Utrecht, 26 april 2013

Modellen en Simulatie
Populatiegroei

Gerard Sleijpen

Universiteit Utrecht
Department of Mathematics

http://www.staff.science.uu.nl/∼sleij101/

Program

- Populatie groei van één soort, recursies
- Evenwichtspunten
- Periodieke banen
- Bifurcatie
- Chaos
- Catastrofe

Program

- Populatie groei van één soort, recursies
- Evenwichtspunten
- Periodieke banen
- Bifurcatie
- Chaos
- Catastrofe

N_n: aantal individuen eind tijdvak n.

Aanname [Malthus, 1798]: In ieder tijdvak: fractie s sterft, fractie g geboren

Model. $N_{n+1} = N_n + g\,N_n - s\,N_n = \kappa\,N_n$
met $\kappa = 1 + g - s$, κ is de **groeicoëfficiënt**

N_n: aantal individuen eind tijdvak n.

Aanname [Malthus, 1798]:
In ieder tijdvak: fractie s sterft, fractie g geboren

Model. $N_{n+1} = N_n + g\,N_n - s\,N_n = \kappa\,N_n$
met $\kappa = 1 + g - s$, κ is de **groeicoëfficiënt**

Oplossing. $N_n = (1 + g - s)^n\,N_0 = \kappa^n\,N_0$:

de groei is **exponentiëel**

N_n: aantal individuen eind tijdvak n.

Aanname [Malthus, 1798]:
In ieder tijdvak: fractie s sterft, fractie g geboren

Model. $N_{n+1} = N_n + g\,N_n - s\,N_n = \kappa\,N_n$
met $\kappa = 1 + g - s$, κ is de **groeicoëfficiënt**

Oplossing. $N_n = (1 + g - s)^n\,N_0 = \kappa^n\,N_0$:

de groei is **exponentiëel**

Wat gebeurt er op den duur ($n \to \infty$)?

N_n: aantal individuen eind tijdvak n.

Aanname [Malthus, 1798]:
In ieder tijdvak: fractie s sterft, fractie g geboren

Model. $N_{n+1} = N_n + g\,N_n - s\,N_n = \kappa\,N_n$
met $\kappa = 1 + g - s$, κ is de **groeicoëfficiënt**

Oplossing. $N_n = (1 + g - s)^n\,N_0 = \kappa^n\,N_0$:

de groei is **exponentiëel**

Wat gebeurt er op den duur ($n \to \infty$)?

$$\boxed{\begin{array}{rcll} \kappa > 1 & \Rightarrow & N_n \to \infty & \text{voor } n \to \infty \\ 0 \leq \kappa < 1 & \Rightarrow & N_n \to 0 & \text{voor } n \to \infty \end{array}}$$

$$\kappa = 1 \quad \Rightarrow \quad N_n = N_0 \quad \text{alle} \quad n$$

Bezwaren tegen het Malthus model

- groeicoëfficiënt kan afhangen van N_n,
- groeicoëfficiënt kan afhangen van n,
- groeicoëfficiënt kan afhangen van N_n, $N_{n-1}, \ldots$
- groeicoëfficiënt kan beïnvloed worden door andere soorten,
- veranderingen kunnen optreden op elk tijdstip (tijdsvakgedachte niet houdbaar)
- groei kan plaats afhankelijk zijn

  $\vdots$

Modificaties

(groeicoëfficiënt hangt af van N_n)

Aanname:
De groeicoëfficiënt daalt als N_n groeit.

Modificaties

(groeicoëfficiënt hangt af van N_n)

Aanname:
De groeicoëfficiënt daalt als N_n groeit.

Model [Verhulst, 1840]:

$$N_{n+1} = \kappa_0 \left(1 - \frac{N_n}{N}\right) N_n - J$$

met κ_0, N en J bekende positieve constanten
(die experimenteel bepaald zijn).

Logistische groei

Modificaties

(groeicoëfficiënt hangt af van N_n)

Aanname:
De groeicoëfficiënt daalt als N_n groeit.

Model [Verhulst, 1840]:

$$N_{n+1} = \kappa_0 \left(1 - \frac{N_n}{N}\right) N_n - J$$

Model [Hassel, Lawton, May, 1976]:

$$N_{n+1} = \frac{\kappa_0}{\left(1 + \frac{N_n}{N}\right)^c} N_n$$

met κ_0, N en c bekende positieve constanten
(die experimenteel bepaald zijn).

Modificaties

(groeicoëfficiënt hangt af van N_n)

Aanname:
De groeicoëfficiënt daalt als N_n groeit.

Model [Verhulst, 1840]:

$$N_{n+1} = \kappa_0 \left(1 - \frac{N_n}{N}\right) N_n - J$$

Model [Ricker, 1976]:

$$N_{n+1} = \kappa_0 \, e^{-N_n/N} \, N_n$$

met κ_0 en N bekende positieve constanten
(die experimenteel bepaald zijn).

Analyse

Schaal. $x_n \equiv \frac{N_n}{N}$.

Dan $$\boxed{x_{n+1} = f(x_n)}$$ met

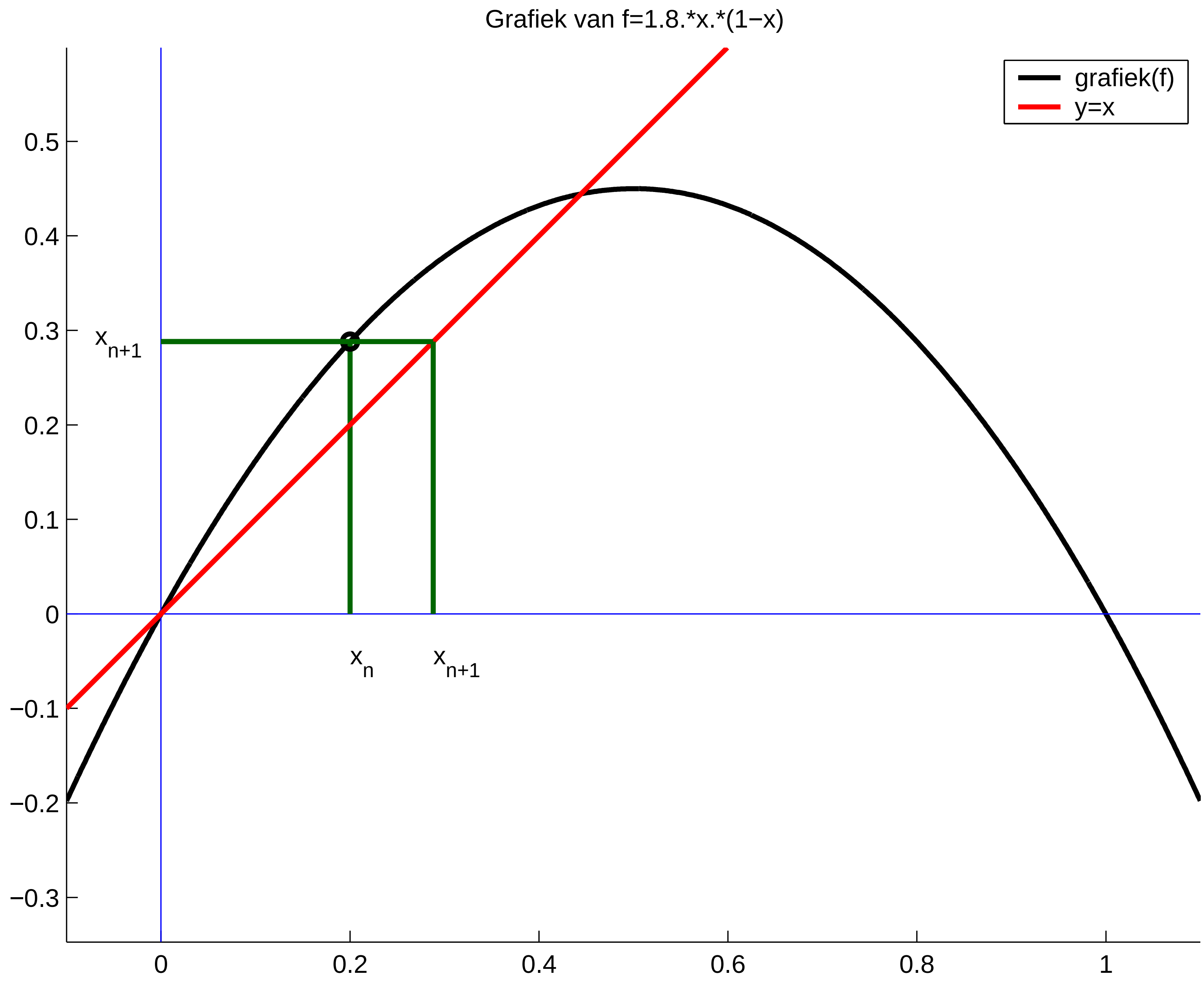
- Malthus: $f(x) = \kappa\, x$
- Verhulst: $f(x) = \kappa_0\,(1 - x)\,x - b$ met $b \equiv J/N$.
- Hassel, Lawton, May: $f(x) = \dfrac{\kappa_0}{(1+x)^c}\,x$.
- Ricker: $f(x) = \kappa_0\, e^{-x}\, x$.

