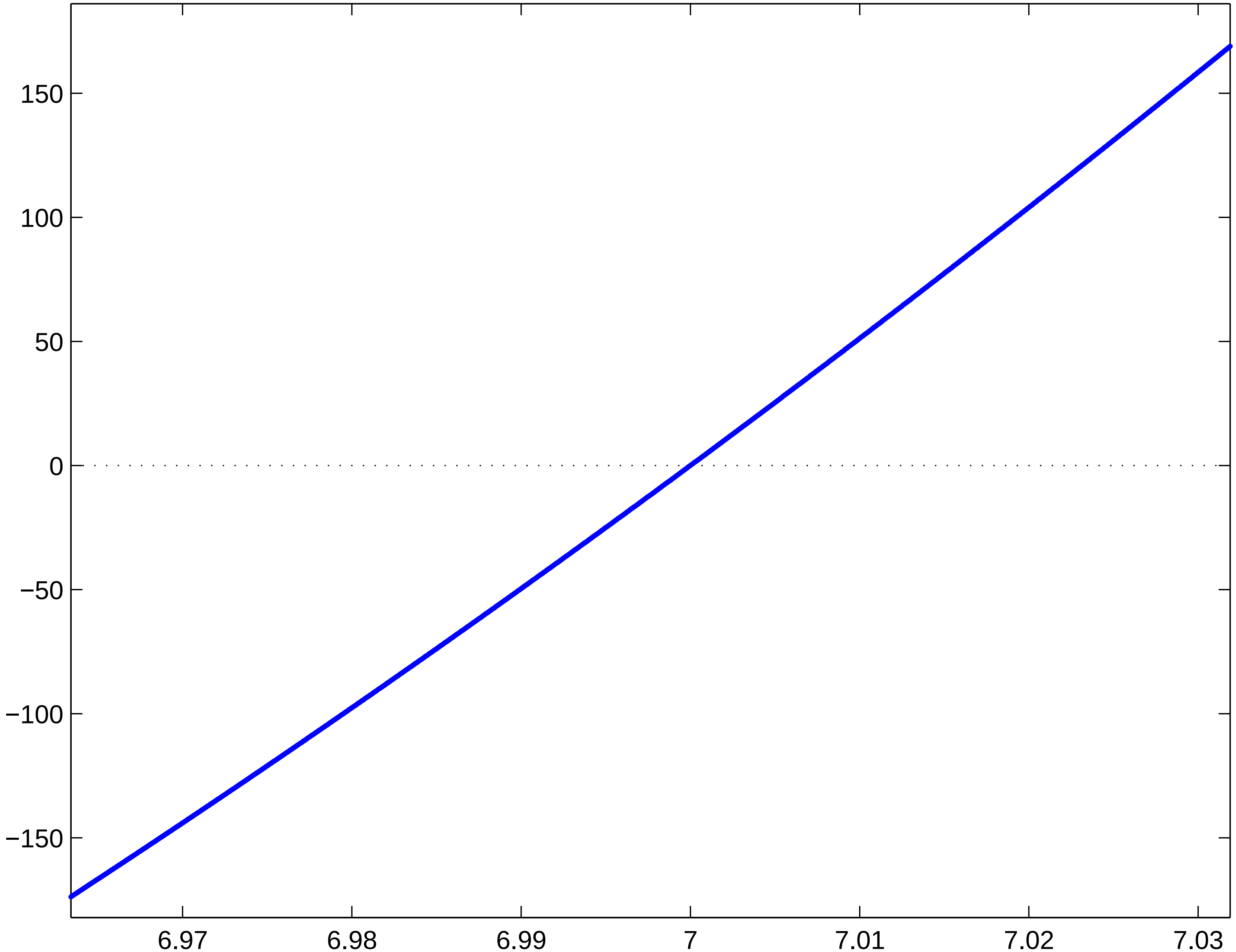
$$f(x) = a_1 x^9 + a_2 x^8 + a_3 x^7 + \ldots + a_9 x + a_{10},$$

waarbij $a = [-1, 36, -546, 4536, -22449, 67284, -118124, 109584, -40320, 0]$.

