Utrecht, 2 december 2014

Numerieke Wiskunde

Gerard Sleijpen

Universiteit Utrecht
Department of Mathematics

http://www.staff.science.uu.nl/~sleij101/

Nauwkeurigheid

fout $\equiv$ ware waarde - verkregen waarde

Voorbeeld. $f'(x) - \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = -\frac{1}{2}hf''(\xi)$
voor zekere ξ tussen x en $x+h$

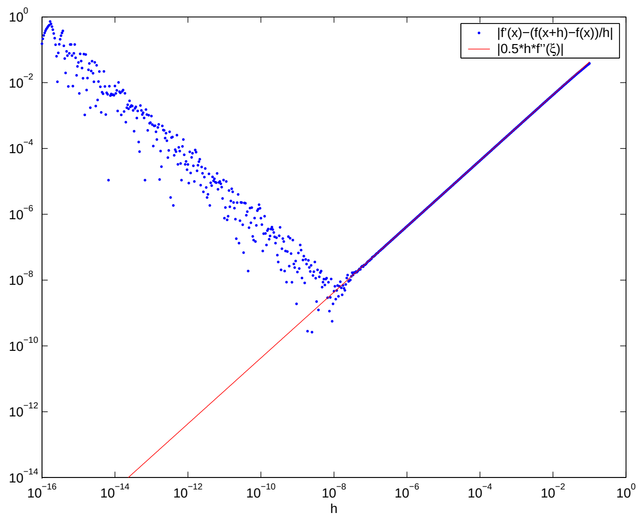
Getallenvoorbeeld. $f(x) = x\sin(x)$. Bereken $f'(\frac{\pi}{4})$.

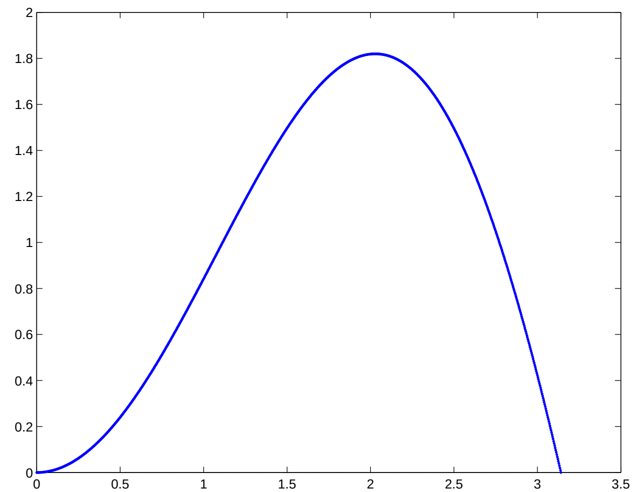
Analytisch: $f'(x) = \sin(x) + x\cos(x)$. $\quad (*)$

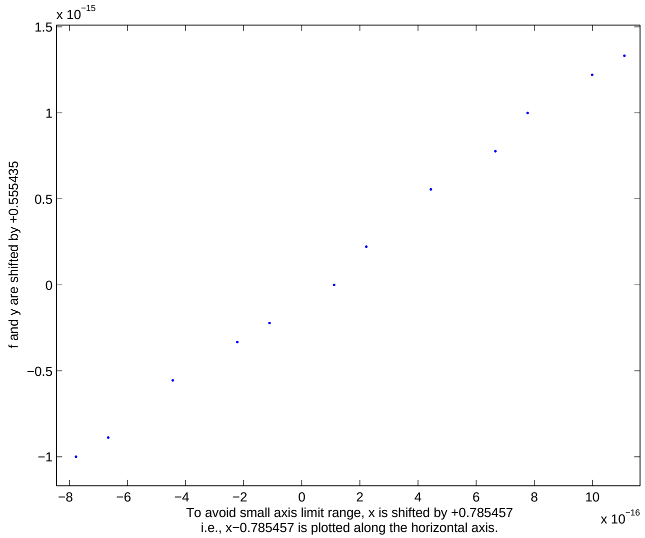
Numeriek: $D_h f(x) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. $\quad (**)$