Grafische analyse

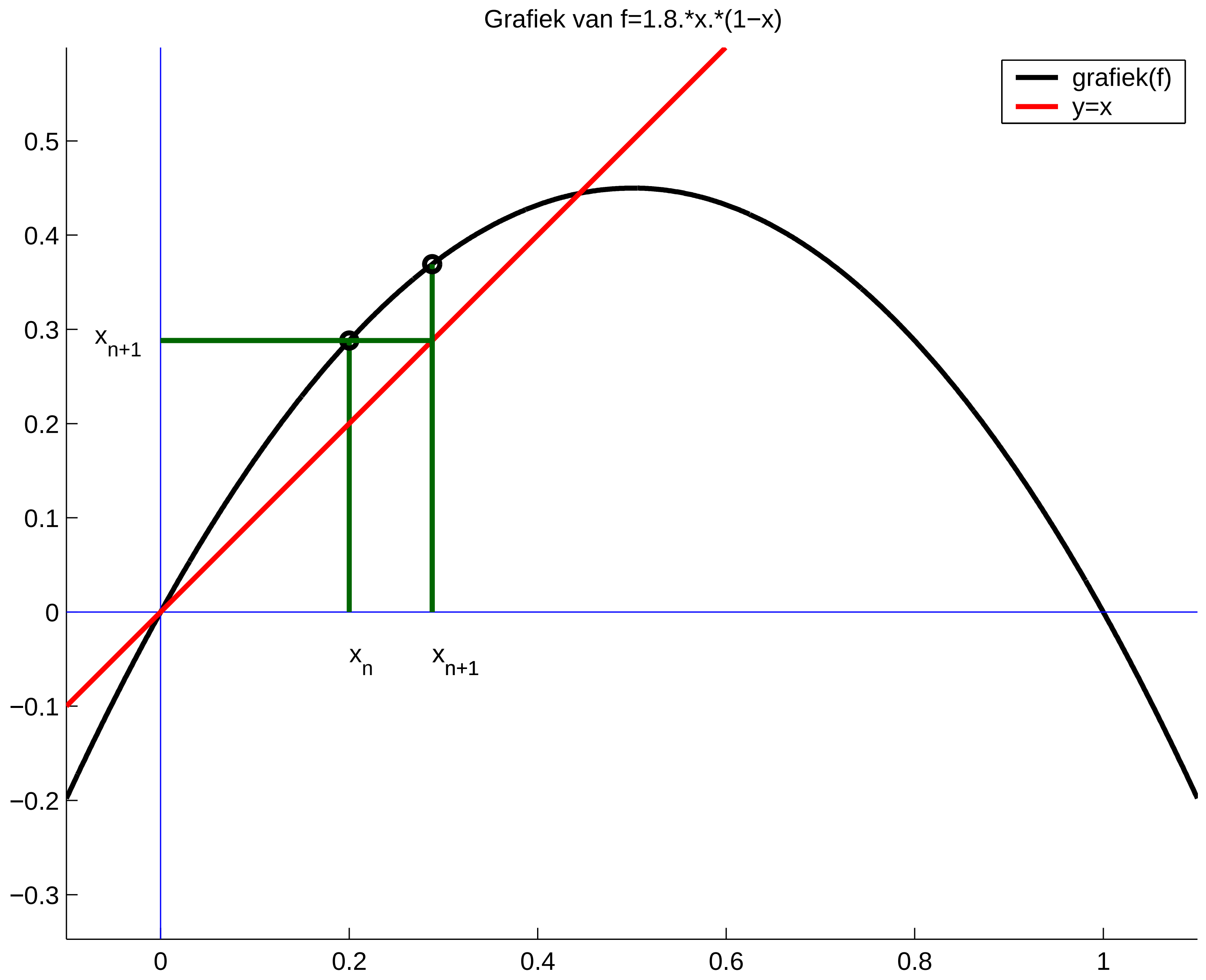
Grafische analyse

Grafische analyse

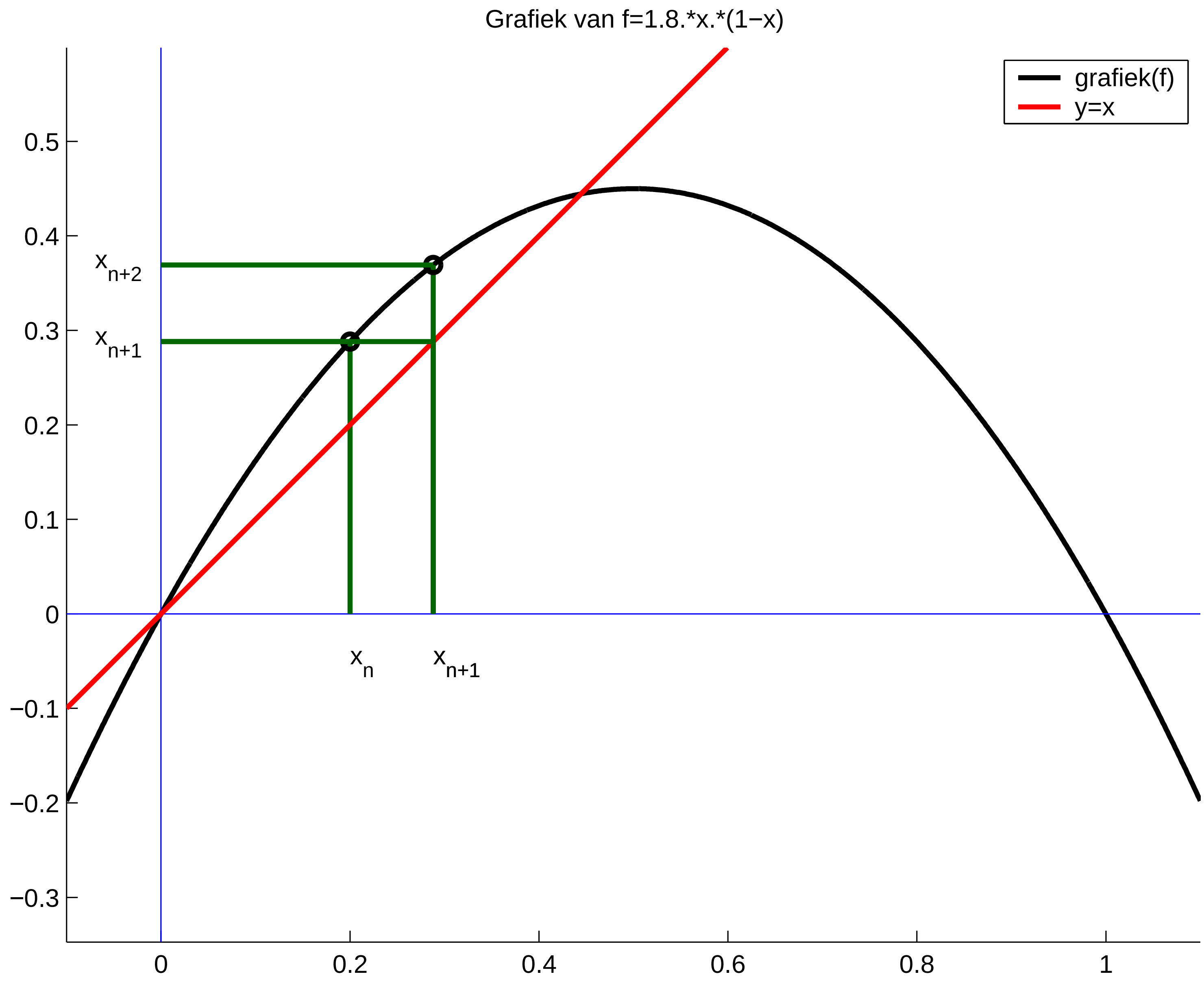
Grafische analyse



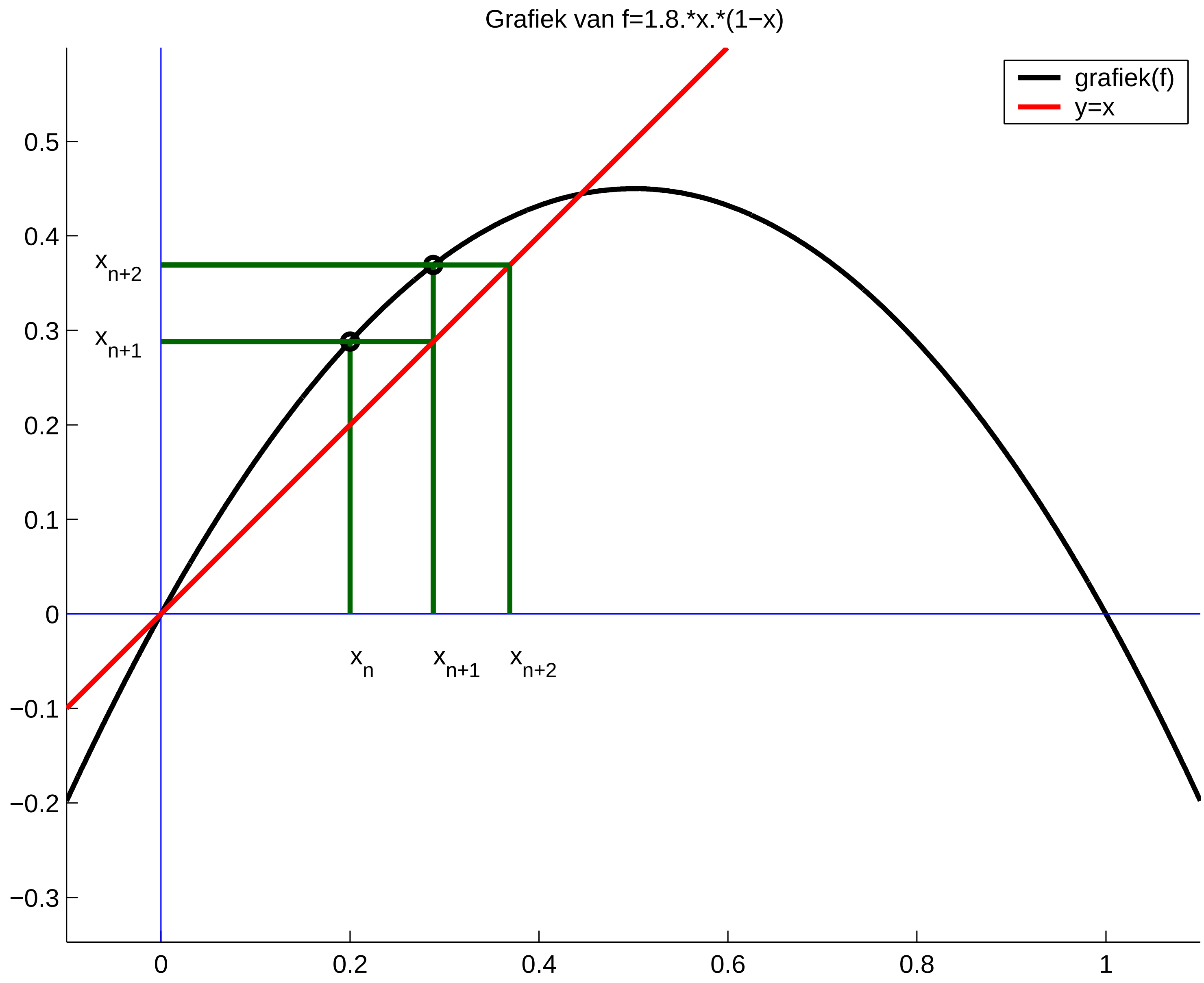
Grafische analyse



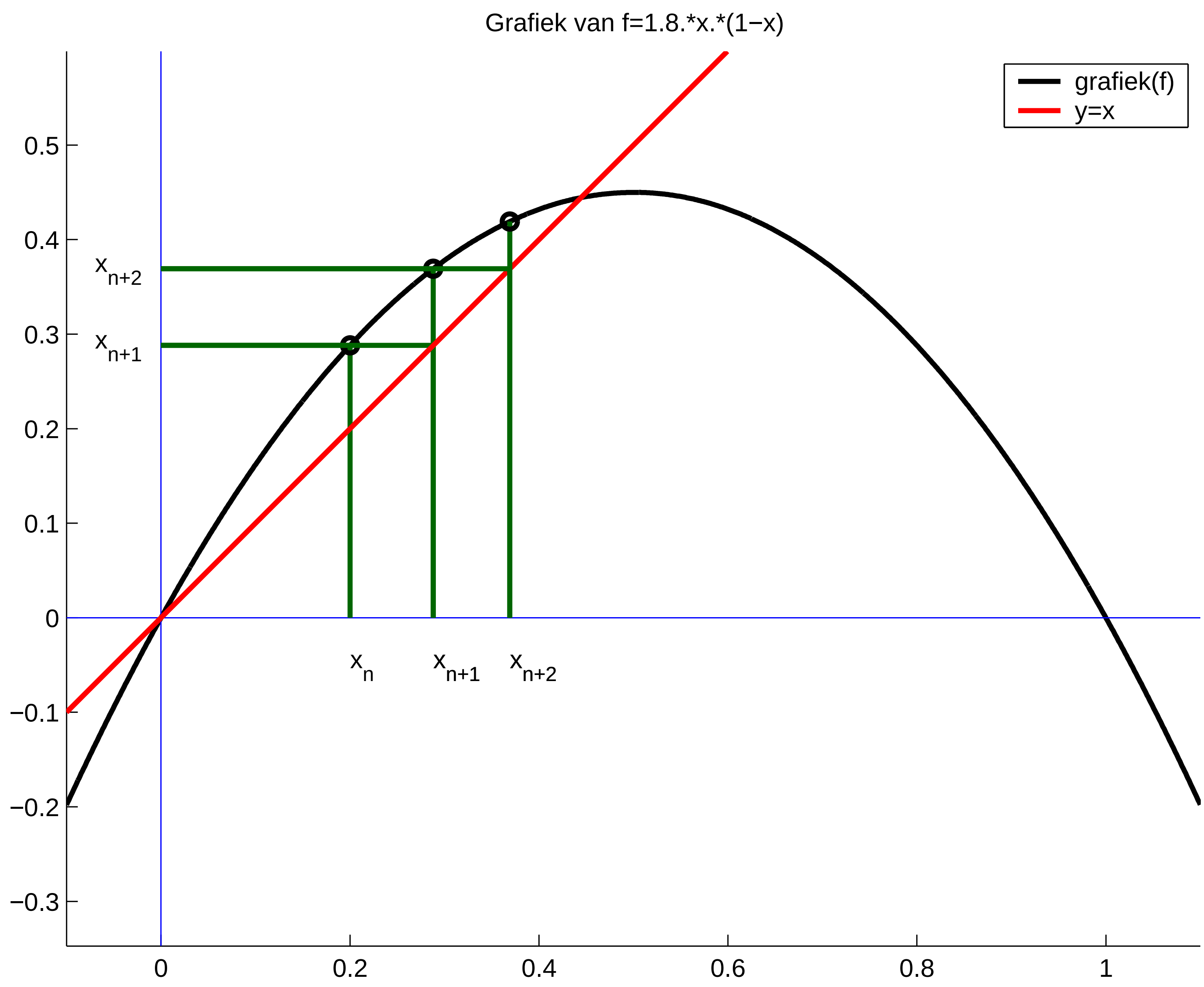
Grafische analyse



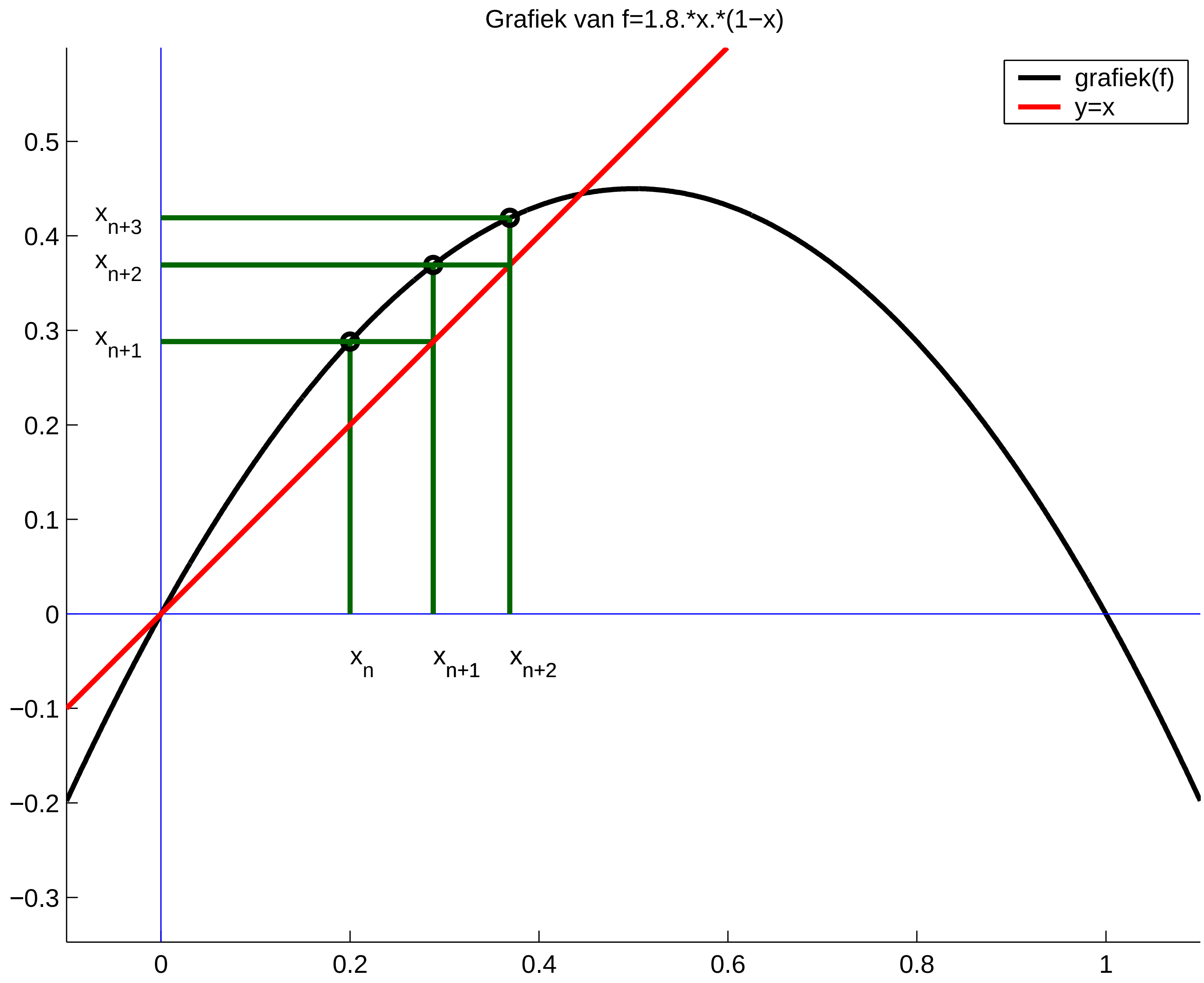
Grafische analyse



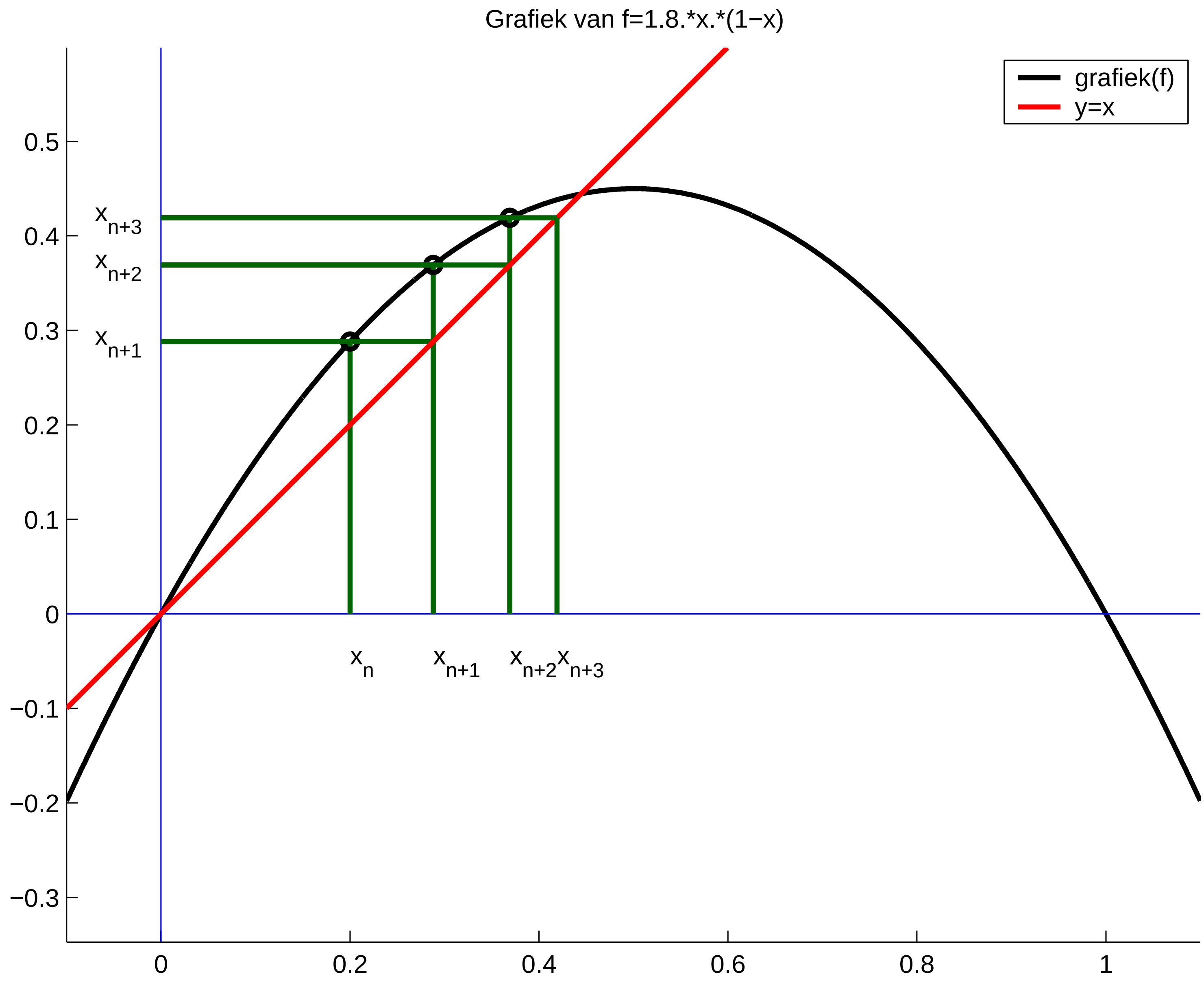
Grafische analyse



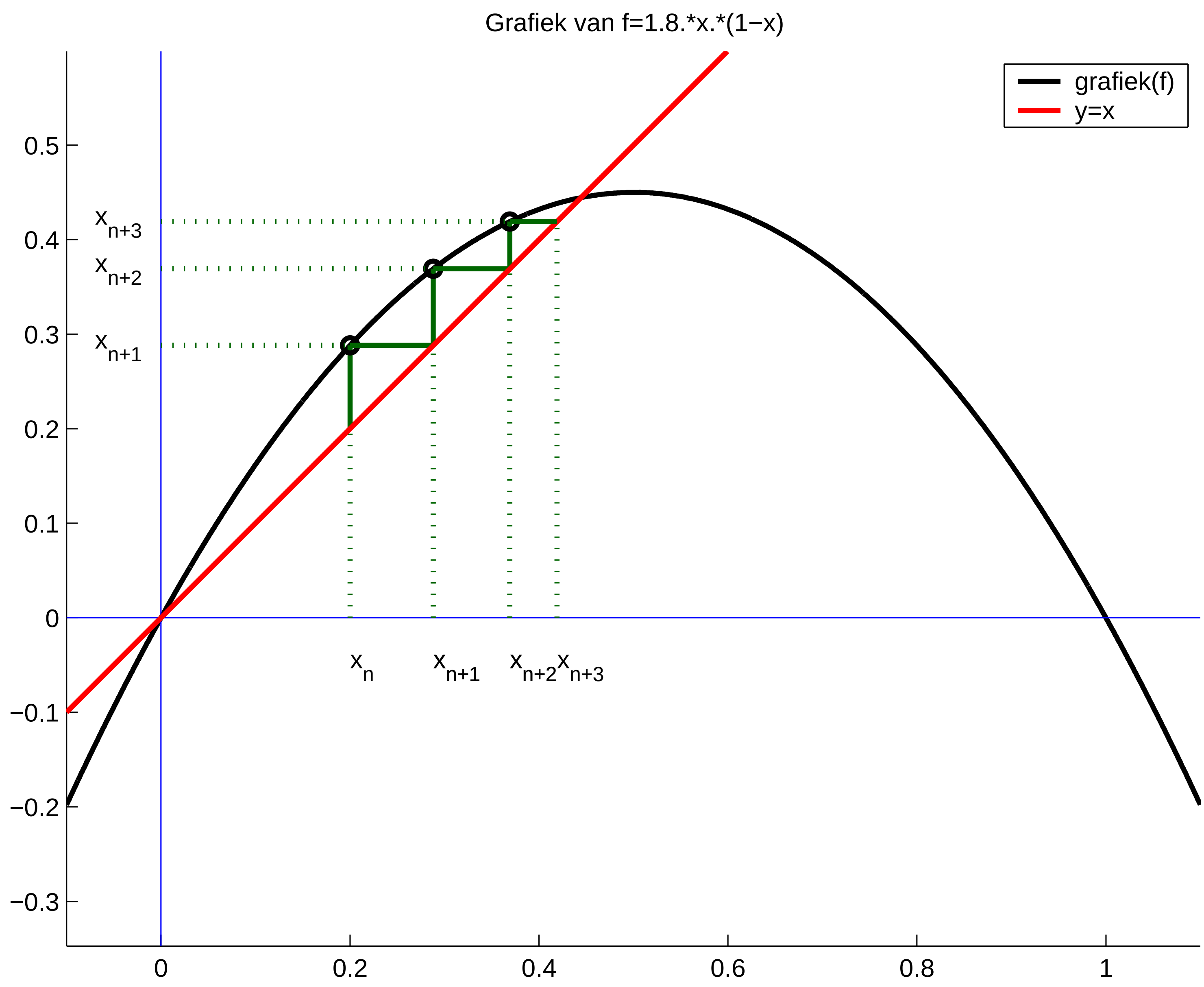
Grafische analyse



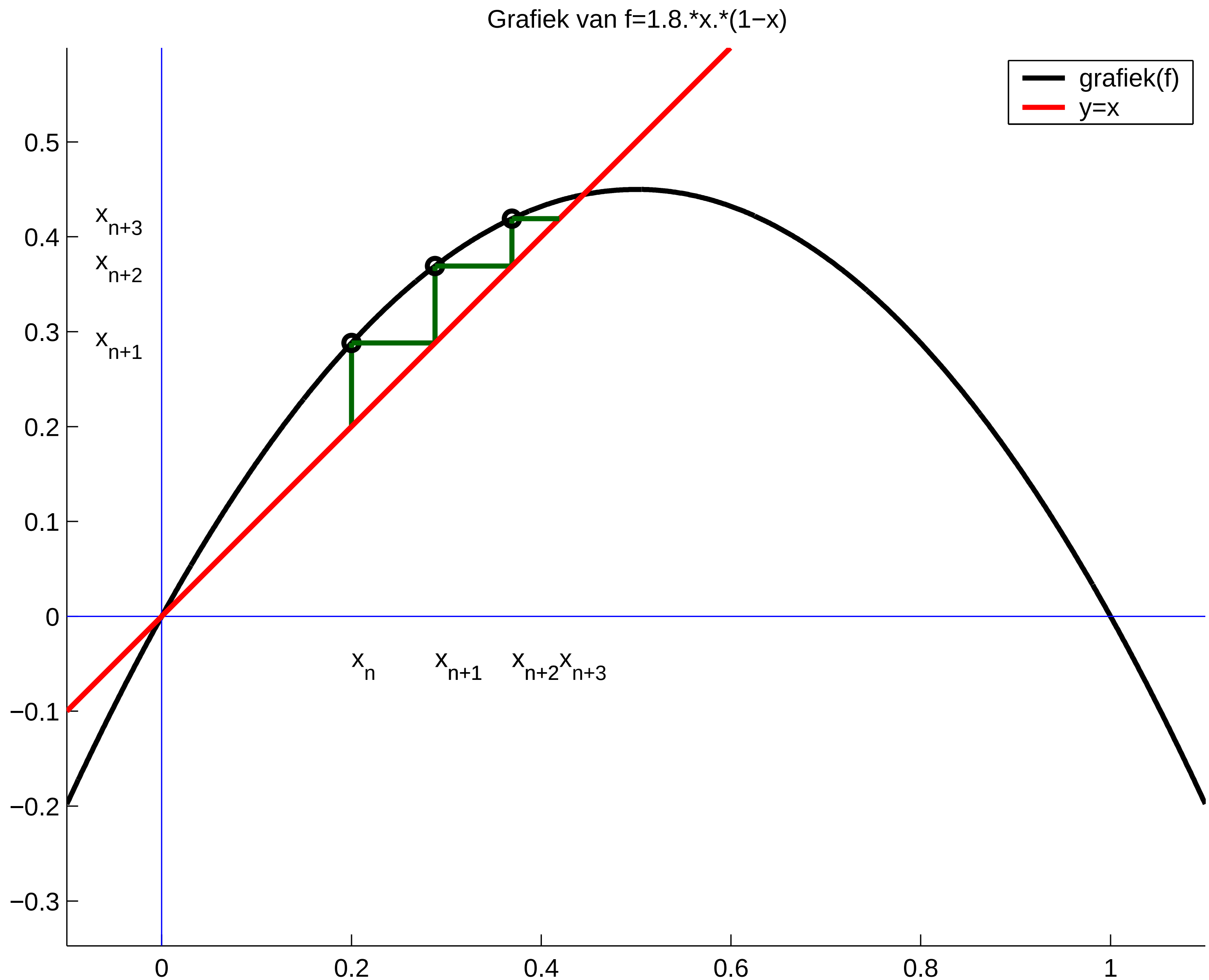
Grafische analyse



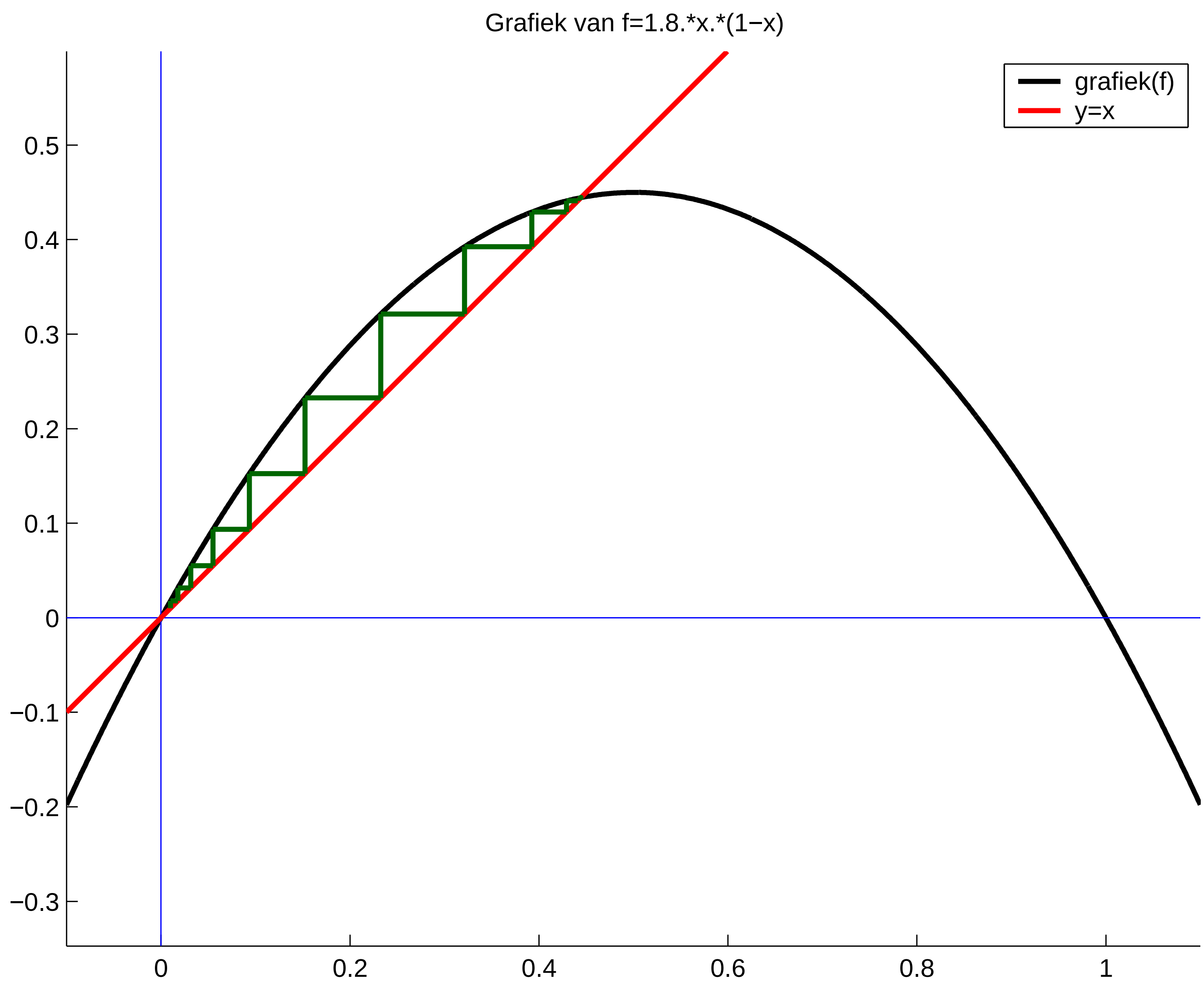
Grafische analyse



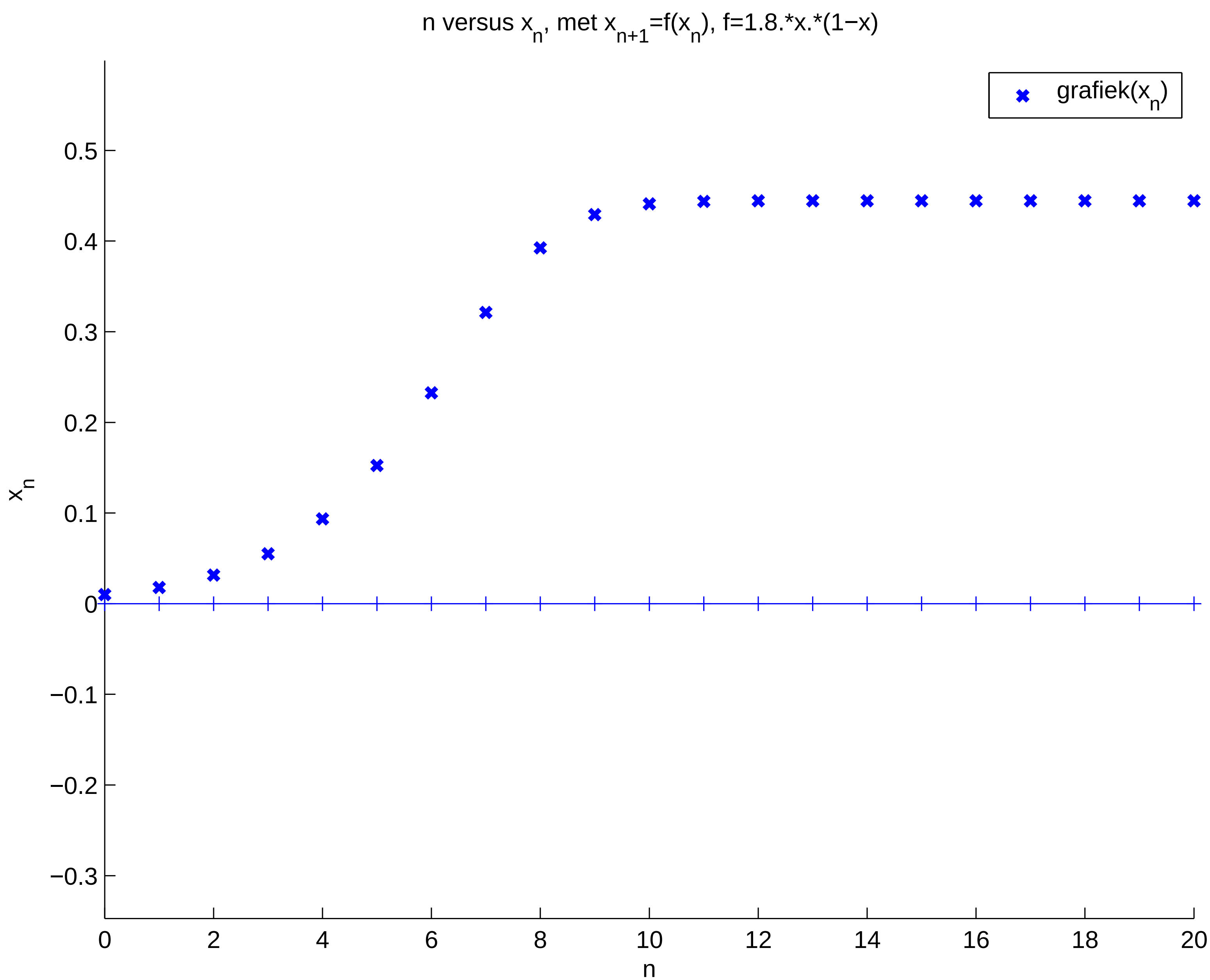
Grafische analyse



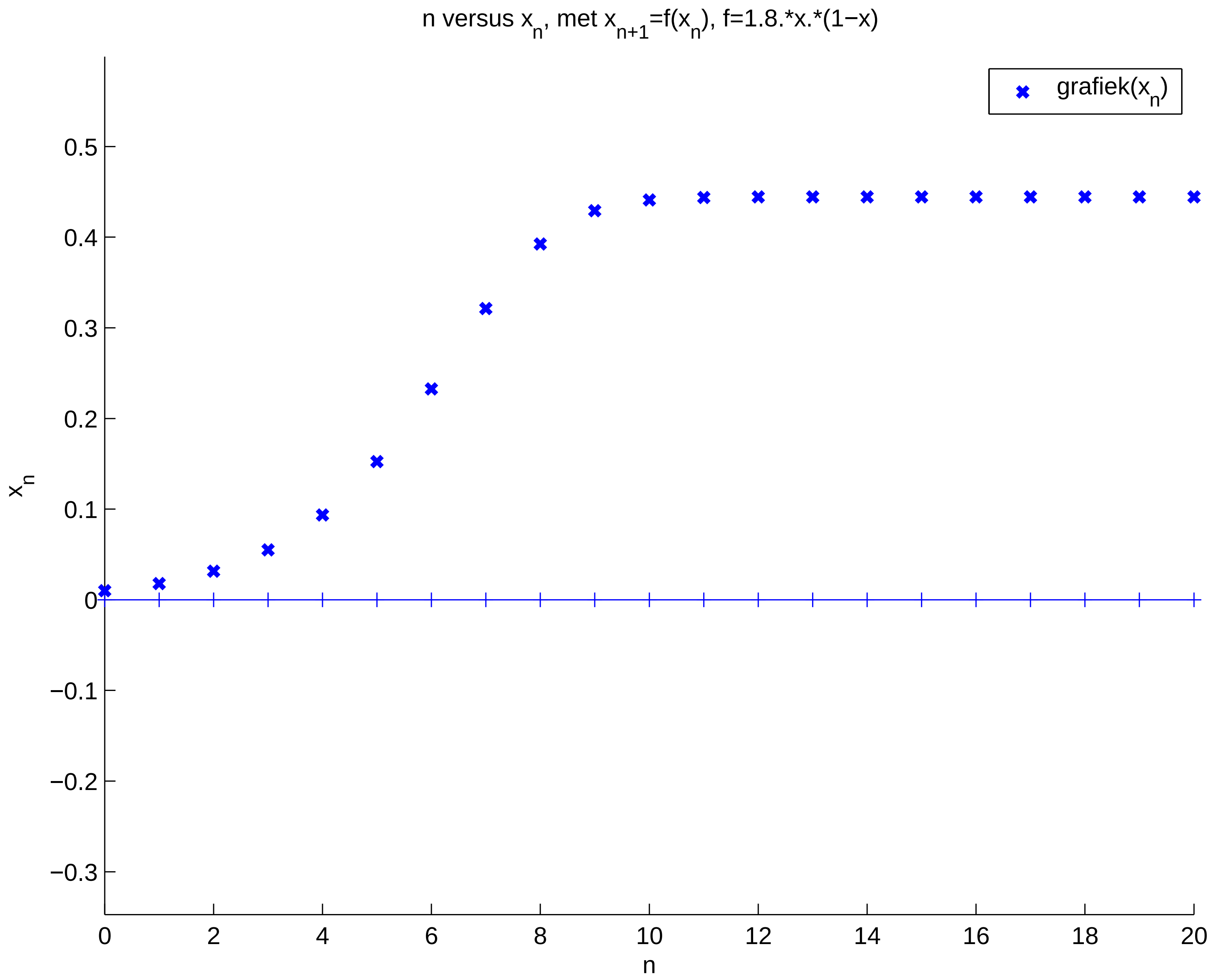
Grafische analyse



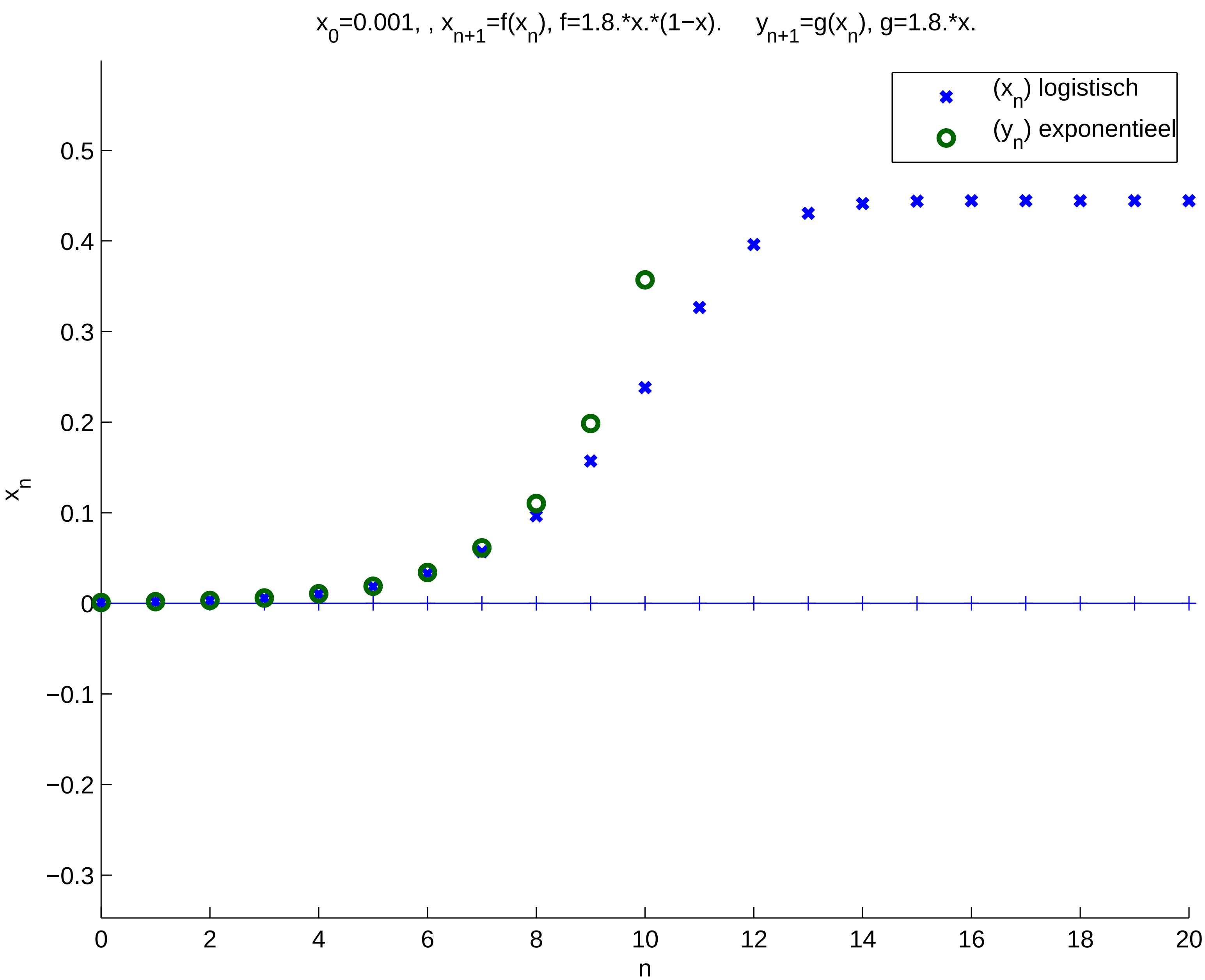
Grafische analyse



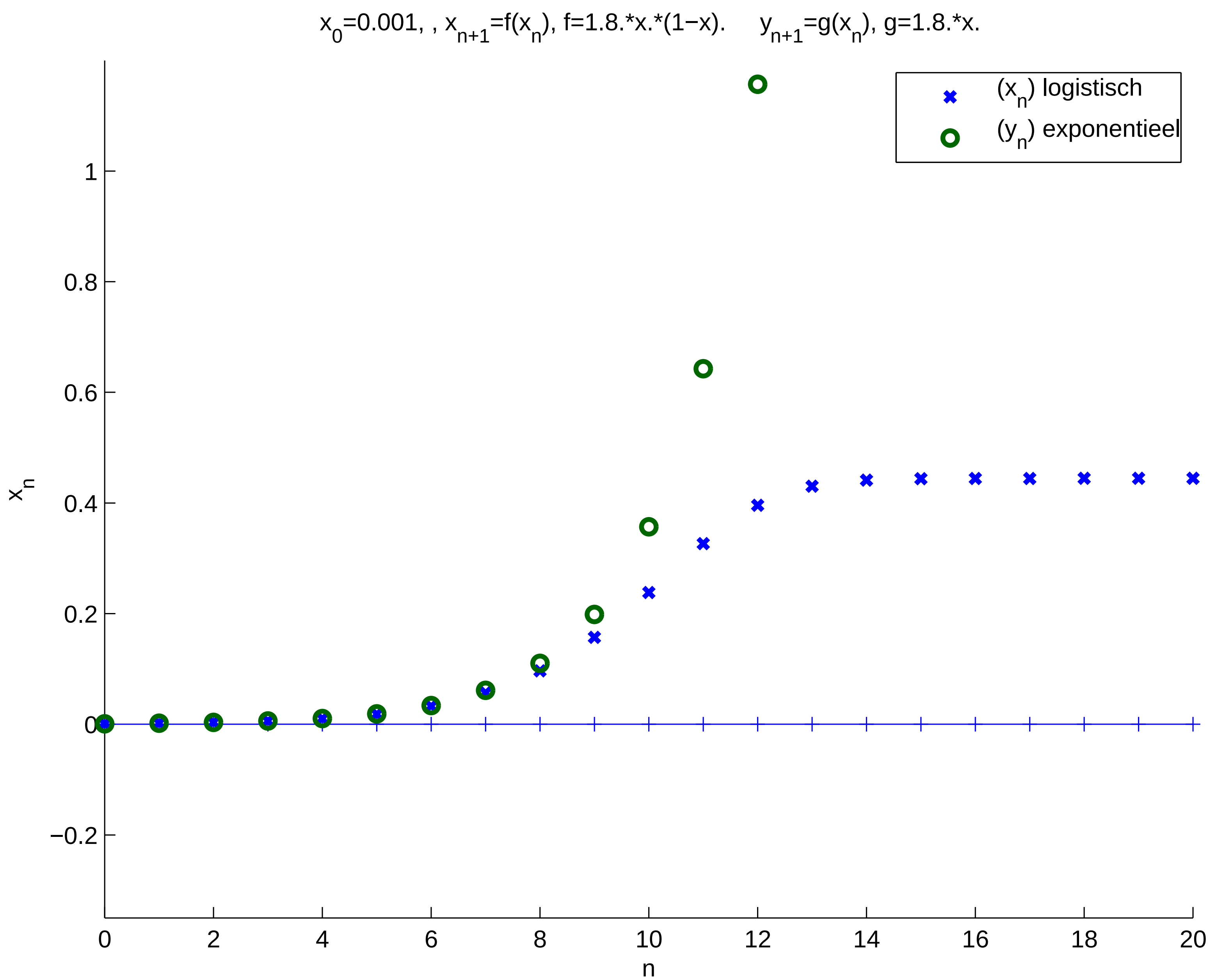
Logistische groei



Logistische groei



Logistische groei



Program

- Populatie groei van één soort, recursies
- Evenwichtspunten
- Periodieke banen
- Bifurcatie
- Chaos
- Catastrofe

Terminologie

Voor **beginwaarde** x_0 is $(x_0, x_1, x_2, \ldots)$ een **baan**

van de **recursie** als $\boxed{x_{n+1} = f(x_n) \quad \text{alle} \quad n}$

De baan is in **evenwicht** als $x_0 = x_1 = x_2 = \ldots$

$\Leftrightarrow \quad x_0 = \alpha$ met α het **evenwichtspunt**: $\alpha = f(\alpha)$.

Terminologie

Voor **beginwaarde** x_0 is $(x_0, x_1, x_2, \ldots)$ een **baan**

van de **iteratief proces** als $\boxed{x_{n+1} = f(x_n) \quad \text{alle} \quad n}$

De baan is in **evenwicht** als $x_0 = x_1 = x_2 = \ldots$

$\Leftrightarrow$ $x_0 = \alpha$ met α het **evenwichtspunt**: $\alpha = f(\alpha)$.

Terminologie

Voor **beginwaarde** x_0 is $(x_0, x_1, x_2, \ldots)$ een **baan**

van de **recursie** als $\boxed{x_{n+1} = f(x_n) \quad \text{alle} \quad n}$

De baan is in **evenwicht** als $x_0 = x_1 = x_2 = \ldots$

$\Leftrightarrow \quad x_0 = \alpha$ met α het **evenwicht**: $\alpha = f(\alpha)$.

Terminologie

Voor **beginwaarde** x_0 is $(x_0, x_1, x_2, \ldots)$ een **baan**

van de **recursie** als $\boxed{x_{n+1} = f(x_n) \quad \text{alle} \quad n}$

De baan is in **evenwicht** als $x_0 = x_1 = x_2 = \ldots$

$\Leftrightarrow \quad x_0 = \alpha$ met α het **vast punt**: $\alpha = f(\alpha)$.