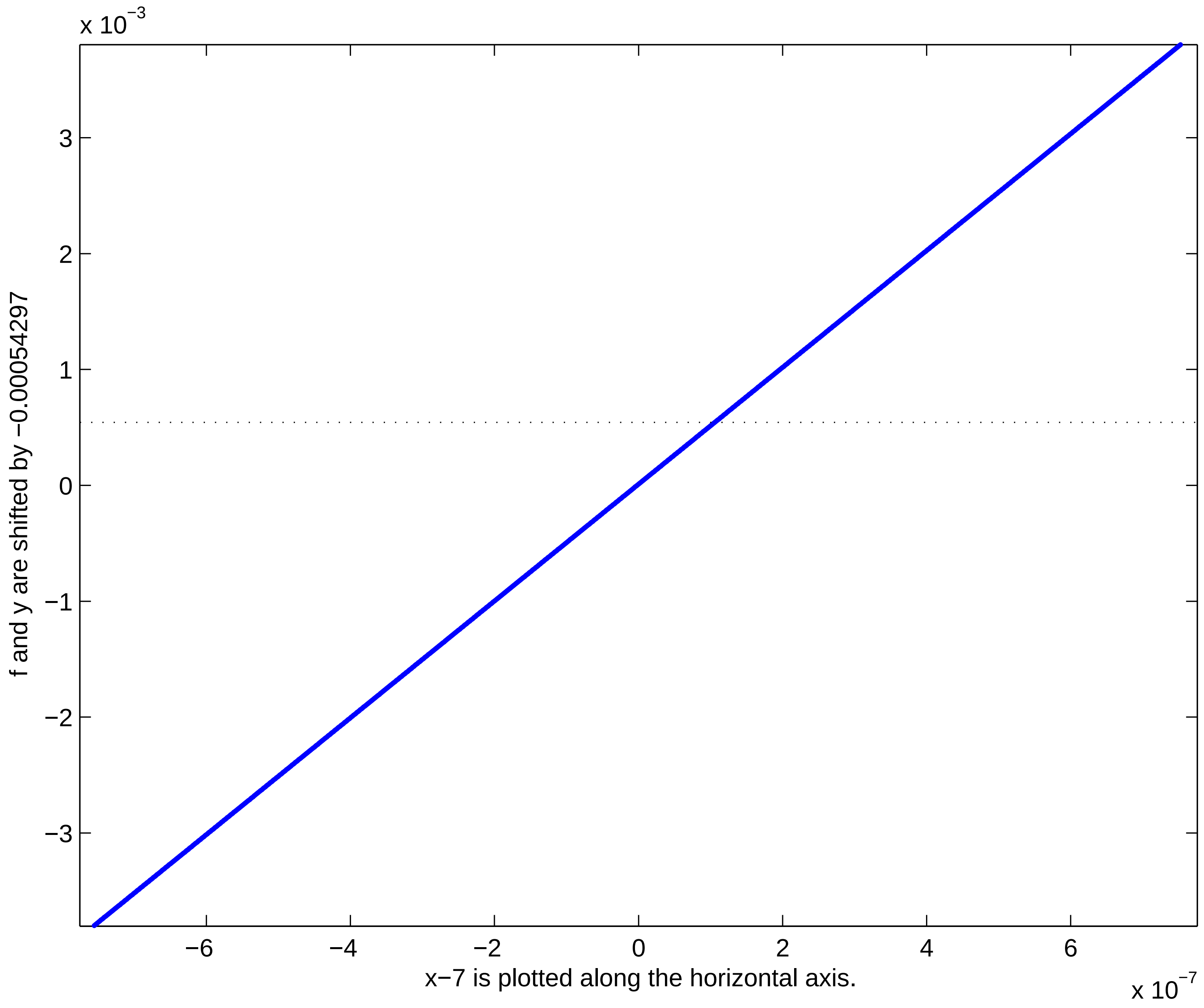
We zoomen in rond $x = 7$

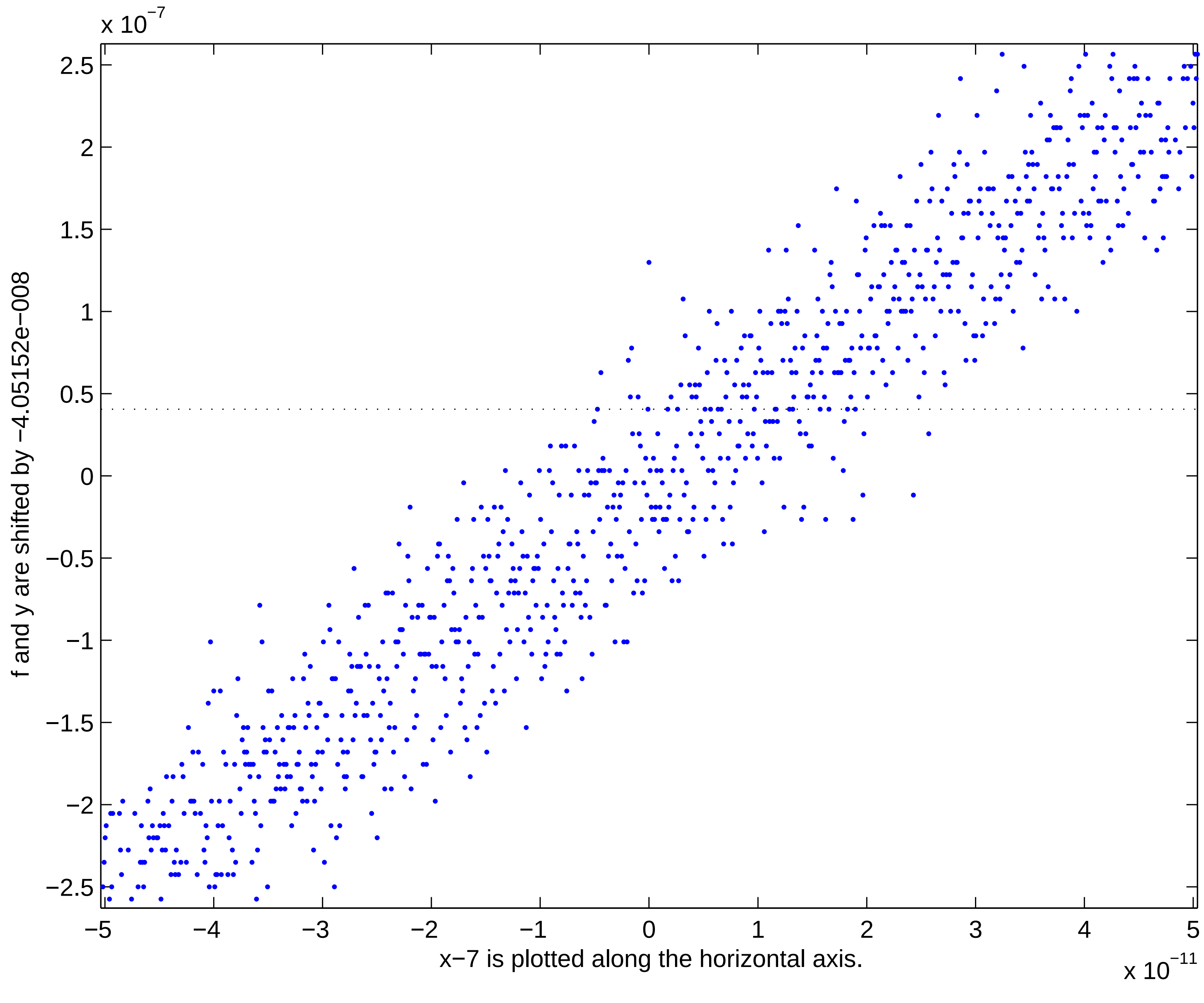


Graph of the function 'pol8' (blue) and of y=0 (black :).



Graph of the function 'pol8' (blue) and of y=0 (black :).


x 10^−3
3
2
1
0
−1
−2
−3
f and y are shifted by −0.00054297
−6
−4
−2
0
2
4
6
x−7 is plotted along the horizontal axis.
x 10^−7



x 10^−7
2.5
2
1.5
1
0.5
0
−0.5
−1
−1.5
−2
−2.5
f and y are shifted by −4.05152e−008
−5
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4
5
x−7 is plotted along the horizontal axis.
x 10^−11

Evaluatiefouten

Voorbeeld. Beschouw $f(x) \equiv -x(x-1)(x-2)\cdot\ldots\cdot(x-8)$.
Hoe groot is de evaluatie fout in $f(7)$?

Schrijf uit als machten van x:

$$f(x) = a_1 x^9 + a_2 x^8 + a_3 x^7 + \ldots + a_9 x + a_{10},$$

waarbij $a = [-1, 36, -546, 4536, -22449, 67284, -118124, 109584, -40320, 0]$.

We zoomen in rond $x = 7$

Evalueren van f in x levert $f(x) + \xi g(x)$
met $g(x) = 18|a_1||x|^9 + 17|a_2||x|^8 + \ldots + 3|a_9||x| + |a_{10}|$.
In $x = 7$ is $g(x) = 2.4\,10^{10}$.

Evaluatiefouten

Voorbeeld. Beschouw $f(x) \equiv -x(x-1)(x-2)\cdot\ldots\cdot(x-8)$.
Hoe groot is de evaluatie fout in $f(7)$?

Schrijf uit als machten van x:

$$f(x) = a_1x^9 + a_2x^8 + a_3x^7 + \ldots + a_9x + a_{10},$$

waarbij $a = [-1, 36, -546, 4536, -22449, 67284, -118124, 109584, -40320, 0]$.

