Tentamen Modellen en Simulatie

Woensdag, 29 juni 2011, 17:00-20:00, Educatorium, Beta Zaal

- Schrijf op elk vel dat je inlevert je naam en op het eerste vel je studentnummer en het totaal aantal ingeleverde vellen.
- Motiveer bij elke opgave duidelijk je antwoorden.
- Gebruik gerust resultaten uit voorgaande onderdelen ook als je geen bewijs hebt.
- Het dictaat, copiën van de transparanten en een eenvoudige rekenmachine mag gebruikt worden, uitwerkingen van opgaven, grafische rekenmachines mogen dat niet.

Opgave 1. Een zekere populatie kan verdeeld worden in 5 leeftijdsklassen. De ontwikkeling van het aantal individuen per leeftijdsklasse kan beschreven worden door een matrix-vector recursie middels de volgende Leslie matrix:

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 & 4 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

a) Teken de bij L behorende graaf en onderzoek deze op irreducibiliteit en periodiciteit.

b) Laat zien dat de recursie een dominante eigenwaarde heeft (zonder de eigenwaarden expliciet te berekenen).

c) Construeer eigenvectoren van de vorm $(\lambda^4, a_2\lambda^3, a_3\lambda^2, \ldots)^T$, met $a_1, a_2, \ldots$ geschikte constanten, en laat zien dat de eigenwaarden λ_i de oplossing zijn van

$$\lambda^5 = \frac{1}{4}\lambda^3 + \frac{1}{4}\lambda^2 + \frac{1}{4}\lambda + \frac{1}{4}.$$

d) Toon aan dat $\lambda = 1$ de dominante eigenwaarde is.
(*Hint: voor* $\lambda > 1$ *is* $\frac{1}{4}\lambda^3 + \frac{1}{4}\lambda^2 + \frac{1}{4}\lambda + \frac{1}{4} < \frac{1}{4}\lambda^5 + \frac{1}{4}\lambda^5 + \frac{1}{4}\lambda^5 + \frac{1}{4}\lambda^5 = \lambda^5$.)

e) Laat zien dat de verhouding tussen het aantal in de eerste leeftijdsklassen en in de tweede leeftijdsklassen op den duur gelijk is aan 4 : 1 ongeacht de beginsituatie.

Opgave 2. De logistische iteratie-afbeelding wordt aangepast om tot uitdrukking te brengen dat een populatie niet onmiddellijk met de invloed van zijn omvang op de groeicoëfficiënt geconfronteerd wordt.

$$a_{n+1} = A\,(1 - a_{n-1})\,a_n \tag{1}$$

a) Werk de afbeelding om naar een systeem met als toestandsvariabelen $x_n = a_n$ en $y_n = a_{n-1}$.

b) Bepaal de evenwichten van dit systeem.

c) Bepaal de stabiliteit van de evenwichten. Hoe hangt de stabiliteit af van A?

Als aanpassing voor de logistische iteratie-afbeelding ziet men ook wel eens het model

$$a_{n+1} = A\,(1 - a_n)\,a_{n-1} \tag{2}$$

d) Welk effect heeft men met dit model tot uitdrukking willen brengen?

Opgave 3. Van een insectensoort is, binnen een zeker afgesloten gebied, $V(t)$ het aantal volwassenen op tijdstip t en $L(t)$ is het aantal larven op dat tijdstip. De ontwikkeling in de aantallen volwassenen en larven blijkt beschreven te kunnen worden met het volgende continue model.

$$\begin{cases} L' = \alpha V - \beta L - \gamma L V \\ V' = \beta L - \delta V \end{cases} \tag{3}$$

Hierin zijn α, β, γ en δ zekere bekende positieve constanten.

a) Interpreteer de term γLV.

We nemen verder in deze opgave $\alpha = \beta = \gamma = 1$.

b) Geef in het relevante deel van het L-V-vlak aan waar $L' = 0$. respectievelijk $V' = 0$: kies hiervoor een of twee relevante en karakteristieke waarden voor δ (en geef ook een of twee figuren). Geef het tekenverloop van L' en V' aan (middels pijltjes) in het diagram dat zo ontstaat. Bepaal de evenwichten.

c) Kan je grafisch inzien of de evenwichten stabiel zijn? Met wat voor soort evenwichten heb je te maken? Hangt dat nog af van de waarde van δ? Geef duidelijke argumenten. Schets een aantal karakteristieke oplossingskrommen.

d) Voor $\delta > 1$ sterft de insectenpopulatie uit. Waarom? Bepaal voor $\delta = 2$ in de uitstervende fase de verhouding tussen het aantal volwassenen en het aantal larven.

Opgave 4. Een fabriek produceert drie soorten staande lampen, L_1, L_2 en L_3, waarop een bruto-winst wordt gemaakt van resp. 5, 15 en 10 Euro per stuk. Lampen van type L_1 bestaan uit een lampenkap, die van type L_2 uit twee lampenkappen en die van type L_3 uit drie lampenkappen. Maandelijks krijgt de fabriek 600 lampenkappen aangeleverd. Het in elkaar zetten gebeurt door een machine die per maand hooguit 480 uur in werking is. Volgens gegevens van de fabriek is de machine resp. 4, 2 en 1 uur bezig met het vervaardigen van één lamp van type resp. L_1, L_2 en L_3. Bovendien worden alle geproduceerde lampen aan het eind van de maand daadwerkelijk afgenomen.

a) Formuleer het maximaliseren van de winst als een lineair programmeringsprobleem.

b) Los het lineaire programmeringsprobleem op door gebruik te maken van de simplexmethode. (*Hint: Laat in eerste instantie het aantal L_2-lampen toenemen.*) Wat is voor dit bedrijf de maximaal realiseerbare winst per maand?

c) Geef beknopt aan wat de betekenis is van de waarden van de slackvariabelen bij het optimale maandelijkse productieschema.