Terminologie

Voor **beginwaarde** x_0 is $(x_0, x_1, x_2, \ldots)$ een **baan**

van de **recursie** als $\boxed{x_{n+1} = f(x_n) \quad \text{alle} \quad n}$

De baan is in **evenwicht** als $x_0 = x_1 = x_2 = \ldots$

$\Leftrightarrow \quad x_0 = \alpha$ met α het **dekpunt**: $\alpha = f(\alpha)$.

Terminologie

Voor **beginwaarde** x_0 is $(x_0, x_1, x_2, \ldots)$ een **baan**

van de **recursie** als $\boxed{x_{n+1} = f(x_n) \quad \text{alle} \quad n}$

De baan is in **evenwicht** als $x_0 = x_1 = x_2 = \ldots$

$\Leftrightarrow \quad x_0 = \alpha$ met α het **evenwichtspunt**: $\alpha = f(\alpha)$.

De baan is op **den duur bijna** in evenwicht als

$x_n \to \alpha$ voor $n \to \infty$ met α het evenwichtspunt

Terminologie

Voor **beginwaarde** x_0 is $(x_0, x_1, x_2, \ldots)$ een **baan**

van de **recursie** als $\boxed{x_{n+1} = f(x_n) \quad \text{alle} \quad n}$

De baan is in **evenwicht** als $x_0 = x_1 = x_2 = \ldots$

$\Leftrightarrow \quad x_0 = \alpha$ met α het **evenwichtspunt**: $\alpha = f(\alpha)$.

De baan is op **den duur bijna** in evenwicht als

$x_n \to \alpha$ voor $n \to \infty$ met α het evenwichtspunt

Heuristiek.

Iets is stabiel als het niet gevoelig is voor verstoringen.

Terminologie

Voor **beginwaarde** x_0 is $(x_0, x_1, x_2, \ldots)$ een **baan**

van de **recursie** als $\boxed{x_{n+1} = f(x_n) \quad \text{alle} \quad n}$

De baan is in **evenwicht** als $x_0 = x_1 = x_2 = \ldots$

$\Leftrightarrow$ $x_0 = \alpha$ met α het **evenwichtspunt**: $\alpha = f(\alpha)$.

De baan is op **den duur bijna** in evenwicht als

$x_n \to \alpha$ voor $n \to \infty$ met α het evenwichtspunt

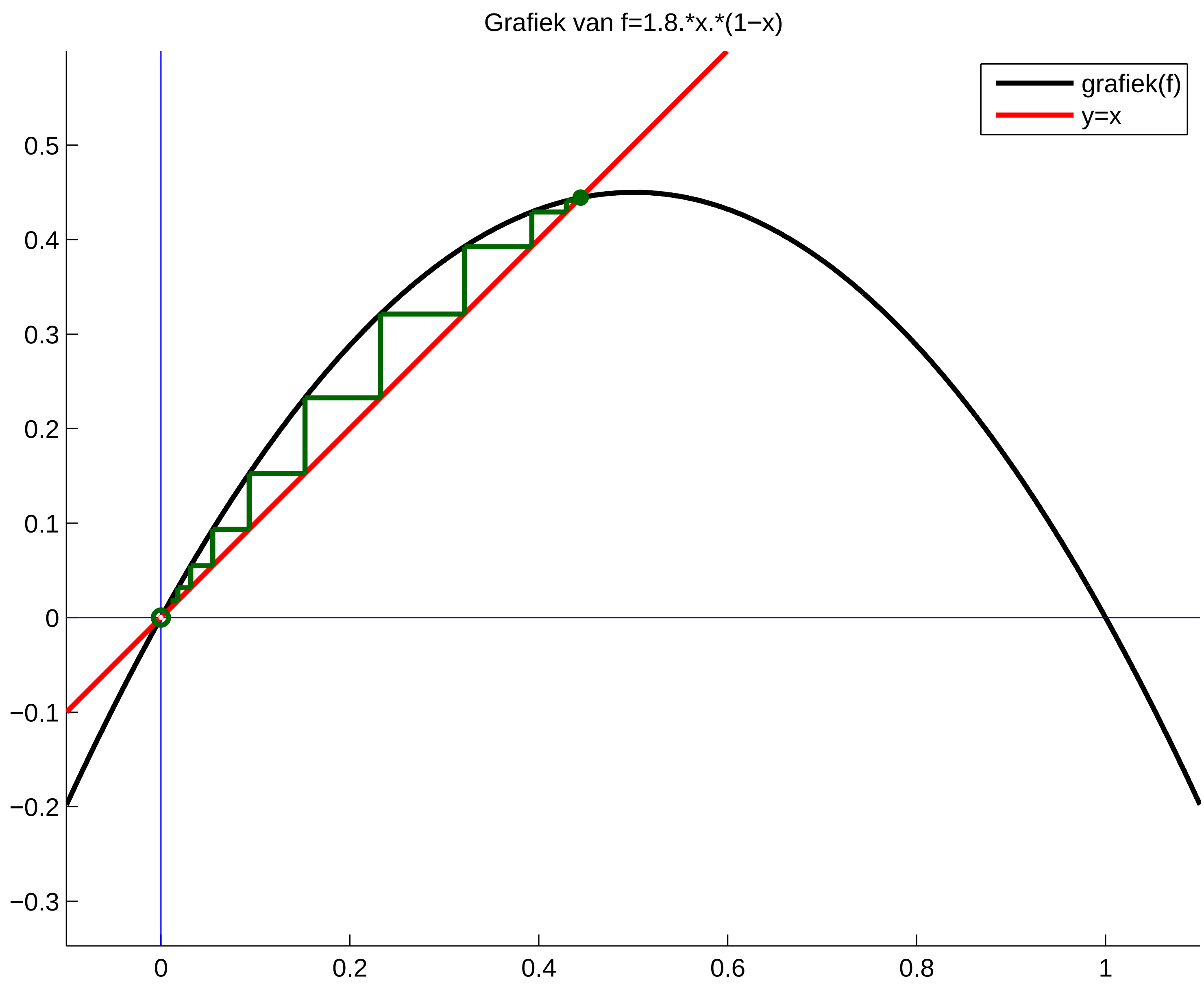
Het evenwicht(spunt α) is **stabiel (Lyapunov)** als

1) $x_n \to \alpha \quad (n \to \infty)$ voor alle $x_0 \approx \alpha$ (**attractief**) en

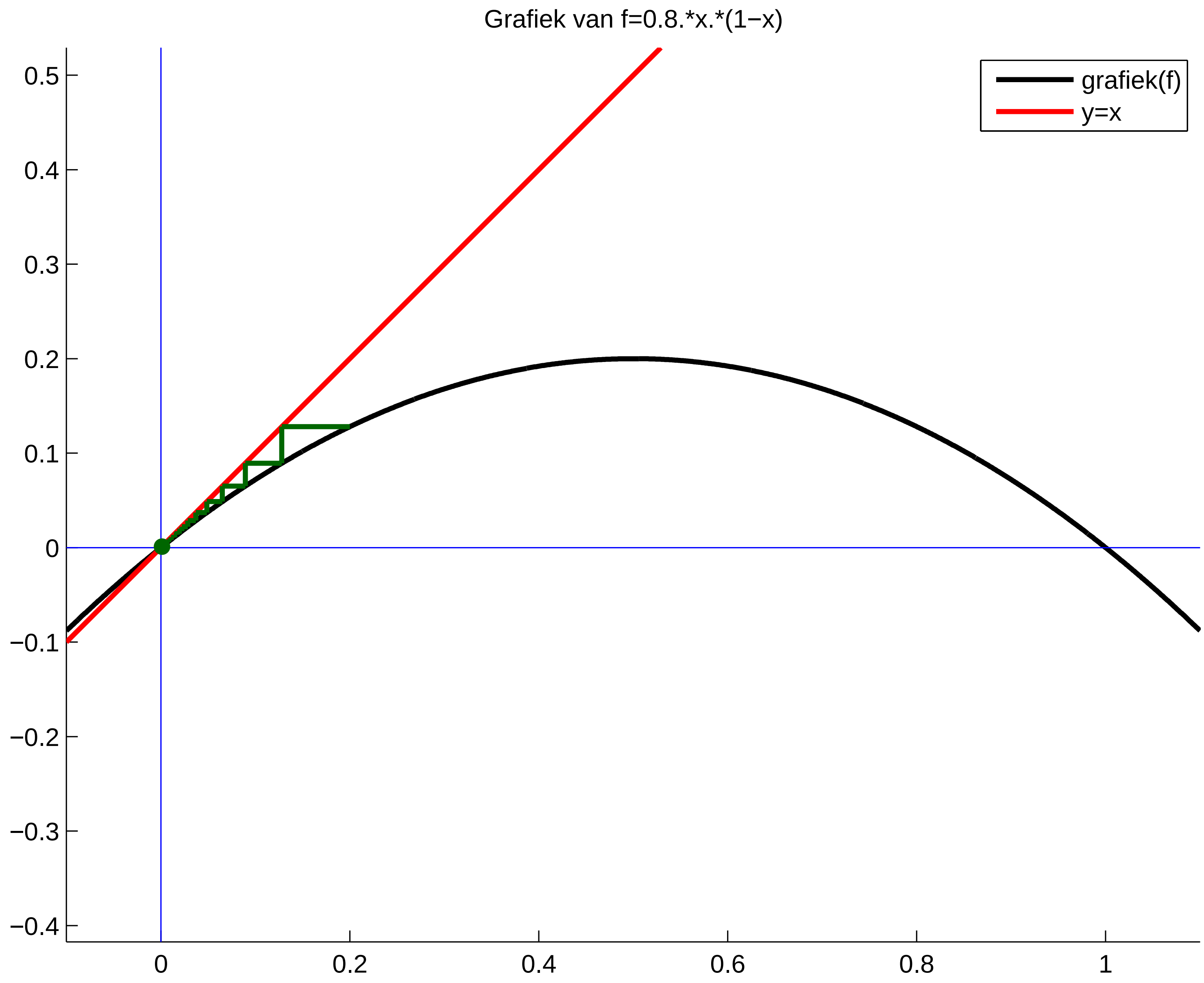
2) $x_n \approx \alpha$ voor alle n voor alle $x_0 \approx \alpha$.

Anders is het evenwicht **instabiel**.

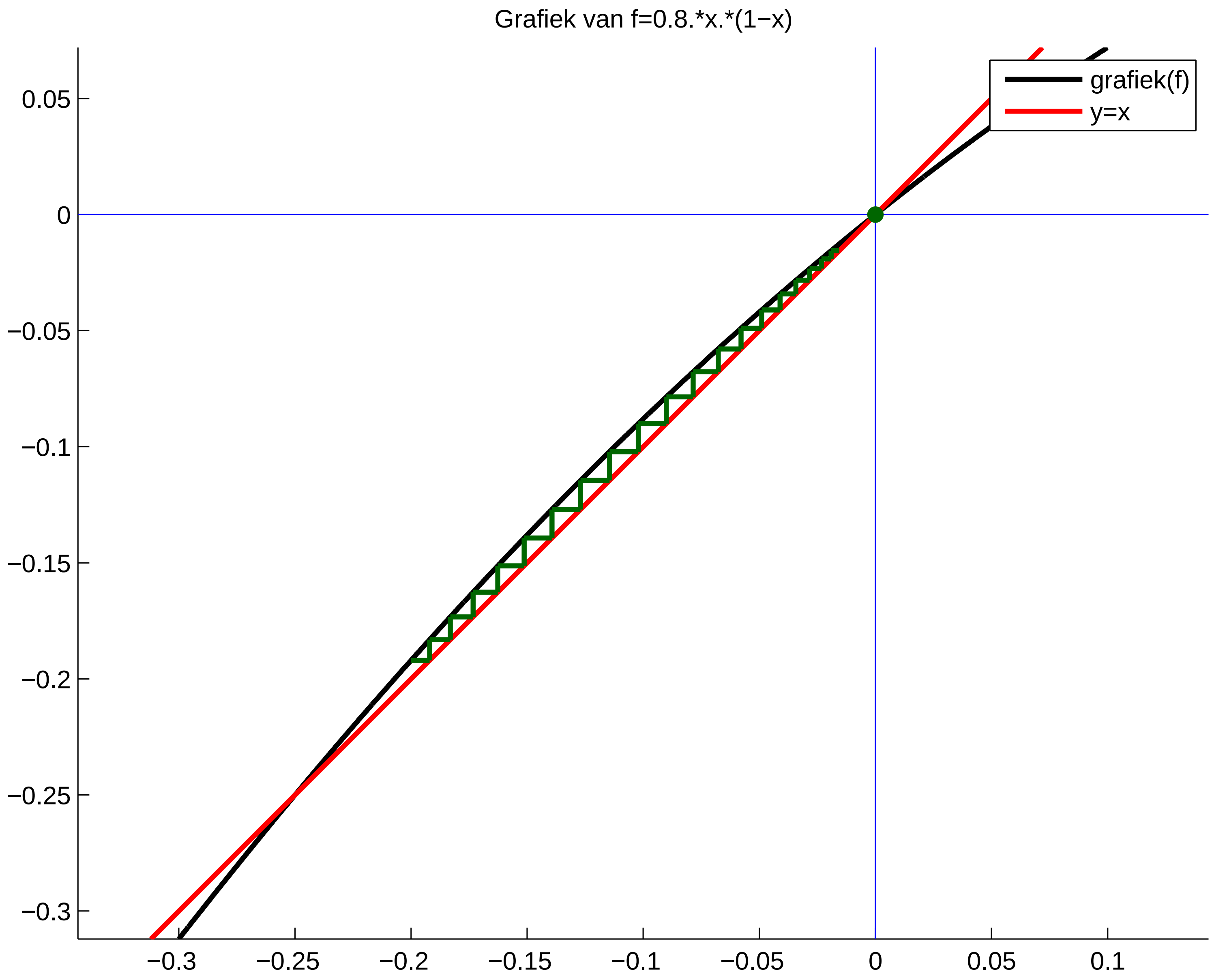
Grafische analyse



Grafische analyse



Grafische analyse



Relevant

Let op: niet alle resultaten die wiskundig relevant zijn, hoeven in het toepassingsgebied relevant te zijn.

Als $x_{n+1} = f(x_n)$ de groei van een populatie in de biologie modelleert (x_n aantal individuen in jaar n), dan $x_n \geq 0$.

Het evenwicht(spunt α) is **stabiel (Lyapunov)** als

1) $x_n \to \alpha \quad (n \to \infty)$ voor alle $x_0 \approx \alpha$ (**attractief**) en

2) $x_n \approx \alpha$ voor alle n voor alle $x_0 \approx \alpha$.

1) **Attractief.**

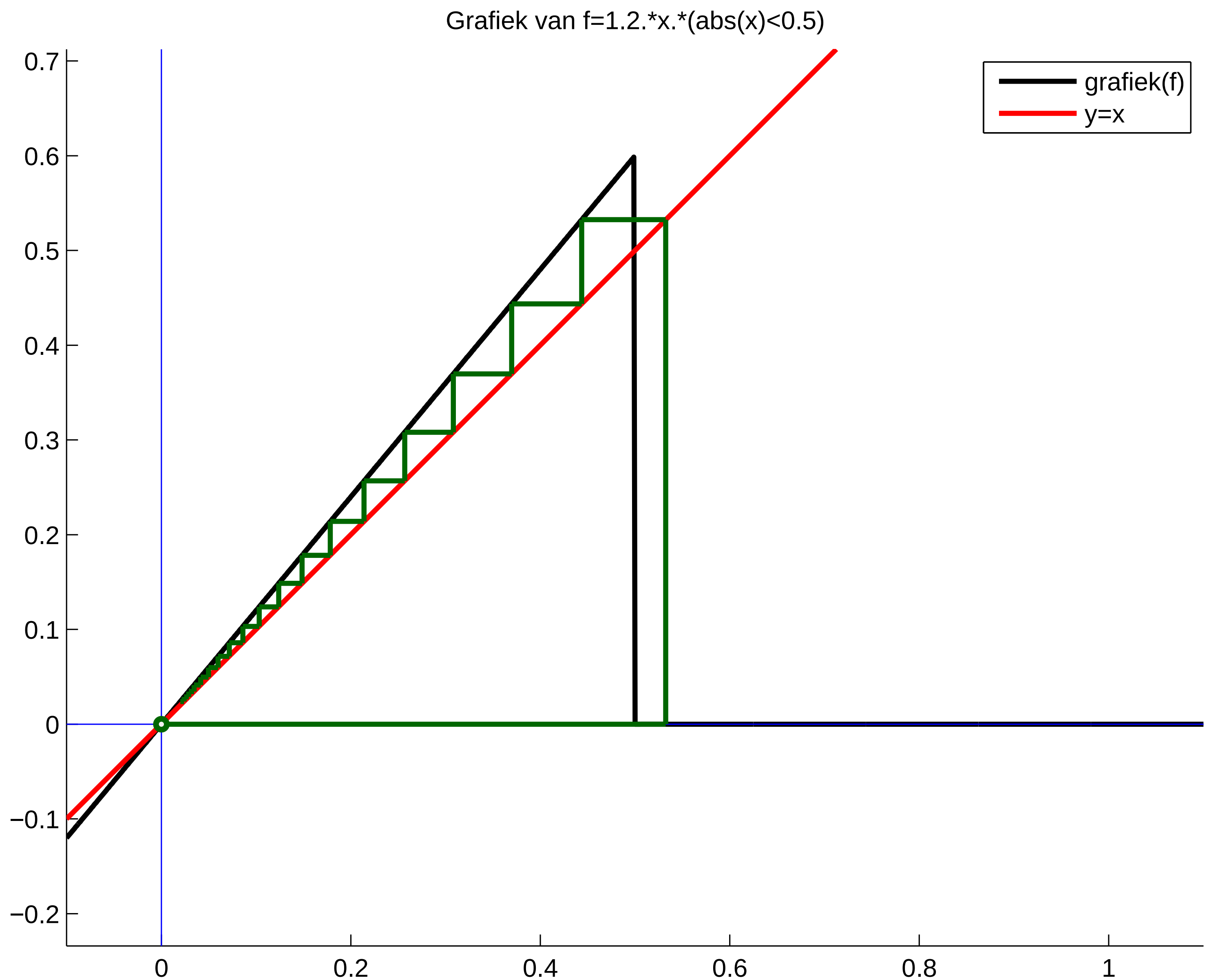
Er bestaat een $\varepsilon_0 > 0$ zo dat

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \alpha \quad \text{als} \quad |x_0 - \alpha| \leq \varepsilon_0$$

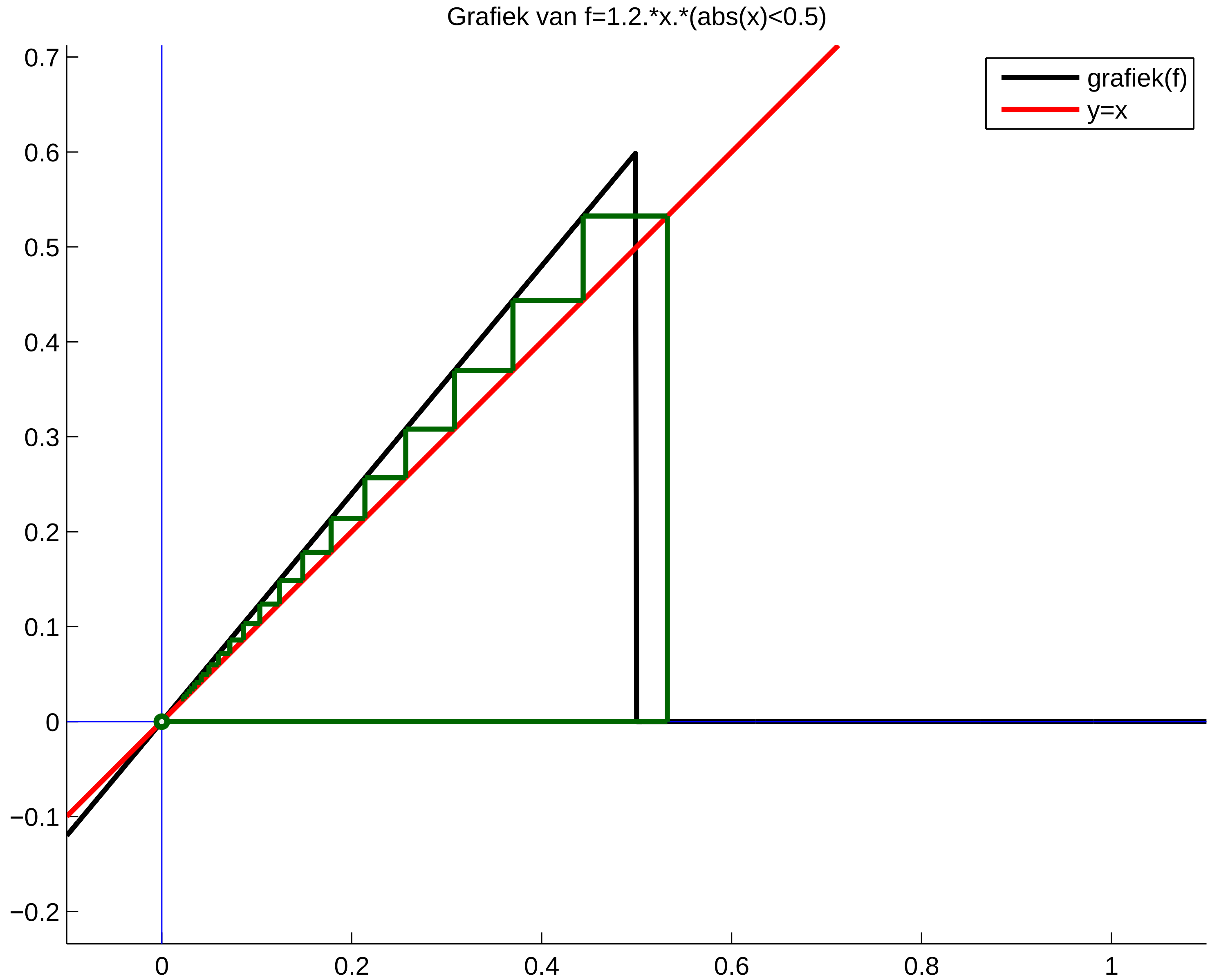
2) **Blijft in de buurt als je in de buurt begint.**

Voor alle $\varepsilon > 0$ is er een $\delta > 0$ zodat

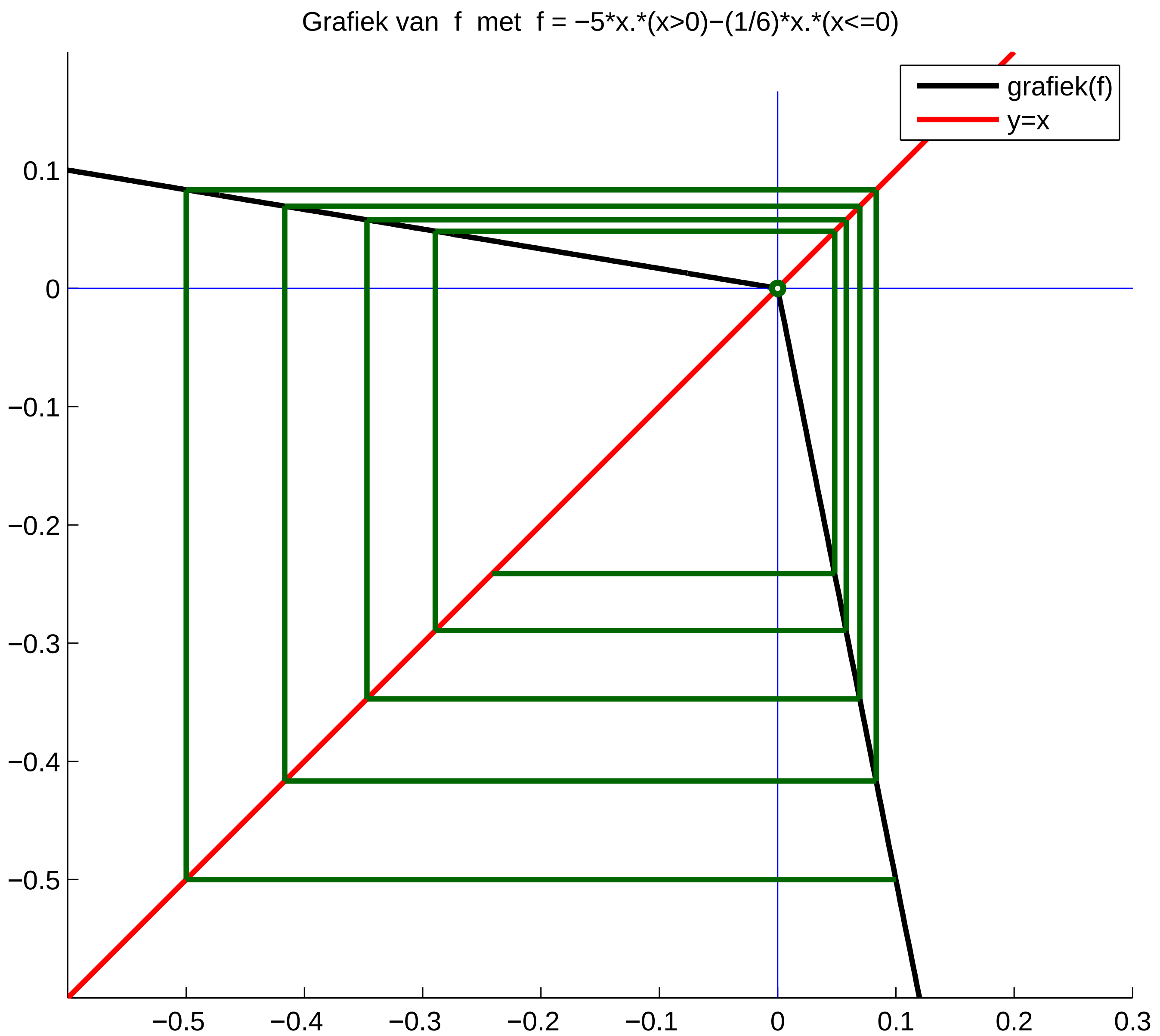
$$|x_n - \alpha| < \varepsilon \quad \text{voor alle } n \in \mathbb{N} \text{ als} \quad |x_0 - \alpha| \leq \delta$$


Grafiek van f=1.2.*x.*(abs(x)<0.5)
grafiek(f)
y=x
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
−0.1
−0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1

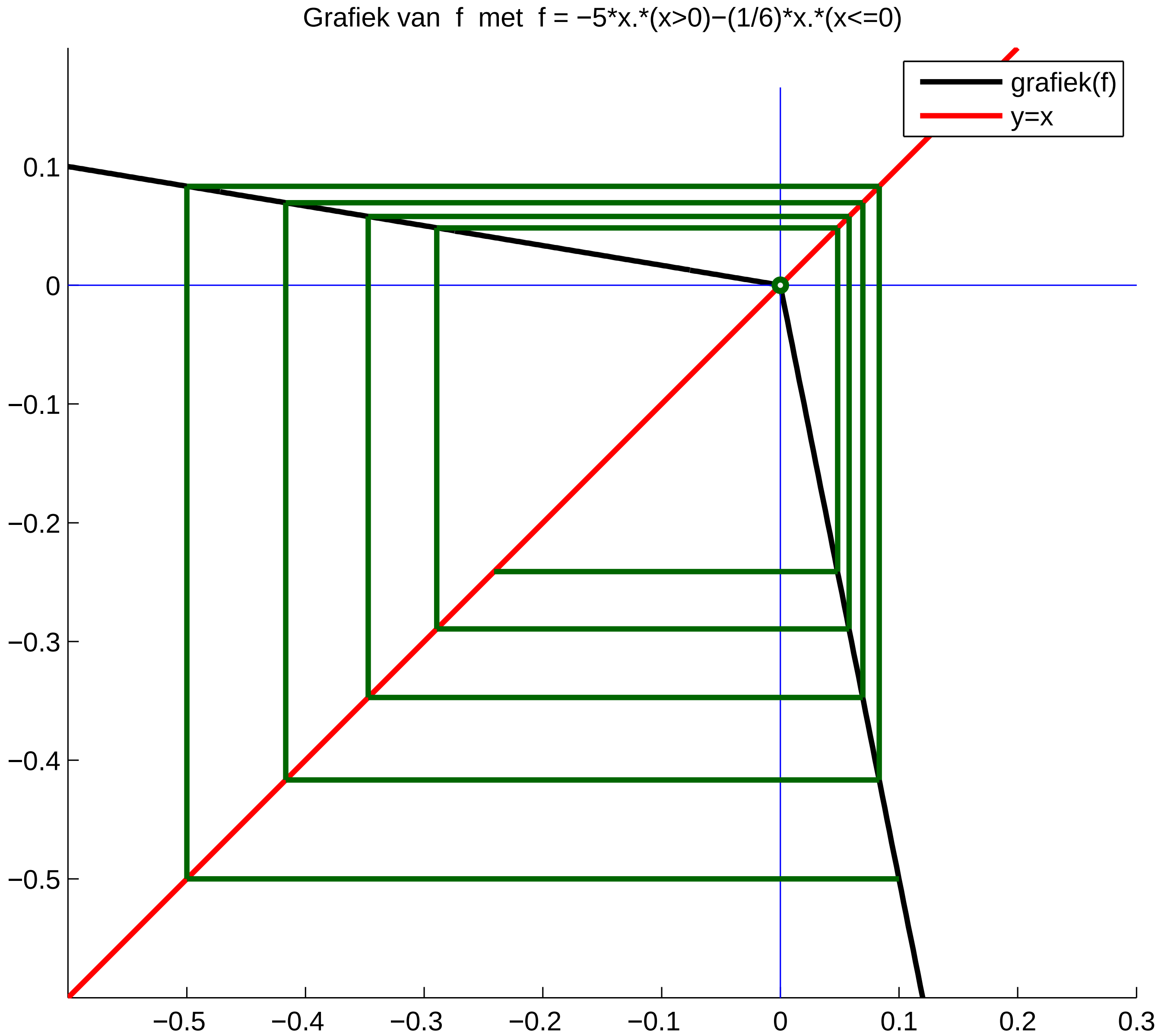
$x_0 \approx \alpha \;\; \Rightarrow x_n \to \alpha \;(n \to \infty)$. Echter $x_0 \approx \alpha \not\Rightarrow x_n \approx \alpha$

