1 Hoofdstuk 1

Opgave 1.7

Voor het schrijfgemak nemen we in deze opgave telkens aan dat $0 = f(0)$ en zijn we geïnteresseerd in de stabiliteit van het evenwicht 0. (In Je kan altijd een evenwicht α "verschuiven" naar 0: $\tilde{x} = \tilde{f}(\tilde{x}) \equiv f(\alpha + \tilde{x}) - \alpha$).

(a) Defiëer $f(x) = 2x$ voor $x \in [-1, +1]$ en $f(x) = 0$ voor $x > 1$ en voor $x < -1$.
Zij $x_0 \neq 0$. Dan is $x_n = 2^n x_0$ als $|x_j| \leq 1$ voor alle $j = 0, \ldots, n-1$. Voor een zekere n is $|x_n| = |2^n x_0| > 1$ terwijl $|x_{n-1}| = |2^{n-1} x_0| \leq 1$. Immers $|2^n x_0| \to \infty$ als $n \to \infty$. Dus is $x_{n+1} = f(x_n) = 0$. Omdat $f(0) = 0$ is verder $x_m = 0$ voor alle $m > n$. Kortom 0 is een attractor voor $x_{n+1} = f(x_n)$.
Stabiliteit in de zin van Liapunov eist ook dat er voor iedere $\epsilon > 0$ een $\delta > 0$ te vinden is zodat $|x_n - 0| = |x_n| \leq \epsilon$ voor iedere $x_0 \in (0 - \delta, 0 + \delta)$. We hebben echter gezien dat voor iedere $x_0 \in [-1, +1]$, $x_0 \neq 0$ een n is zodat $|x_n| > 1$. In het bijzonder is voor iedere $\delta > 0$ er een x_0 (bv. $x_0 = \min(\frac{1}{2}\delta, 1)$) zodat $|x_0 - 0| \leq \delta$ terwijl $|x_n - 0| > 1$ voor 'n n. Voor $\epsilon = 1$ kunnen we niet aan de tweede eis van Liapunov's stabiliteit voldoen.

(b) Het bewijs van dit onderdeel is nogal technisch en waarschijnlijk alleen aantrekkelijk voor liefhebbers van zuivere analyse. Om te veel technisch gepriegel te vermijden nemen we aan dat $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ en (nog steeds) dat $f(0) = 0$. Hint: maak voor de voor de verschillende mogelijkheden die we onderscheiden telkens een plaatje.

Stel f is continu. Dan is, zoals we hier zullen zien, het dekpunt 0 stabiel is als het atractief is. We laten eerst zien dat de functie uit (a) niet eenvoudig om te vormen is tot een continue functie met attractief maar onstabiel dekpunt 0.

Stel voor een $\epsilon > 0$ is $f(x) > x$ voor alle $x \in (0, \epsilon)$. We tonen aan dat in deze situatie 0 niet attractief is.
(i) Als $f(x) > x$ alle $x > 0$ dan is voor iedere $x_0 > 0$ de rij (x_n) stijgend en convergeert niet naar 0. Dus is 0 niet attractief.
(ii) Stel er is een $\alpha > \epsilon$ met $\alpha = f(\alpha)$. Laat α de kleinste zijn met deze twee eigenschappen (kleinste bestaat omdat f continu is). Dus $f(x) > x$ alle $x \in (0, \alpha)$, $0 = f(0)$ en $\alpha = f(\alpha)$.
(1) Als $f(x) < \alpha$ voor alle $x \in (0, \alpha)$, dan is voor iedere $x_0 \in (0, \alpha)$ de rij (x_n) stijgend (immers $f(x) > x$) en begrensd door α (immers $f(x) \leq \alpha$). Dus convergeert (x_n) naar een waarde, zeg β, in $(0, \alpha]$ en niet naar 0. Dus is 0 niet attractief. Overigens is $\beta = \alpha$: omdat f continu is, is $\beta = \lim x_{n+1} = \lim f(x_n) = f(\beta)$, terwijl f maar één vast punt heeft in $(0, \alpha]$.
Stel (2) $f(x) > \alpha$ voor zekere $x \in (0, \alpha]$. Omdat f continu is, is er in dit geval volgens de doorlopendheidsstelling een $\alpha_1 \in (0, \alpha)$ zodat $f(\alpha_1) = \alpha$. Omdat $f(\alpha_1) > \alpha_1$ is er, weer volgens de doorlopendheidsstelling een $\alpha_2 \in (0, \alpha_1)$ zodat $f(\alpha_2) = \alpha_1$, etc.. De rij (α_i) in $(0, \alpha)$ daalt en omdat $[0, \alpha)$ slechts een vast punt heeft, nl. 0, daalt de rij naar 0. Hieruit volgt dat er voor iedere $\epsilon > 0$ een x_0 is in $(0, \epsilon)$ zodat $x_n = \alpha$ voor $n > i$ (kies $x_0 = \alpha_i$ voor een i groot genoeg. Dan $x_n = \alpha_{i-n}$ voor $n < i$ en $x_n = \alpha$ voor $n > i$). Omdat (x_n) niet naar 0 convergeert (maar naar α) is 0 niet attractief.

