

Utrecht, caleidoscoop, 24 april, 2012

Computerized Tomography: The ART of inspection

Gerard Sleijpen

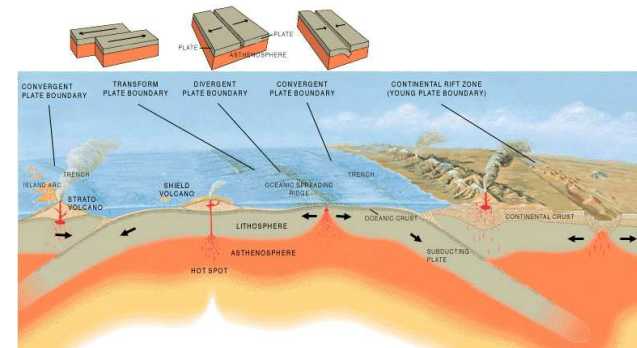
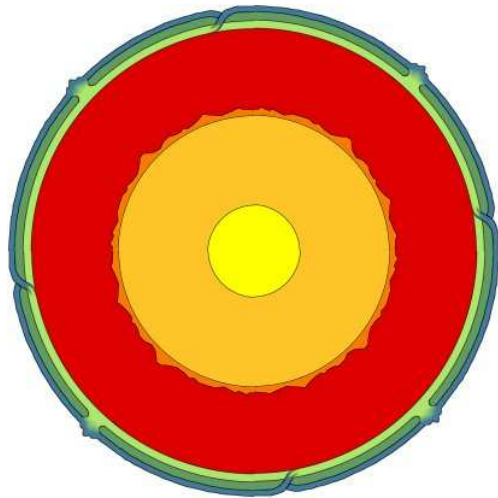


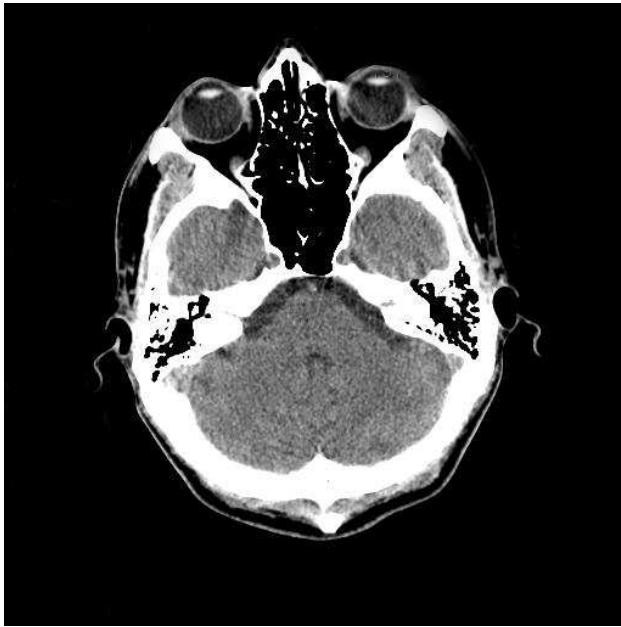
Universiteit Utrecht
Department of Mathematics

<http://www.staff.science.uu.nl/~sleij101/>

Program

- Wat is tomografie?
- Zuiver wiskundige aanpak
- Praktische aanpak
- Praktische complicaties
- Het lineaire algebra probleem
- Oplosmethoden – ART
 - SIRT
 - CG
- Controleren van effecten van meetfouten





Wat is tomografie?

Hoe krijg je zicht op het inwendige van

1. een piramide
 2. de aarde
 3. een mens
- :

Openmaken? 1. onpraktisch
 2. onmogelijk
 3. onwenselijk

Alternatief: tomografie

schiet er stralen doorheen;
vergelijk wat er uitkomt met wat erin gaat;
reconstrueer beeld hieruit.

Wat is tomografie?

1. hoog frequentie akoestische golven:
 meet reistijd (voor olie & gas)
2. schokgolven van aardbevingen voor beeld aarde:
 meet reistijd
3. x-stralen, stralen van deeltjes (SPECT, PET),
 licht, elektrische impedantie, ...
 meet verlies intensiteit
4. Magnetische resonantie (MRI), ...

Straal $\mathcal{S} = \{\mathbf{r}(t) \mid t \in [t_1, t_2]\}$ is een kromme

$$g(\mathcal{S}) = \int_{\mathcal{S}} f(\mathbf{r}) \, d\mathbf{r}$$

Seismische tomografie: \mathcal{S} is de “baan” van de drukgolf van de haard van de aardbeving naar een meetstation. Banen zijn niet recht. Banen zijn wel (in goede benadering) bekend. $f = 1/c$, met $c(\mathbf{x})$ de snelheid van de schokgolf op plaats \mathbf{x} . $1/c$ heet de **traagheid**. c hangt af van de temperatuur, druk, De vorm van de baan hangt af van c en van begin- en eindpunt.