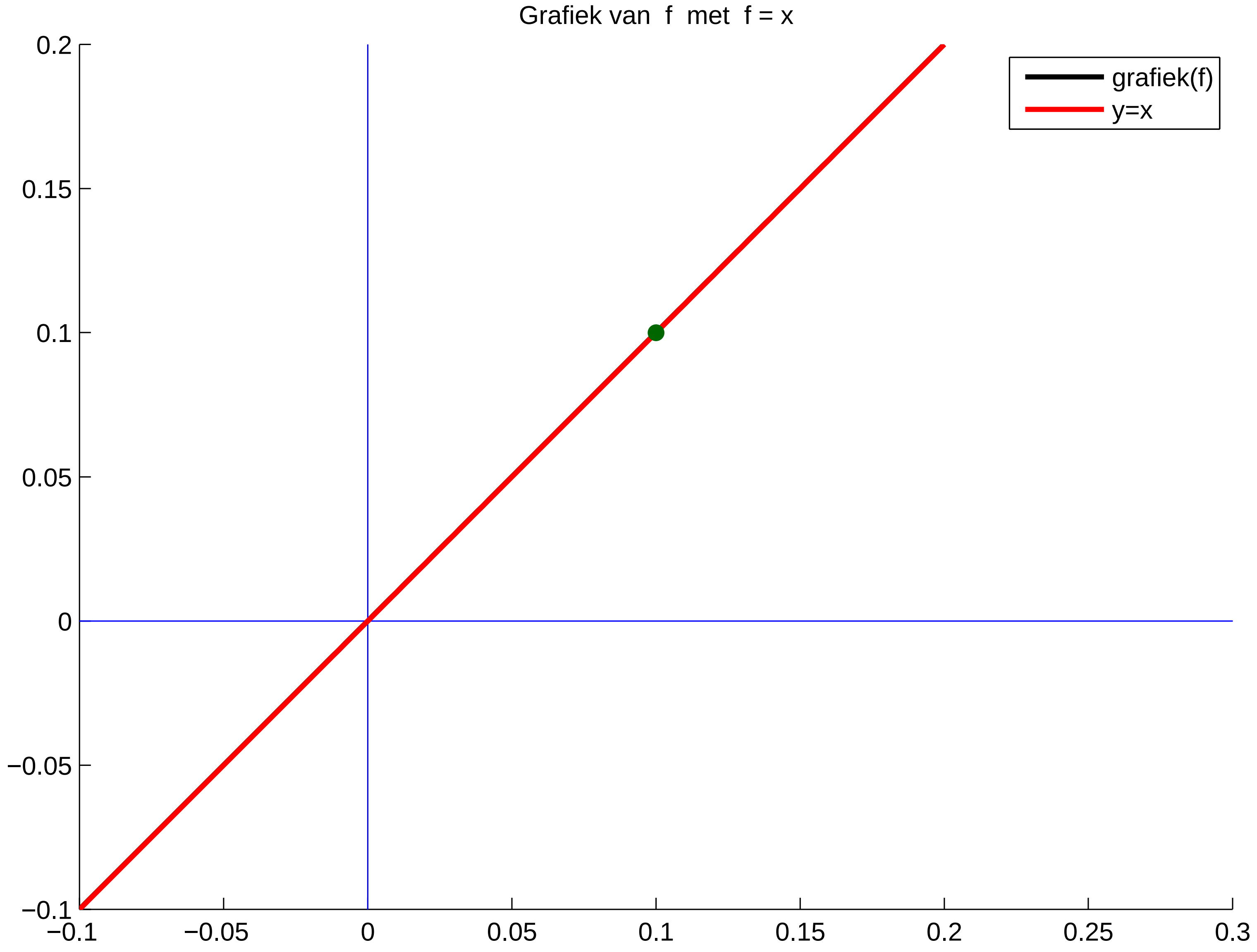


Kan je een continue functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *bedenken met een evenwichtspunt dat attractief is maar niet stabiel?*

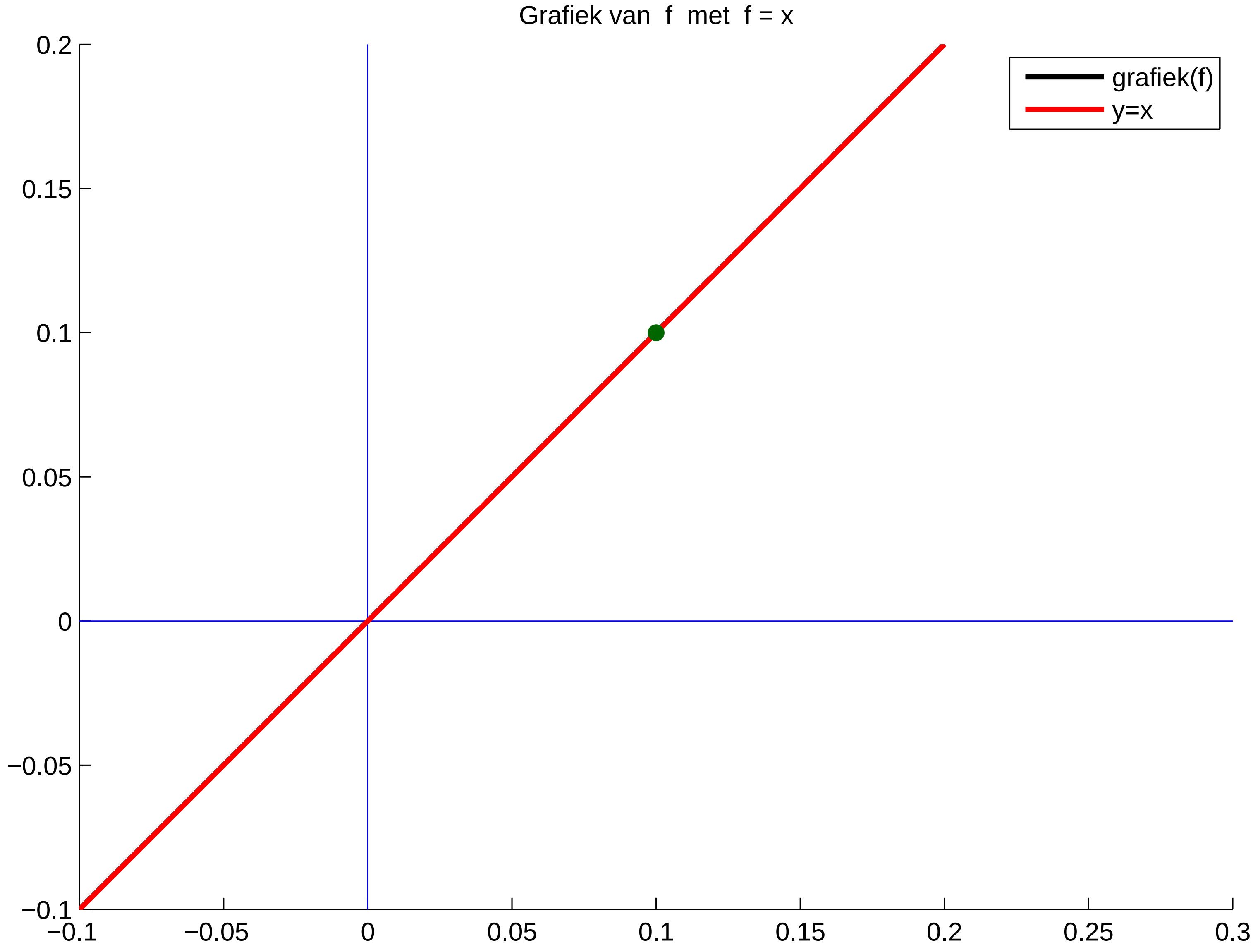

Grafiek van f met f = −5*x.*(x>0)−(1/6)*x.*(x<=0)
grafiek(f)
y=x
0.1
0
−0.1
−0.2
−0.3
−0.4
−0.5
−0.5
−0.4
−0.3
−0.2
−0.1
0
0.1
0.2
0.3

$x_n \to \alpha$. Loopt een "beetje weg": $x_0 \approx \alpha \Rightarrow x_n \approx \alpha$




Grafiek van f met f = x
grafiek(f)
y=x
0.2
0.15
0.1
0.05
0
−0.05
−0.1
−0.1
−0.05
0
0.05
0.1
0.15
0.2
0.25
0.3

$x_0 \neq \alpha$, $x_n \not\to \alpha$. Loopt niet weg: $x_0 \approx \alpha \Rightarrow x_n \approx \alpha$



Stelling. $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$.

$f : I \to I$ continu differentieerbaar, $f(\alpha) = \alpha \in (a, b)$.

Het evenwicht is stabiel als $|f'(\alpha)| < 1$

instabiel als $|f'(\alpha)| > 1$.

Stelling. $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$.

$f : I \to I$ continu differentieerbaar, $f(\alpha) = \alpha \in (a, b)$.

Het evenwicht is stabiel als $|f'(\alpha)| < 1$

instabiel als $|f'(\alpha)| > 1$.

Het geval $|f'(\alpha)| = 1$ vereist nadere analyse.

Stelling. $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$.

$f : I \to I$ continu differentieerbaar, $f(\alpha) = \alpha \in (a, b)$.

Het evenwicht is stabiel als $|f'(\alpha)| < 1$

instabiel als $|f'(\alpha)| > 1$.

Het geval $|f'(\alpha)| = 1$ vereist nadere analyse.

Bewijs. Lineariseer rond α:

$x_n = \alpha + \varepsilon_n$ dan

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{n+1} &= x_{n+1} - \alpha = f(x_n) - \alpha \\
&= f(\alpha + \varepsilon_n) - \alpha \\
&= f(\alpha) + \varepsilon_n f'(\xi) - \alpha \\
&= f'(\xi)\, \varepsilon_n \qquad \text{zekere } \xi \text{ tussen } \alpha \text{ en } x_n
\end{aligned}$$

Stelling. $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$.

$f : I \to I$ continu differentieerbaar, $f(\alpha) = \alpha \in (a, b)$.

Het evenwicht is stabiel als $|f'(\alpha)| < 1$

instabiel als $|f'(\alpha)| > 1$.

Het geval $|f'(\alpha)| = 1$ vereist nadere analyse.

Bewijs. $x_n = \alpha + \varepsilon_n$ dan $\varepsilon_{n+1} = f'(\xi)\,\varepsilon_n$.

Stel $|f'(\alpha)| < \rho < 1$. Dan is er een $\delta > 0$ zodat

$$|f'(\xi)| \le \rho \quad \text{als} \quad |\xi - \alpha| < \delta.$$

Dus, als $|x_n - \alpha| < \delta$ dan

$$|x_{n+1} - \alpha| = |\varepsilon_{n+1}| = |f'(\xi)|\,|\varepsilon_n| \le \rho |x_n - \alpha| < \delta.$$

Dus $|x_n - \alpha| \le \rho^n |x_0 - \alpha|$ als $|x_0 - \alpha| < \delta$.

Stelling. $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$.

$f : I \to I$ continu differentieerbaar, $f(\alpha) = \alpha \in (a, b)$.

Het evenwicht is stabiel als $|f'(\alpha)| < 1$

instabiel als $|f'(\alpha)| > 1$.

Het geval $|f'(\alpha)| = 1$ vereist nadere analyse.

Bewijs. $x_n = \alpha + \varepsilon_n$ dan $\varepsilon_{n+1} = f'(\xi)\, \varepsilon_n$.

Stel $|f'(\alpha)| < \rho < 1$. Dan is er een $\delta > 0$ zodat

$$|f'(\xi)| \leq \rho \quad \text{als} \quad |\xi - \alpha| < \delta.$$

Dus, als $|x_0 - \alpha| < \delta$ dan

2) $|x_n - \alpha| < \delta$ alle n

1) $|x_n - \alpha| \to 0$ als $n \to \infty$

Stelling. $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$.

$f : I \to I$ continu differentieerbaar, $f(\alpha) = \alpha \in (a, b)$.

Het evenwicht is stabiel als $|f'(\alpha)| < 1$

instabiel als $|f'(\alpha)| > 1$.

Het geval $|f'(\alpha)| = 1$ vereist nadere analyse.

Bewijs. $x_n = \alpha + \varepsilon_n$ dan $\varepsilon_{n+1} = f'(\xi)\, \varepsilon_n$.

Stel $|f'(\alpha)| > \rho > 1$. Dan is er een $\delta > 0$ zodat

$$|f'(\xi)| \geq \rho \quad \text{als} \quad |\xi - \alpha| < \delta$$

Dus $\quad |x_n - \alpha| \geq \rho^n |x_0 - \alpha| \quad$ als $\quad |x_0 - \alpha| < \delta$.

Stelling. $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$.

$f : I \to I$ continu differentieerbaar, $f(\alpha) = \alpha \in (a,b)$.

Het evenwicht is stabiel als $|f'(\alpha)| < 1$

instabiel als $|f'(\alpha)| > 1$.

Het geval $|f'(\alpha)| = 1$ vereist nadere analyse.

Bewijs. $x_n = \alpha + \varepsilon_n$ dan $\varepsilon_{n+1} = f'(\xi)\,\varepsilon_n$.

Stel $|f'(\alpha)| = 1$.

Het niet duidelijk welke waarde $|f'(\xi)|$ heeft voor $\xi \approx \alpha$.

Stelling. $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$.

$f : I \to I$ continu differentieerbaar, $f(\alpha) = \alpha \in (a, b)$.

Het evenwicht is stabiel als $|f'(\alpha)| < 1$
instabiel als $|f'(\alpha)| > 1$.

Het geval $|f'(\alpha)| = 1$ vereist nadere analyse.

Bewijs. $x_n = \alpha + \varepsilon_n$ dan $\varepsilon_{n+1} = f'(\xi)\,\varepsilon_n$.

Lineariseren in het evenwicht leidt $\approx$ tot
het 'Malthus model' voor de verstoringen ε_n

$|f'(\alpha)|$ is een maat voor de 'snelheid'
waarmee x_n naar α convergeert.

Voorbeeld. $x_{n+1} = f(x_n)$ met $f(x) \equiv \kappa_0\,(1-x)\,x$:

Evenwicht.

$$\alpha = \kappa_0(1-\alpha)\alpha \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha = 0 \quad \text{of} \\ \alpha = \frac{\kappa_0 - 1}{\kappa_0}. \end{cases}$$

Er is 'n evenwicht $> 0 \quad \Leftrightarrow \quad \kappa_0 > 1$.

Voorbeeld. $x_{n+1} = f(x_n)$ met $f(x) \equiv \kappa_0\,(1-x)\,x$:

Evenwicht.

$$\alpha = \kappa_0(1-\alpha)\alpha \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha = 0 \quad \text{of} \\ \alpha = \frac{\kappa_0 - 1}{\kappa_0}. \end{cases}$$

Er is 'n evenwicht $> 0 \quad \Leftrightarrow \quad \kappa_0 > 1$.

Stabiliteit.

0 *stabiel evenwicht* (**uitsterven**) *als* $\kappa_0 < 1$.

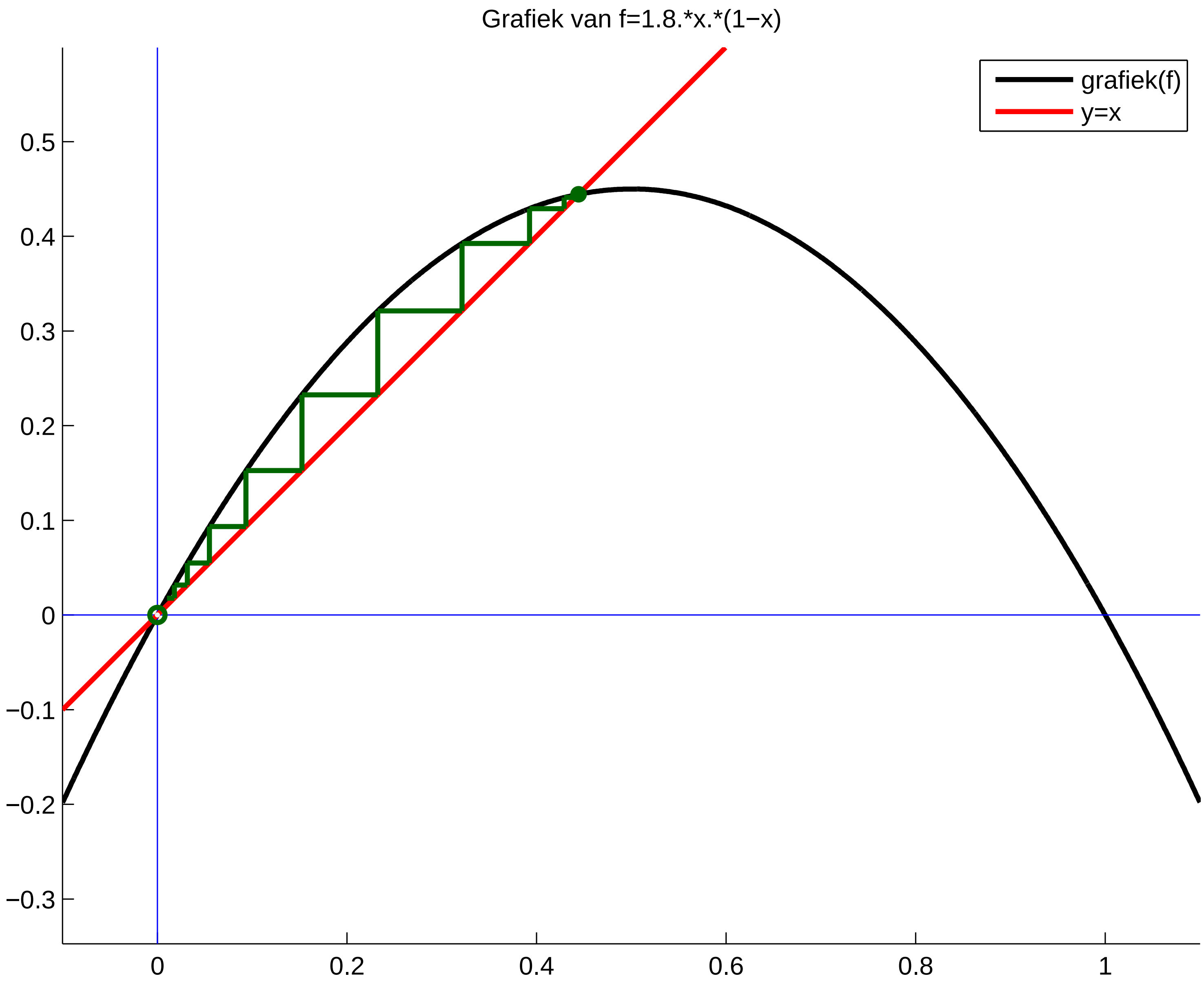
Positief evenwicht stabiel (**logistische groei**)

als $1 < \kappa_0 < 3$.

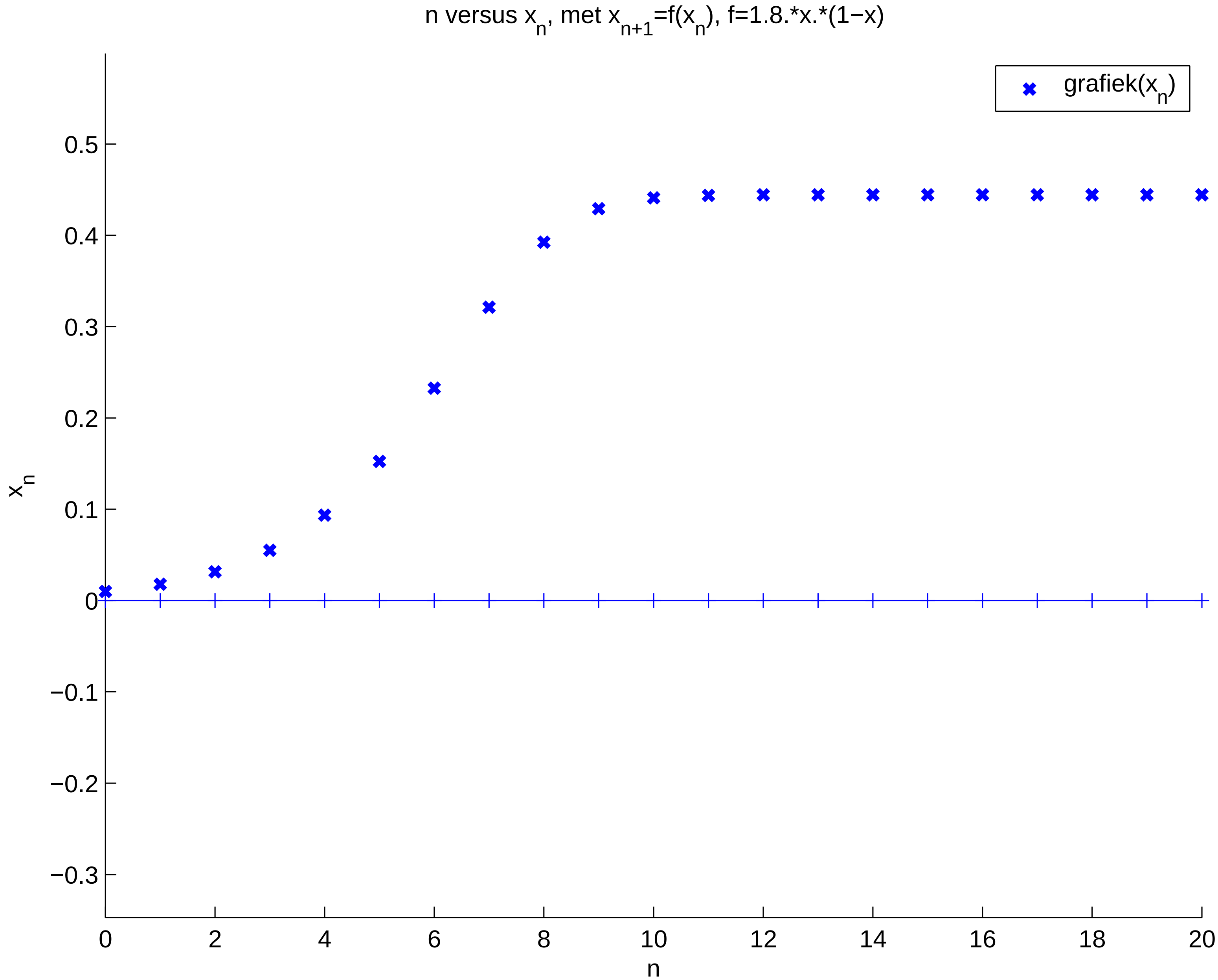
<u>*Bewijs*</u>.

$$f'(\alpha) = \kappa_0(1-2\alpha), \quad f'\left(\frac{\kappa_0 - 1}{\kappa_0}\right) = 2 - \kappa_0$$

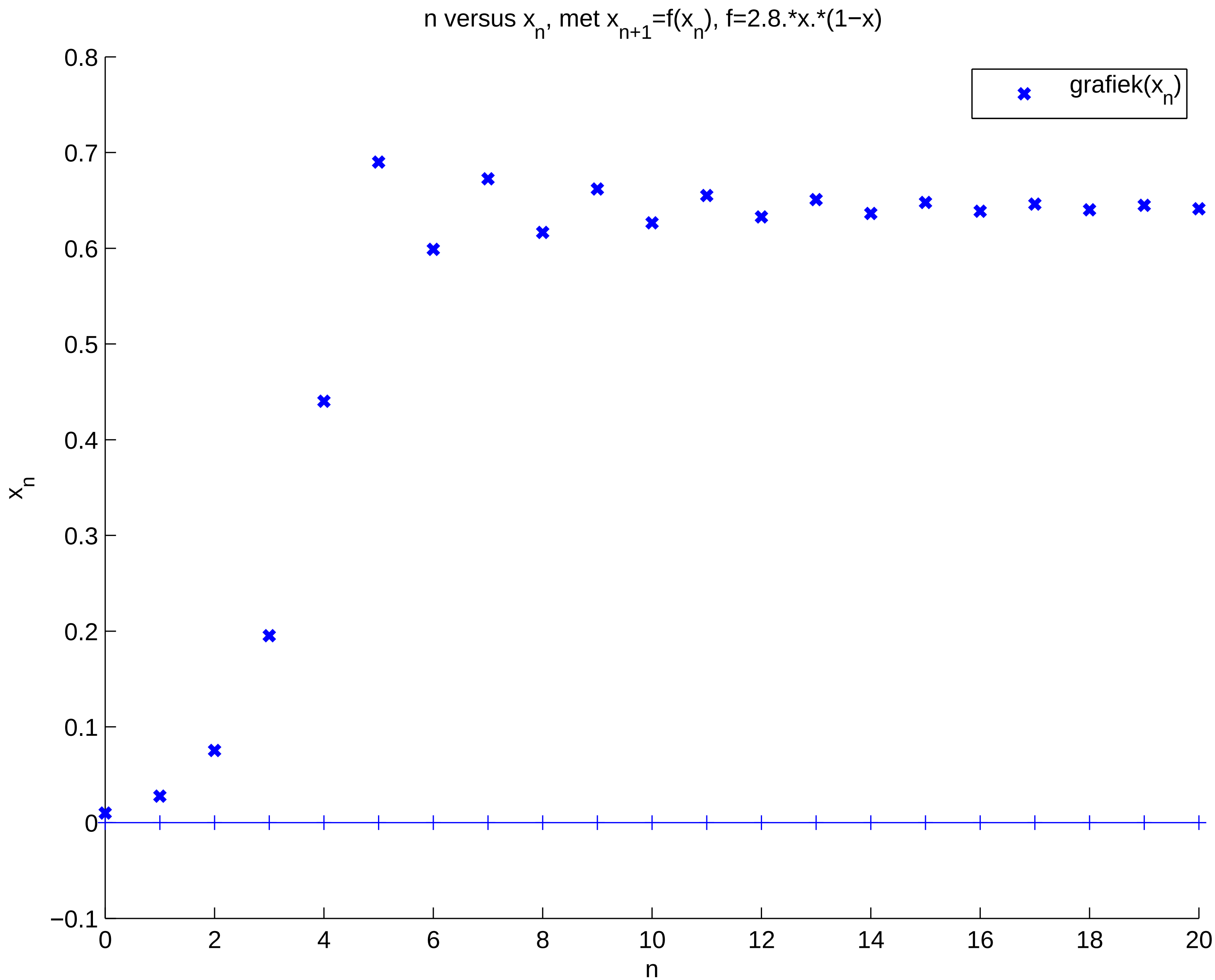
Grafische analyse



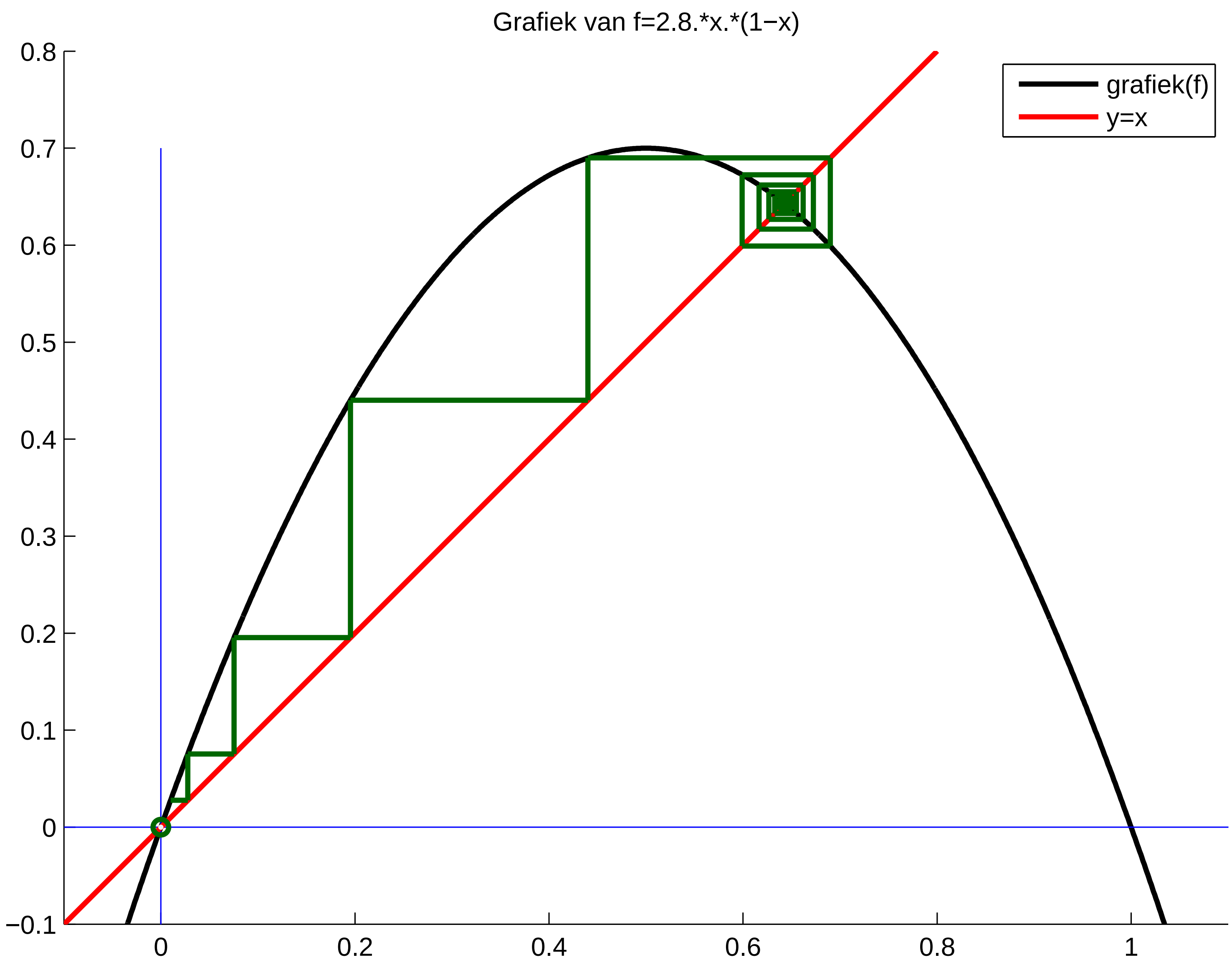
Grafische analyse



Grafische analyse



Grafische analyse



Voorbeeld. $x_{n+1} = f(x_n)$ met $f(x) \equiv \kappa_0\,(1-x)\,x$:

Evenwicht.

$$\alpha = \kappa_0(1-\alpha)\alpha \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha = 0 \quad \text{of} \\ \alpha = \frac{\kappa_0 - 1}{\kappa_0}. \end{cases}$$

Er is 'n evenwicht $> 0 \quad \Leftrightarrow \quad \kappa_0 > 1$.