We zoomen in rond $x = 7$

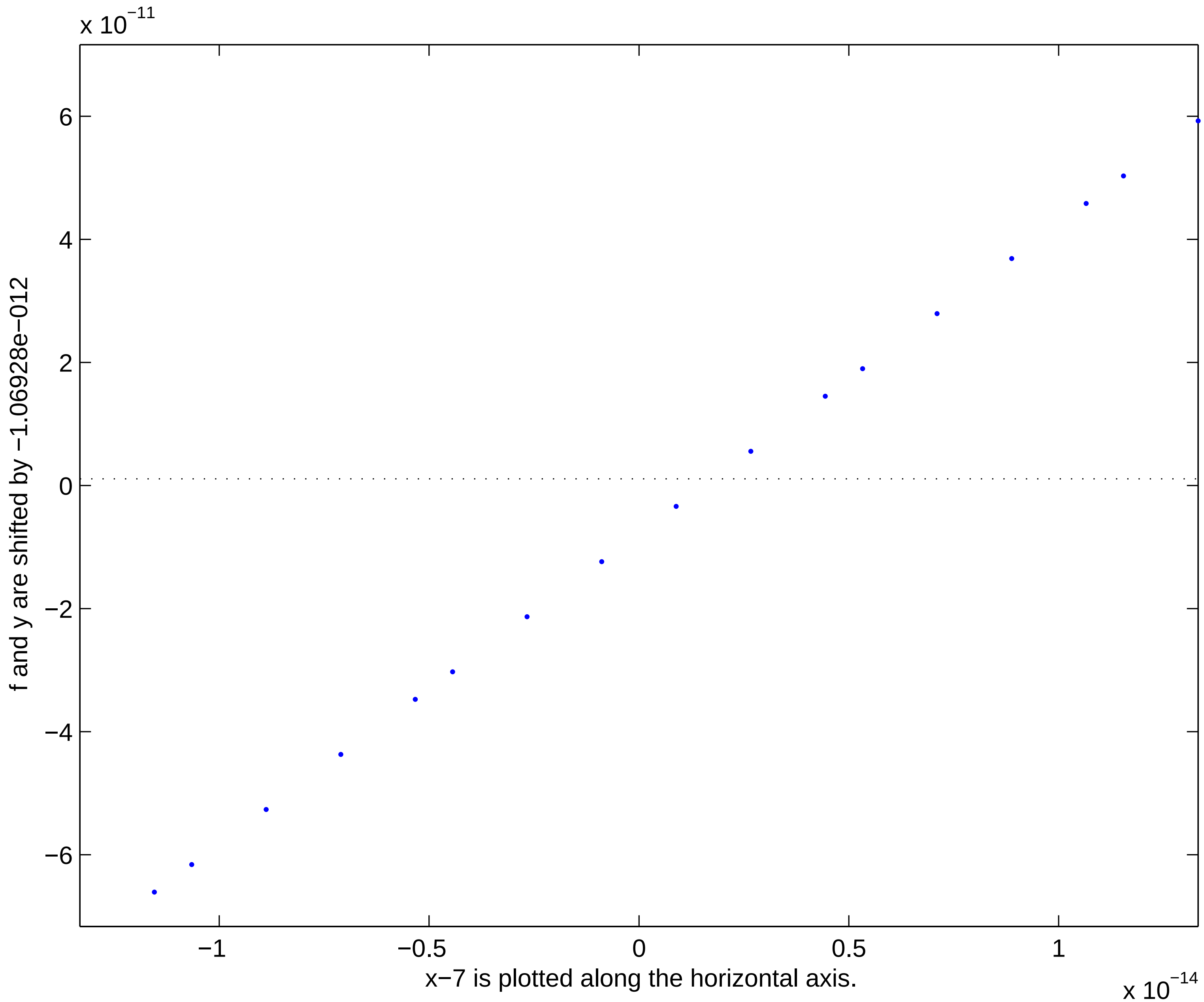
Evalueren van f in x levert $f(x) + \xi g(x)$

met $g(x) = 18|a_1||x|^9 + 17|a_2||x|^8 + \ldots + 3|a_9||x| + |a_{10}|$.

In $x = 7$ is $g(x) = 2.4\,10^{10}$.

Andere manier van evalueren: volgens

$$f(x) \equiv -x(x-1)(x-2)\cdot\ldots\cdot(x-8).$$


x 10^−11
6
4
2
0
−2
−4
−6
f and y are shifted by −1.06928e−012
−1
−0.5
0
0.5
1
x−7 is plotted along the horizontal axis.
x 10^−14

Approximatiefouten

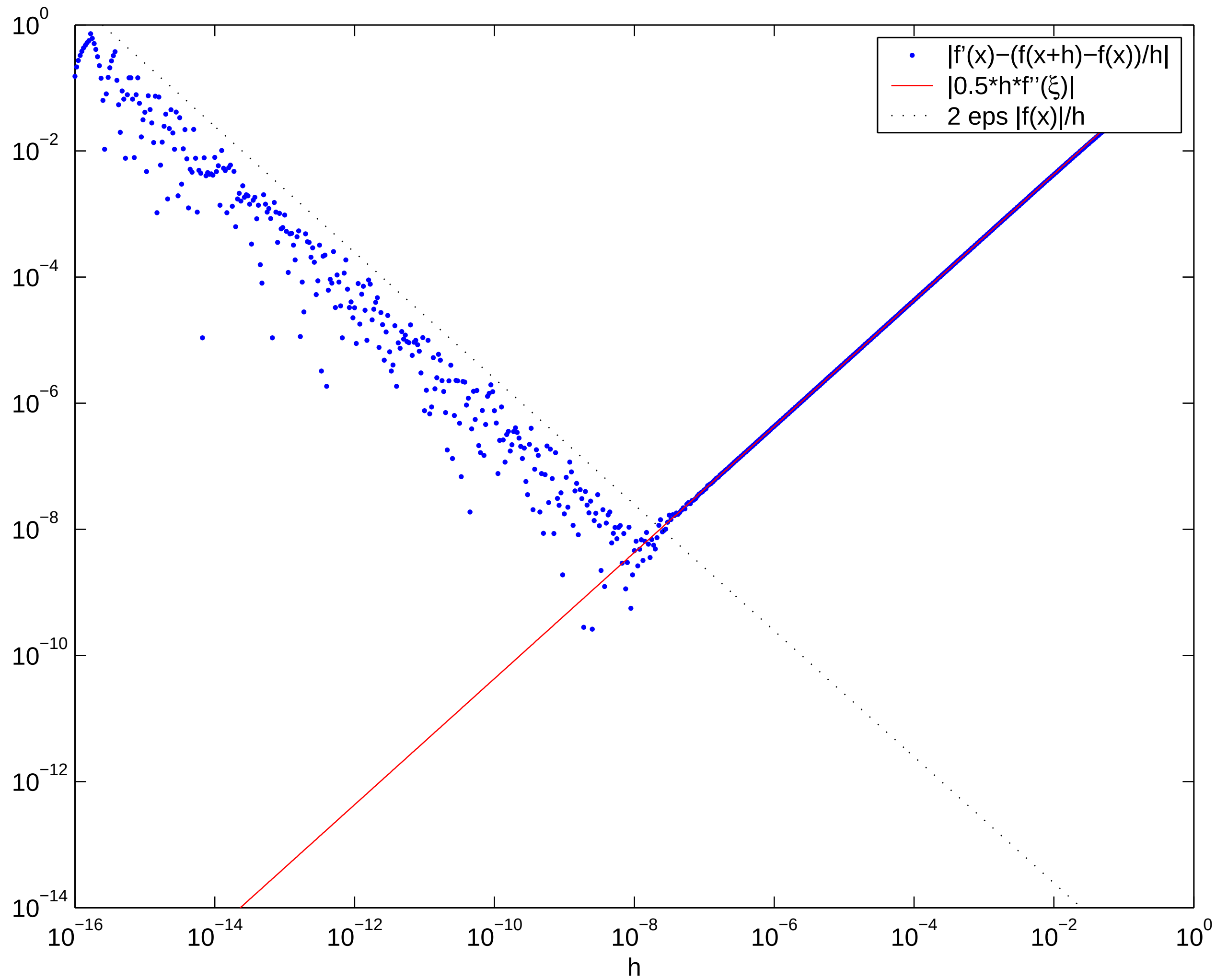
Approximatiefouten (ook wel benaderingsfouten genoemd) hebben een structuur. Die kan je uitbuiten.