$g(\mathcal{S}) = T_{\mathcal{S}}$ is de totale reistijd van de schokgolf langs straal \mathcal{S} .

Radon transformaties

$$g(s, \phi) = \int_{\mathcal{L}(s, \phi)} f(\mathbf{r}) \, d\mathbf{r}$$

Probleem. f onbekend. Hoe vind je f als $g(s, \phi)$ bekend is voor iedere $s \in \mathbb{R}$, $\phi \in [0, \pi)$?

Verschillende formules bekend (1-st Radon, 1917)
Analytisch equivalent, numeriek verschillend.

Filtered Back Projection

Straal $\mathcal{S} = \{\mathbf{r}(t) \mid t \in [t_1, t_2]\}$ is een kromme

$$g(\mathcal{S}) = \int_{\mathcal{S}} f(\mathbf{r}) \, d\mathbf{r}$$

Medische tomografie: \mathcal{S} is de “baan” van de straling van de stralenbron naar het detectiepunt. Banen zijn recht: $\mathcal{S} = \mathcal{L}(s, \phi)$. $f(\mathbf{x})$ is de absorbtiecoëfficiënt in plaats \mathbf{x} .

$g(\mathcal{S}) = g(s, \phi)$ is het relatieve verlies aan intensiteit van de straling langs baan $\mathcal{S} = \mathcal{L}(s, \phi)$.

In dit geval noemen we $s \rightsquigarrow g(s, \phi)$ het **spookbeeld** of de **projectie** van f vanuit de richting ϕ .

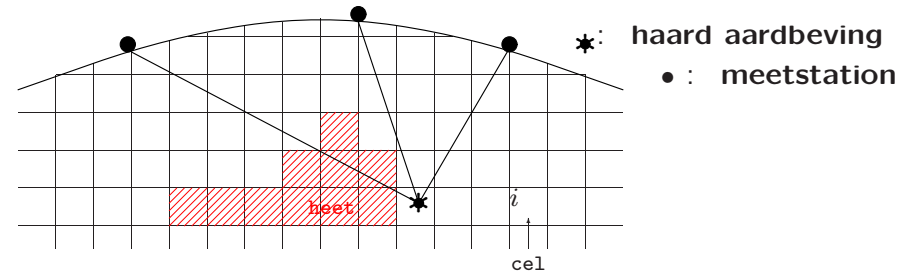
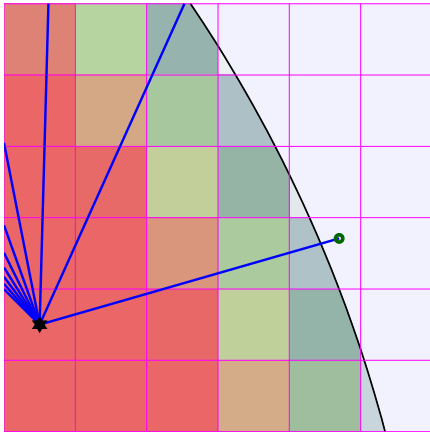
Problemen FBP

- Discrete versies zijn instabiel voor het geval f niet glad.
- Discrete versies vereisen data in allerlei “mooi verdeelde” richtingen.
- Eventueel voorkennis kan niet uitgebuit worden.

Veel commerciële codes voor medische tomografie maken standaard gebruik van een of andere discrete versie van FBP.

We bespreken nu een praktische aanpak die ook werkt als de stralen niet in parallelle bundels komen, zoals bij aardbevingen.

Discretiseer. Neem aan dat de banen recht zijn.



Per **cel** i : c_i is de gemiddelde snelheid in cel i ; $d_i \equiv 1/c_i$
 Per straal S : T_S is de totale reistijd van de schokgolf langs S .
 Per straal S en per cel i : l_i is de lengte van straal S in cel i .
 t_i is de tijd die de schokgolf nodig heeft om door cel i te reizen langs S : $t_i = l_i d_i$

$$T_S = \sum_i l_i d_i \quad \text{waarbij } T_S \text{ gemeten, } l_i \text{ bekend, } d_i \text{ te bepalen}$$

$$T_S = \sum_i l_i d_i$$

Matrix-vektor vergelijking

Te schrijven als een matrix-vektor vergelijking

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

Nummer de cellen c_1, c_2, \dots ,
 nummer de stralen $S(1), S(2), \dots$

$l_i(j)$ is de lengte van straal $S(j)$ in cel i .

$$\begin{bmatrix} l_1(1) & l_2(1) & \dots \\ l_1(2) & l_2(2) & \dots \\ \vdots & \vdots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{\# \text{cellen}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{S(1)} \\ T_{S(2)} \\ \vdots \\ T_{S(\# \text{stralen})} \end{bmatrix}$$