Stabiliteit.

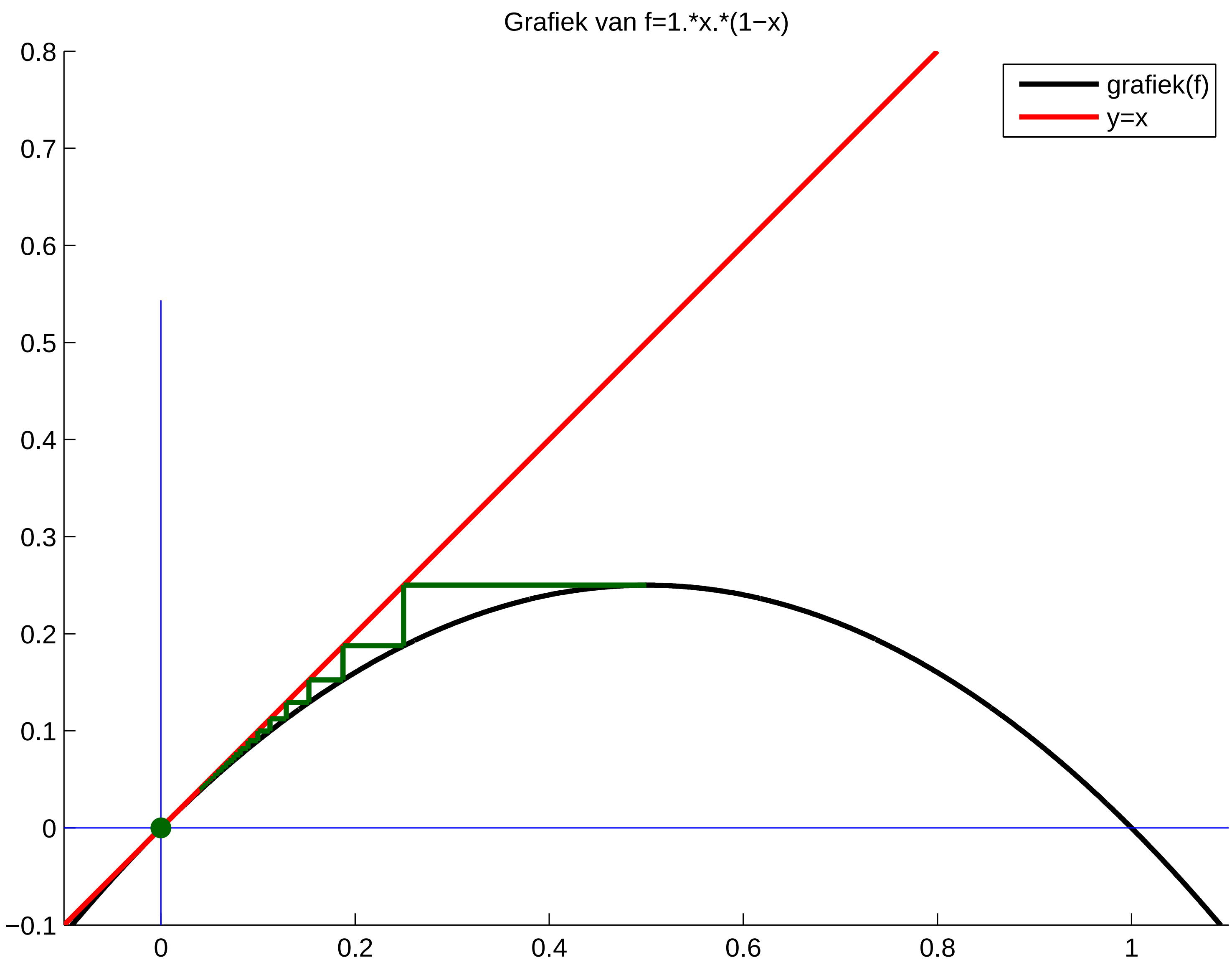
0 *stabiel evenwicht* (**uitsterven**) *als* $\kappa_0 < 1$.

Positief evenwicht stabiel (**logistische groei**)

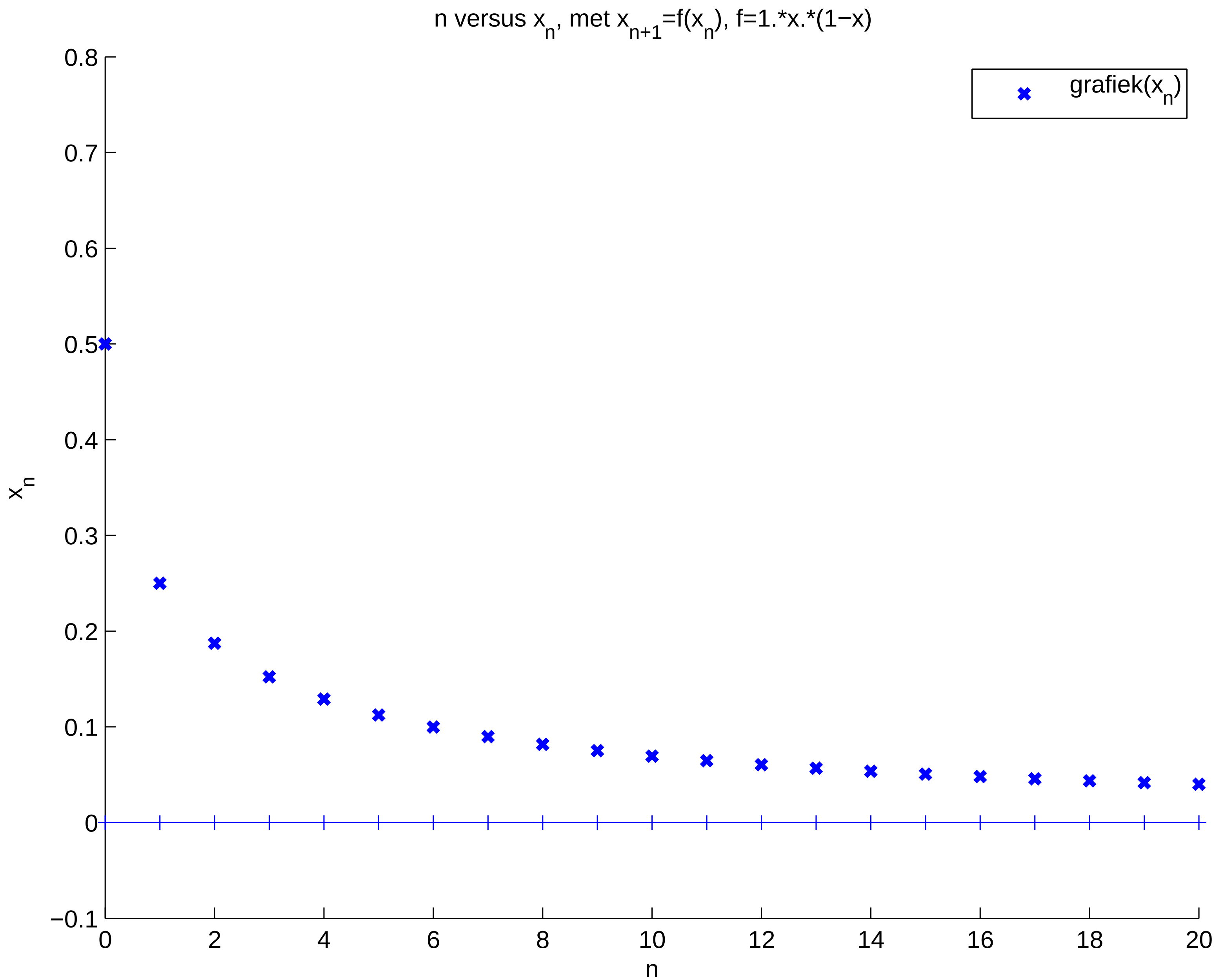
als $\quad 1 < \kappa_0 < 3$.

Wat als $\kappa_0 \approx 1$ of als $\kappa_0 \approx 3$, of $\kappa_0 = 3.2$?