Voorbeeld. Als f voldoende glad is, dan zijn er c_i zodat

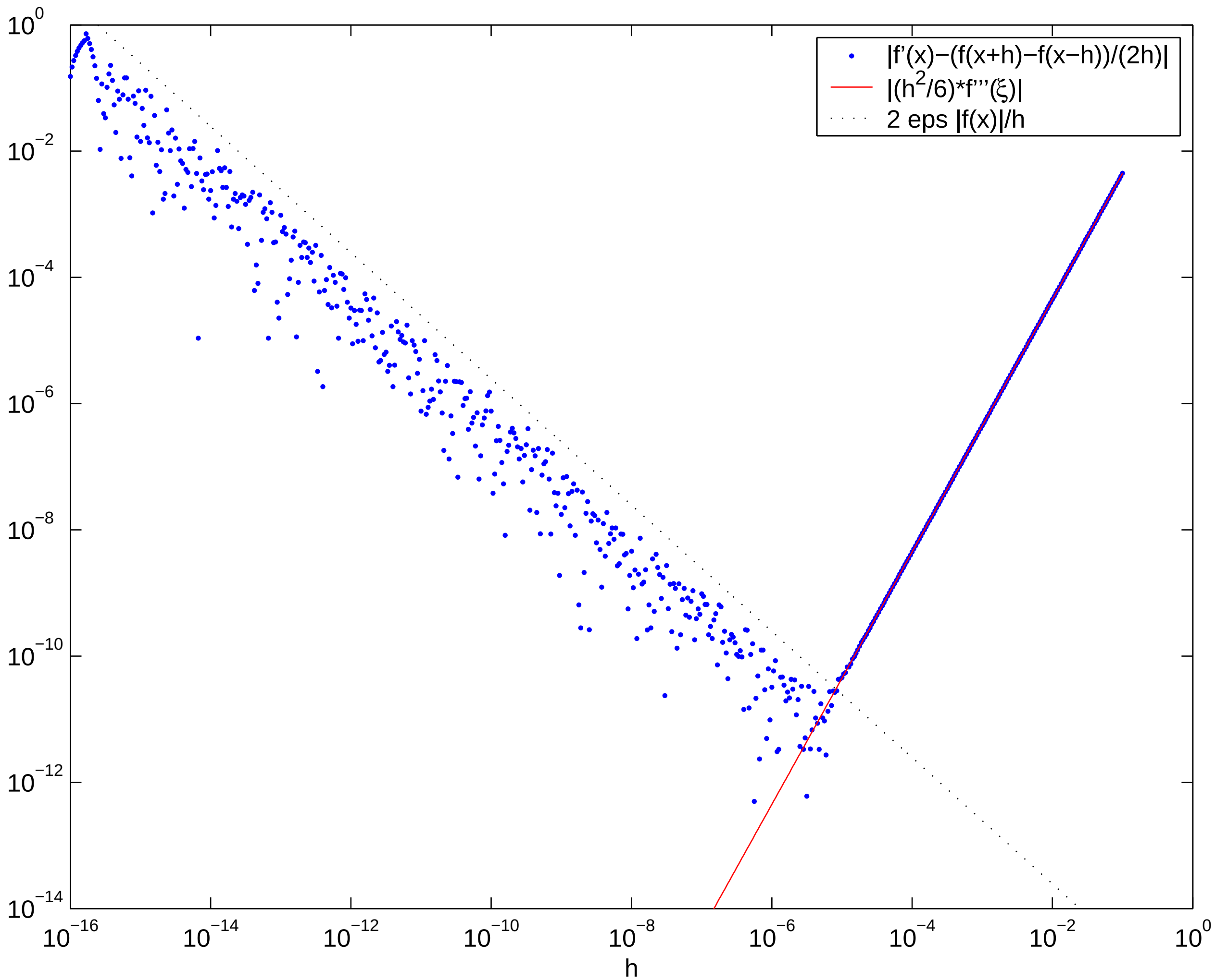
$$f'(x) - D_h(f)(x) = c_1 h + c_2 h^2 + c_3 h^3 + \ldots \quad \text{voor} \quad h \to 0.$$

Hierbij is

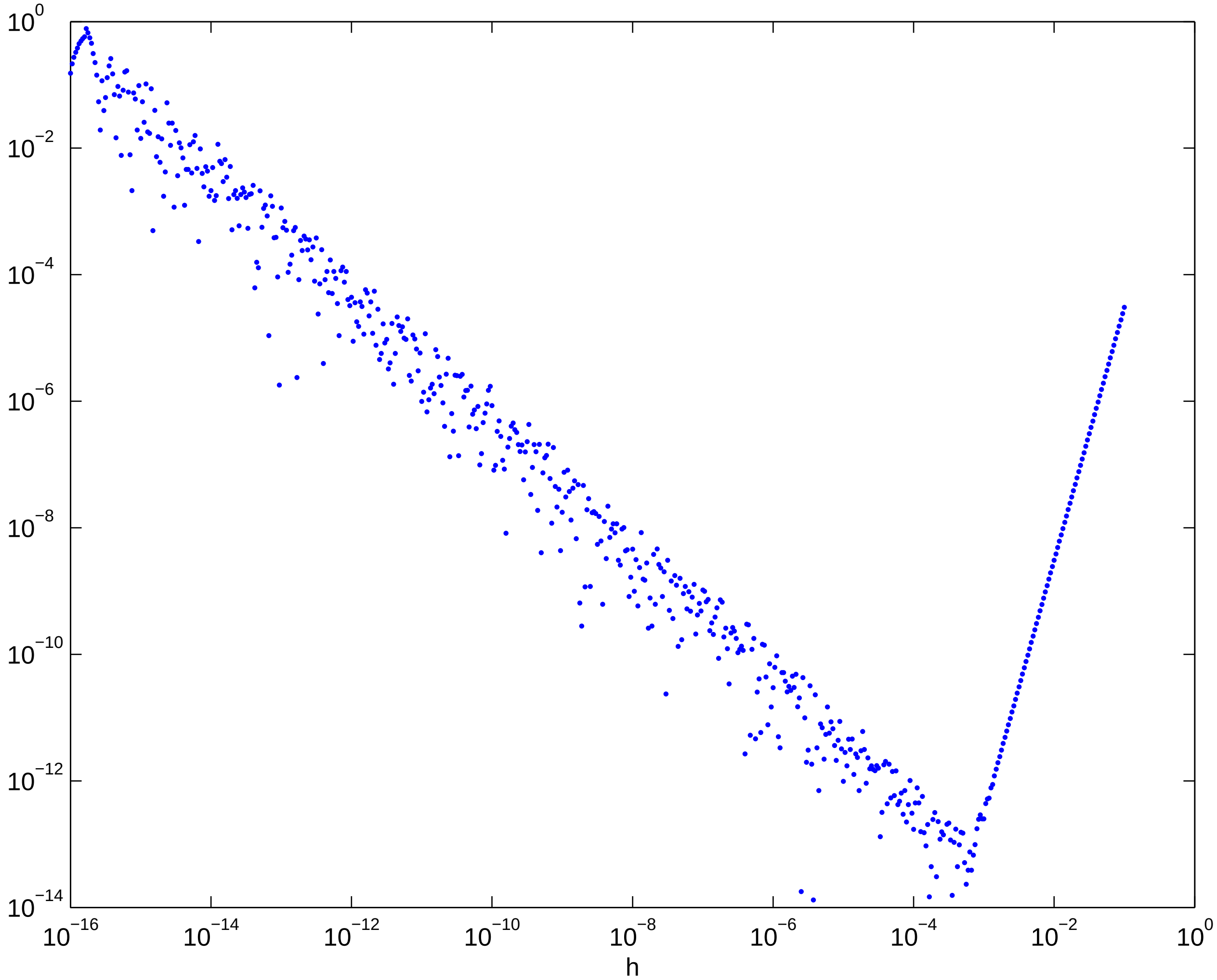
$$D_h(f)(x) \equiv \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \text{voor} \quad h > 0$$