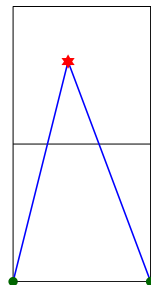
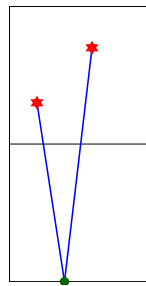
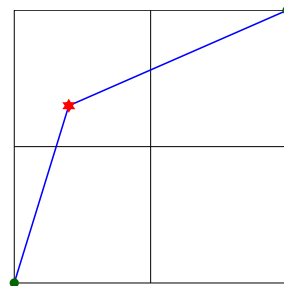
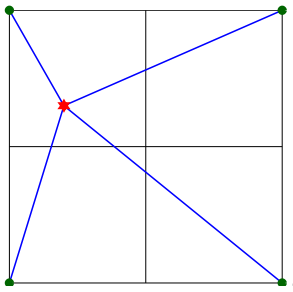
$$\begin{bmatrix} l_1(1) & l_2(1) & \dots \\ l_1(2) & l_2(2) & \dots \\ \vdots & \vdots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{\# \text{cellen}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{S(1)} \\ T_{S(2)} \\ \vdots \\ T_{S(\# \text{stralen})} \end{bmatrix}$$

stralen = # metingen $\approx 10^7$ (in ISC bestand).

Aantal cellen hangt samen met de cel-afmetingen.

Kleinere cellen = grotere resolutie.

Huidige cel grootte: $(50\text{km})^3 \Rightarrow$
 $\# \text{ cellen} \approx 200 \cdot 200 \cdot 70 \cdot 8 \dots \approx 1.3 \cdot 10^7$



Minimum eis:
 $\# \text{ metingen} \geq \# \text{ cellen}$

$$Ax = b$$

De matrix is **slecht geconditioneerd**.

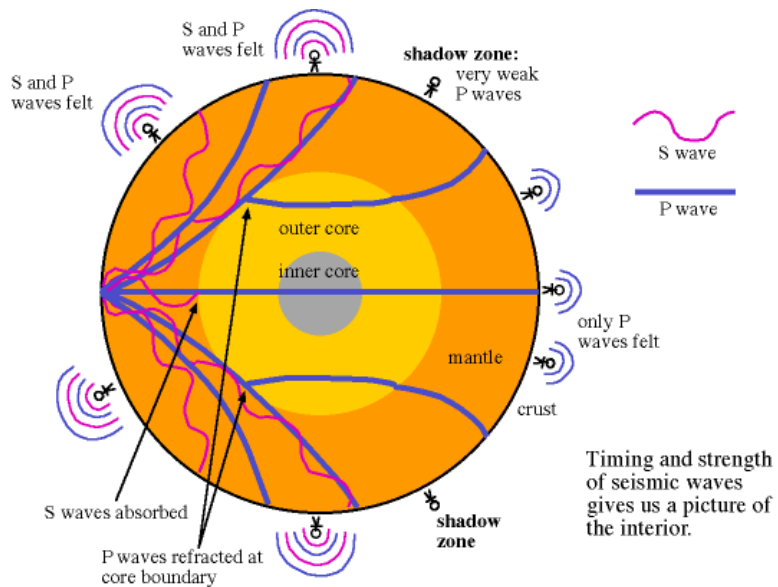
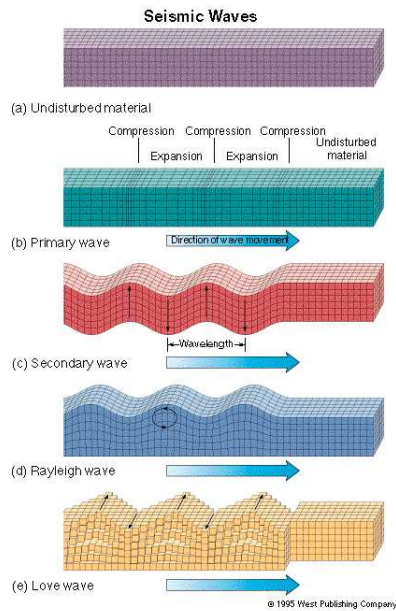
Problemen seismische tomografie

- Matrix slecht geconditioneerd
- Voor goede resolutie, hoog dimensionaal probleem:
 - kleine cellen
 - veel verschillende metingen

Soorten golven

- P-golven (pressure waves)
- S-golven (shear waves)
- Rayleigh golven
- Love golven

Verschillende soorten golven hebben verschillende snelheid.