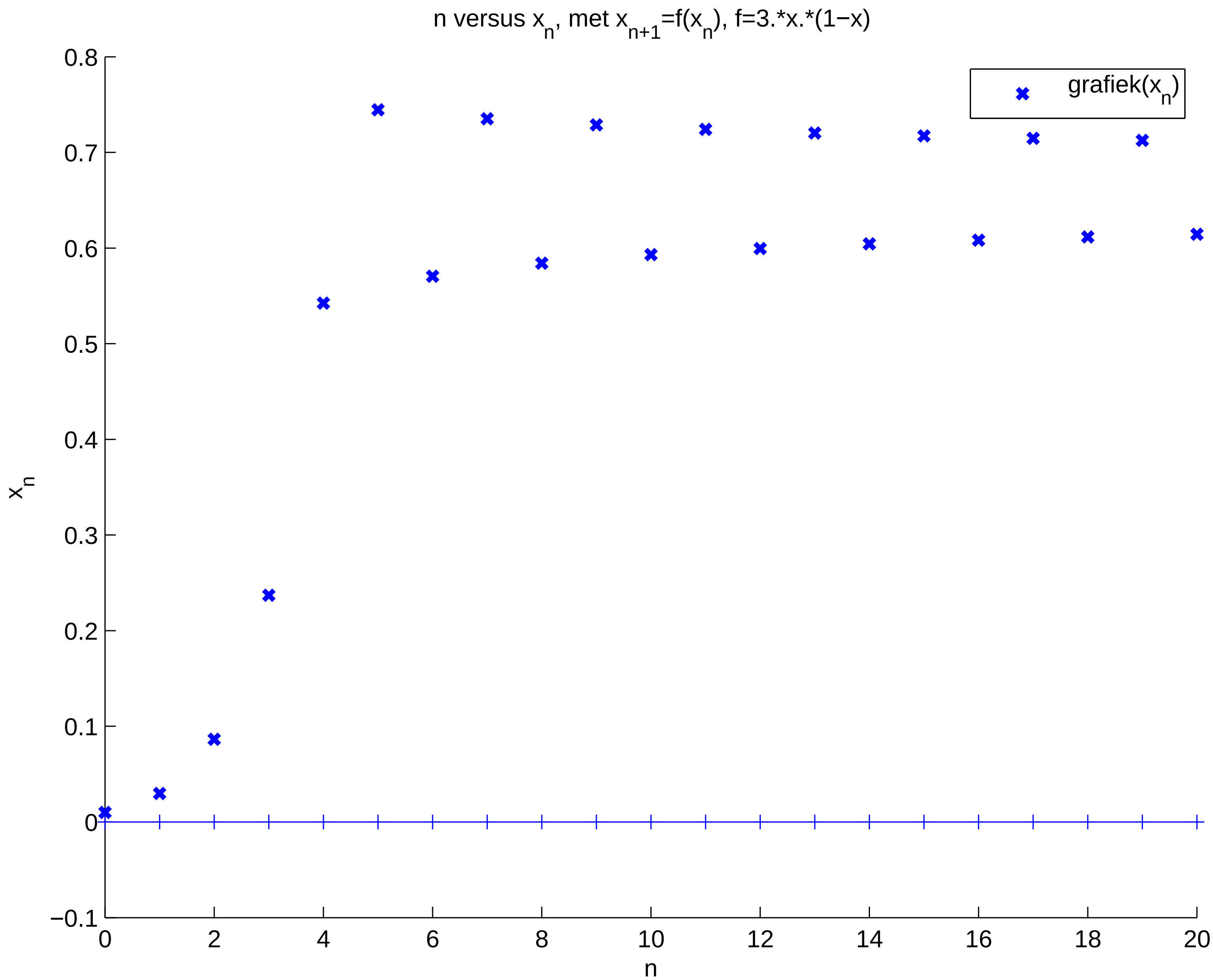
Grafische analyse



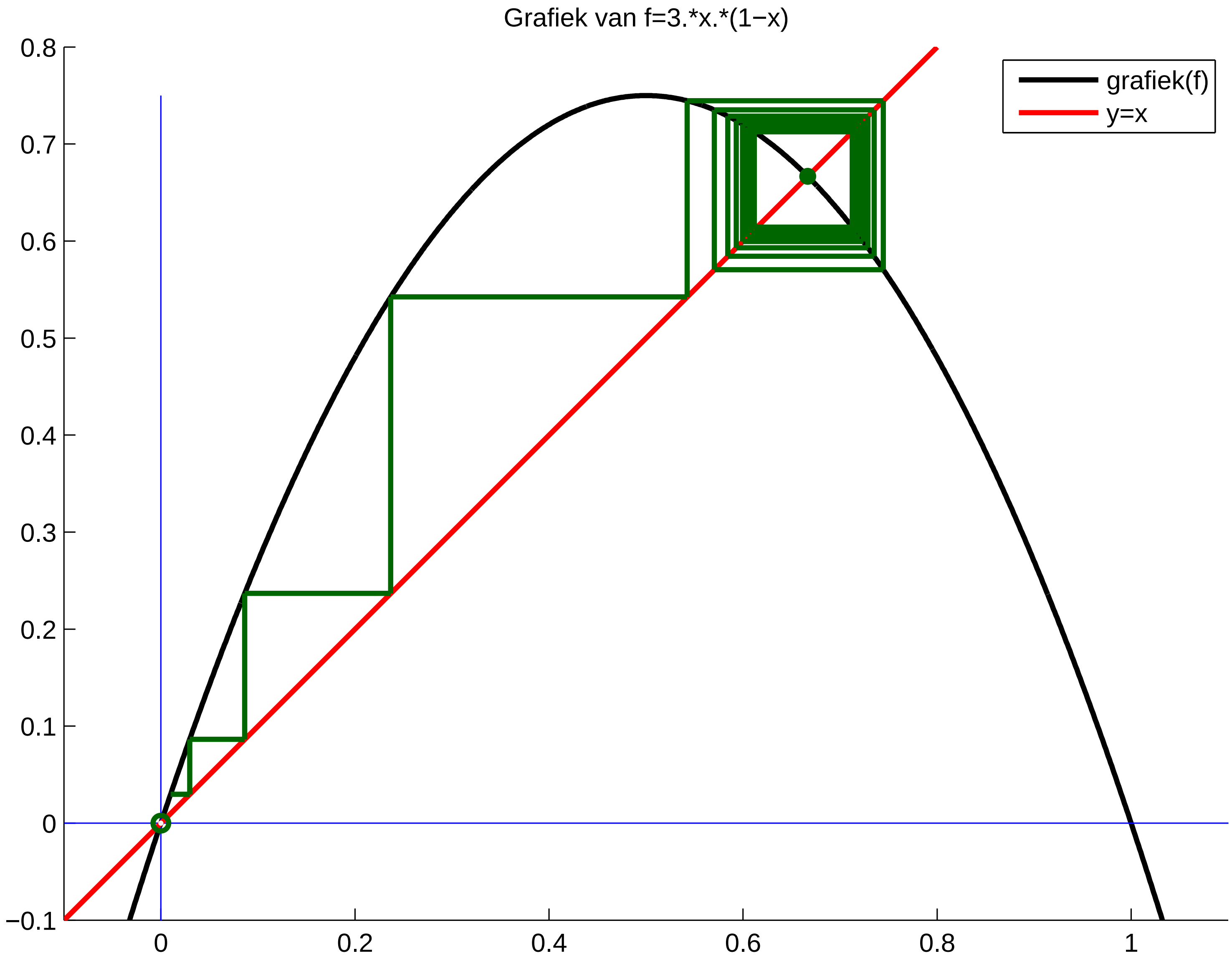
Grafische analyse



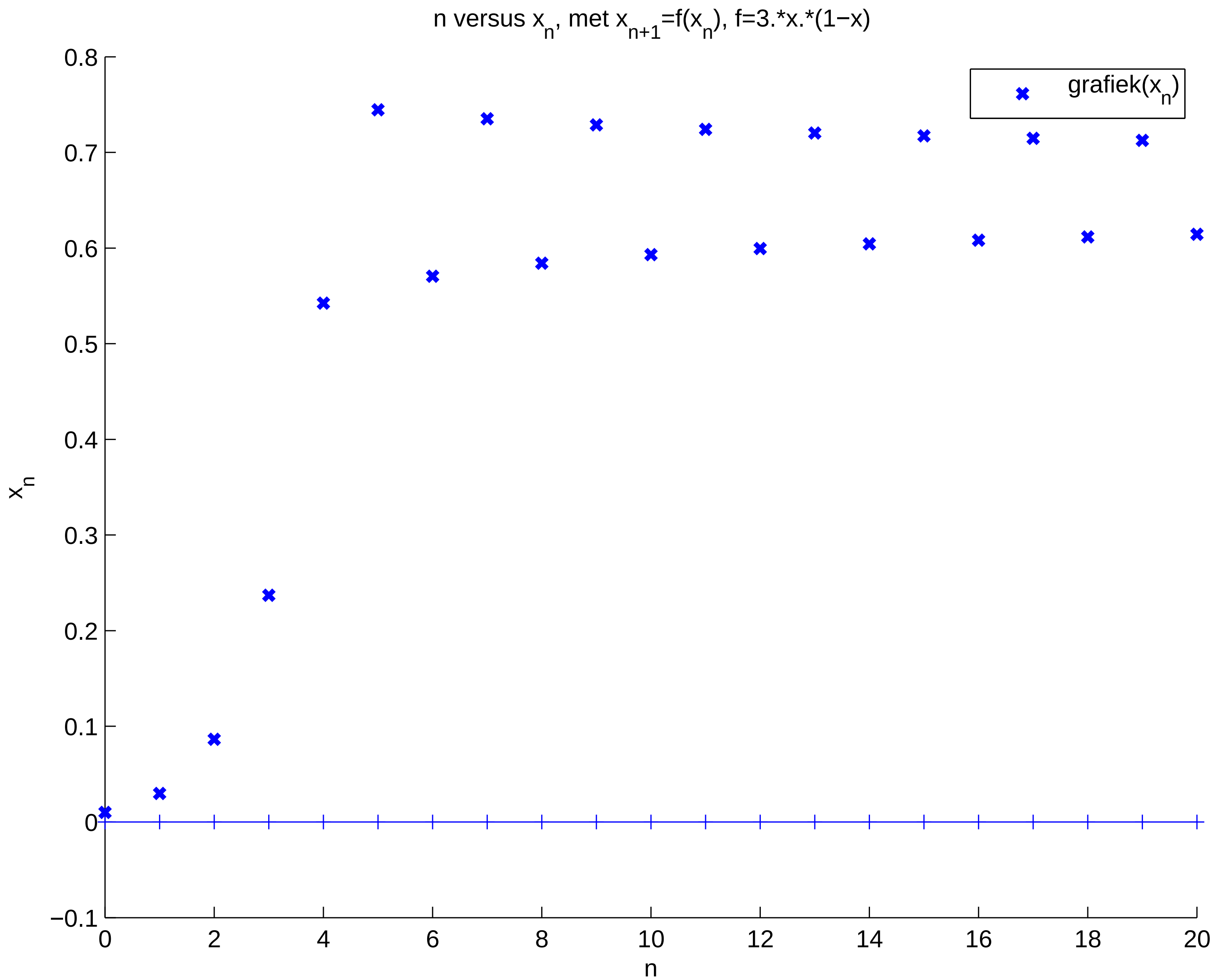
Grafische analyse



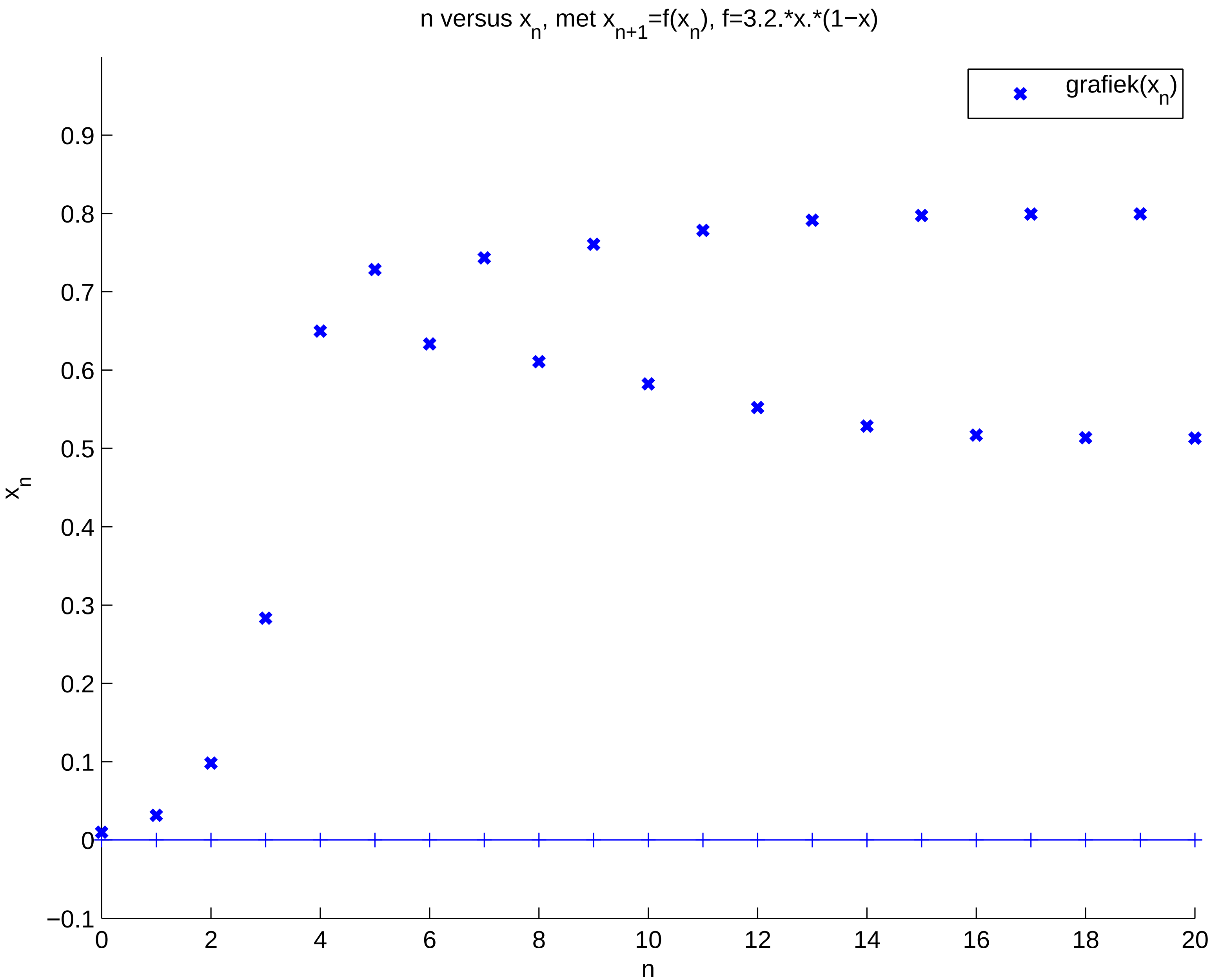
Grafische analyse



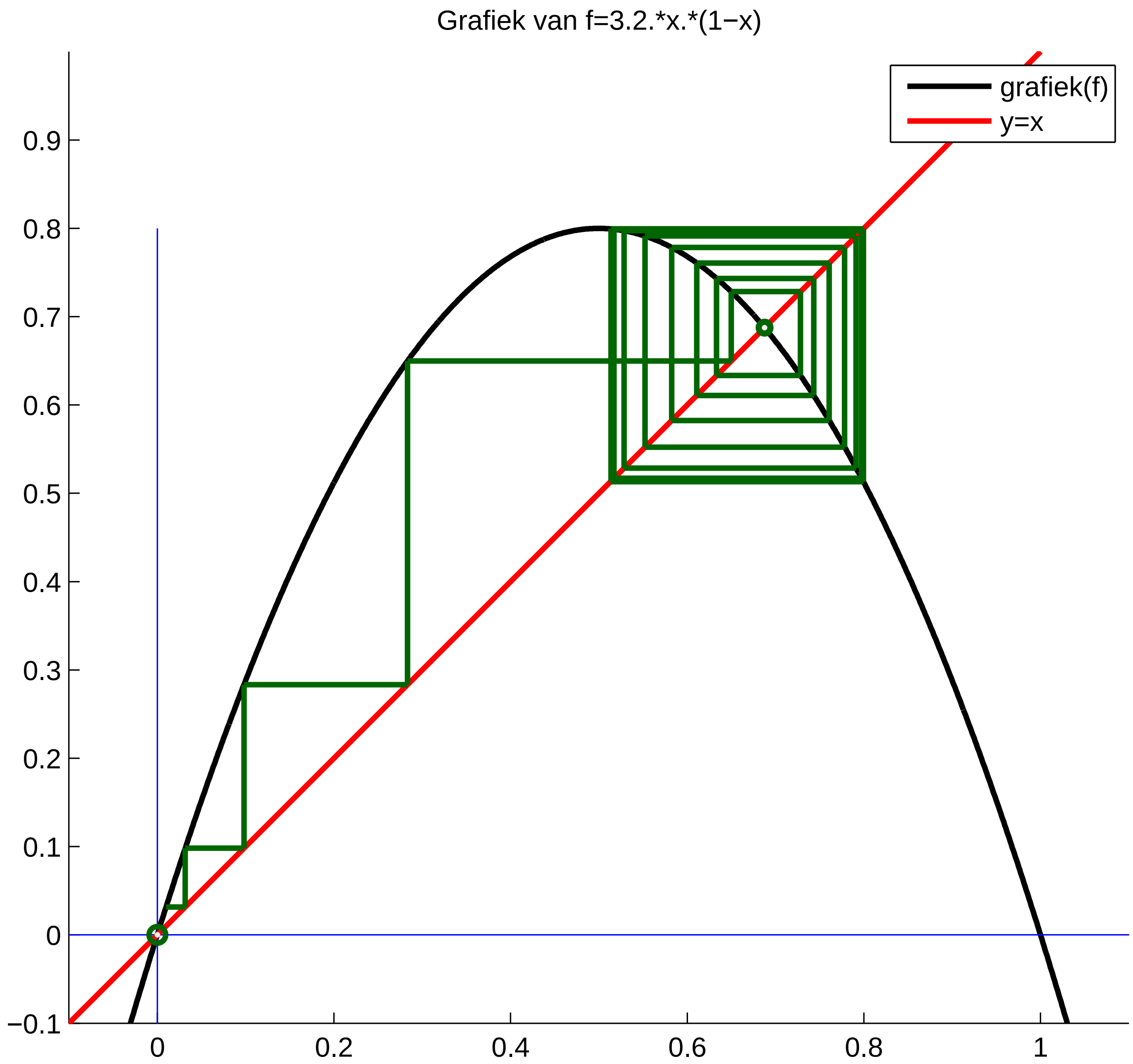
Grafische analyse



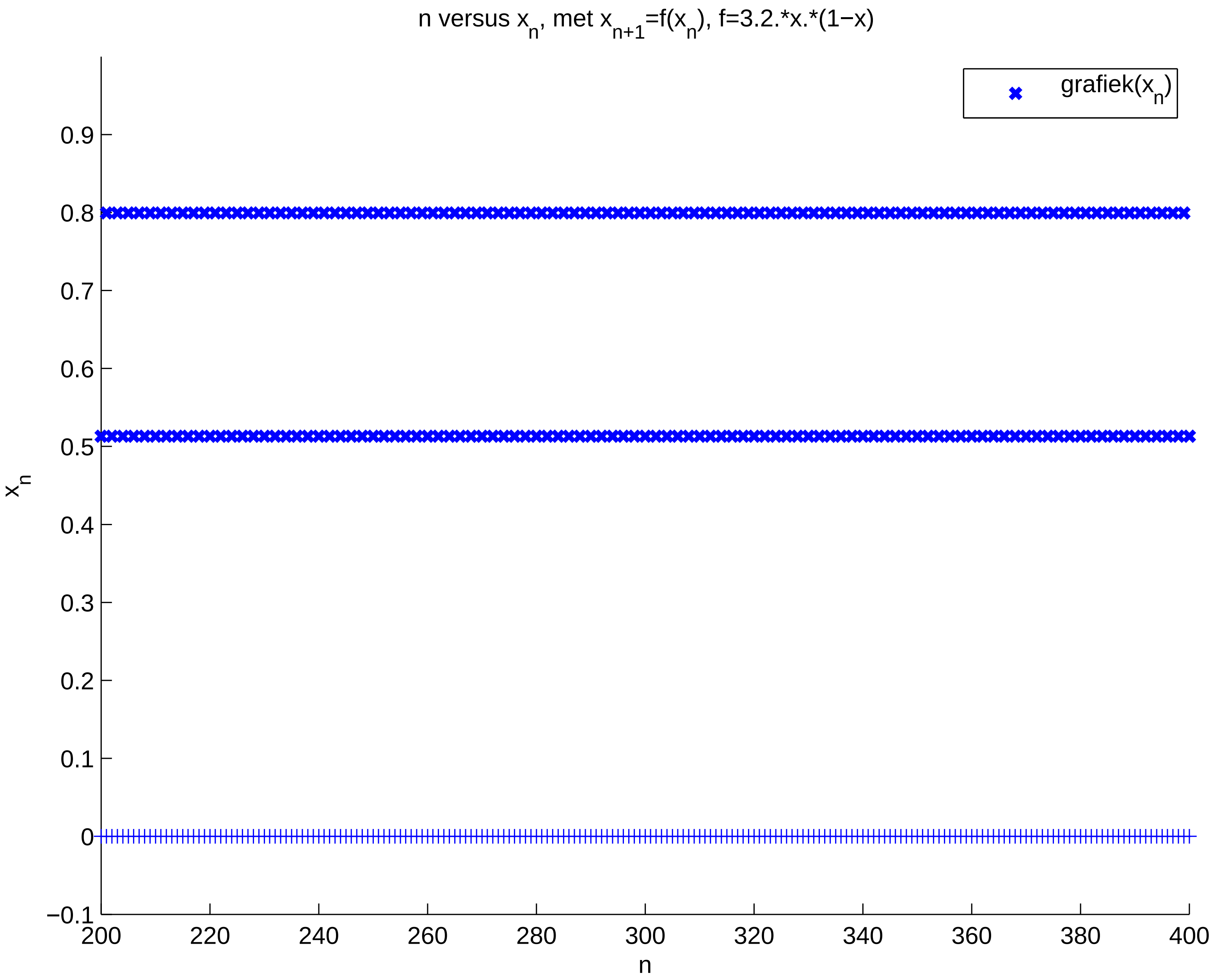
Grafische analyse



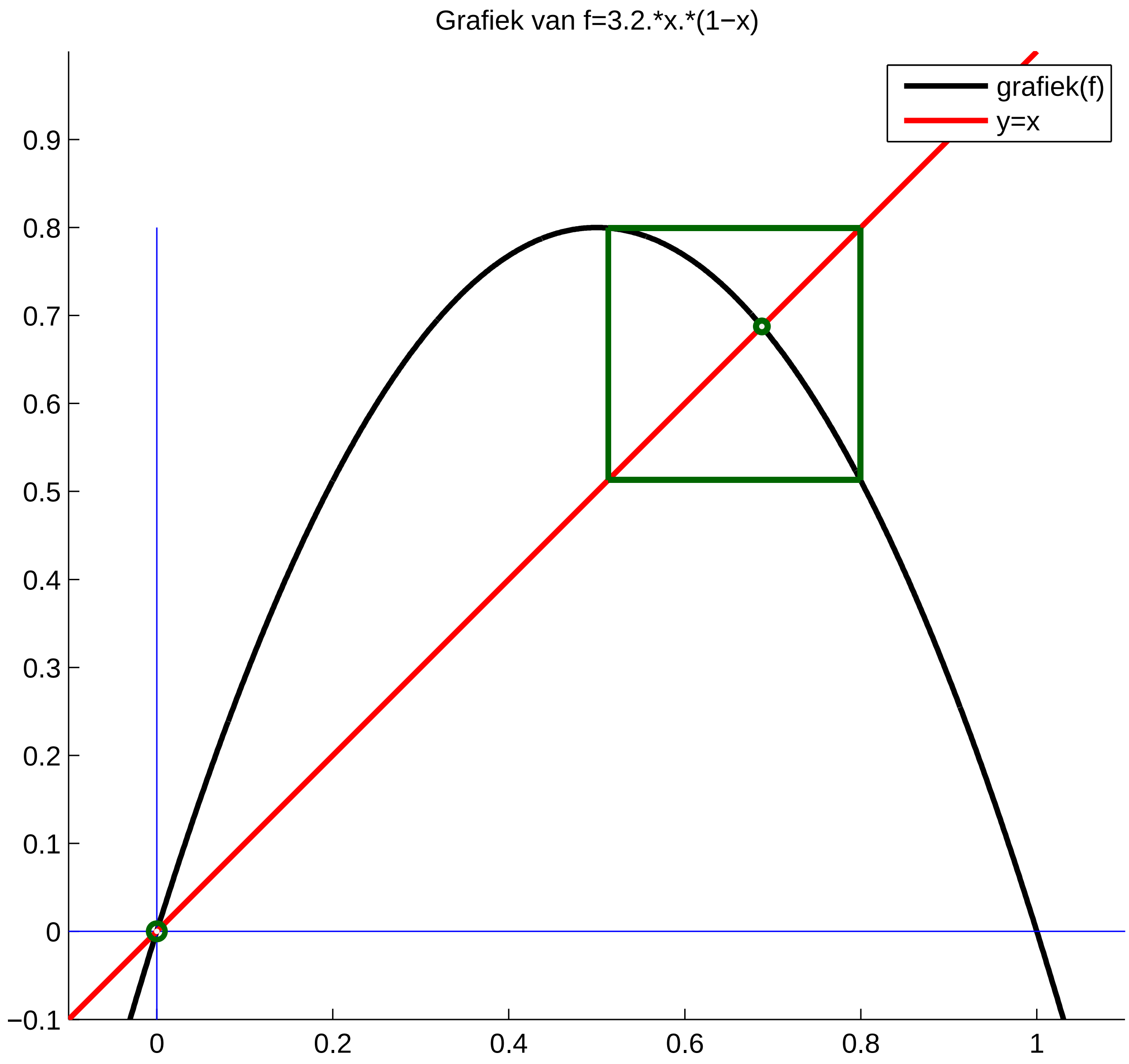
Grafische analyse



Grafische analyse



Grafische analyse



Program

- Populatie groei van één soort, recursies
- Evenwichtspunten
- Periodieke banen
- Bifurcatie
- Chaos
- Catastrofe

Voorbeeld. $x_{n+1} = f(x_n)$ met $f(x) \equiv \kappa_0\,(1 - x)\,x$:

Evenwicht.

$$\alpha = \kappa_0(1-\alpha)\alpha \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha = 0 \quad \text{of} \\ \alpha = \frac{\kappa_0 - 1}{\kappa_0}. \end{cases}$$

Er is 'n evenwicht $> 0 \quad \Leftrightarrow \quad \kappa_0 > 1.$

$\kappa_0 = 3.2$. Evenwicht > 0 is instabiel.

Experimenteel.

De baan (x_n) *wordt op den duur bijna 2-periodiek.*

Deze 2-periodieke baan lijkt stabiel te zijn.

Baan (x_n) is **2-periodiek** als $x_0 = x_2 = x_4 = \ldots$
$x_1 = x_3 = x_5 = \ldots,\ x_0 \neq x_1$

Schrijf $\alpha = x_0$ en $\beta = x_1$ en stel dat $\alpha \neq \beta$.

Baan is 2-periodiek $\quad \Leftrightarrow \qquad \beta = f(\alpha)\ \ \&\ \ \alpha = f(\beta)$

$\Leftrightarrow$ baan (x_{2n}) is in evenwicht m.b.t. $f \circ f$ en

$$\alpha = f \circ f(\alpha) \quad (\&\ \beta = f \circ f(\beta)\,).$$

We zeggen dan dat (α, β) een 2-periodieke baan vormt.

Hier $\quad f \circ f(x) \equiv f(f(x))$.

Voorbeeld.

$$f(x) = \kappa_0\, x\,(1 - x) \ \ \Rightarrow$$

$$f \circ f(x) = \kappa_0\, f(x)\,(1 - f(x)) = \kappa_0^2\, x\,(1 - x)\,(1 - \kappa_0\, x(1 - x))$$

Baan (x_n) is **2-periodiek** als $x_0 = x_2 = x_4 = \ldots$
$x_1 = x_3 = x_5 = \ldots,\ x_0 \neq x_1$

Schrijf $\alpha = x_0$ en $\beta = x_1$ en stel dat $\alpha \neq \beta$.

Baan is 2-periodiek $\quad\Leftrightarrow\quad$ $\beta = f(\alpha)$ & $\alpha = f(\beta)$

$\Leftrightarrow$ baan (x_{2n}) is in evenwicht m.b.t. $f \circ f$ en

$$\alpha = f \circ f(\alpha) \quad (\& \ \beta = f \circ f(\beta)).$$

Opmerking.

Evenwichten van f zijn ook evenwichten van $f \circ f$
(maar vormen geen 2-periodiek baan).

Baan (x_n) is **2-periodiek** als $x_0 = x_2 = x_4 = \ldots$
$x_1 = x_3 = x_5 = \ldots,\ x_0 \neq x_1$

Schrijf $\alpha = x_0$ en $\beta = x_1$ en stel dat $\alpha \neq \beta$.

Baan is 2-periodiek $\quad\Leftrightarrow\quad \beta = f(\alpha)\ \&\ \alpha = f(\beta)$

$\Leftrightarrow$ baan (x_{2n}) is in evenwicht m.b.t. $f \circ f$ en

$$\alpha = f \circ f(\alpha) \quad (\&\ \beta = f \circ f(\beta)\,).$$

Baan is **op den duur bijna** 2-periodiek als

$$\begin{matrix} x_{2n} \to \alpha \\ x_{2n+1} \to \beta \end{matrix} \quad (n \to \infty)$$

en (α, β) vormt een 2-periodiek baan.

Baan (x_n) is **2-periodiek** als $x_0 = x_2 = x_4 = \ldots$
$x_1 = x_3 = x_5 = \ldots,\ x_0 \neq x_1$

Schrijf $\alpha = x_0$ en $\beta = x_1$ en stel dat $\alpha \neq \beta$.

Baan is 2-periodiek $\quad \Leftrightarrow \qquad \beta = f(\alpha)$ & $\alpha = f(\beta)$

$\Leftrightarrow$ baan (x_{2n}) is in evenwicht m.b.t. $f \circ f$ en

$$\alpha = f \circ f(\alpha) \quad (\&\ \beta = f \circ f(\beta)).$$

Baan is **op den duur bijna** 2-periodiek als

$$\begin{matrix} x_{2n} \to \alpha \\ x_{2n+1} \to \beta \end{matrix} \quad (n \to \infty)$$
en (α, β) vormt een 2-periodiek baan.

2-periodieke baan (α, β) is **stabiel** als

$x_{2n} \to \alpha$ & $x_{2n+1} \to \beta \quad (n \to \infty)$ voor alle $x_0 \approx \alpha$,

...

Baan (x_n) is **2-periodiek** als $x_0 = x_2 = x_4 = \ldots$
$x_1 = x_3 = x_5 = \ldots$, $x_0 \neq x_1$

Schrijf $\alpha = x_0$ en $\beta = x_1$ en stel dat $\alpha \neq \beta$.

Baan is 2-periodiek $\Leftrightarrow$ $\beta = f(\alpha)$ & $\alpha = f(\beta)$

$\Leftrightarrow$ baan (x_{2n}) is in evenwicht m.b.t. $f \circ f$ en

$$\alpha = f \circ f(\alpha) \quad (\& \ \beta = f \circ f(\beta)\,).$$

Baan is **op den duur bijna** 2-periodiek als

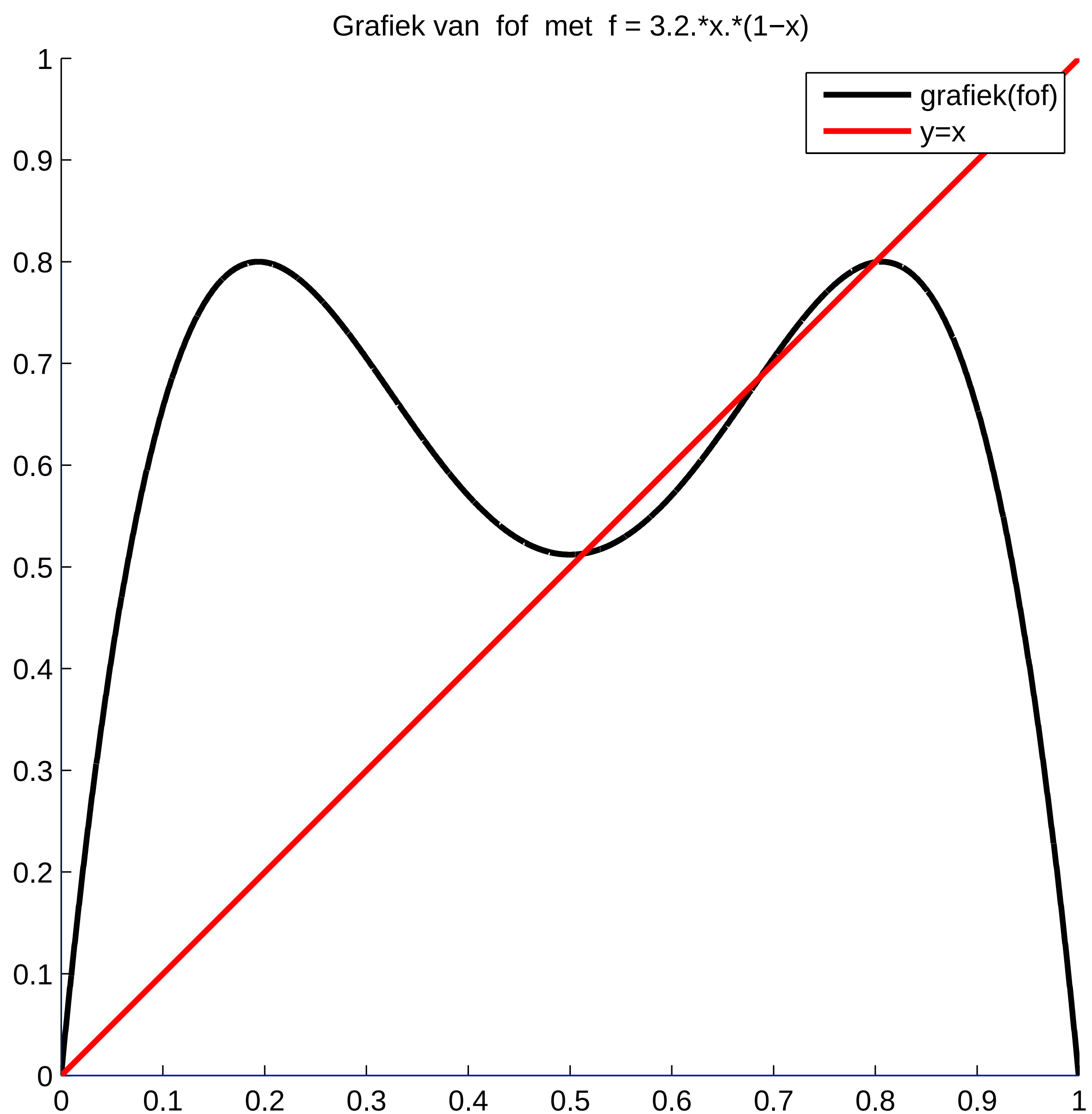
$$\begin{array}{c} x_{2n} \to \alpha \\ x_{2n+1} \to \beta \end{array} \quad (n \to \infty)$$

en (α, β) vormt een 2-periodiek baan.

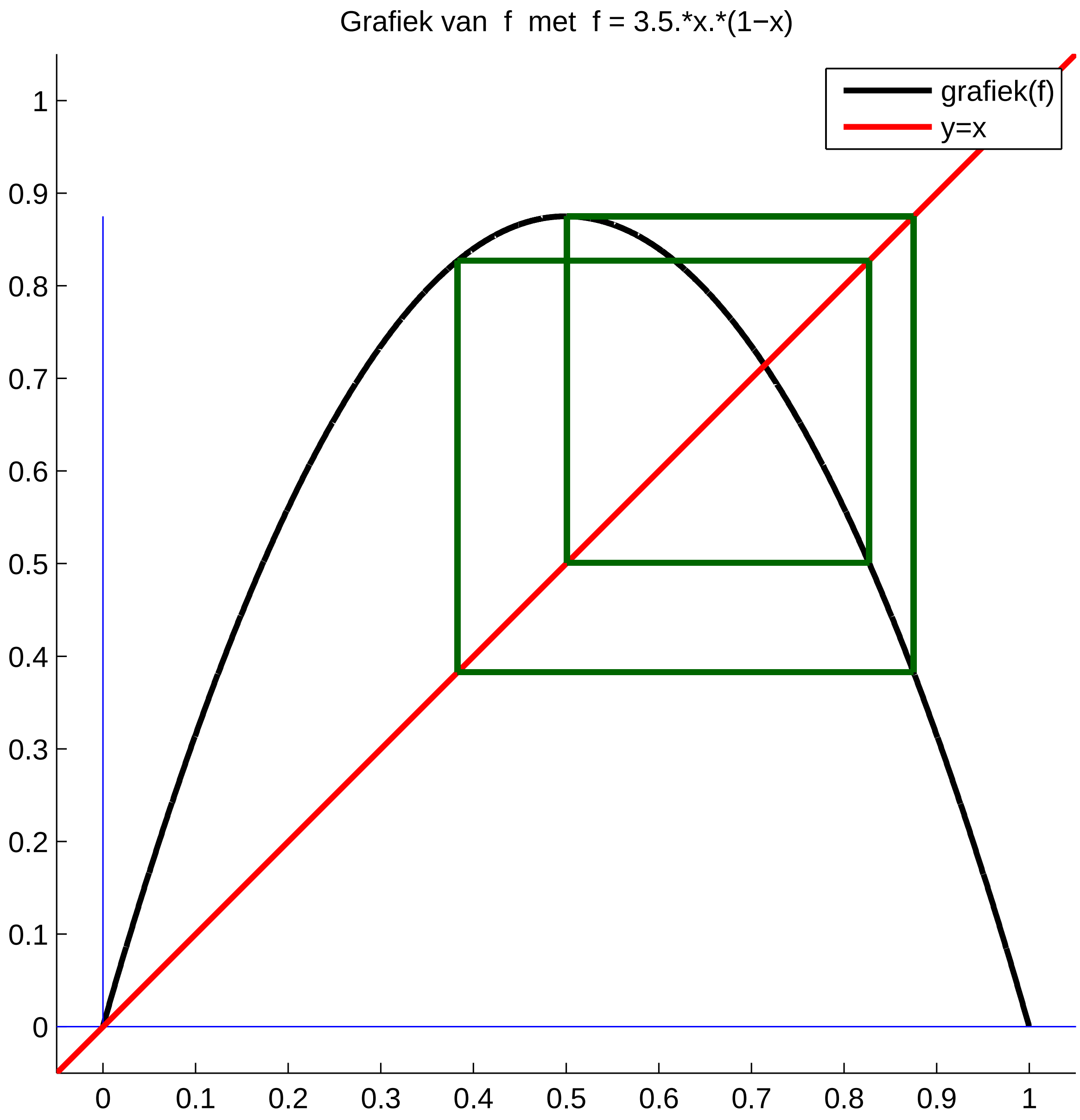
2-periodieke baan (α, β) is **stabiel** als

$\Leftrightarrow \alpha$ (& β) stabiel evenwicht $f \circ f$

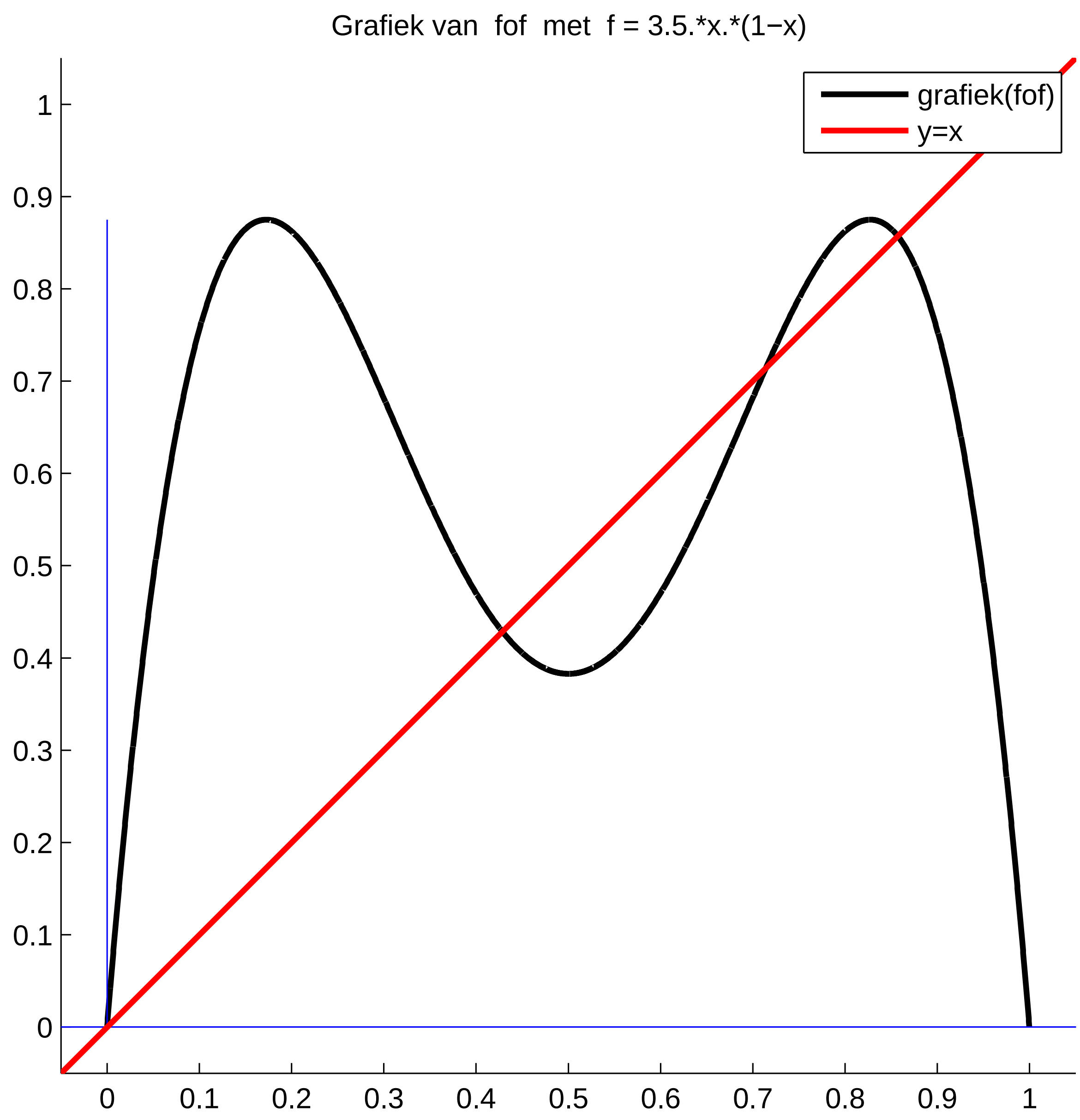
Grafische analyse



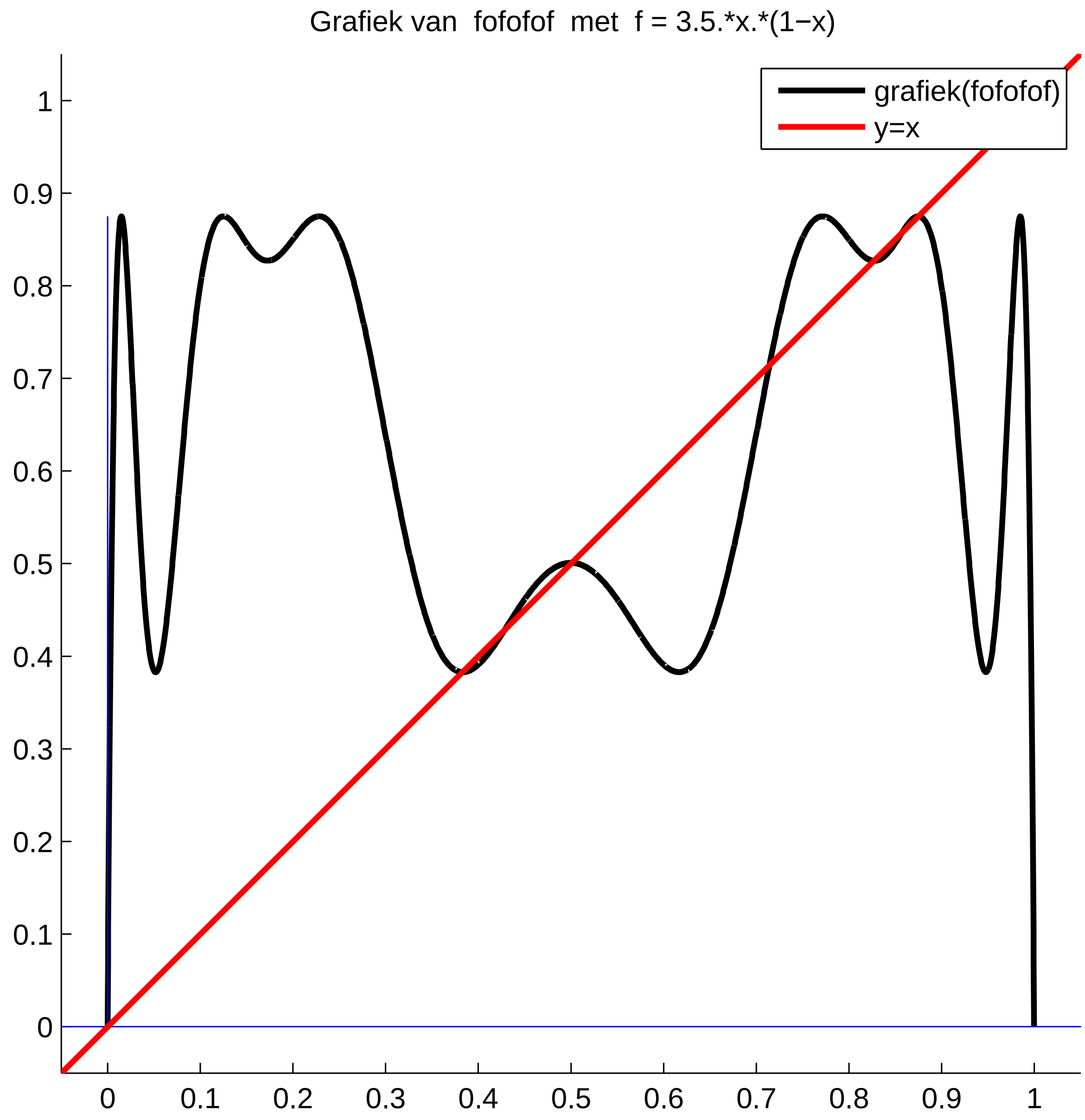
Grafische analyse



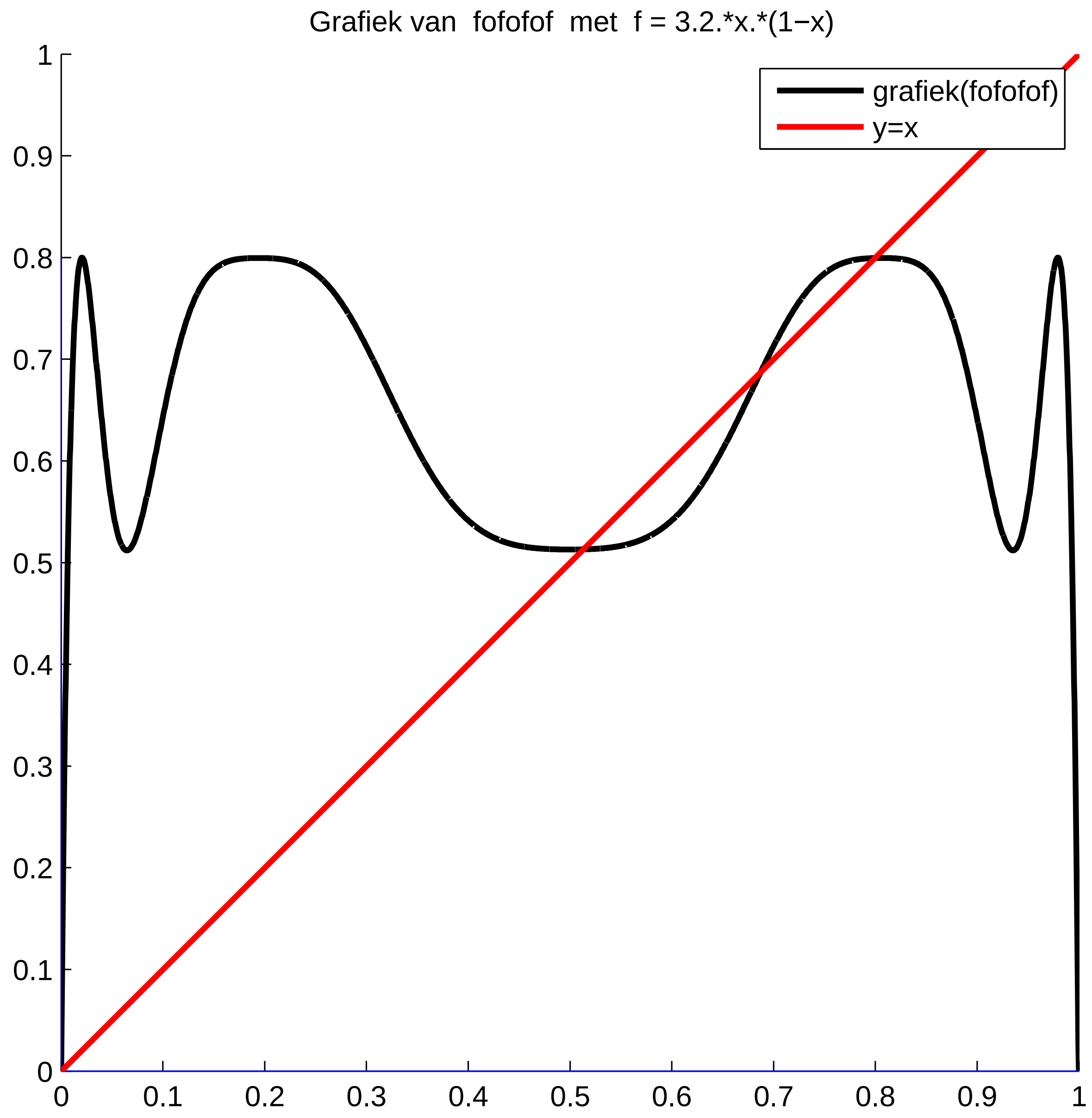
Grafische analyse



Grafische analyse



Grafische analyse



$$x_{n+1} = f(x_n)$$

$$f(\alpha) = \alpha \qquad \Rightarrow \qquad f \circ f(\alpha) = \alpha$$

$$f(\alpha) = \beta \quad \& \quad f(\beta) = \alpha \qquad \Rightarrow \qquad \begin{array}{l} f \circ f(\alpha) = f(\beta) = \alpha \\ f \circ f(\beta) = \beta \end{array}$$

Hier $f \circ f(x) \equiv f(f(x))$

Voorbeeld.

$$f(x) = \kappa_0 \, x \, (1 - x) \quad \Rightarrow$$

$$f \circ f(x) = \kappa_0 \, f(x) \, (1 - f(x)) = \kappa_0^2 \, x \, (1 - x) \, (1 - \kappa_0 \, x(1 - x))$$

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

$$f(\alpha) = \alpha \qquad \Rightarrow \qquad f \circ f(\alpha) = \alpha$$

$$f(\alpha) = \beta \quad \& \quad f(\beta) = \alpha \qquad \Rightarrow \qquad \begin{array}{l} f \circ f(\alpha) = f(\beta) = \alpha \\ f \circ f(\beta) = \beta \end{array}$$

$$f(\alpha) = \beta,\ f(\beta) = \gamma,\ f(\gamma) = \delta,\ f(\delta) = \alpha$$

$$\Rightarrow \qquad \begin{array}{l} f \circ f \circ f \circ f(\alpha) = \alpha \\ f \circ f \circ f \circ f(\beta) = \beta \\ f \circ f \circ f \circ f(\gamma) = \gamma \\ f \circ f \circ f \circ f(\delta) = \delta \end{array}$$

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

$$f(\alpha) = \alpha \qquad \Rightarrow \qquad f \circ f(\alpha) = \alpha$$

$$f(\alpha) = \beta \quad \& \quad f(\beta) = \alpha \qquad \Rightarrow \qquad \begin{array}{l} f \circ f(\alpha) = f(\beta) = \alpha \\ f \circ f(\beta) = \beta \end{array}$$

$$f(\alpha) = \beta,\ f(\beta) = \gamma,\ f(\gamma) = \delta,\ f(\delta) = \alpha$$

$$\Rightarrow \qquad \begin{array}{l} f \circ f \circ f \circ f(\alpha) = \alpha \\ f \circ f \circ f \circ f(\beta) = \beta \\ f \circ f \circ f \circ f(\gamma) = \gamma \\ f \circ f \circ f \circ f(\delta) = \delta \end{array}$$

Opmerking. $f(\alpha) = \alpha \qquad \Rightarrow \qquad |(f \circ f)'(\alpha) = |f'(\alpha)|^2$

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

$$f(\alpha) = \alpha \qquad \Rightarrow \qquad f \circ f(\alpha) = \alpha$$

$$f(\alpha) = \beta \quad \& \quad f(\beta) = \alpha \qquad \Rightarrow \qquad \begin{array}{l} f \circ f(\alpha) = f(\beta) = \alpha \\ f \circ f(\beta) = \beta \end{array}$$

$$f(\alpha) = \beta,\ f(\beta) = \gamma,\ f(\gamma) = \delta,\ f(\delta) = \alpha$$

$$\Rightarrow \qquad \begin{array}{l} f \circ f \circ f \circ f(\alpha) = \alpha \\ f \circ f \circ f \circ f(\beta) = \beta \\ f \circ f \circ f \circ f(\gamma) = \gamma \\ f \circ f \circ f \circ f(\delta) = \delta \end{array}$$

Opmerking. $f(\alpha) = \alpha \qquad \Rightarrow \qquad |(f \circ f)'(\alpha) = |f'(\alpha)|^2$

$f(\alpha) = \beta \ \&\ f(\beta) = \alpha \qquad \Rightarrow \qquad |(f \circ f)'(\alpha) = |f'(\alpha) f'(\beta)|$

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

Malthus: $f(x) = \kappa\, x$ met κ constant

Kritiek. κ neemt af als x toeneemt

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

Malthus: $f(x) = \kappa\, x$ met κ constant

Kritiek. κ neemt af als x toeneemt

$f(x) = \kappa(x)\, x$, waarbij $\kappa(x)$ daalt als x stijgt.