|f'(x)−(f(x+h)−f(x))/h|
|0.5*h*f''(ξ)|
2 eps |f(x)|/h
10^0
10^−2
10^−4
10^−6
10^−8
10^−10
10^−12
10^−14
10^−16
h



10^{0}
10^{-2}
10^{-4}
10^{-6}
10^{-8}
10^{-10}
10^{-12}
10^{-14}
10^{-16}
10^{-14}
10^{-12}
10^{-10}
10^{-8}
10^{-6}
10^{-4}
10^{-2}
10^{0}
h
|f'(x)−(f(x+h)−f(x−h))/(2h)|
|(h^2/6)*f'''(ξ)|
2 eps |f(x)|/h



10^{0}
10^{-2}
10^{-4}
10^{-6}
10^{-8}
10^{-10}
10^{-12}
10^{-14}
10^{-16}
10^{-14}
10^{-12}
10^{-10}
10^{-8}
10^{-6}
10^{-4}
10^{-2}
10^{0}
h

Differentieer f in x met stapgrootte $h, \frac{1}{2}h, \frac{1}{4}h, \ldots$

1.26289613	1.26246670	1.26246715
1.26268175	1.26246704	1.26246715
1.26257448	1.26246712	1.26246715
1.26252082	1.26246714	1.26246715
1.26249399	1.26246715	1.26246715

Differentieer f in x met stapgrootte $h, \frac{1}{2}h, \frac{1}{4}h, \ldots$

1.26289613	1.26246670	1.26246715
1.26268175	1.26246704	1.26246715
1.26257448	1.26246712	1.26246715
1.26252082	1.26246714	1.26246715
1.26249399	1.26246715	1.26246715

-0.0002144	3.346e-007	1.434e-013
-0.0001073	8.365e-008	-7.394e-014
-5.366e-005	2.091e-008	4.07e-013
-2.683e-005	5.227e-009	-1.036e-012

Differentieer f in x met stapgrootte $h, \frac{1}{2}h, \frac{1}{4}h, \ldots$

1.26289613	1.26246670	1.26246715
1.26268175	1.26246704	1.26246715
1.26257448	1.26246712	1.26246715
1.26252082	1.26246714	1.26246715
1.26249399	1.26246715	1.26246715

-0.0002144	3.346e-007	1.434e-013
-0.0001073	8.365e-008	-7.394e-014
-5.366e-005	2.091e-008	4.07e-013
-2.683e-005	5.227e-009	-1.036e-012

1.998	4	-1.94
1.999	4	-0.1817
2	4.001	-0.3928

Als f voldoende glad

$$f'(x) - D_h(f)(x) = c_1 h + c_2 h^2 + c_3 h^3 + \ldots$$

Schrijf $I \equiv f'(x)$ en $D(h) = D_h(f)(x)$.

Als h 1) voldoende klein (zodat $c_2 h^2 \ll c_1 h$) en (∗)
2) niet te klein (rekenfouten spelen geen rol)

dan $I - D(h) \approx c_1 h$ en $\boxed{I - D(\tfrac{1}{2}h) \approx D(\tfrac{1}{2}h) - D(h)}$

Als f voldoende glad

$$f'(x) - D_h(f)(x) = c_1 h + c_2 h^2 + c_3 h^3 + \ldots$$

Schrijf $I \equiv f'(x)$ en $D(h) = D_h(f)(x)$.

Als h 1) voldoende klein (zodat $c_2 h^2 \ll c_1 h$) en $(*)$
2) niet te klein (rekenfouten spelen geen rol)

dan $I - D(h) \approx c_1 h$ en $\boxed{I - D(\tfrac{1}{2}h) \approx D(\tfrac{1}{2}h) - D(h)}$

Dus $I \approx D(\frac{1}{2}h) + (D(\frac{1}{2}h) - D(h))$.

Is $\boxed{T(h) \equiv 2D(\tfrac{1}{2}h) - D(h)}$ beter dan $D(\frac{1}{2}h)$?

Als f voldoende glad

$$f'(x) - D_h(f)(x) = c_1 h + c_2 h^2 + c_3 h^3 + \dots$$

Schrijf $I \equiv f'(x)$ en $D(h) = D_h(f)(x)$.

Als h 1) voldoende klein (zodat $c_2 h^2 \ll c_1 h$) en (∗)
2) niet te klein (rekenfouten spelen geen rol)

dan $I - D(h) \approx c_1 h$ en $\boxed{I - D(\tfrac{1}{2}h) \approx D(\tfrac{1}{2}h) - D(h)}$

Dus $I \approx D(\tfrac{1}{2}h) + (D(\tfrac{1}{2}h) - D(h))$.

Is $\boxed{T(h) \equiv 2D(\tfrac{1}{2}h) - D(h)}$ beter dan $D(\tfrac{1}{2}h)$?

$$\begin{aligned} I - T(h) &= 2(I - D(\tfrac{1}{2}h)) - (I - D(h)) \\ &= 2(c_1 \tfrac{1}{2}h + c_2 \tfrac{1}{4}h^2 + \dots) - (c_1 h + c_2 h^2 + \dots) \\ &= -\tfrac{1}{2}c_2 h^2 - \tfrac{3}{4}c_3 h^3 - \dots = c_2' h^2 + c_3' h^3 + \dots \end{aligned}$$

Als f voldoende glad

$$f'(x) - D_h(f)(x) = c_1 h + c_2 h^2 + c_3 h^3 + \ldots$$

Schrijf $I \equiv f'(x)$ en $D(h) = D_h(f)(x)$.