Problemen seismische tomografie

- Locatie aardbeving onbekend
- Snelheid $c(\mathbf{x})$ onbekend
- Stralen lopen krom; hangt af van $c(\mathbf{x})$
- Verschillende soorten golven
- Golven hebben een zekere breedte
- Golven kunnen reflecteren
- Meetresultaten met fouten belast
- Meetresultaten niet alle even betrouwbaar
- Spreiding meetstations onevenwichtig
- Aardbevingen zijn oncontroleerbaar

Problemen medische tomografie

- Matrix slecht geconditioneerd
- Voor goede resolutie, hoog dimensionaal probleem:
 - kleine cellen
 - veel verschillende metingen
- Resultaten moeten snel beschikbaar zijn
- Resultaten moet betrouwbaar zijn
- Metingen beperkt houden:
 - duur metingen
 - gevaar stralingen
- Intesiteitsverlies hangt ook af van de energie van de straal (beam hardening)
- Stralen niet altijd vanuit ieder punt mogelijk

Zoek onder de \mathbf{x} die $\|\mathbf{b} - \mathbf{Ax}\|$ minimaliseren degene waarvoor $\|\mathbf{x}\|$ minimaal is

Normaal vergelijkingen

\mathbf{x} minimaliseert $\|\mathbf{b} - \mathbf{Ax}\|$ precies dan als

$$\mathbf{b} - \mathbf{Ax} \perp \mathbf{Ay} \quad \forall \mathbf{y}$$

$$0 = (\mathbf{Ay})^T (\mathbf{b} - \mathbf{Ax}) = \mathbf{y}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{b} - \mathbf{A}^T \mathbf{Ax}) \quad \forall \mathbf{y}$$

$$\mathbf{A}^T \mathbf{Ax} = \mathbf{A}^T \mathbf{b} \quad (*)$$

\mathbf{x} minimum residu oplossing met $\|\mathbf{x}\|$ minimaal als

$$\mathbf{x} \perp \mathbf{y} \quad \forall \mathbf{y} \in \text{Kern}(\mathbf{A}) \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{x} = \mathbf{A}^T \mathbf{z} \quad \text{zekere } \mathbf{z}$$

Idealiter: $\mathbf{As} = \mathbf{d}$

Echter $\mathbf{b} = \mathbf{d} + \mathbf{f}$ bekend; \mathbf{f} fouten.

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

- \mathbf{A} is ijl & groot
- sterk overbepaald: $n \gg \ell$
- effectief onderbepaald: $\text{rang}(\mathbf{A}) < \ell$
- inconsistent: er is geen oplossing

Zoek \mathbf{x} die $\|\mathbf{b} - \mathbf{Ax}\|$ minimaliseert.

Zoek daaronder degene met minimale $\|\mathbf{x}\|$, de zogenaamde

minimum residu minimum norm oplossing

Stelling. \mathbf{x} is

de minimum residu minimum norm oplossing precies dan als

$$\mathbf{A}^T \mathbf{Ax} = \mathbf{A}^T \mathbf{b} \quad \text{en} \quad \mathbf{x} = \mathbf{A}^T \mathbf{z} \quad \text{zekere } \mathbf{z}$$

Oplosmethoden. Gauss eliminatie?

Het vormen van $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ is rekenintensief.

$\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ is niet ijl. \Rightarrow Gauss eliminatie is rekenintensief.
Wat doen we als oplossing $\mathbf{A}^T \mathbf{Ax} = \mathbf{A}^T \mathbf{b}$ niet uniek?

Praktisch alternatief: **iteratieve methoden.**

Wat zijn iteratieve methoden?

Voorbeelden. Richardson, Gauss-Seidel, ...

Richardson iteratie

$$\mathbf{x} = \mathbf{x} + \alpha(\mathbf{A}^T(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}))$$

Choose $\alpha > 0$
 Choose \mathbf{x}_0
 $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$, $\mathbf{r} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}$
 repeat
 $\mathbf{u} = \mathbf{A}^T\mathbf{r}$
 $\mathbf{x} \leftarrow \mathbf{x} + \alpha\mathbf{u}$
 $\mathbf{r} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}$
 end repeat

Stelling. Met start $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ en $\alpha > 0$ voldoende klein (*) convergeert Richardson naar de min.res.min.norm oplossing

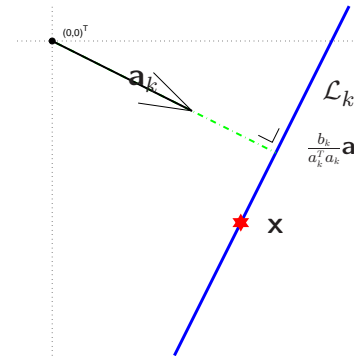
$$(*) \alpha < M \equiv \max\left\{\frac{\|\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{y}\|}{\|\mathbf{y}\|} \mid \mathbf{y} \neq \mathbf{0}\right\}$$

Convergentie is langzaam,
 M (en zeker μ) is lastig te bepalen

Geometrische interpretatie

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^T \\ \mathbf{a}_2^T \\ \vdots \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \end{bmatrix} = \mathbf{b}$$

k -de coördinaat: $\mathbf{a}_k^T\mathbf{x} = b_k$, maw $\mathbf{x} \in \mathcal{L}_k \equiv \{\tilde{\mathbf{x}} \mid \mathbf{a}_k^T\tilde{\mathbf{x}} = b_k\}$