Als 0 attractief is, dan is er blijkbaar geen $\epsilon > 0$ zodat $f(x) > x$ alle $x \in (0, \epsilon)$. Hiermee is duidelijk dat we de functie uit (a) niet eenvoudig kunnen aanpassen.

Als er voor iedere $\epsilon > 0$ een α is in $(0, \epsilon)$ en $\alpha = f(\alpha)$, dan is 0 niet attractief. Immers, voor iedere $\epsilon > 0$ is er een x_0 (neem x_0 gelijk aan zo'n α) zodat $x_n \not\to 0$ voor $n \to \infty$ ($x_n = \alpha \neq 0$ alle n). Als 0 attractief is, kan dit niet. Blijkbaar is er, als 0 attractief is, een $\epsilon > 0$ zodat $x \neq f(x)$ alle

$x \in (0, \epsilon)$. Blijkbaar geldt

$$0 \leq f(x) < x \quad \text{alle} \quad x \in (0, \epsilon) \tag{1}$$

als 0 attractief is en f continu (de situatie $f(x) > x$ voor $x \in (0, \epsilon)$ hadden we al uitgesloten en we hebben aangenomen dat $f(x) \geq 0$ alle $x \geq 0$).

Het is gemakkelijk om in te zien dat in geval (1) 0 stabiel is in de zin van Liapunov: voor iedere geproduceerde rij, startend in $x_0 \in [0, \epsilon)$ daalt (x_n) in $[0, \epsilon)$ (immers $0 \leq x_{n+1} = f(x_n) < x_n$). Dus heeft (x_n) een limiet in $[0, \epsilon)$, zeg β. Omdat $0 \leq \beta = \lim x_{n+1} = \lim f(x_n) = f(\beta) < \epsilon$ is $\beta = 0$. Dus daalt (x_n) naar 0.

(c) Zij $f(x) \equiv -10x$ voor $x \geq 0$ en $f(x) \equiv -\frac{1}{20}x$. Dan is $\alpha \equiv 0$ een stabiel dekpunt: $x_{2n} = \frac{1}{2}x_{2n-2} = (\frac{1}{2})^n x_0 \to 0$ voor $n \to \infty$ en $|x_{2n+1}| \leq 10|x_{2n}|$ ($|x_{2n+1}| = 10|x_{2n}|$ als $x_0 > 0$). In het bijzonder, is $|x_n| \leq \epsilon$ als $|x_0| \leq \epsilon/10$.

(d) We tonen aan dat 0 geen stabiel evenwicht is als f continu differentieerbaar is en de oneven iteranden in absolute waarde 10 maal groter zijn dan de even iteranden.