Als h 1) voldoende klein (zodat $c_2 h^2 \ll c_1 h$) en $(*)$
2) niet te klein (rekenfouten spelen geen rol)

dan $I - D(h) \approx c_1 h$ en $\boxed{I - D(\tfrac{1}{2}h) \approx D(\tfrac{1}{2}h) - D(h)}$

$$\boxed{V(h) \equiv \frac{D(\frac{1}{2}h) - D(h)}{D(\frac{1}{4}h) - D(\frac{1}{2}h)} \approx 2}$$

$$V(h) = \frac{(I - D(h)) - (I - D(\frac{1}{2}h))}{(I - D(\frac{1}{2}h)) - (I - D(\frac{1}{4}h))} \approx \frac{c_1 h - c_1 \frac{1}{2} h}{c_1 \frac{1}{2} h - c_1 \frac{1}{4} h} = 2 \frac{1 - \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 2.$$

Als f voldoende glad

$$f'(x) - D_h(f)(x) = c_1 h + c_2 h^2 + c_3 h^3 + \dots$$

Schrijf $I \equiv f'(x)$ en $D(h) = D_h(f)(x)$.

Als h 1) voldoende klein (zodat $c_2 h^2 \ll c_1 h$) en $\qquad (*)$
2) niet te klein (rekenfouten spelen geen rol)

dan $I - D(h) \approx c_1 h$ en $\boxed{I - D(\tfrac{1}{2}h) \approx D(\tfrac{1}{2}h) - D(h)}$

$$\boxed{V(h) \equiv \frac{D(\frac{1}{2}h) - D(h)}{D(\frac{1}{4}h) - D(\frac{1}{2}h)} \approx 2}$$

Als $V(h) \approx 2$ (en $V(\tfrac{1}{2}h) \approx 2, \dots$)

dan hebben we er **vertrouwen** in dat $(*)$ geldt.

Approximatiefouten

Approximatiefouten (ook wel benaderingsfouten genoemd) hebben een structuur. Die kan je uitbuiten.

Voorbeeld. Stel voor $p, q \in \mathbb{N}$, $p < q$,

$$I - D(h) = ch^p + dh^q + \dots$$

voor 'n grootheid I en 'n benadering $D(h)$.

Voor verschillende $h > 0$ kunnen we $D(h)$ uit rekenen en die resultaten willen we gebruiken om I te bepalen.

Approximatiefouten

Approximatiefouten (ook wel benaderingsfouten genoemd) hebben een structuur. Die kan je uitbuiten.

Voorbeeld. Stel voor $p, q \in \mathbb{N}$, $p < q$,

$$I - D(h) = ch^p + dh^q + \ldots$$

voor 'n grootheid I en 'n benadering $D(h)$.

Opmerking. Ook bruikbaar als $D(h)$ niet voor alle $h > 0$ gedefinieerd is.

Voorbeeld. Met $h = \frac{1}{n}$, voor $n \in \mathbb{N}$, is $D(h)$ de omtrek van een n-zijdige regelmatige ingeschreven veelhoek van een cirkel met diameter 1. (Opgave 19).

Stel voor $p, q \in \mathbb{N}$, $\quad p < q$,

$$I - D(h) = ch^p + dh^q + \ldots$$

h voldoende klein: $I - D(h) \approx ch^p$, $I - D(\frac{1}{2}h) \approx (\frac{1}{2})^p ch^p$

$$\boxed{I - D(\tfrac{1}{2}h) \approx \frac{1}{2^p - 1}\left[D(\tfrac{1}{2}h) - D(h)\right]}$$

Stel voor $p, q \in \mathbb{N}$, $\qquad p < q$,

$$I - D(h) = ch^p + dh^q + \dots$$

h voldoende klein: $I - D(h) \approx ch^p$, $I - D(\tfrac{1}{2}h) \approx (\tfrac{1}{2})^p ch^p$

$$\boxed{I - D(\tfrac{1}{2}h) \approx \frac{1}{2^p - 1}\left[D(\tfrac{1}{2}h) - D(h)\right]}$$

Dus $I \approx D(\tfrac{1}{2}h) + \frac{1}{2^p-1}[D(\tfrac{1}{2}h) - D(h)] = \frac{1}{2^p-1}\left[2^p D(\tfrac{1}{2}h) - D(h)\right]$.

Is $\boxed{T(h) \equiv \dfrac{1}{2^p - 1}\left[2^p D(\tfrac{1}{2}h) - D(h)\right]}$ beter dan $D(\tfrac{1}{2}h)$?

$$\begin{aligned}
I - T(h) &= \tfrac{1}{2^p-1}\left[2^p(I - D(\tfrac{1}{2}h)) - (I - D(h)\right] \\
&= \tfrac{1}{2^p-1}\left[\left(\frac{2^p}{2^q} - 1\right) h^q + \dots\right] \\
&= d'h^q + \dots
\end{aligned}$$

Stel voor $p, q \in \mathbb{N}$, $\qquad p < q$,

$$I - D(h) = ch^p + dh^q + \dots$$

h voldoende klein: $I - D(h) \approx ch^p$, $I - D(\frac{1}{2}h) \approx (\frac{1}{2})^p ch^p$

$$V(h) \equiv \frac{D(\frac{1}{2}h) - D(h)}{D(\frac{1}{4}h) - D(\frac{1}{2}h)} \approx \frac{ch^p - c(\frac{1}{2})^p h^p}{c(\frac{1}{2})^p h^p - c(\frac{1}{4})^p h^p} = 2^p$$

Als $V(h) \approx 2^p$ (en $V(\frac{1}{2}h) \approx 2^p$, ...)

dan vertrouwen we er op dat

- h voldoende klein is zo dat $|dh^q + \dots| \ll ch^p$,
- maar niet zo klein dat rekenfouten domineren.

$V(h)$ noemen we het **vertrouwensgetal**.

Stel voor $p, q \in \mathbb{R}$, $0 < p < q$,

$$I - D(h) = ch^p + dh^q + \dots$$

h voldoende klein: $I - D(h) \approx ch^p$, $I - D(\frac{1}{2}h) \approx (\frac{1}{2})^p ch^p$

$$V(h) \equiv \frac{D(\frac{1}{2}h) - D(h)}{D(\frac{1}{4}h) - D(\frac{1}{2}h)} \approx \frac{ch^p - c(\frac{1}{2})^p h^p}{c(\frac{1}{2})^p h^p - c(\frac{1}{4})^p h^p} = 2^p$$

Als $V(h) \approx 2^p$ (en $V(\frac{1}{2}h) \approx 2^p$, ...)

dan vertrouwen we er op dat

- h voldoende klein is zo dat $|dh^q + \dots| \ll ch^p$,
- maar niet zo klein dat rekenfouten domineren.

$V(h)$ noemen we het **vertrouwensgetal**.

Stel voor $p, q \in \mathbb{N}$, $\quad p < q$,

$$I - D(h) = ch^p + dh^q + \dots$$

h voldoende klein: $I - D(h) \approx ch^p$, $I - D(\frac{1}{2}h) \approx (\frac{1}{2})^p ch^p$

$$V(h) \equiv \frac{D(\frac{1}{2}h) - D(h)}{D(\frac{1}{4}h) - D(\frac{1}{2}h)} \approx \frac{ch^p - c(\frac{1}{2})^p h^p}{c(\frac{1}{2})^p h^p - c(\frac{1}{4})^p h^p} = 2^p$$

Als $V(h) \approx 2^p$ (en $V(\frac{1}{2}h) \approx 2^p$, $\dots$)

dan vertrouwen we er op dat

- h voldoende klein is zo dat $|dh^q + \dots| \ll ch^p$,
- maar niet zo klein dat rekenfouten domineren.

