Tentamen Modellen en Simulatie

Vrijdag, 17 april 2009, 9:00-12:00, Ruppert Gebouw, Blauwe Zaal

---

- Schrijf op elk vel dat je inlevert je naam en op het eerste vel ook je student nummer de werkcollege groep waar je in zit (of de naam van je werkcollege begeleider: Jan-Jaap Oosterwijk, Ittay Weiss, of Alexandra Babenko). en het totaal aantal ingeleverde vellen.
- Motiveer bij elke opgave duidelijk je antwoorden.
- Gebruik gerust resultaten uit voorgaande onderdelen ook als je geen bewijs hebt.
- Dictaat, collegeaantekeningen mogen gebruikt worden, uitwerkingen van opgaves, grafische rekenmachines mogen niet gebruikt worden.

Opgave 1. Een zekere populatie kan verdeeld worden in 4 leeftijdsklassen. De ontwikkeling van het aantal individuen per leeftijdsklasse kan beschreven worden door een matrix-vector recursie middels de volgende Leslie matrix:

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 4 & 0 \\ \frac{3}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

a) Kan je op grond van de stelling van Perron-Frobenius beslissen of deze matrix een dominante eigenwaarde heeft? Motiveer je antwoord.

De 4-jarigen (leeftijdsklasse 4) doen niet mee aan het voortplantingsproces. Laten we deze leeftijdsklasse buiten beschouwing dan heeft dat geen invloed op de andere leeftijdsklasse.

b) Hoe ziet het Leslie model er uit zonder de 'oudjes'?

Als je **b.** niet hebt, werk dan in **c** en **d** met

$$\begin{bmatrix} 0 & 6 & 12 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}.$$

c) Dit gereduceerd model heeft wel een dominante eigenwaarde (waarom?). Laat zien dat deze gelijk is aan 2.

d) Wat is op den duur de verhouding tussen de aantallen van de drie leeftijdsklasse van het gereduceerde model?

e) Kan je nu ook een conclusie trekken over het aantal 4-jarige versus het aantal 1-jarige? Is 2 ook een dominante eigenwaarde voor het ongereduceerde model?

Opgave 2. Een zeker soort sluipwespen W heeft een bepaald soort rupsen R nodig om zich voort te planten. In iedere rups wordt hoogstens een eitje gelegd. Een rups waarin een eitje gelegd is is ten dode gedoemd. Als r_n het aantal rupsen is van soort R in jaar n en w_n het aantal vrouwelijke sluipwespen dan geeft

$$\begin{cases} r_{n+1} = \left(a - \dfrac{r_n}{R_{\max}} - \dfrac{w_n}{W_{\max}}\right) r_n \\ w_{n+1} = \beta \dfrac{r_n}{1+\gamma r_n} w_n \end{cases},$$

voor bepaalde positieve waarden van a, $R_{\max}$, $W_{\max}$, β en γ, een modellering voor de groei van een rupsen– en sluipwespenpopulatie.

a) In eenvoudigere modellen wordt $\gamma = 0$ genomen. Verklaren wat men met de 'extra' term $1 + \gamma r_n$ in de noemer probeert te modelleren. Wij nemen verder $\gamma \neq 0$.

Door handig te schalen kunnen we het stelsel vereenvoudigen.
Laat zien dat de nieuwe variabelen $x_n = r_n/R_{\max}$ en $y_n = w_n/W_{\max}$ voldoen aan

$$\begin{cases} x_{n+1} = (a - x_n - y_n)x_n, \\ y_{n+1} = b \dfrac{x_n}{1 + c\,x_n} y_n. \end{cases} \tag{1}$$

b) Geef een uitdrukking voor b en c in termen van a, $R_{\max}$, $W_{\max}$, β en γ.

We nemen verder aan dat $c = 1$ en $b > 1$.

c) Bepaal voor alle $a > 0$ en $b > 0$ de evenwichtspunten van (1) die biologisch relevant zijn. Hangt dat ook nog van a en b af? Zo ja, hoe?

Uit c). blijkt dat $(1/(b-1), a - b/(b-1))$ een evenwicht is. Neem verder $b = 2$ en bekijk alleen waarden voor a waarvoor dit evenwicht biologisch relevant is.

d) Toon aan dat de eigenwaarden van de Jacobi matrix in dit evenwicht voldoen aan

$$\lambda^2 - \lambda + (a-2)/2 = 0.$$

e) Bepaal voor welke waarden van a dit evenwicht stabiel is. (*Hint: De eigenwaarden kunnen, afhankelijk van a, complex zijn. Toon eerst aan dat het evenwicht stabiel is als de eigenwaarden reeel zijn. Bekijk dan het complexe geval.*)

Opgave 3. In een fietsfabriek worden racefietsen en mountainbikes gemaakt. De netto winst per racefiets is €225 en de netto winst per mountainbike is €300 euro. Met de beschikbare arbeidskracht kunnen maximaal 800 fietsen per week gemaakt worden en beide types kosten evenveel werk. Met een bepaalde boormachine kan 40 uur per week gewerkt worden. Voor de vervaardiging van een racefiets is de boormachine $\frac{1}{25}^{ste}$ uur nodig en voor een mountainbike tweemaal zo lang. Van een bepaald soort buis zijn 8 eenheden nodig voor een racefiets en 14 eenheden voor een mountainbike. De toelevering vanuit de aluminiumfabriek is maximaal 5600 eenheden per week.

a) Hoevel racefietsen en hoeveel mountainbikes moet de fabriek per week produceren om een zo groot mogelijke winst te maken? En hoe groot is die winst dan?