Als f continu differentieerbaar is dan is $x_{n+1} = f(x_n) = x_n f'(\xi_n)$ voor zekere ξ_n tussen $\alpha = 0$ en x_n. We hebben hier gebruik gemaakt van de stelling van Taylor. Voor x_n klein is, vanwege de continuiteit van f', $f'(\xi_n)$ ongeveer gelijk aan $f'(0)$. Dus als $|x_{2n+1}| \geq 10|x_{2n}|$ dan is $|f'(\xi_n)| \geq 10$. Als (x_n) naar 0 convergeert, dan convergeert (ξ_n) naar 0 en is $|f'(0)| \geq 10$. Maar dan is er een $\epsilon > 0$ zodat $|f'(\xi)| > 9$ voor alle $\xi \in (-\epsilon, \epsilon)$ en dus $|x_{n+1}| > 9|x_n|$ alle $x_n \in (-\epsilon, \epsilon)$: 0 is geen stabiel evenwicht.

Opgave 1.8

De algemene kettingregel luidt:

$$f(g(x)) = f'(g(x)) * g'(x)$$

Als we deze toepassen op $(f \circ f)(a)$ en op $(f \circ f)(b)$ dan zien we

$$f(f(a)) = f'(f(a)) * f'(a) = f'(b) * f'(a)$$

en

$$f(f(b)) = f'(f(b)) * f'(b) = f'(a) * f'(b)$$

We concluderen dat $(f \circ f)'(a) = (f \circ f)'(b) = f'(a) * f'(b)$.

We weten dat $f(x) = A(1-x)x$, dus we kunnen $(f \circ f)(x) = x$ uitschrijven tot

$$(f \circ f)(a) = f(A(1-x)x) = A(1 - A(1-x)x)A(1-x)x$$

oftewel

$$A^2 x(1-x)(1 - A(1-x)x) = x$$

Er zijn al twee oplossingen bekend, namelijk de dekpunten van f.

Als we nemen $f(x) = 2x(1-x)$, dan heeft de vergelijking $(f \circ f)(x) = x$ vier oplossingen: $x = 0$, $x = \frac{1}{2}$ en $x = \frac{1}{4}(3 \pm i\sqrt{3})$. De twee oplossingen $x = 0$ en $x = \frac{1}{2}$ zijn dekpunten van f en de andere oplossingen zijn complex, dus er bestaat geen 2-baan.

We nemen nu $f(x) = \frac{7}{2}x(1-x)$, dan heeft $(f \circ f)(x) = x$ vier oplossingen, namelijk $x = 0$, $x = \frac{3}{7}$, $x = \frac{5}{7}$ en $x = \frac{6}{7}$. Omdat $x = 0$ en $x = \frac{6}{7}$ al oplossingen zijn van $f(x) = x$, geven $x = \frac{3}{7}$ en $x = \frac{6}{7}$ één 2-baan.

Om te bepalen of deze stabiel is dan gebruiken we $f'(x) = \frac{7}{2} - 7x$ en zien we dat

$$|f'(\frac{3}{7})f'(\frac{6}{7})| = 1,25$$

dus het is instabiel.

Opgave 1.10

a. Show that $x_n = (\sin(2^n \frac{1}{2}\pi\phi_0))^2$.

Assume the formula is true for x_{n-1}. Using the double angle formula for $\sin(x)$:

$$\begin{aligned}
x_n &= 4(1-x_{n-1})x_{n-1} = 4(1-(\sin(2^{n-1}\frac{1}{2}\pi\phi_0))^2)(\sin(2^{n-1}\frac{1}{2}\pi\phi_0))^2 \\
&= 4(\cos(2^{n-1}\frac{1}{2}\pi\phi_0))^2(\sin(2^{n-1}\frac{1}{2}\pi\phi_0))^2 = (2\sin(2^{n-1}\frac{1}{2}\pi\phi_0)\cos(2^{n-1}\frac{1}{2}\pi\phi_0))^2 \\
&= \sin(2 \cdot 2^{n-1}\frac{1}{2}\pi\phi_0) = \sin(2^n\frac{1}{2}\pi\phi_0)
\end{aligned}$$

Since we assumed the formula holds for x_0, by induction it holds for x_n.

b. For which values of $\phi_0 \in [0,1]$ do we expect periodic orbits (baan)?

