Utrecht, 25 november 2014

Numerieke Wiskunde

Gerard Sleijpen

Universiteit Utrecht
Department of Mathematics

http://www.staff.science.uu.nl/~sleij101/

$[a,b]\subset\mathbb{R}$, $\quad : [a,b]\to\mathbb{R}$
Benader f door 'eenvoudige' functies

Voorbeelden eenvoudige functies.
1. **Polynomen** (lineaire combinaties van x^k).
2. Stukken Fourier reeks (lin. comb. $\sin(2\pi kx)$, $\cos(2\pi kx)$)
3. Splines (gladde stuksgewijs polynomen)
4. $\ldots \ln(x)p(x)$, p polynoom
5. Rationale functies $\frac{p(x)}{q(x)}$ met p, q polynomen
6. Bessel functies, ...

Eigenschappen eenvoudige functies.
1. Efficiënt te evalueren
2. Efficiënt op te slaan ($\rightsquigarrow$ compressie)
3. Gemakkelijk mee te manipuleren (p', $\int p$, ...)
   — basis voor algorithmes voor ingewikkeldere problemen
   — te gebruiken in analyse

$p(x)=\alpha_0+\alpha_1 x+\alpha_2 x^2+\ldots+\alpha_k x^k$ **polynoom** graad $\leq k$.

Evaluatie: schema van Horner. Evalueer p in x volgens

$$\boxed{\begin{array}{l} S_0=\alpha_k, \\ \texttt{voor}\ j=1,2,\ldots,k \\ \quad S_j=\alpha_{k-j}+S_{j-1}*x \end{array}}$$

Kost $2k$ flop (**flo**ating **p**oint operaties): $k*$ en $k+$.

Vb. $p(x)=3+2x+7x^2+4x^3$:
Horner: $p(x)=3+(2+(7+4x)x)x$

Variant:
$p(x)=3+2(x-1)+7(x-1)(x-\pi)+9(x-1)(x-\pi)x$
Horner: $p(x)=3+(2+(7+9x)(x-\pi))(x-1)$

Interpolatie

Zij $(x_0,x_1,x_2,\ldots,x_k)$ een rij getallen in $[a,b]$.

$\mu(x)$ is het aantal keren dat
het getal x in de rij $(x_0,\ldots,x_k)$ voor komt.

Terminolgie. $p=f$ op $(x_0,\ldots,x_k)$
als voor $i=0,\ldots,k$
$p(x_i)=f(x_i)$,
$p'(x_i)=f'(x_i)$ als $\mu(x_i)>1$
$p''(x_i)=f''(x_i)$ als $\mu(x_i)>2$
...

Voorbeeld. $p=f$ op $(\frac12,0,0,0,1)$ als
$p(0)=f(0)$, $p'(0)=f'(0)$, $p''(0)=f''(0)$,
$p(\frac12)=f(\frac12)$, $p(1)=f(1)$.

Definitie. Een polynoom p **interpoleert** f **op** $(x_0,\ldots,x_k)$
als graad$(p)\leq k$ en $p=f$ op $(x_0,\ldots,x_k)$.

Interpolatie

Zij $(x_0,x_1,x_2,\ldots,x_k)$ een rij in $[a,b]$.

Stelling. Er bestaat precies een pol. p van gr. $\leq k$ zodat
$$p=f \text{ op } (x_0,x_1,\ldots,x_k)$$

Als f $k+1$ maal continu differentieerbaar is op $[a,b]$ dan
$$f(x)-p(x)=(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_k)\,\frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!}$$
voor zekere ξ tussen $x_0,x_1,\ldots,x_k$ en x.

Voorbeeld. $x_0=x_1=x_2=\ldots=x_k=0$:
p is het **Taylor** pol.: $p(x)\equiv f(0)+xf'(0)+\ldots+\frac{x^k}{k!}f^{(k)}(0)$.
$$f(x)-p(x)=\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}f^{(k+1)}(\xi).$$

Lagrange: $x_i\neq x_j$ als $i\neq j$.