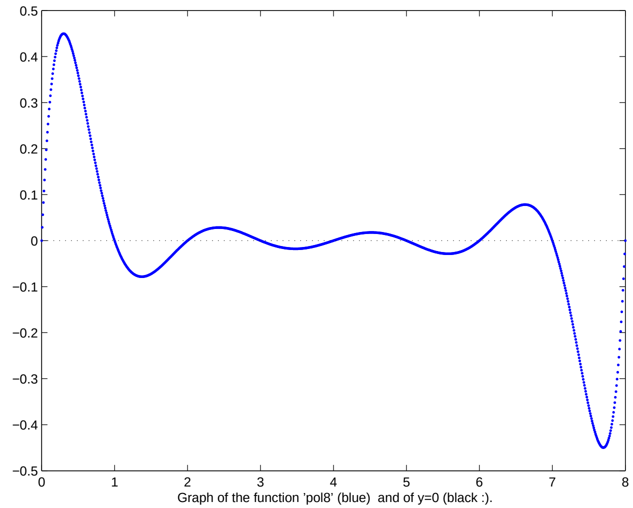
$f''(x) = 2\cos(x) - x\sin(x)$, $|f''(\xi)| \leq 2$, $|-\frac{1}{2}hf''(\xi)| \leq h$.

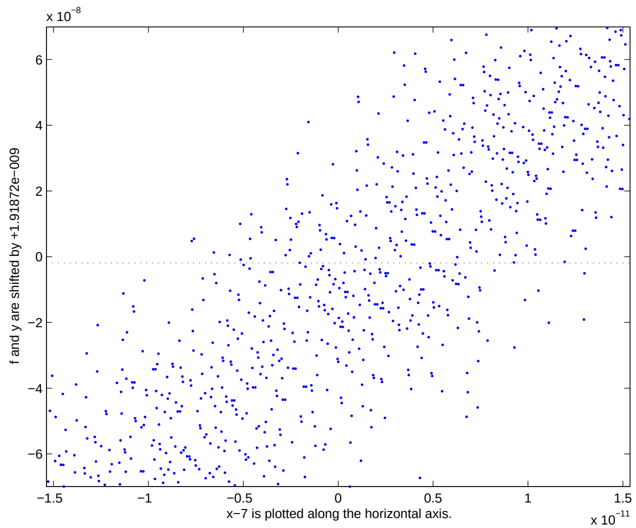
```
Met h=1.00e-003 is f'(x)-Df(x) = -4.289804e-004
Met h=1.00e-006 is f'(x)-Df(x) = -4.294664e-007
Met h=1.00e-009 is f'(x)-Df(x) = +1.762046e-008
Met h=1.00e-012 is f'(x)-Df(x) = +3.254716e-005
Met h=1.00e-015 is f'(x)-Df(x) = +4.122182e-002
```











De computer rekent met een beperkt (16) aantal decimalen. Dit leidt tot afrondfouten.

Conclusie. Fout heeft twee componenten:

1) **Benaderingsfout**, ook wel **approximatiefout**:
   fout door een wiskundige benaderingsformule te gebruiken

2) **Evaluatiefout**:
   het effect van afrondfouten

Voorbeeld. α, $\alpha^\star$ exacte, resp., berekende grootheid,
Zij $f^\star(x+h)$ de berekende functie waarde $f(x+h)$.
Dan $|f(x+h) - f^\star(x+h)| \leq \epsilon$ zekere $\epsilon > 0$.

$\epsilon = 1.3\,10^{-16}$ in geval $f(x) = x\sin(x)$

$\epsilon \approx 4\,10^{-8}$ in geval f 9de graads polynoom

Opmerking. Bovengrens ϵ kan geschat worden.
Verder **geen** structuur in de evaluatiefout!

De computer rekent met een beperkt (16) aantal decimalen. Dit leidt tot afrondfouten.

Conclusie. Fout heeft twee componenten:

1) **Benaderingsfout**, ook wel **approximatiefout**:
   fout door een wiskundige benaderingsformule te gebruiken

2) **Evaluatiefout**:
   het effect van afrondfouten

$$\text{Fout} = \text{approximatiefout} + \text{evaluatiefout}$$

$$f'(x) - D_h f^\star(x) = [f'(x) - D_h f(x)] + [D_h f(x) - D_h^\star f(x)]$$

Approximatiefout **heeft structuur** $= -\frac{1}{2}hf''(\xi) \approx \frac{1}{2}hf''(x)$

Evaluatiefout heeft **schatbare bovengrens**, $\leq \frac{2\epsilon}{h}$
verder **geen** bruikbare structuur

$$f'(x) \approx D_h^\star f(x) \qquad\qquad c \equiv -\tfrac{1}{2}f''(x)$$

Hoe kiezen we h?