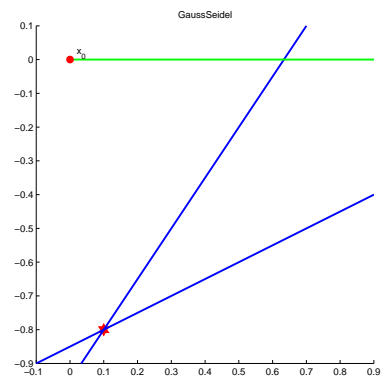
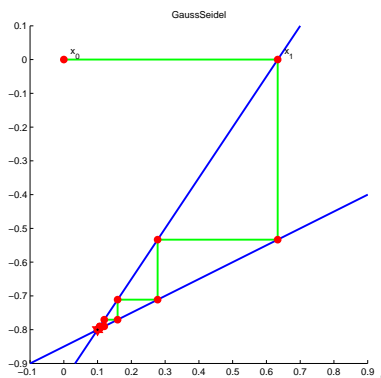


$$\mathbf{a}_k^T\mathbf{x} = b_k \quad \& \quad \mathbf{a}_k^T\mathbf{y} = 0 \\ \Rightarrow \mathbf{a}_k^T(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = b_k$$

Eigenschap.

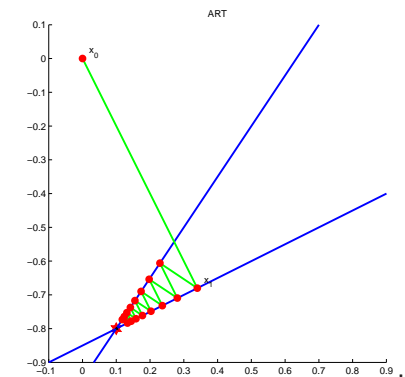
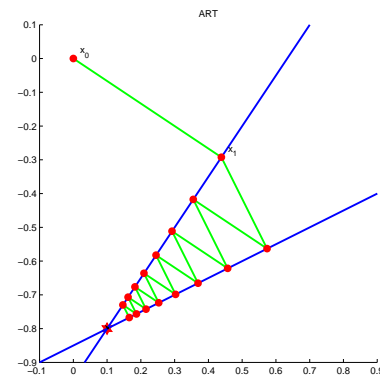
Oplossing \mathbf{x} van $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$
 op snijpunt van alle hypervlakken \mathcal{L}_i

Gauss-Seidel



Convergeert dit proces altijd?

Algebraic Reconstruction Technique



$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 + \alpha\mathbf{a}_1 \in \{\tilde{\mathbf{x}} \mid \mathbf{a}_1^T\tilde{\mathbf{x}} = b_1\} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\rho}{\sigma} = \frac{b_1 - \mathbf{a}_1^T\mathbf{x}_0}{\mathbf{a}_1^T\mathbf{a}_1}$$

Algebraic Reconstruction Technique

ART = Gauss-Seidel voor $\mathbf{A}\mathbf{A}^T\mathbf{y} = \mathbf{b}$
 en vindt $\mathbf{x} = \mathbf{A}^T\mathbf{y}$.

Stelling. Als gestart wordt met $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ en \mathbf{A} niet overbepaald ($n \leq \ell$) en volle rang, \Rightarrow ART convergeert naar de minimum norm oplossing.

– Voor overbepaalde stelsels ($n > \ell$) fluctueert de oplossing sterk.

+ Iedere nieuwe rij (nieuwe meting) kan onmiddellijk gebruikt worden.

In medische tomografie worden telkens nieuwe rijen gemaakt, onmiddellijk gebruikt en vervolgens weggegooid.

SIRT (for $n \times \cdot$ matrix \mathbf{A})

Choose \mathbf{x}_0
 $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$, $\mathbf{r} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}$
 repeat
 $\mathbf{u} = \mathbf{0}$
 For $k = 1, 2, \dots, n$
 $\sigma = \mathbf{a}_k^T \mathbf{a}_k$
 $\rho = r_k$, $\alpha = \rho / \sigma$
 $\mathbf{u} \leftarrow \mathbf{u} + \alpha \mathbf{a}_k$
 end for
 $\mathbf{x} \leftarrow \mathbf{x} + \frac{1}{n} \mathbf{u}$
 $\mathbf{r} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}$
 end repeat

Op het eind van de 'for loop'

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \sum_{k=1}^n \frac{r_k}{\mathbf{a}_k^T \mathbf{a}_k} \mathbf{A}^T \mathbf{e}_k \\ &= \mathbf{A}^T \sum_{k=1}^n \frac{r_k}{\mathbf{a}_k^T \mathbf{a}_k} \mathbf{e}_k \\ &= \mathbf{A}^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{r}, \end{aligned}$$

waarbij \mathbf{D} de diagonaal matrix is met $\mathbf{D}_{kk} = \mathbf{a}_k^T \mathbf{a}_k$.