Opgave 4. Voor de groei van de hoeveelheid gras in een wei die door schapen begraasd wordt, gebruiken we het volgende continue model:

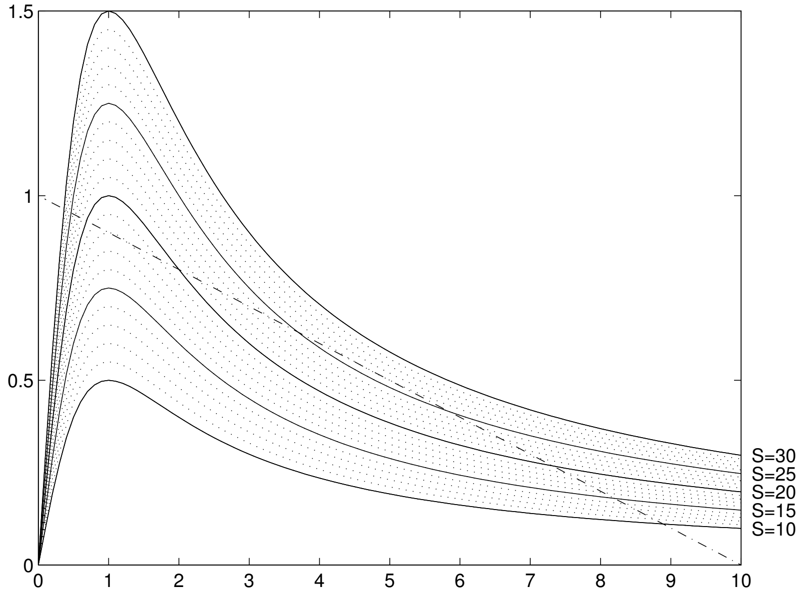
$$G' = \kappa G \left(1 - \frac{G}{G_0}\right) - \gamma S \frac{G^2}{G_1^2 + G^2} \qquad (2)$$

waarbij $G(t)$ de totale hoeveelheid gras is in de wei op tijdstip t. Verder is S het aantal schapen in de wei. De overige grootheden zijn constanten: γ en κ zijn evenredigheidsconstanten en G_0 representeert de "maximale" hoeveelheid gras.

a) Interpreteer de term $\gamma S G^2/(G_1^2 + G^2)$. Wat voor invloed heeft de constante G_1?

b) Hoe heet de groei in dit model als er geen schapen in de wei zijn ($S = 0$)?

Neem verder $G_0 = 10$, $G_1 = 1$ en $\kappa = 1$, $\gamma = 0.1$.



In bovenstaand figuur staat de grafiek van $G \mapsto 1 - G/10$ (-.-.), en, voor diverse S tussen 10 en 30, de grafiek van $G \mapsto 0.1\,S\,G/(1+G^2)$: voor $S = 10, 15, 20, 25, 30$ is de grafiek aangegeven met een doorlopende lijn (—), voor de overige S met stippels $(\cdots)$. Bij het beantwoorden van de volgende vragen kun je gebruik maken van de informatie die je uit de grafieken kunt halen. Het snijpunt van $1 - G/10$ en $\frac{1}{10} S\,G/(1+G^2)$ tussen 0 en 1 heet α_S (als het bestaat), dat tussen 1 en ≈ 5 heet β_S (ook weer alleen als het bestaat) en tussen ≈ 5 en 10 heet γ_S (als het bestaat). Je hoeft de numerieke waarde van deze snijpunten hier niet expliciet te berekenen.

c) Beschrijf de evenwichten (in termen van bijvoorbeeld α_S, β_S en γ_S; zie plaatje) en hun stabiliteit voor $S = 10$, $S = 20$ en $S = 30$. (*Hint: maak een plaatje langt de "G-as" waarin je de evenwichten aangeeft en geef middels pijltjes aan hoe de oplossing in andere punten op die G-as zal verlopen.*)

d) De boer wacht telkens met veranderingen tot de hoeveelheid gras in de wei min of meer in evenwicht is.
Wat gebeurt er met zijn grasopbrengst als hij telkens een schaap meer in zijn wei laat grazen en zo zijn kudde geleidelijk uitbreidt van 10 naar 30 schapen? Wat is het effect van een daarop volgende geleidelijke reductie van de kudde?