Hermite: iedere i, er is precies een $j\neq i$ met $x_i=x_j$.

Interpolatie

Zij $(x_0,x_1,x_2,\ldots,x_k)$ een rij in $[a,b]$.

Stelling. Er bestaat precies een pol. p van gr. $\leq k$ zodat
$$p=f \text{ op } (x_0,x_1,\ldots,x_k)$$

Als f $k+1$ maal continu differentieerbaar is op $[a,b]$ dan
$$f(x)-p(x)=(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_k)\,\frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!}$$
voor zekere ξ tussen $x_0,x_1,\ldots,x_k$ en x.

Notatie. Laat $\alpha=f[x_0,\ldots,x_k]$ de leidende coëfficiënt zijn
van het het interpolatie polynoom p voor f op $(x_0,x_1,\ldots,x_k)$.

Stelling. $f[x_0,\ldots,x_k]=\dfrac{f[x_1,\ldots,x_k]-f[x_0,\ldots,x_{k-1}]}{x_k-x_0}$.
$f[x_0,\ldots,x_k]=\frac{1}{k!}f^{(k)}(\xi)$ voor zekere ξ tussen $x_0,\ldots,x_k$.

Voorbeeld. $f[x_0,x_0,x_0,x_0]=\frac{1}{3!}f^{(3)}(x_0)$

Evaluatie

$$f[x_0]=f(x_0)$$
$$f[x_0,x_1,\ldots,x_k,x_{k+1}]\equiv\frac{f[x_0,x_1,\ldots,x_k]-f[x_1,\ldots,x_k,x_{k+1}]}{x_0-x_{k+1}}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
x_0-f(x_0) & & & & & & \\
 & \diagdown & f[x_0,x_1] & & & & \\
x_1-f(x_1) & & & \diagdown & f[x_0,x_1,x_2] & & \\
 & & f[x_1,x_2] & & & \diagdown & f[x_0,x_1,x_2,x_3] \\
x_2-f(x_2) & & & & f[x_1,x_2,x_3] & & \\
 & & f[x_2,x_3] & & & & \\
x_3-f(x_3) & & & & & &
\end{array}$$

$p(x)=f[x_1]+f[x_1,x_2]\,(x-x_1)+f[x_0,x_1,x_2]\,(x-x_1)(x-x_0)$
$\quad +f[x_0,x_1,x_2,x_3]\,(x-x_1)(x-x_0)(x-x_2)$

Gauss (als $x_0<x_1<x_2<\ldots$)

Evaluatie

$$f[x_0] = f(x_0)$$

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}] \equiv \frac{f[x_0, x_1, \ldots, x_k] - f[x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}]}{x_0 - x_{k+1}}$$

$$\begin{array}{lllll}
x_0 - f(x_0) & & & & \\
 & f[x_0,x_1] & & & \\
x_1 - f(x_1) & & f[x_0,x_1,x_2] & & \\
 & f[x_1,x_2] & & f[x_0,x_1,x_2,x_3] & \\
x_2 - f(x_2) & & f[x_1,x_2,x_3] & & \\
 & f[x_2,x_3] & & & \\
x_3 - f(x_3) & & & &
\end{array}$$

Voorbeeld.

$$\begin{array}{lll}
0 & - & f(0) \quad f[0,0] = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{f(0)-f(\epsilon)}{0-\epsilon} = f'(0) \\
0 & - & f(0) \quad f[0,0,0] = \lim_\epsilon f[0,\epsilon,2\epsilon] = \frac{1}{2} f''(0) \\
0 & - & f(0) \\
h & - & f(h)
\end{array}$$

We wensen f in het punt x te benaderen door interpolatie met een $k$de graads polynoom.
Waar kunnen we het beste $x_0, \ldots, x_k$ kiezen?

- f is bekend op t_i met,voor 'n stapgrootte $h > 0$,
  $t_{i+1} = t_i + h$ alle i.

- We willen f met zo weinig mogelijk functiewaarden over een heel interval, zeg $[-1, +1]$, benaderen met een fout kleiner dan, zeg 10^{-4}.
  We kunnen de steunpunten x_i overal kiezen in $[-1, +1]$.