SIRT (for $n \times \cdot$ matrix \mathbf{A})

Choose \mathbf{x}_0
 $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$, $\mathbf{r} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}$
 repeat
 $\mathbf{u} = \mathbf{A}^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{r}$
 $\mathbf{x} \leftarrow \mathbf{x} + \frac{1}{n} \mathbf{u}$
 $\mathbf{r} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}$
 end repeat

waarbij \mathbf{D} de diagonaal matrix is met $\mathbf{D}_{kk} = \mathbf{a}_k^T \mathbf{a}_k$

Richardson voor
 $\mathbf{0} = \mathbf{A}^T \mathbf{D}^{-1} (\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x})$
 met $\alpha = \frac{1}{n}$

Simultaneous Iterative RT

SIRT = Richardson voor $\mathbf{A}^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{b}$
 waarbij \mathbf{D} de diagonaal matrix is met $\mathbf{D}_{kk} = \mathbf{a}_k^T \mathbf{a}_k$

Stelling. Als gestart met $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$, \Rightarrow

SIRT convergeert naar de mini.norm min.residu oplossing van $\mathbf{D}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{D}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{b}$

+ Convergentie naar 'n min. norm min. res. opl.

– Oplossing van een geschaald probleem.

Willen we herschaling? Zonder schaling geen convergentie

– Convergentie is erg langzaam, dwz er zijn veel stappen nodig.

CG for Normal Equations $A^T A x = A^T b$

Choose x_0

$$x = x_0, r = b - Ax$$

$$u = 0, \rho = 1$$

repeat

$$s = A^T r$$

$$\sigma = \rho, \rho = s^T s, \beta = \frac{\rho}{\sigma}$$

$$u \leftarrow s + \beta u$$

$$c = Au$$

$$\sigma = c^T c, \alpha = \frac{\rho}{\sigma}$$

$$x \leftarrow x + \alpha u$$

$$r \leftarrow r - \alpha c$$

end repeat

Optimaliseren in
2 laatste vorige richtinge

=

optimaliseren in
alle voorgaande richtinge

Te verwachten:

$$\|s_k^{SIRT}\| \approx \|r_0\| \exp\left(-\frac{k}{C}\right)$$

$$\Rightarrow \|s_k^{CGNE}\| < \|r_0\| \exp\left(\frac{-k}{\sqrt{C}}\right)$$

CG NE

Stelling. Als gestart met $x_0 = 0 \Rightarrow$

CG convergeert naar de

min.residu min.norm oplossing van $Ax = b$

+ Convergentie naar de min.residu min.norm opl.

+ Het ongeschaalde probleem wordt opgelost

+ Convergentie optimaal in zekere zin.

- Je mag geen rijen toevoegen

of weglaten tijdens het rekenproces

Effect van meetfouten

Stel $A = \Sigma$ diagonaal matrix.

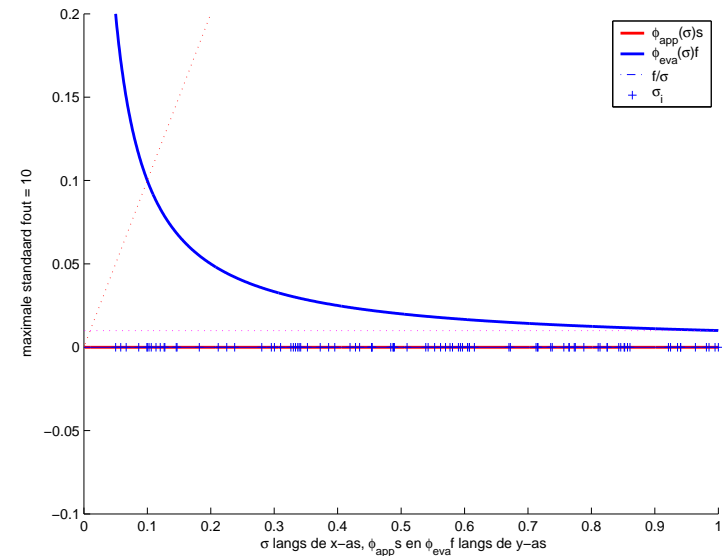
$$\left. \begin{array}{l} \Sigma s = d \\ \Sigma x = d + f \end{array} \right\} \Rightarrow \Sigma(x - s) = f. \quad x_i - s_i = \frac{f_i}{\sigma_i}$$

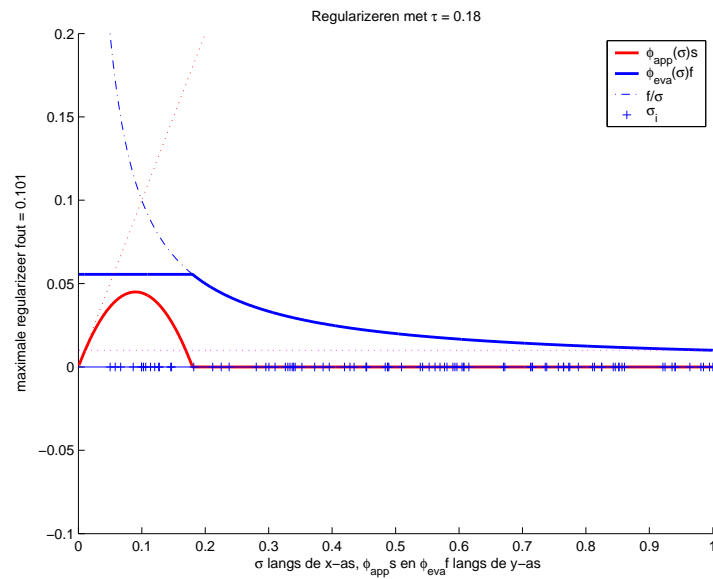
Groot als $\sigma_i \approx 0$. Erg als $|d_i| \ll |f_i|$. ($|d_i| \leq \sigma_i$)