In general, we know that for any θ and any $m \in \mathbb{N}$ it holds that:

$$(\sin(\theta))^2 = (\sin(\theta + 2\pi m))^2$$

From here we see that if we choose ϕ so that $2^n\frac{1}{2}\pi\phi_0 = \frac{1}{2}\pi\phi_0 + 2\pi m$ for some $m \in \mathbb{Z}$ and some $n \in \mathbb{N}$, then we have an n-periodic orbit. We solve the equation for ϕ_0, and see that this occurs for

$$\phi_0 = \frac{4m}{2^n - 1}, \quad m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$$

If we choose n big enough compared to m, we will obtain $\phi_0 \in [0,1]$.

Similarly we can obtain more values for ϕ_0 for which periodic orbit occur if we use the fact that:

$$(\sin(\theta))^2 = (\sin(-\theta + 2\pi n))^2 = (\sin(\pi - \theta + 2\pi n))^2 = (\sin(\pi + \theta + 2\pi n))^2$$

c. Are the periodic orbits stable? Relate this process to the one in exercise 9.

Assume we have an n-periodic orbit at $x_0 = y$. We use theorem 1.2.2 to show that the orbit is unstable. We want to compute the derivative of the function $x_n(x_0)$ at the point y. Using the formula we computed in part (a), we see that we can write $x_n(x_0) = (\sin(2^n \mathrm{arcsin}(\sqrt{x_0}))^2$. Now, you can verify that $\frac{dx_n}{dx_0}|_{x_0=y} = \pm 2^n$, which is bigger than 1 in absolute value for $n \geq 1$.

We can also see the instability of the orbits graphically. We saw that in exercise 9, the graph of the function f^n looks like the teeth of a saw, where the number of "teeth" is equal to 2^n. Also we saw that when n becomes larger, then the slope of the lines become larger, and therefore the periodic orbits (the points where the line $y = x$ intersect the graph) become "more and more unstable" (i.e. the derivative of the graph at the intersections becomes larger and larger). In the current exercise the graph of $x_n(x_0)$ looks similar, only the teeth are not sharp but rounded in the top and bottom (try drawing it with Mathematica). But the same thing occurs: as n becomes larger, the slope of the graph at the points where $y = x$ intersect the graph become larger and therefore the periodic orbits become "more and more unstable".

2 Hoofdstuk 2

Opdracht 2.7

De vraag is onduidelijk en lijkt zichzelf tegen te spreken, er kan hier van 2 matrices gesproken worden:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

en

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Met A is de vraag op te lossen, zoals hier te zien in A is R_n^2 geen interessante waarde.

We weten nu dat: $R_{n+1}^0 = R_n^1 + R_n^0$
en ook geldt: $R_n^1 = R_{n-1}^0$
Dus dit geeft: $R_{n+1}^0 = R_n^0 + R_{n-1}^0$
Dit levert de Fibonacci reeks; met $R_0^0 = R_1^0 = 1$ krijgt men:
$R_2^0 = 2$
$R_3^0 = 3$
$R_4^0 = 5$
$R_5^0 = 8$

Nu gaan we een expliciete uitdrukkin vinden voor R_n^0. We berekenen de eigenwaarden van

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

De laatste kolom in A is oninteressant want dit geeft slechts eigenwaarde 0.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dit geeft de eigenwaarde vergelijking: $\lambda^2 = \lambda + 1$ oftewel:
$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$

Dus $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$
Nu gaan we kijken naar

$$\begin{pmatrix} R^0_{n+1} \\ R^1_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} R^0_n \\ R^1_n \end{pmatrix} = A^{n+1} \begin{pmatrix} R^0_0 \\ R^1_0 \end{pmatrix}$$

Nu willen we de vector $(R^0_0, R^1_0)^t$ uitschrijven in eigenvectoren. Als we nemen $R^1_0 = 0$ kunnen we dit makkelijk doen,
namelijk:

$$\begin{pmatrix} R^0_0 \\ 0 \end{pmatrix} = R^0_0 \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\begin{pmatrix} \frac{1}{2}1 + \sqrt{5} \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2}1 - \sqrt{5} \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

Dus dit wordt:

$$A^{n+1} \begin{pmatrix} R^0_0 \\ 0 \end{pmatrix} = A^{n+1} R^0_0 \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