$V(h)$ noemen we het **vertrouwensgetal**.

Recursief toepassen (vervang $D(h)$ door $T(h)$, etc,.) leidt tot het **Romberg schema:**

Romberg schema

$$
\begin{array}{ccccccc}
h - D(h) & & & & & & \\
 & \diagdown & & & & & \\
 & & T_1(h) & & & & \\
 & \diagup & & \diagdown & & & \\
\frac{1}{2}h - D(\frac{1}{2}h) & & & & T_2(h) & & \\
 & \diagdown & & \diagup & & \diagdown & \\
 & & T_1(\frac{1}{2}h) & & & & T_3(h) \\
 & \diagup & & \diagdown & & \diagup & \\
\frac{1}{4}h - D(\frac{1}{4}h) & & & & T_2(\frac{1}{2}h) & & \\
 & \diagdown & & \diagup & & & \\
 & & T_1(\frac{1}{4}h) & & & & \\
 & \diagup & & & & & \\
\frac{1}{8}h - D(\frac{1}{8}h) & & & & & &
\end{array}
$$

Als in j-de kolom fout evenredig h^p (bereken de $V_j(h)$) dan

- schat fout $I - T_j(\frac{1}{2}h)$ volgens $\boxed{\dfrac{1}{2^p - 1}\left[T_j(\tfrac{1}{2}h) - T_j(h)\right]}$

- corrigeer volgens $\boxed{T_{j+1}(h) = \dfrac{1}{2^p - 1}\left[2^p T_j(\tfrac{1}{2}h) - T_j(h)\right]}$

Romberg schema

$$
\begin{array}{llll}
h - D(h) & & & \\
 & T_1(h) & & \\
\frac{1}{2}h - D(\frac{1}{2}h) & & T_2(h) & \\
 & T_1(\frac{1}{2}h) & & T_3(h) \\
\frac{1}{4}h - D(\frac{1}{4}h) & & T_2(\frac{1}{2}h) & \\
 & T_1(\frac{1}{4}h) & & \\
\frac{1}{8}h - D(\frac{1}{8}h) & & &
\end{array}
$$

Als $\quad I - D(h) = c_1 h + c_2 h^2 + c_3 h^3 + \ldots \quad (c_j \neq 0 \quad \forall j)$

- schat fout $I - T_j(\frac{1}{2}h)$ volgens $\boxed{\dfrac{1}{2^j - 1}\left[T_j(\tfrac{1}{2}h) - T_j(h)\right]}$

- corrigeer volgens $\boxed{T_{j+1}(h) = \dfrac{1}{2^j - 1}\left[2^j T_j(\tfrac{1}{2}h) - T_j(h)\right]}$

dan in j-de kolom de fout evenredig h^j (bereken de $V_j(h)$)

Romberg schema

$$
\begin{array}{llll}
h - D(h) & & & \\
 & T_1(h) & & \\
\frac{1}{2}h - D(\frac{1}{2}h) & & T_2(h) & \\
 & T_1(\frac{1}{2}h) & & T_3(h) \\
\frac{1}{4}h - D(\frac{1}{4}h) & & T_2(\frac{1}{2}h) & \\
 & T_1(\frac{1}{4}h) & & \\
\frac{1}{8}h - D(\frac{1}{8}h) & & &
\end{array}
$$

Als $\quad I - D(h) = c_2 h^2 + c_4 h^4 + c_6 h^6 + \ldots \qquad (c_{2j} \neq 0 \quad \forall j)$

- schat fout $I - T_j(\frac{1}{2}h)$ volgens $\boxed{\dfrac{1}{4^j - 1}\left[T_j(\tfrac{1}{2}h) - T_j(h)\right]}$

- corrigeer volgens $\boxed{T_{j+1}(h) = \dfrac{1}{4^j - 1}\left[4^j T_j(\tfrac{1}{2}h) - T_j(h)\right]}$

dan in j-de kolom de fout evenredig h^{2j} (bereken de $V_j(h)$)

Romberg schema

Romberg schema is een interpolatie schema.

Ter herinnering. Als p_0 f interpoleert op (x_0, x_1, x_2)

p_1 f interpoleert op (x_1, x_2, x_3)

dan interpoleert p gedefinieerd door

$$p(x) \equiv \frac{x - x_3}{x_0 - x_3} p_0(x) + \frac{x - x_0}{x_3 - x_0} p_1(x)$$

f op (x_0, x_1, x_2, x_3): $\qquad p(x) \approx f(x)$.

Romberg schema

Romberg schema is een interpolatie schema.

$h_0 > h_1 > h_2 > h_3 > 0$

Ter herinnering. Als p_0 $D(h)$ interpoleert op (h_0, h_1, h_2)

p_1 $D(h)$ interpoleert op (h_1, h_2, h_3)

dan interpoleert p gedefinieerd door

$$p(x) \equiv \frac{x - h_3}{h_0 - h_3} p_0(x) + \frac{x - h_0}{h_3 - h_0} p_1(x)$$

D op (h_0, h_1, h_2, h_3): $\quad p(h) \approx D(h)$.

In het bijzonder, $\quad p(0) \approx D(0) = I$.

Merk op dat we hier willen **extrapoleren**:

immers 0 ligt niet tussen h_0, h_1, h_2, h_3.

Romberg schema

Romberg schema is een interpolatie schema.

$$h_0 > h_1 > h_2 > h_3 > 0$$

Ter herinnering. Als p_0 $D(h)$ interpoleert op (h_0, h_1, h_2)

p_1 $D(h)$ interpoleert op (h_1, h_2, h_3)

dan interpoleert p gedefinieerd door

$$p(x) \equiv \frac{x - h_3}{h_0 - h_3} p_0(x) + \frac{x - h_0}{h_3 - h_0} p_1(x)$$

D op (h_0, h_1, h_2, h_3) en

$$\begin{aligned} p(0) &= \frac{-h_3}{h_0 - h_3} p_0(0) + \frac{-h_0}{h_3 - h_0} p_1(0) \\ &= \frac{1}{h_0 - h_3} [h_0 p_1(0) - h_3 p_0(0)] \end{aligned}$$

Romberg schema

Romberg schema is een interpolatie schema.

$h_0 > h_1 > h_2 > h_3 > 0$

Ter herinnering. Als p_0 $D(h)$ interpoleert op (h_0, h_1, h_2)

p_1 $D(h)$ interpoleert op (h_1, h_2, h_3)

dan interpoleert p gedefinieerd door

$$p(x) \equiv \frac{x - h_3}{h_0 - h_3} p_0(x) + \frac{x - h_0}{h_3 - h_0} p_1(x)$$

D op (h_0, h_1, h_2, h_3) en

$$\begin{aligned} p(0) &= \frac{-h_3}{h_0 - h_3} p_0(0) + \frac{-h_0}{h_3 - h_0} p_1(0) \\ &= \frac{1}{h_0 - h_3} \left[h_0 p_1(0) - h_3 p_0(0) \right] \end{aligned}$$