Regulariseer. Kies $\tau > 0$. Neem $1/\max(\sigma_i, \tau)$ i.p.v. $1/\sigma_i$:

$$x'_i - s_i = \begin{cases} \frac{f_i}{\sigma_i} & \text{if } \sigma_i \geq \tau \\ \frac{d_i + f_i}{\tau} - \frac{d_i}{\sigma_i} = \frac{f_i}{\tau} - \left(1 - \frac{\sigma_i}{\tau}\right) s_i & \text{if } \sigma_i < \tau \end{cases}$$

$$= \phi_{eva} f_i - \phi_{app} s_i$$





Regulariseren

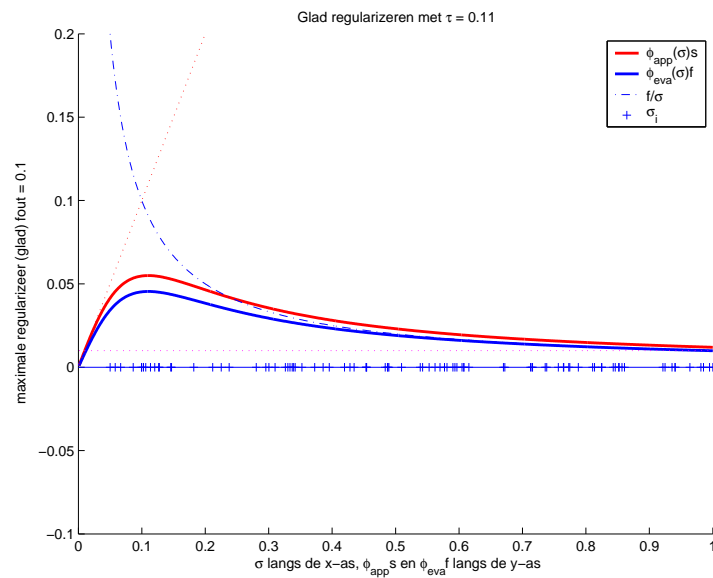
2) Bereken \mathbf{x}' die

$$\|\mathbf{A}\mathbf{x}' - \mathbf{b}\|^2 + \tau^2 \|\mathbf{x}'\|^2 \text{ minimaliseert.}$$

Oplissing: $\mathbf{x}' = (\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \tau^2)^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{b}$

Als $\mathbf{A} = \Sigma$:

$$\begin{aligned} x'_i - s_i &= \frac{\sigma_i}{\sigma_i^2 + \tau^2} (d_i + f_i) - \frac{d_i}{\sigma_i} \\ &= \frac{\sigma_i}{\sigma_i^2 + \tau^2} f_i - \frac{\tau^2}{\sigma_i^2 + \tau^2} s_i = \phi_{eva} f_i - \phi_{app} s_i \end{aligned}$$



Regulariseren

3) Pas SIRT toe (zonder regulariseringsparameter τ)

$$x'_i - s_i = \frac{(1 - \phi(\sigma_i))}{\sigma_i} f_i - \phi(\sigma_i) s_i = \phi_{eva} f_i - \phi_{app} s_i$$