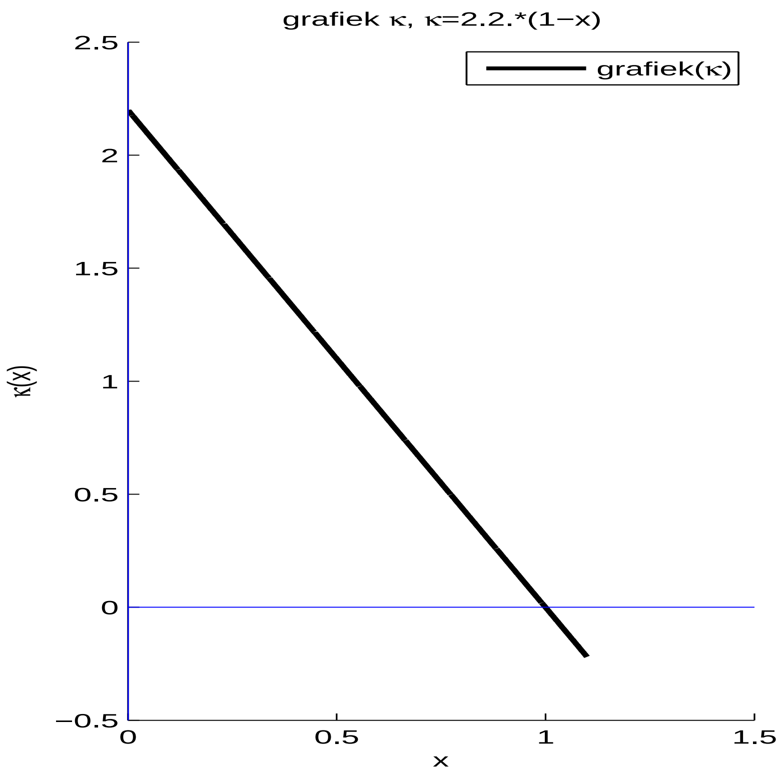
$$x_{n+1} = f(x_n)$$

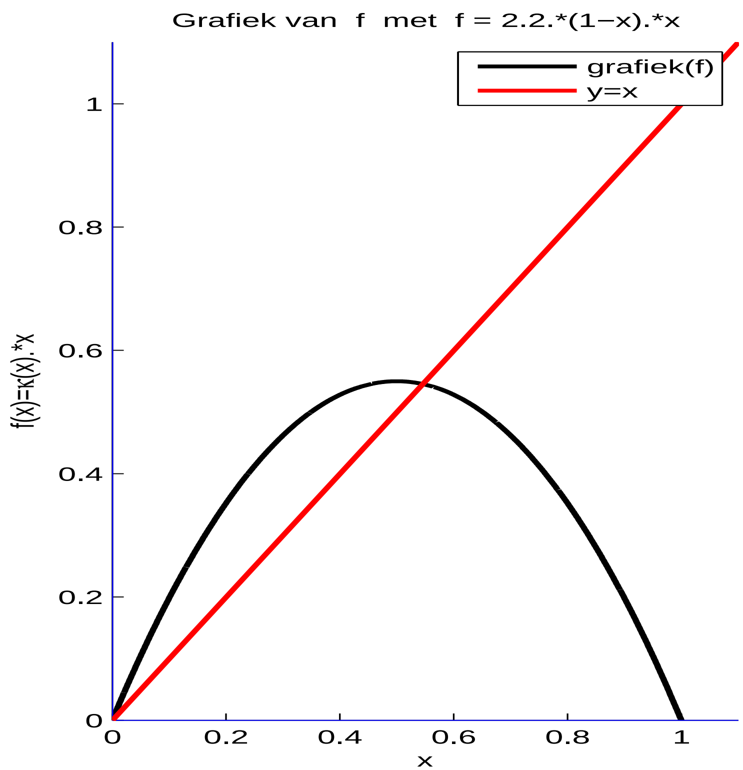
Malthus: $f(x) = \kappa\, x$ met κ constant

Kritiek. κ neemt af als x toeneemt

$f(x) = \kappa(x)\, x$, waarbij $\kappa(x)$ daalt als x stijgt.

Voorbeeld. Verhulst





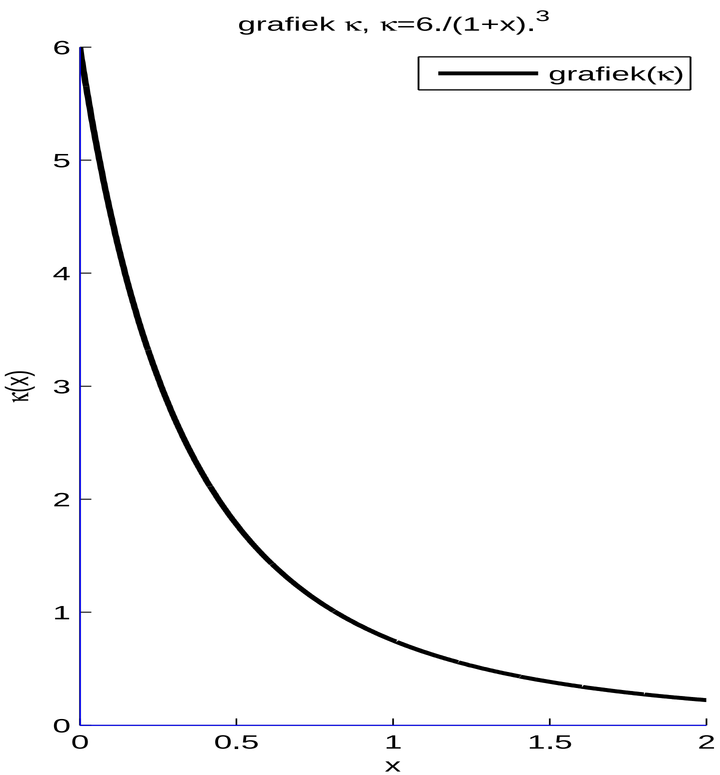
$$x_{n+1} = f(x_n)$$

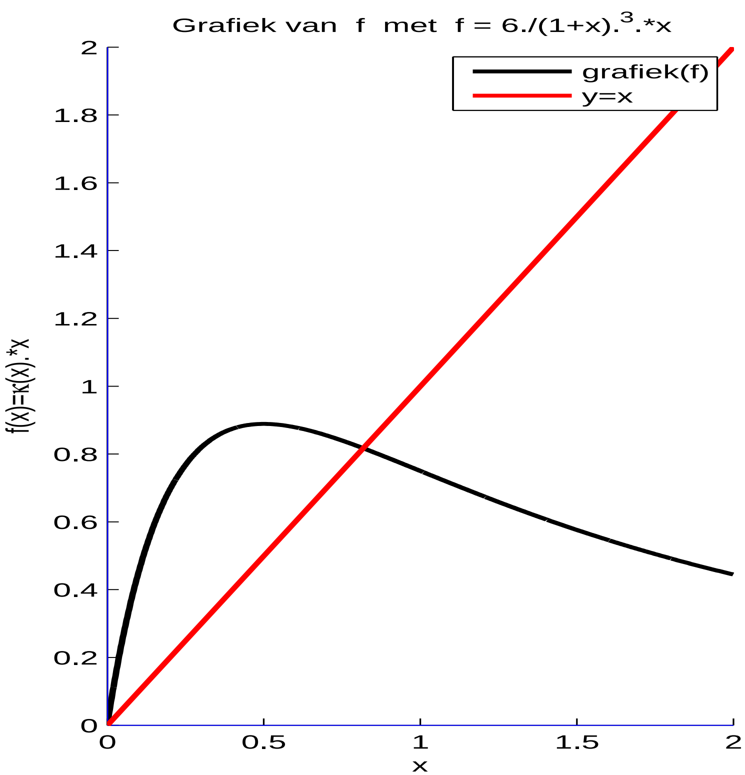
Malthus: $f(x) = \kappa\, x$ met κ constant

Kritiek. κ neemt af als x toeneemt

$f(x) = \kappa(x)\, x$, waarbij $\kappa(x)$ daalt als x stijgt.

Voorbeeld. Hassel, Lawton, May





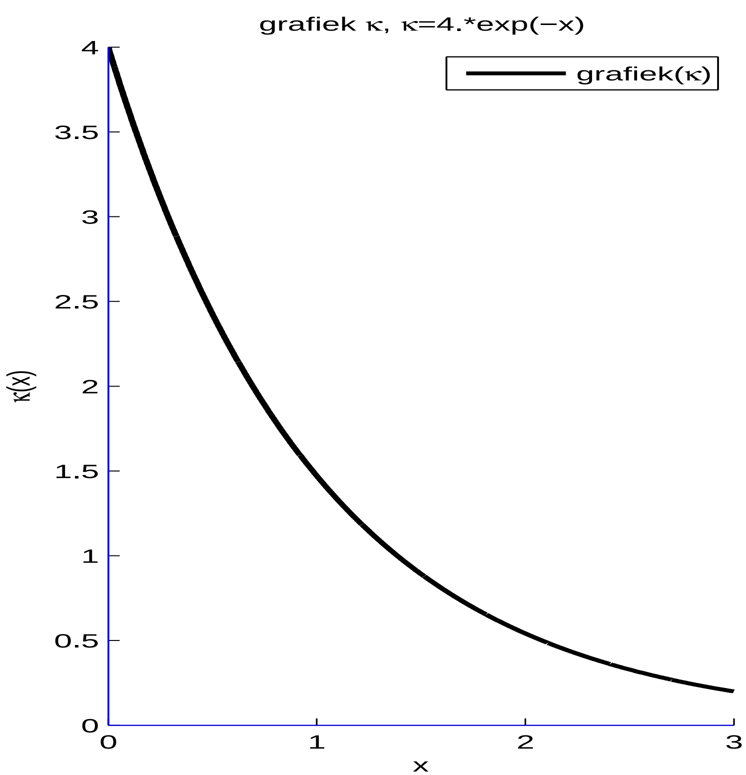
$$x_{n+1} = f(x_n)$$

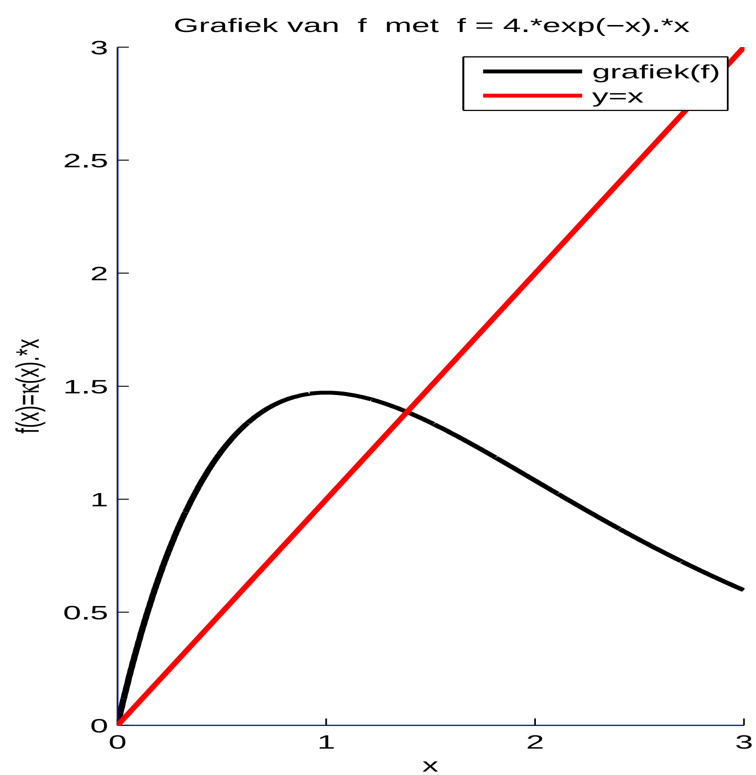
Malthus: $f(x) = \kappa\, x$ met κ constant

Kritiek. κ neemt af als x toeneemt

$f(x) = \kappa(x)\, x$, waarbij $\kappa(x)$ daalt als x stijgt.

Voorbeeld. Rickert





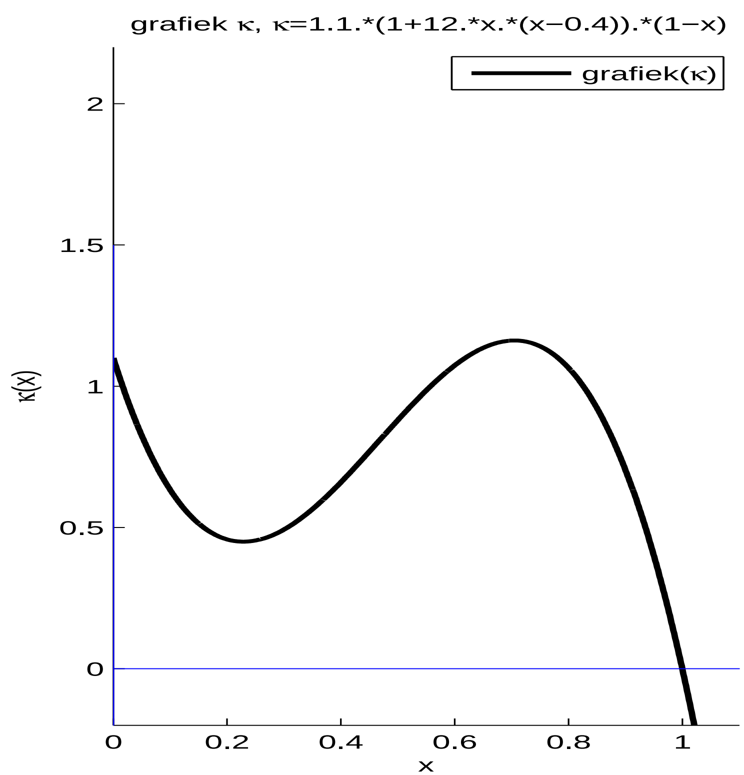
$$x_{n+1} = f(x_n)$$

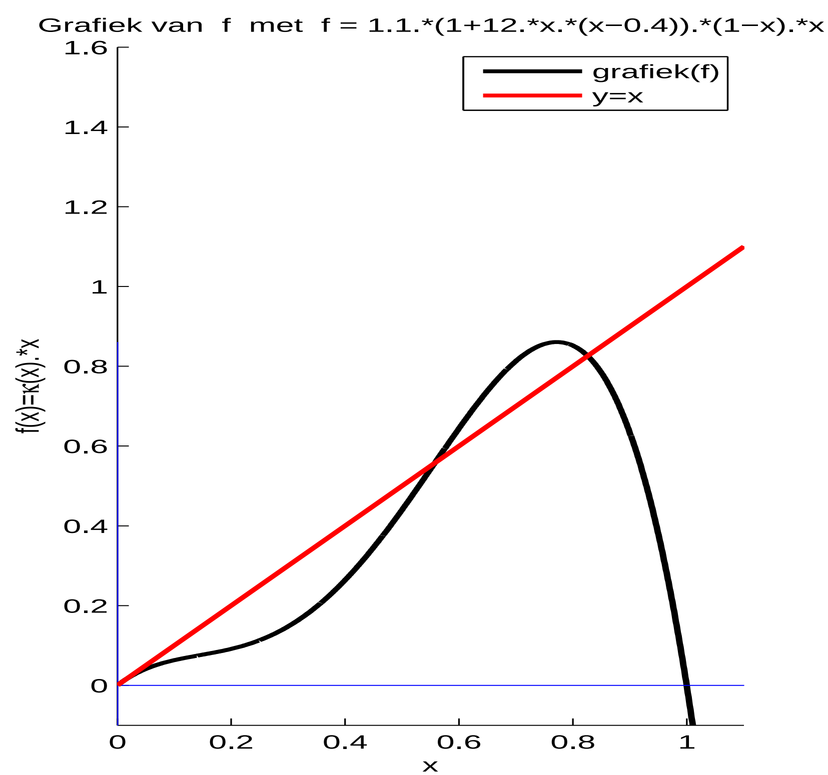
Malthus: $f(x) = \kappa\, x$ met κ constant

Kritiek. κ neemt af als x toeneemt

$f(x) = \kappa(x)\, x$, waarbij $\kappa(x)$ daalt als x stijgt.

Voorbeeld.





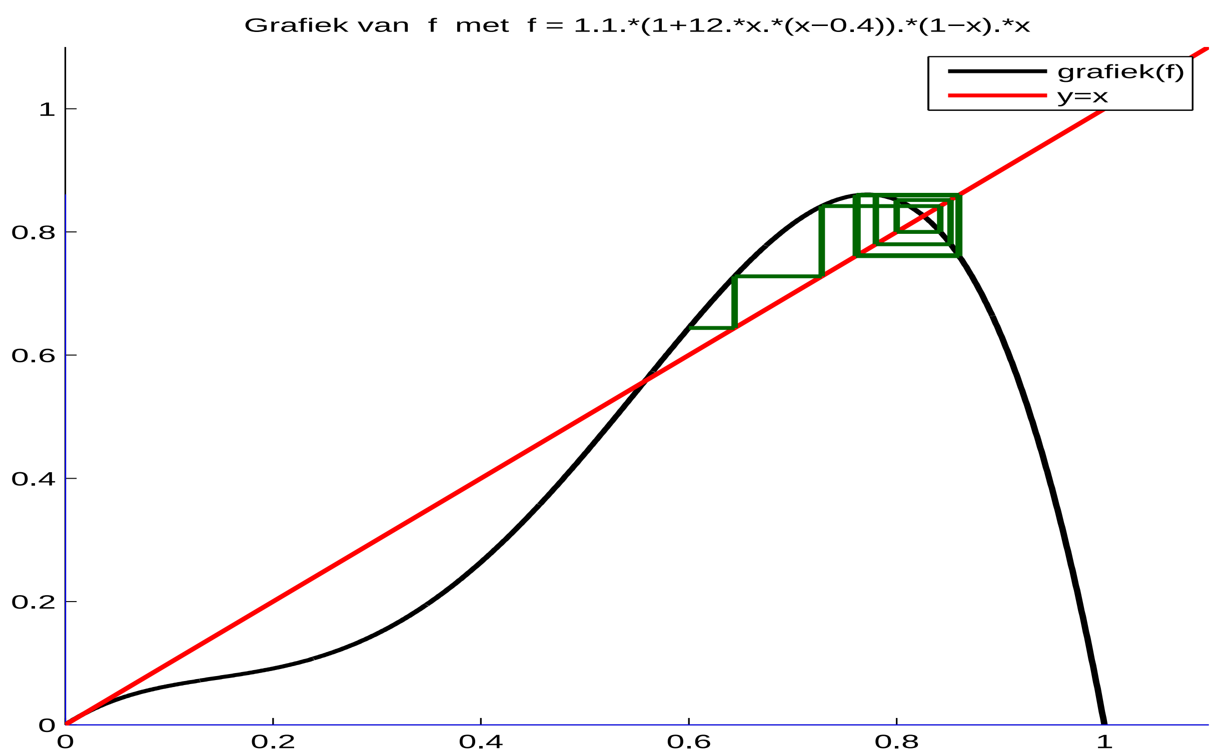
$$x_{n+1} = f(x_n)$$

Malthus: $\quad f(x) = \kappa\, x \quad$ met κ constant

Kritiek. κ neemt af als x toeneemt

$f(x) = \kappa(x)\, x$, waarbij $\kappa(x)$ daalt als x stijgt.

Voorbeeld.



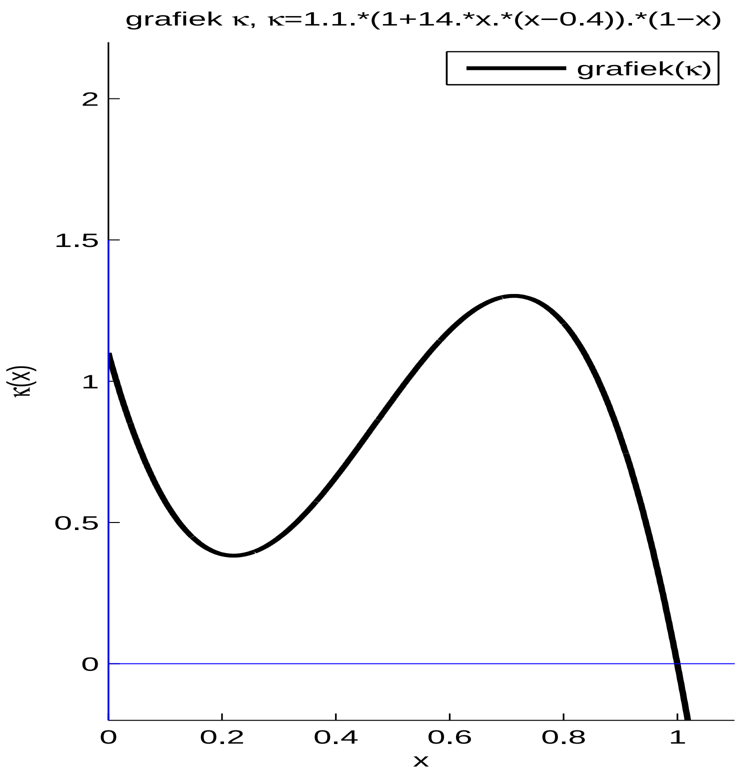
$$x_{n+1} = f(x_n)$$

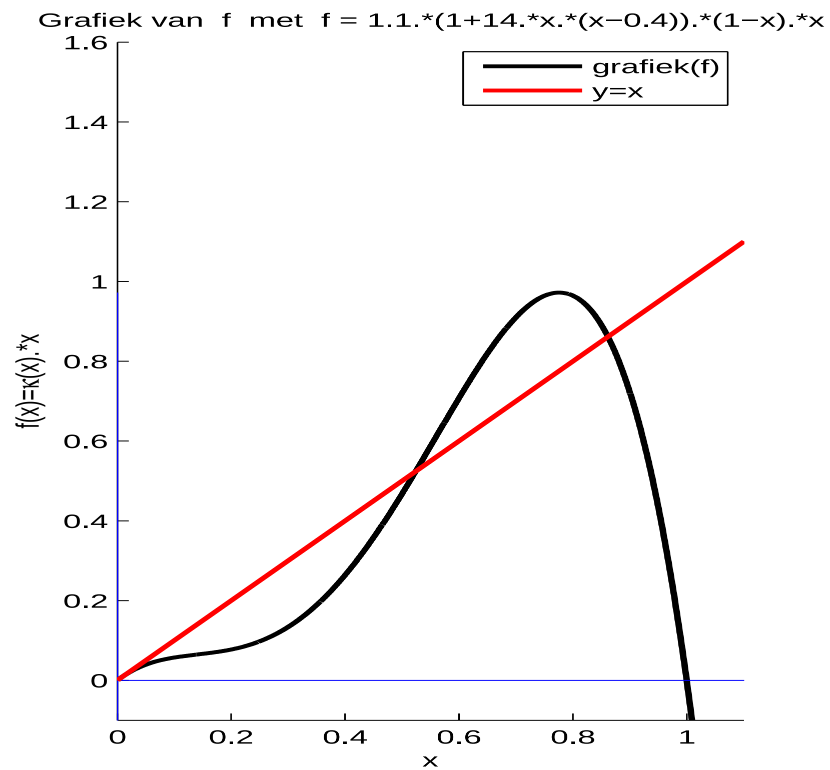
Malthus: $f(x) = \kappa\, x$ met κ constant

Kritiek. κ neemt af als x toeneemt

$f(x) = \kappa(x)\, x$, waarbij $\kappa(x)$ daalt als x stijgt.

Voorbeeld.





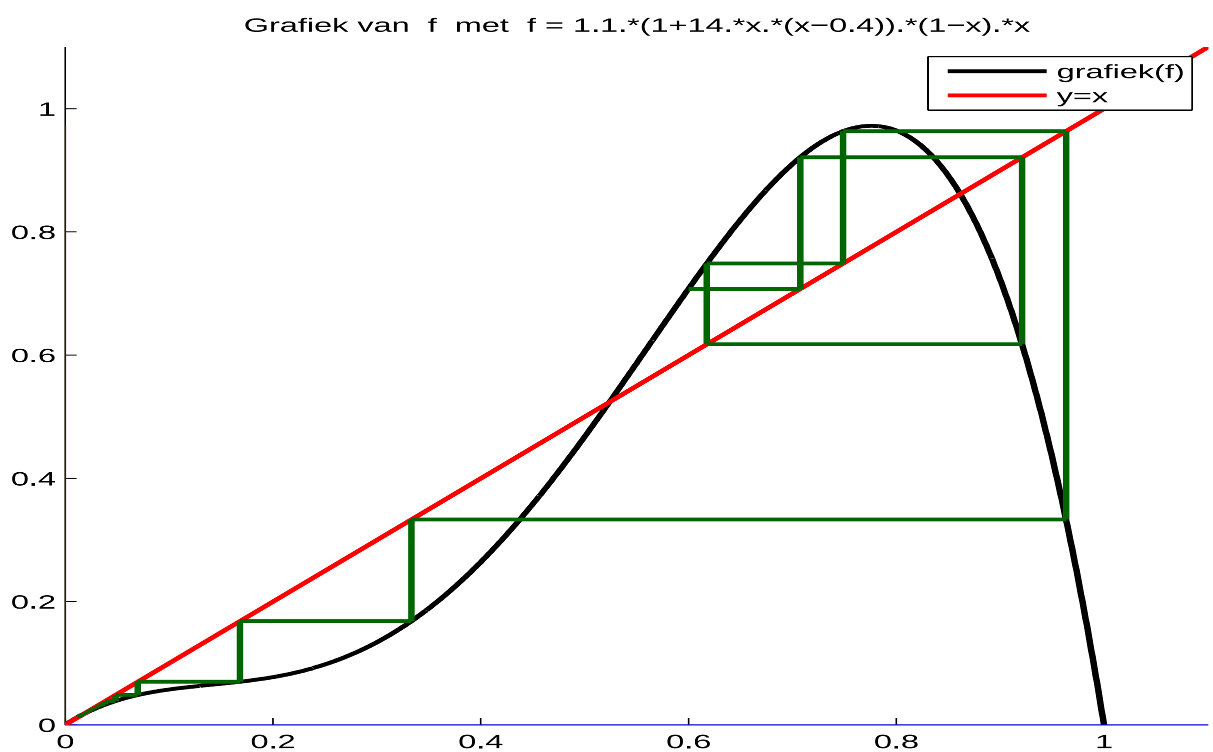
$$x_{n+1} = f(x_n)$$

Malthus: $\quad f(x) = \kappa\, x \quad$ met κ constant

Kritiek. κ neemt af als x toeneemt

$f(x) = \kappa(x)\, x$, waarbij $\kappa(x)$ daalt als x stijgt.