Fout: $I - p(0) = (-h_0)(-h_1)(-h_2)(-h_3) \frac{1}{4!} D^{(4)}(\xi)$

Romberg schema

Als $\quad I - D(h) = c_1 h \; + c_2 h^2 + c_3 h^3 + \ldots$

$$
\begin{array}{ccccccc}
h_0 - D(h_0) & & & & & & \\
 & \diagdown & & & & & \\
 & & T_{1,0} & & & & \\
 & \diagup & & \diagdown & & & \\
h_1 - D(h_1) & & & & T_{2,0} & & \\
 & \diagdown & & \diagup & & \diagdown & \\
 & & T_{1,1} & & & & T_{3,0} \\
 & \diagup & & \diagdown & & \diagup & \\
h_2 - D(h_2) & & & & T_{2,1} & & \\
 & \diagdown & & \diagup & & & \\
 & & T_{1,2} & & & & \\
 & \diagup & & & & & \\
h_3 - D(h_3) & & & & & &
\end{array}
$$

- schat fout $I - T_{j,1}$ volgens $\boxed{\dfrac{h_{j+1}}{h_0 - h_{j+1}} \left[T_{j,1} - T_{j,0} \right]}$

- corrigeer volgens $\boxed{T_{j+1,0} = \dfrac{1}{h_0 - h_{j+1}} \left[h_0 T_{j,1} - h_{j+1} T_{j,0} \right]}$

$$I - T_{j,0} = (-h_0)(-h_1)\ldots(-h_j)c_{j+1} + \mathcal{O}(h^{j+2})$$

Romberg schema

Als $\qquad I - D(h) = c_2 h^2 + c_4 h^4 + c_6 h^6 + \ldots$

$$
\begin{array}{ccccccc}
h_0 - D(h_0) & & & & & & \\
 & \searrow & & & & & \\
 & & T_{1,0} & & & & \\
 & \nearrow & & \searrow & & & \\
h_1 - D(h_1) & & & & T_{2,0} & & \\
 & \searrow & & \nearrow & & \searrow & \\
 & & T_{1,1} & & & & T_{3,0} \\
 & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & \\
h_2 - D(h_2) & & & & T_{2,1} & & \\
 & \searrow & & \nearrow & & & \\
 & & T_{1,2} & & & & \\
 & \nearrow & & & & & \\
h_3 - D(h_3) & & & & & &
\end{array}
$$

- schat fout $I - T_{j,1}$ volgens $\boxed{\dfrac{h_{j+1}^2}{h_0^2 - h_{j+1}^2}\left[T_{j,1} - T_{j,0}\right]}$
- corrigeer volgens $\boxed{T_{j+1,0} = \dfrac{1}{h_0^2 - h_{j+1}^2}\left[h_0^2 T_{j,1} - h_{j+1}^2 T_{j,0}\right]}$

$$I - T_{j,0} = (-h_0^2)(-h_1^2)\ldots(-h_j^2)c_{2j+2} + \mathcal{O}(h^{2j+2})$$

Romberg schema

Als $\quad I - D(h) = c_1 h^2 + c_2 h^4 + c_3 h^6 + \ldots$

Romberg schema

Als $\quad I - D(h) = c_1 h^2 + c_2 h^4 + c_3 h^6 + \dots$

dan interpoleer

$$\text{de functie } \widetilde{D}(h) \equiv c_1 h + c_2 h^2 + c_3 h^3 + \dots$$

op $h_0^2, h_1^2, \dots$

Dan $\widetilde{D}(h^2) = D(h)$ en op $\widetilde{D}(h)$ is het schema gebaseerd op $c_1 h + c_2 h^2 + \dots$ van toepassing.

Romberg schema

Als $\quad I - D(h) = c_1 h \; + c_2 h^2 + c_3 h^3 + \ldots$

$$
\begin{array}{ccccccc}
h_0 - D(h_0) & & & & & & \\
 & \searrow & T_{1,0} & & & & \\
h_1 - D(h_1) & \nearrow & & \searrow & T_{2,0} & & \\
 & \searrow & T_{1,1} & \nearrow & & \searrow & T_{3,0} \\
h_2 - D(h_2) & \nearrow & & \searrow & T_{2,1} & \nearrow & \\
 & \searrow & T_{1,2} & \nearrow & & & \\
h_3 - D(h_3) & \nearrow & & & & &
\end{array}
$$

- Hoe fout $I - T_{3,0}$ te schatten?

– Gebruik $I - T_{j,0} = (-h_0)(-h_1)\ldots(-h_j)c_{j+1} + \mathcal{O}(h^{j+2})$?

c_j is (gewoonlijk) onbekend. Grootte $\mathcal{O}(h^{j+2})$ onbekend.

– Voeg een rij vanuit een h_4 toe? Kan, maar is extra werk (en wellicht 'zit $T_{3,0}$ al in de afrondfouten')

Gewoonlijk $|I - T_{3,0}| \ll |I - T_{2,0}|$:

schat $|I - \mathrm{T}_{3,0}|$ door $|I - \mathrm{T}_{3,0}| \lesssim |T_{2,0} - T_{3,0}|$.

Romberg schema

Waarom andere rij h dan $h, \frac{1}{2}h, \frac{1}{4}h, \ldots$?

Voorbeeld. $h, \alpha h, \alpha^2 h, \alpha^3 h, \ldots$ met $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$.

Voordeel: Voor dezelfde minimale $\alpha^q h$ ($> \frac{1}{2}^p h$ voor $p < q$) verder in het Romberg schema $T_{q,0}$. Gewoonlijk is $T_{q,0}$ (met $h_j = \alpha^j h$) nauwkeuriger dan $T_{p,0}$ (met $h_j = \frac{1}{2}^p h$). Het even nauwkeurig resultaat $T_{p,\ell}$ vereist een kleinere $h_{j+\ell} = (\frac{1}{2})^{j+\ell} h$ en kan aanleiding geven tot grotere effecten van afrondfouten.

Romberg schema

Waarom andere rij h dan $h, \frac{1}{2}h, \frac{1}{4}h, \ldots$?

Voorbeeld. $h, \alpha h, \alpha^2 h, \alpha^3 h, \ldots$ met $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$.

Voordeel: Voor dezelfde minimale $\alpha^q h$ ($> \frac{1}{2}^p h$ voor $p < q$) verder in het Romberg schema $T_{q,0}$. Gewoonlijk is $T_{q,0}$ (met $h_j = \alpha^j h$) nauwkeuriger dan $T_{p,0}$ (met $h_j = \frac{1}{2}^p h$). Het even nauwkeurig resultaat $T_{p,\ell}$ vereist een kleinere $h_{j+\ell} = (\frac{1}{2})^{j+\ell} h$ en kan aanleiding geven tot grotere effecten van afrondfouten.

Voorbeeld. Bulirch rij $h, \frac{1}{2}h, \frac{1}{3}h, \frac{1}{4}h, \frac{1}{6}h, \ldots$

Voordeel: grotere efficiëntie bij numeriek integreren

Samenvatting

- Evaluatiefouten hebben **geen** duidelijke structuur.
  Een majorant kan relatief eenvoudig afgeleid worden.

- Approximatiefouten hebben een mooie structuur
  en die kan uitgebuit worden:
  - fouten kunnen ‘automatisch’ geschat worden
  - er kan ‘automatisch’ vastgesteld worden
    of deze schatting betrouwbaar is
  - benaderingen kunnen m.b.v. de geschatte fout
    gecorrigeerd worden
  - deze procedure kan recursief worden toegepast.