met $\phi(t) = (1 - \omega^2 t^2)^k$

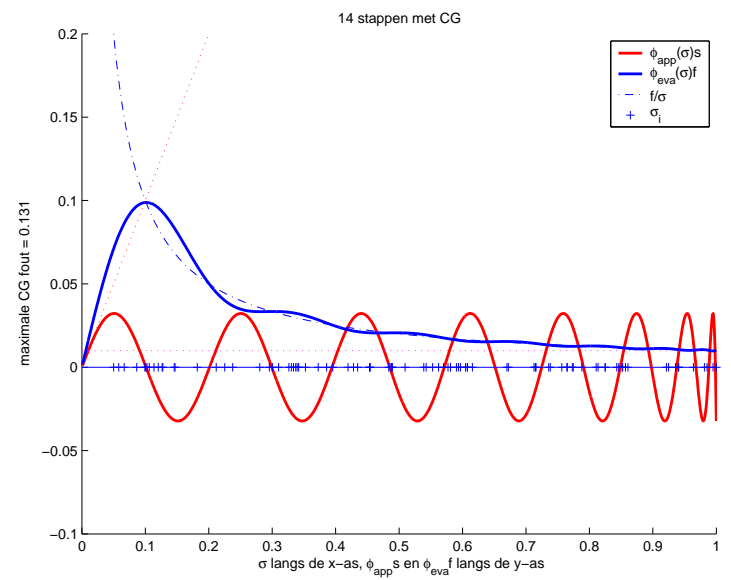
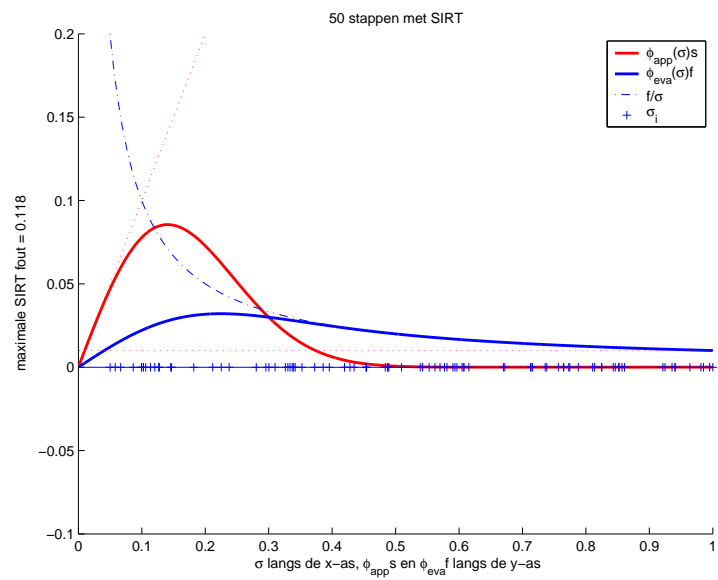
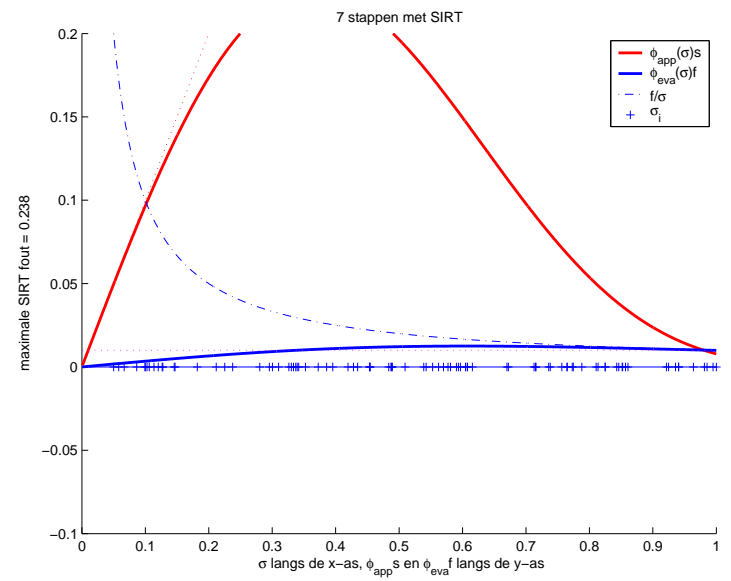
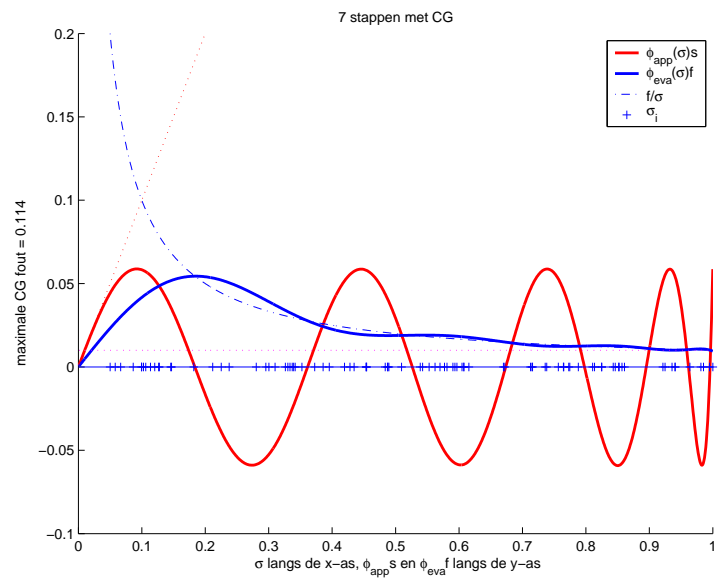
4) Pas CG toe (zonder regulariseringsparameter τ)

$$x'_i - s_i = \frac{(1 - \phi(\sigma_i^2))}{\sigma_i} f_i - \phi(\sigma_i) s_i = \phi_{eva} f_i - \phi_{app} s_i$$

met $\phi(t)$ van graad k $\phi(0) = 1$ minimaliseert

+ SIRT en CG regulariseren impliciet

mits het aantal stappen beperkt blijft



105 stappen met SIRT