We wensen f in het punt x te benaderen door interpolatie met een $k$de graads polynoom.
Waar kunnen we het beste $x_0, \ldots, x_k$ kiezen?

- f is bekend op t_i met,voor 'n stapgrootte $h > 0$,
  $t_{i+1} = t_i + h$ alle i.

Kies $x_0, \ldots, x_k$ uit $\{t_i\}$ zodat

$$|(x - x_0) \cdot \ldots \cdot (x - x_k)|$$

minimaal is.

Zorg er voor dat x in het 'middelste' interval $[x_j, x_{j+1}]$ ligt:
Als $x \in (t_i, t_{i+1})$, kies

$$x_0 = t_i, x_1 = t_{i+1}, x_2 = t_{i-1}, x_3 = t_{i+2}, x_4 = t_{i-2}, \ldots$$

Voor motivatie: zie volgende grafieken
waarbij $t_i = i$, $(i \in \mathbb{Z})$, $x \in (0, 1)$

We wensen f in het punt x te benaderen door interpolatie met een $k$de graads polynoom.
Waar kunnen we het beste $x_0, \ldots, x_k$ kiezen?

- We willen f met zo weinig mogelijk functiewaarden over een heel interval, zeg $[-1, +1]$, benaderen met een fout kleiner dan, zeg 10^{-4}.
  We kunnen de steunpunten x_i overal kiezen in $[-1, +1]$.

Equidistant: $x_j = -1 + jh$ $(j = 0, \ldots, k)$ met $h = 2/k$?

We wensen f in het punt x te benaderen door interpolatie met een $k$de graads polynoom.
Waar kunnen we het beste $x_0, \ldots, x_k$ kiezen?

- We willen f met zo weinig mogelijk functiewaarden over een heel interval, zeg $[-1, +1]$, benaderen met een fout kleiner dan, zeg 10^{-4}.
  We kunnen de steunpunten x_i overal kiezen in $[-1, +1]$.

Meer verdichten aan de rand: met $h = 2/k$

$$x_j = \sin(\tfrac{\pi}{2}(-1 + jh)) = \cos(-\tfrac{\pi}{2} jh) \quad (j = 0, \ldots, k)?$$

Hieronder $f \in C^{(1)}([-1, 1])$
en p_k interpoleert f op $(x_0, x_1, \ldots, x_k)$.

$x_j = -1 + j\frac{2}{k}$	$\exists f$	$p_k \not\to f$	x in de buurt van 1
$x_j = 0$	$\exists f$	$p_k \not\to f$	x in de buurt van 1
$x_j = \cos(\frac{\pi j}{k})$	$\forall f$	$p_k \to f$	ook x in de buurt van 1
$x_j = \cos(\pi \frac{j+0.5}{k+1})$	$\forall f$	$p_k \to f$	ook x in de buurt van 1

Opmerkingen:

$\exists f$ zelfs $\exists f \in C^{(\infty)}([-1, 1])$.

$\forall f$ geldt niet $\forall f \in C([-1, 1])$

Convergentie volgt niet uit schattingen
voor $(x - x_0) \ldots (x - x_k)$ en $f^{(k+1)}(\xi)$.

Effecten van (afrond)fouten in f-waarden

Voorbeeld. LIp op x_0, x_1, x_2, x_3: $x_i \neq x_j$ voor $i \neq j$.

Definieer

$$L_0(x) \equiv \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)}$$

Dan $L_j(x_i) = 0$ als $i \neq j$ en $L_j(x_j) = 1$.

Als $p = f$ op (x_0, x_1, x_2, x_3), dan

$$p(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x) + f(x_3)L_3(x)$$

$f^\star(x_j) = f(x_j) + \epsilon_j$ met $|\epsilon_j| \leq \epsilon$:

$$|p^\star(x) - p(x)| \leq \epsilon \sum_j |L_j(x)|$$

Op volgende pagina's: grafieken L_j en $\sum_j |L_j(x)|$ $(- \cdot - \cdot)$