Opgave 1. We bestuderen de verspreiding van een besmettelijke ziekte en kiezen voor een continu model. $x(t)$ is het deel van de bevolking dat op tijdstip t dat vatbaar is voor de ziekte maar niet ziek is. Mensen die ziek zijn zijn ook (vrijwel) onmiddellijk besmettelijk. Op tijdstip t is het deel dat ziek is $y(t)$. Mensen die genezen zijn immuun en niet meer besmettelijk. Het aantal mensen dat per tijdseenheid geneest of sterft is een vast deel van het aantal zieke mensen. Verder nemen we aan dat het aantal mensen in de bestudeerde periode niet toeneemt en maar alleen afneemt doordat mensen bezwijken aan de ziekte.

Voor zekere positieve constanten ρ en γ kan het verspreiding van de ziekte beschreven worden door

$$\begin{cases} x' = -\rho xy, \\ y' = \rho xy - \gamma y. \end{cases} \tag{1}$$

a) Beschrijf van welke veronderstellingen uitgegaan is bij het opstellen van beide termen "ρxy". Hoe interpreteer je de term γy.

b) Geef in het biologisch relevante deel van het x-y-vlak aan waar $x' = 0$, respectievelijk $y' = 0$. Geef het tekenverloop van x' en y' aan (middels pijltjes) in het diagram dat zo ontstaat. Bepaal de evenwichtspunten. Zijn die stabiel? Alleen voor $x(0) > \gamma/\rho$ en $y(0) > 0$ ontstaat er een epidemie. Waarom?

c) Bepaal een functie $F(x, y)$ waarvoor geldt

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 1 \quad \text{en} \quad \frac{\partial F}{\partial x} = 1 - \frac{\gamma}{\rho}\frac{1}{x}.$$

Hoe kan je F gebruiken om oplossingskrommen te vinden?
Wat voor effect heeft de term ρxy op de oplossing?

d) Stel nu $\gamma/\rho = 0.75$. Gebruik de functie F uit (c) om, in het biologisch relevante deel van het x-y-vlak, de kromme te schetsen van de oplossing met $x(0) = 0.9999$ en $y(0) = 0.0001$. Geef duidelijk aan hoe de kromme doorlopen wordt. Hoe groot is het deel van dat bevolking dat op het hoogtepunt van de epidemie ziek is ($\ln 0.75 \approx -.288$)?