1) **Als schattingen voor ϵ en $|c| = |\frac{1}{2}f''(x)|$ beschikbaar zijn.**

$$\frac{\epsilon}{h_{\text{best}}} = |c|\, h_{\text{best}}, \qquad h_{\text{best}} = \sqrt{\frac{\epsilon}{|c|}}, \qquad \frac{\epsilon}{h_{\text{best}}} + |c|\, h_{\text{best}} = 2\sqrt{\epsilon\,|c|}$$

Hoe nauwkeurig moeten die schattingen zijn?

Vaak voldoende als
de fout in een of twee cijfers bekend is.

$$f'(x) \approx D_h^\star f(x) \qquad\qquad c \equiv -\tfrac{1}{2}f''(x)$$

Hoe kiezen we h?

1) **Als schattingen voor ϵ en $|c| = |\frac{1}{2}f''(x)|$ beschikbaar zijn.**

2) **Anders.**

Uit grafiek leren we dat

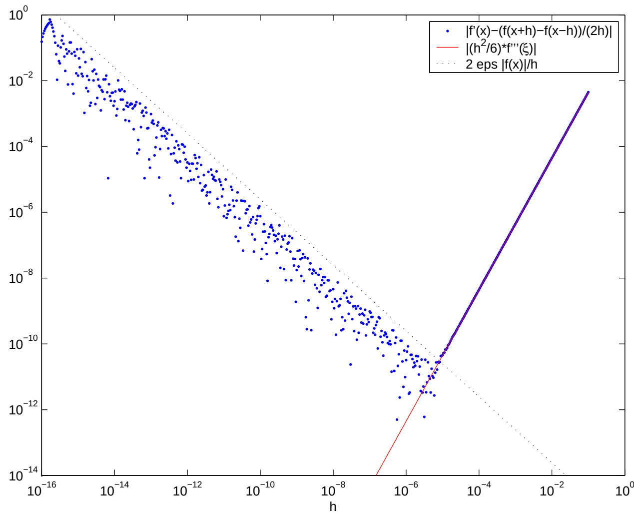
fout $\approx ch$ **als** $h > h_{\text{best}}$

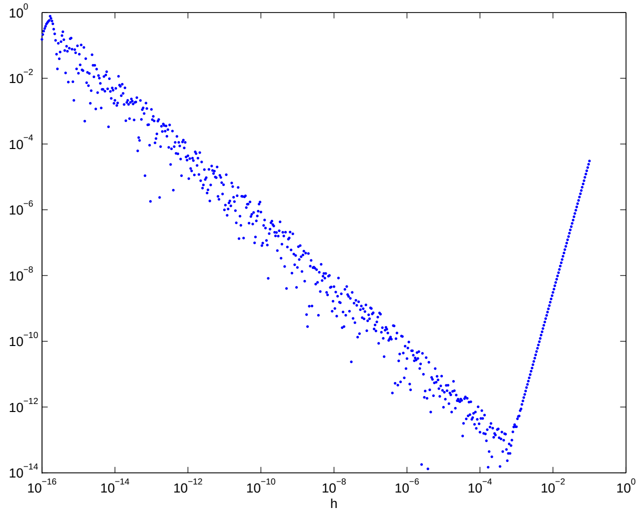
Strategie: kies h_0
bereken $D_{h_0}^\star f(x)$, $D_{\frac{1}{2}h_0}^\star f(x)$, $D_{\frac{1}{4}h_0}^\star f(x)$

Als $[D_{\frac{1}{4}h_0}^\star f(x) - D_{\frac{1}{2}h_0}^\star f(x)] \approx \frac{1}{2}[D_{\frac{1}{2}h_0}^\star f(x) - D_{h_0}^\star f(x)]$,

dan $\text{fout}_{\frac{1}{2}h_0} \approx D_{\frac{1}{2}h_0}^\star f(x) - D_{h_0}^\star f(x)$

anders, kies grotere h_0 en probeer opnieuw.





10^{0}
10^{-2}
10^{-4}
10^{-6}
10^{-8}
10^{-10}
10^{-12}
10^{-14}
10^{-16}
10^{-14}
10^{-12}
10^{-10}
10^{-8}
10^{-6}
10^{-4}
10^{-2}
10^{0}
h