We weten dat voor de eigenvector geldt: $Av = \lambda v$ (dus $A^n v = \lambda^n v$) Dus:

$$A^{n+1} \begin{pmatrix} R^0_0 \\ 0 \end{pmatrix} = R^0_0 \frac{1}{\sqrt{5}} \left[(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2})^{n+1} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \sqrt{5} \\ 1 \end{pmatrix} - (\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2})^{n+1} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

We zijn alleen in R^0_{n+1} geinteresseerd dus de expliciete uitdrukking wordt:
$R^0_{n+1} = R^0_0 \frac{1}{\sqrt{5}} \left[(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2})^{n+2} - (\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2})^{n+2} \right]$

Opgave 2.15

Zij $v_1, \ldots, v_m$ een basis van eigenvectoren van A met eigenwaarden $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$. Schrijf v_0 nu als lineaire combinatie van eigenvectoren, $v_0 = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_m v_m$.

$$A^n v_0 = \alpha_1 \lambda_1^n v_1 + \ldots + \alpha_m \lambda_m^n v_m$$

Zij λ_k de dominante eigenwaarde. Voor alle andere eigenwaarden geldt dat ze kleiner dan 1 zijn. Dus nu geldt:

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_j \lambda_j^n v_j = 0 \quad \forall j \neq k$$

En dus,

$$\lim_{n\to\infty} A^n v_0 = \alpha_k \lambda_k^n v_k = \alpha_k v_k = v$$

We schrijven nu $A_n v_0 - v$ uit:

$$A_n v_0 - v = \alpha_1 \lambda_1^n v_1 + \ldots + \alpha_{k-1} \lambda_{k-1}^n v_{k-1} + \alpha_{k+1} \lambda_{k+1}^n v_{k+1} + \ldots + \alpha_m \lambda_m^n v_m$$

En,

$$v_0 - v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_{k-1} v_{k-1} + \alpha_{k+1} v_{k+1} + \ldots + \alpha_m v_m$$

Om $\|A_n v_0 - v\| \leq \lambda^n \|v_0 - v\|$ te bewijzen, bewijzen we het volgende; $\|A_n v_0 - v\|^2 \leq \lambda^{2n} \|v_0 - v\|^2$.

$$\|A_n v_0 - v\|^2 = \|\alpha_1 \lambda_1^n v_1 + \ldots + \alpha_{k-1} \lambda_{k-1}^n v_{k-1} + \alpha_{k+1} \lambda_{k+1}^n v_{k+1} + \ldots + \alpha_m \lambda_m^n v_m\|^2$$

Omdat geldt dat $v_i \cdot v_j = 0 \quad \forall i \neq j$, omdat het basisvectoren zijn. Dus volgt:

$$\|\alpha_1 \lambda_1^n v_1 + \ldots + \alpha_{k-1} \lambda_{k-1}^n v_{k-1} + \alpha_{k+1} \lambda_{k+1}^n v_{k+1} + \ldots + \alpha_m \lambda_m^n v_m\|^2 =$$
$$(\alpha_1 \lambda_1^n v_1)^2 + \ldots + (\alpha_{k-1} \lambda_{k-1}^n v_{k-1})^2 + (\alpha_{k+1} \lambda_{k+1}^n v_{k+1})^2 + \ldots + (\alpha_m \lambda_m^n v_m)^2$$

Voor alle λ_i geldt $\lambda_i \leq \lambda$ en dus:

$$(\alpha_1 \lambda_1^n v_1)^2 + \ldots + (\alpha_{k-1} \lambda_{k-1}^n v_{k-1})^2 + (\alpha_{k+1} \lambda_{k+1}^n v_{k+1})^2 + \ldots + (\alpha_m \lambda_m^n v_m)^2$$
$$\leq \lambda^{2n} ((\alpha_1 v_1)^2 + \ldots + (\alpha_{k-1} v_{k-1})^2 + (\alpha_{k+1} v_{k+1})^2 + \ldots + (\alpha_m v_m)^2)$$
$$= \lambda^{2n} \|v_0 - v\|^2$$

□