Voorbeeld.



Conclusie.

Analyse techniek is toepasbaar.

Zelf soort fenomenen:

Stabiele en instabiele evenwichten
stabiele en instabiele periodieke banen

Conclusie.

Analyse techniek is toepasbaar.

Zelf soort fenomenen:

Stabiele en instabiele evenwichten
stabiele en instabiele periodieke banen

Kan je een instabiel evenwicht in de (biologische) praktijk waarnemen?

Conclusie.

Analyse techniek is toepasbaar.

Zelf soort fenomenen:

Stabiele en instabiele evenwichten
stabiele en instabiele periodieke banen

Kan je een instabiel evenwicht in de (biologische) praktijk waarnemen?

Kan je een instabiel evenwicht berekenen?

Conclusie.

Analyse techniek is toepasbaar.

Zelf soort fenomenen:

Stabiele en instabiele evenwichten
stabiele en instabiele periodieke banen

Kan je een instabiel evenwicht in de (biologische) praktijk waarnemen?

Kan je een instabiel evenwicht berekenen?

Kan je een stabiel evenwicht in de praktijk waarnemen?

Conclusie.

Analyse techniek is toepasbaar.

Zelf soort fenomenen:

Stabiele en instabiele evenwichten
stabiele en instabiele periodieke banen

Kan je een instabiel evenwicht in de (biologische) praktijk waarnemen?

Kan je een instabiel evenwicht berekenen?

Kan je een stabiel evenwicht in de praktijk waarnemen?

Kan je een stabiel 2-periodieke baan in de praktijk waarnemen?

$$x_{n+1} = f(x_n) \qquad \text{met } f : I \to I \subset \mathbb{R} \text{ continu}$$

Is er een evenwicht (stabiel of instabiel) als er een 2-periodieke baan is?

$$x_{n+1} = f(x_n) \qquad \text{met } f : I \to I \subset \mathbb{R} \text{ continu}$$

Is er een evenwicht (stabiel of instabiel) als er een 2-periodieke baan is?

Waarom ‘splitst’ een stabiel evenwicht bij oplopende κ_0 in een 2-periodieke baan?

$$x_{n+1} = f(x_n) \qquad \text{met } f : I \to I \subset \mathbb{R} \text{ continu}$$

Is er een evenwicht (stabiel of instabiel) als er een 2-periodieke baan is?

Waarom 'splitst' een stabiel evenwicht bij oplopende κ_0 in een 2-periodieke baan?

Waarom 'splitst' een stabiel evenwicht bij oplopende κ_0 niet in een 3-periodieke baan?

$$x_{n+1} = f(x_n) \qquad \text{met } f : I \to I \subset \mathbb{R} \text{ continu}$$

Is er een evenwicht (stabiel of instabiel) als er een 2-periodieke baan is?

Waarom 'splitst' een stabiel evenwicht bij oplopende κ_0 in een 2-periodieke baan?

Waarom 'splitst' een stabiel evenwicht bij oplopende κ_0 niet in een 3-periodieke baan?

Komen 3-periodieke baan voor?

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad \text{met } f : I \to I \subset \mathbb{R} \text{ continu}$$

Is er een evenwicht (stabiel of instabiel) als er een 2-periodieke baan is?

Waarom 'splitst' een stabiel evenwicht bij oplopende κ_0 in een 2-periodieke baan?

Waarom 'splitst' een stabiel evenwicht bij oplopende κ_0 niet in een 3-periodieke baan?

Komen 3-periodieke baan voor?

Kan een evenwicht splitsen in een 4 periodieke baan?

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad \text{met } f : I \to I \subset \mathbb{R} \text{ continu}$$

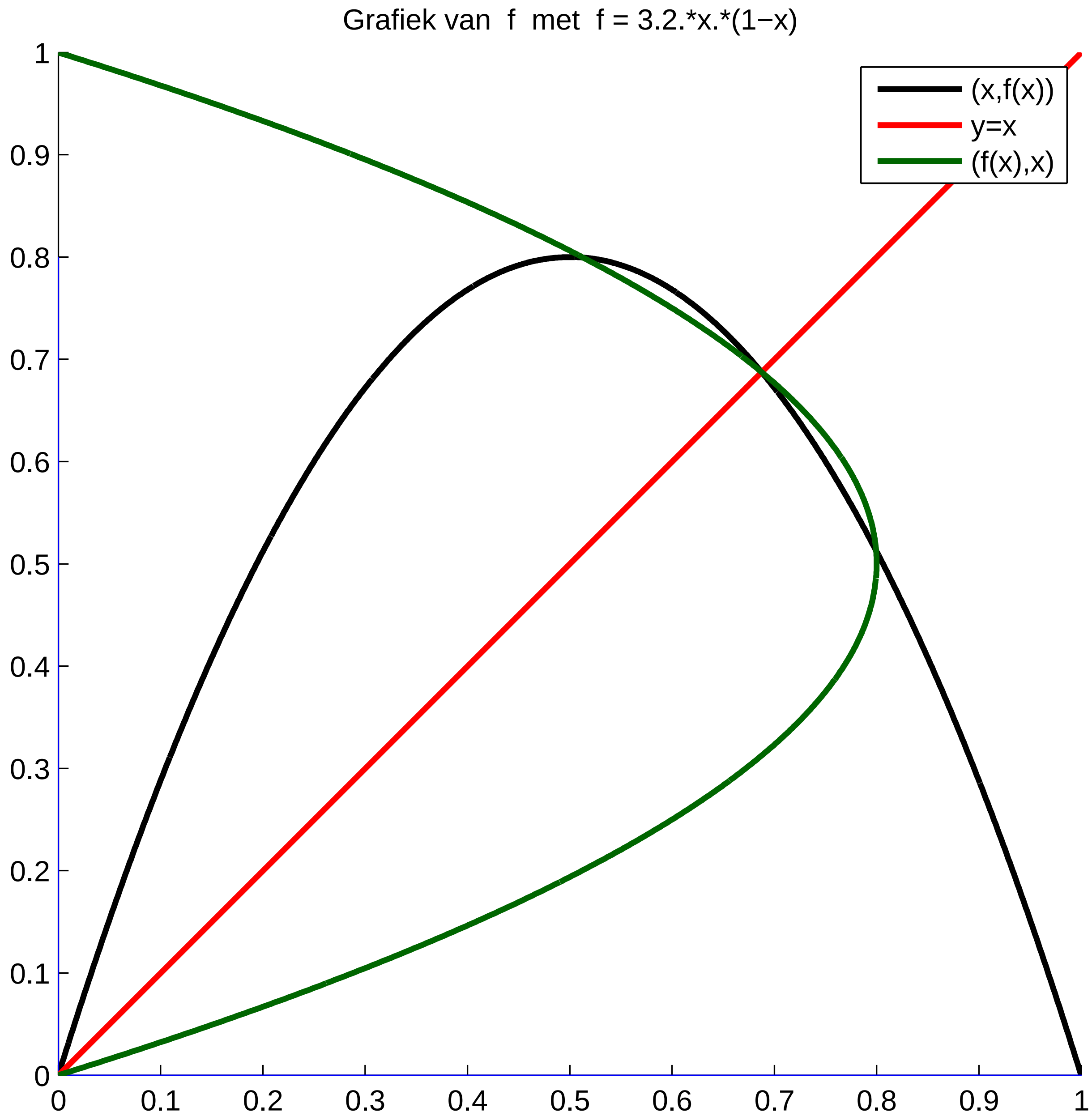
Is er een evenwicht (stabiel of instabiel) als er een 2-periodieke baan is?

Waarom 'splitst' een stabiel evenwicht bij oplopende κ_0 in een 2-periodieke baan?

Waarom 'splitst' een stabiel evenwicht bij oplopende κ_0 niet in een 3-periodieke baan?

Komen 3-periodieke baan voor?

Kan een evenwicht splitsen in een 4 periodieke baan?


Grafiek van f met f = 3.2.*x.*(1−x)
(x,f(x))
y=x
(f(x),x)
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad \text{met } f : I \to I \subset \mathbb{R} \text{ continu}$$

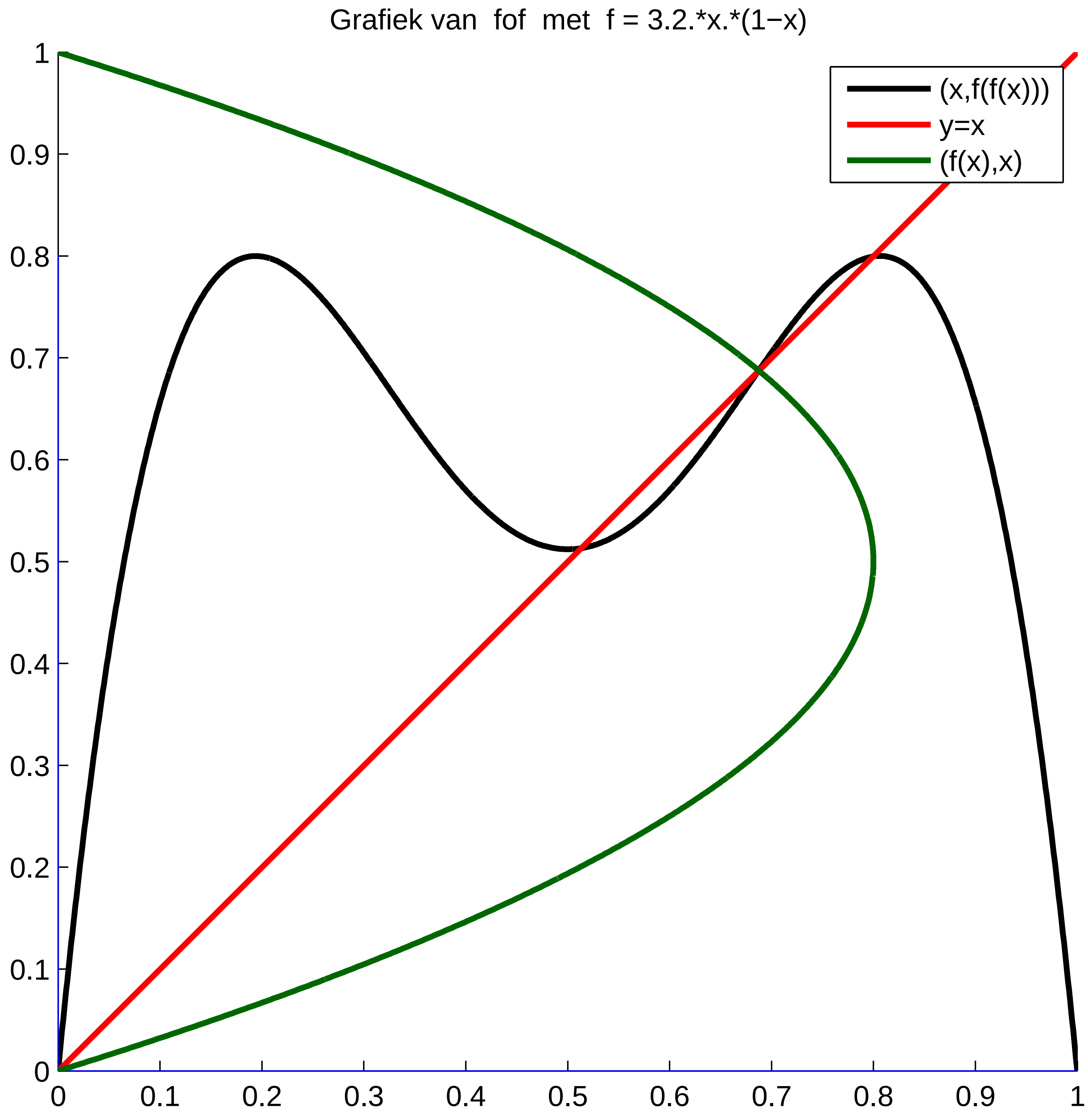
Is er een evenwicht (stabiel of instabiel) als er een 2-periodieke baan is?

Waarom 'splitst' een stabiel evenwicht bij oplopende κ_0 in een 2-periodieke baan?

Waarom 'splitst' een stabiel evenwicht bij oplopende κ_0 niet in een 3-periodieke baan?

Komen 3-periodieke baan voor?

Kan een evenwicht splitsen in een 4 periodieke baan?



Grafiek van fof met f = 3.2.*x.*(1−x)
(x,f(f(x)))
y=x
(f(x),x)
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad \text{met } f : I \to I \subset \mathbb{R} \text{ continu}$$

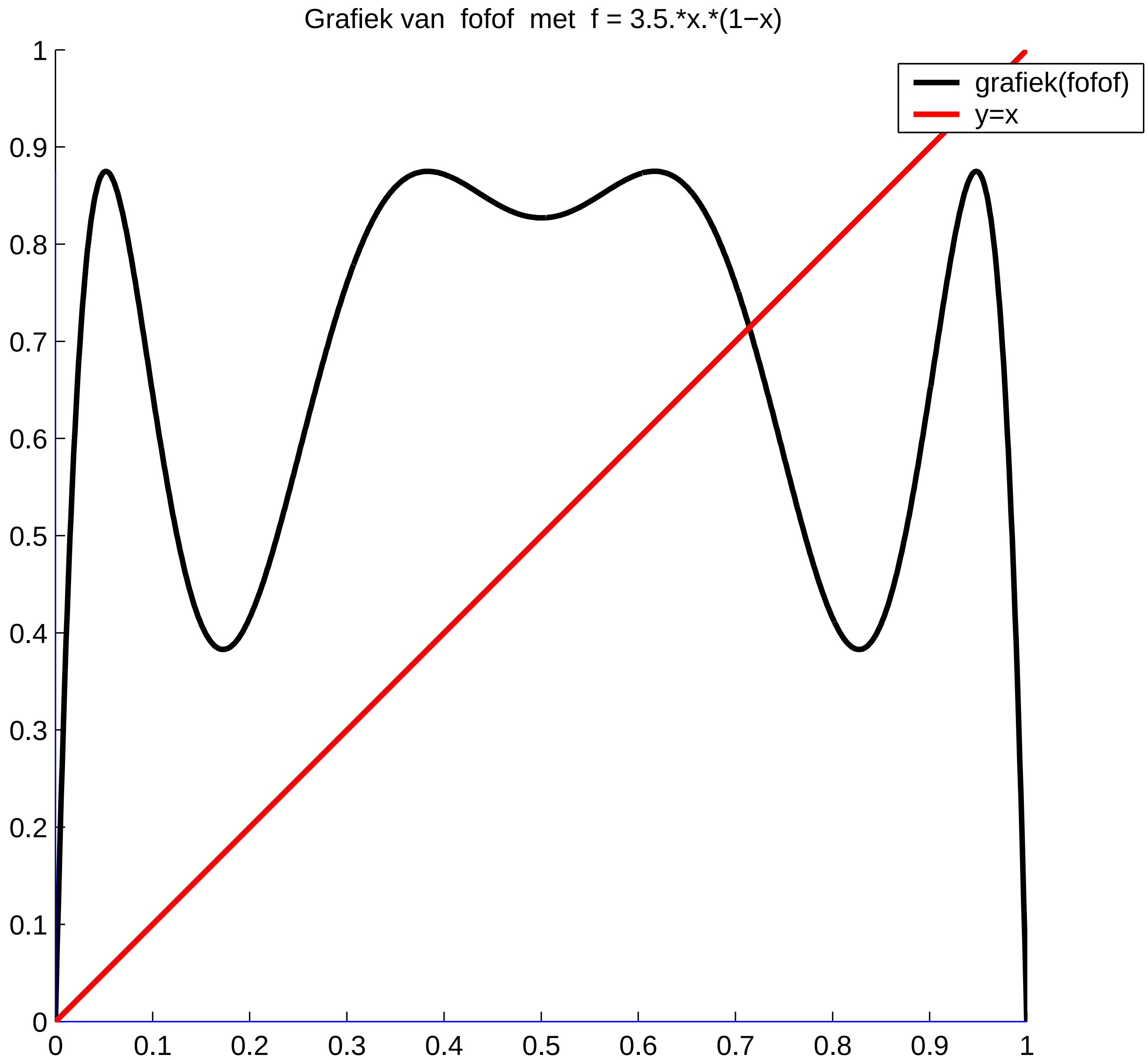
Is er een evenwicht (stabiel of instabiel) als er een 2-periodieke baan is?

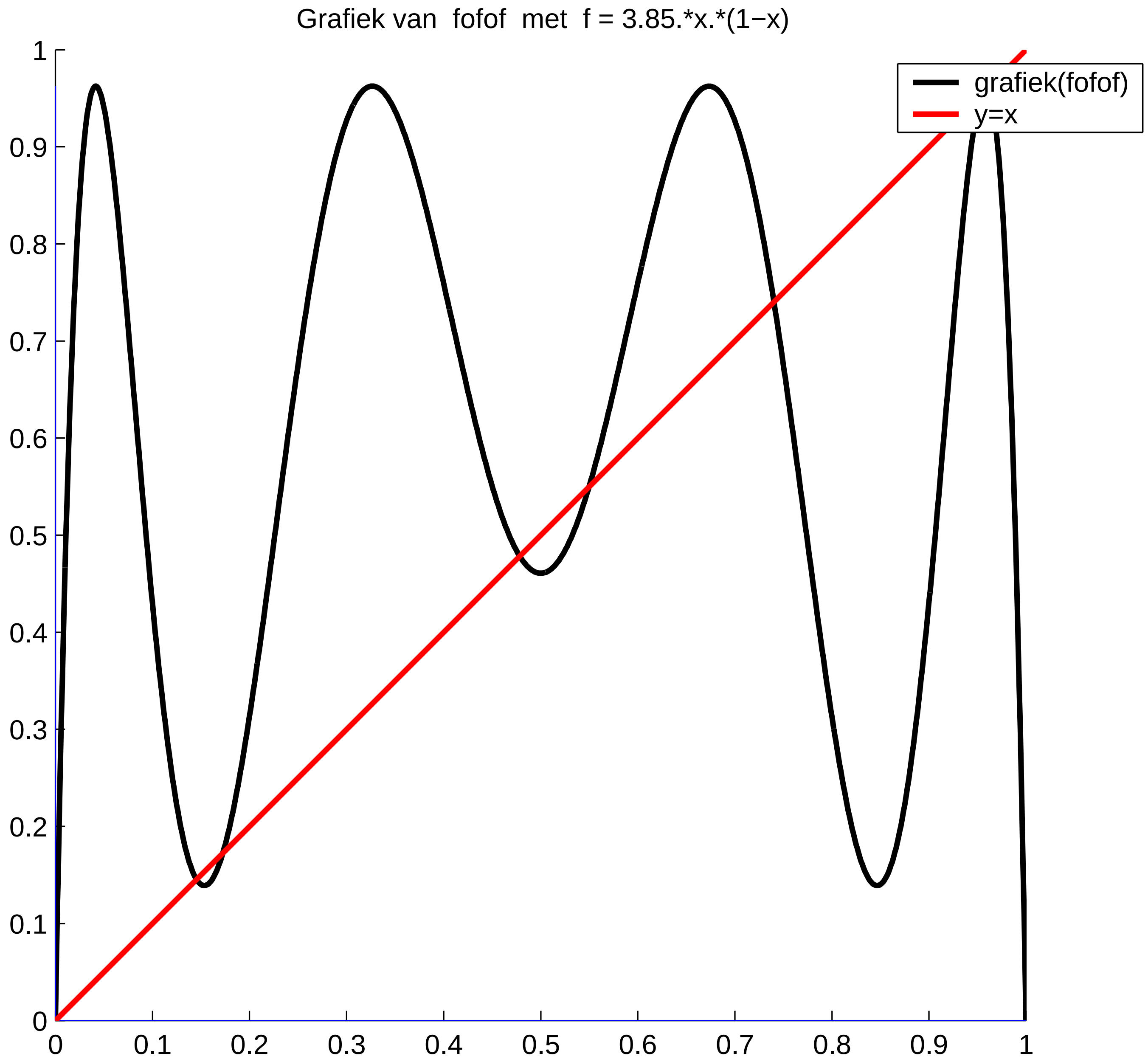
Waarom 'splitst' een stabiel evenwicht bij oplopende κ_0 in een 2-periodieke baan?

Waarom 'splitst' een stabiel evenwicht bij oplopende κ_0 niet in een 3-periodieke baan?

Komen 3-periodieke baan voor?

Kan een evenwicht splitsen in een 4 periodieke baan?


Grafiek van fofof met f = 3.5.*x.*(1−x)
grafiek(fofof)
y=x
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1



Grafiek van fofof met f = 3.85.*x.*(1−x)
grafiek(fofof)
y=x
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad \text{met } f : I \to I \subset \mathbb{R} \text{ continu}$$

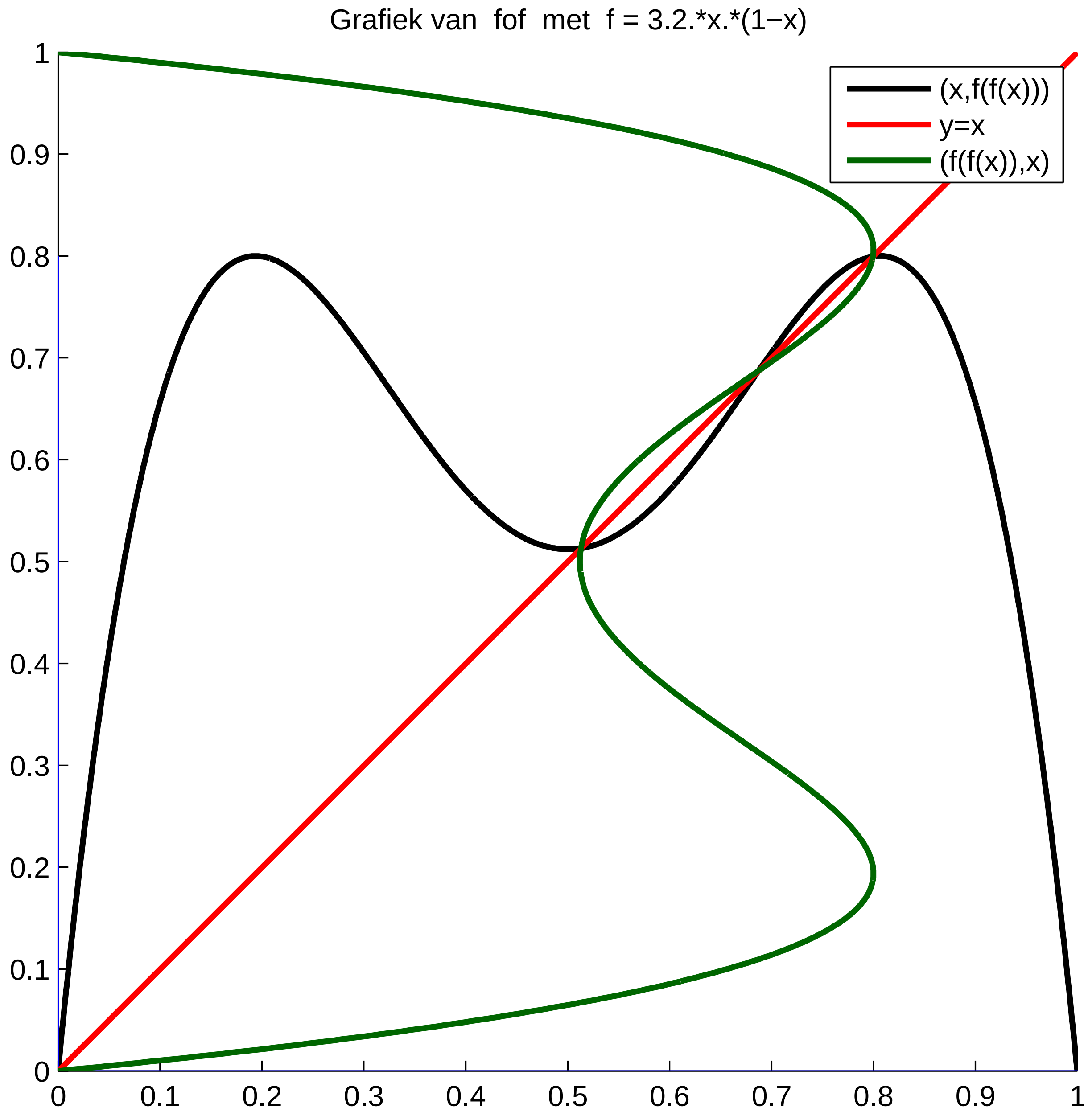
Is er een evenwicht (stabiel of instabiel) als er een 2-periodieke baan is?

Waarom 'splitst' een stabiel evenwicht bij oplopende κ_0 in een 2-periodieke baan?

Waarom 'splitst' een stabiel evenwicht bij oplopende κ_0 niet in een 3-periodieke baan?

Komen 3-periodieke baan voor?

Kan een evenwicht splitsen in een 4 periodieke baan?



Grafiek van fof met f = 3.2.*x.*(1−x)
(x,f(f(x)))
y=x
(f(f(x)),x)
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1

Program

- Populatie groei van één soort, recursies
- Evenwichtspunten
- Periodieke banen
- Bifurcatie
- Chaos
- Catastrofe

Bifurcaties

Voorbeeld. $\quad x_{n+1} = f(x_n) \quad$ met $\quad f(x) \equiv \kappa_0(1-x)x.$

Wat gebeurt als κ_0 oploopt vanaf $\kappa_0 = 0$?

Bifurcaties

Voorbeeld. $x_{n+1} = f(x_n)$ met $f(x) \equiv \kappa_0(1-x)x$.

Stabiel evenwicht verschuift

• tot zekere waarde κ_0 dan "splits" evenwicht in stabiele 2-periodieke baan + 1 instabiel evenwicht,

• punten op stabiele 2-periodieke baan verschuiven tot zekere waarde κ_0 dan splits deze baan in 1 stabiele 4-periodieke baan + 1 instab. 2-per. baan,

• punten op stabiele 4-periodieke baan verschuiven tot zekere waarde κ_0 dan splits deze baan in 1 stab. 8-per. baan + 1 instab. 4-per. baan

$\vdots$

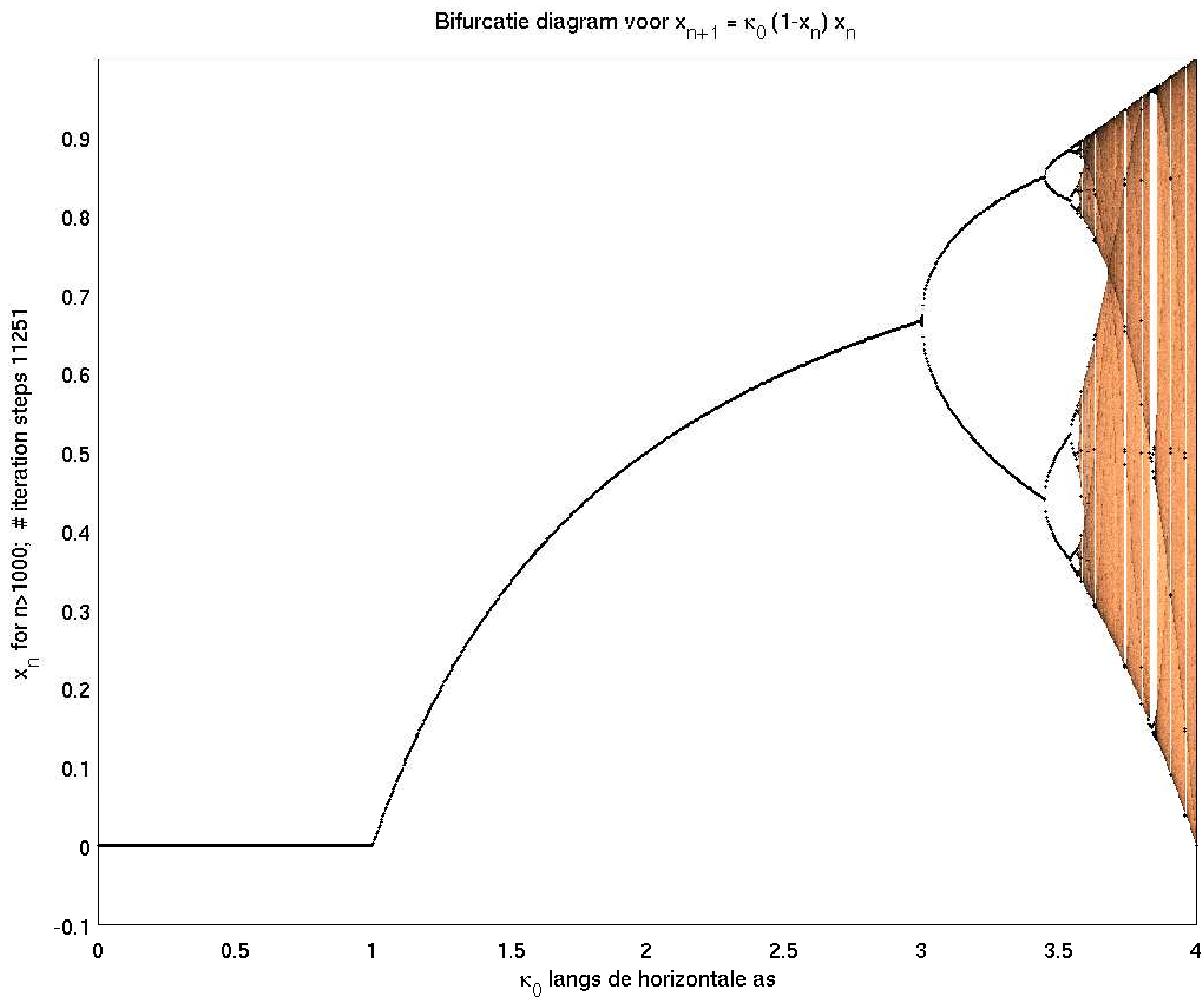
Bifurcatie diagram

Voor het proces $x_{n+1} = \kappa_0(1 - x_n)x_n$ staat op de volgende paar transparanten voor diverse waarden van κ_0 uitgezet wat er 'op den duur' gebeurt met x_n:

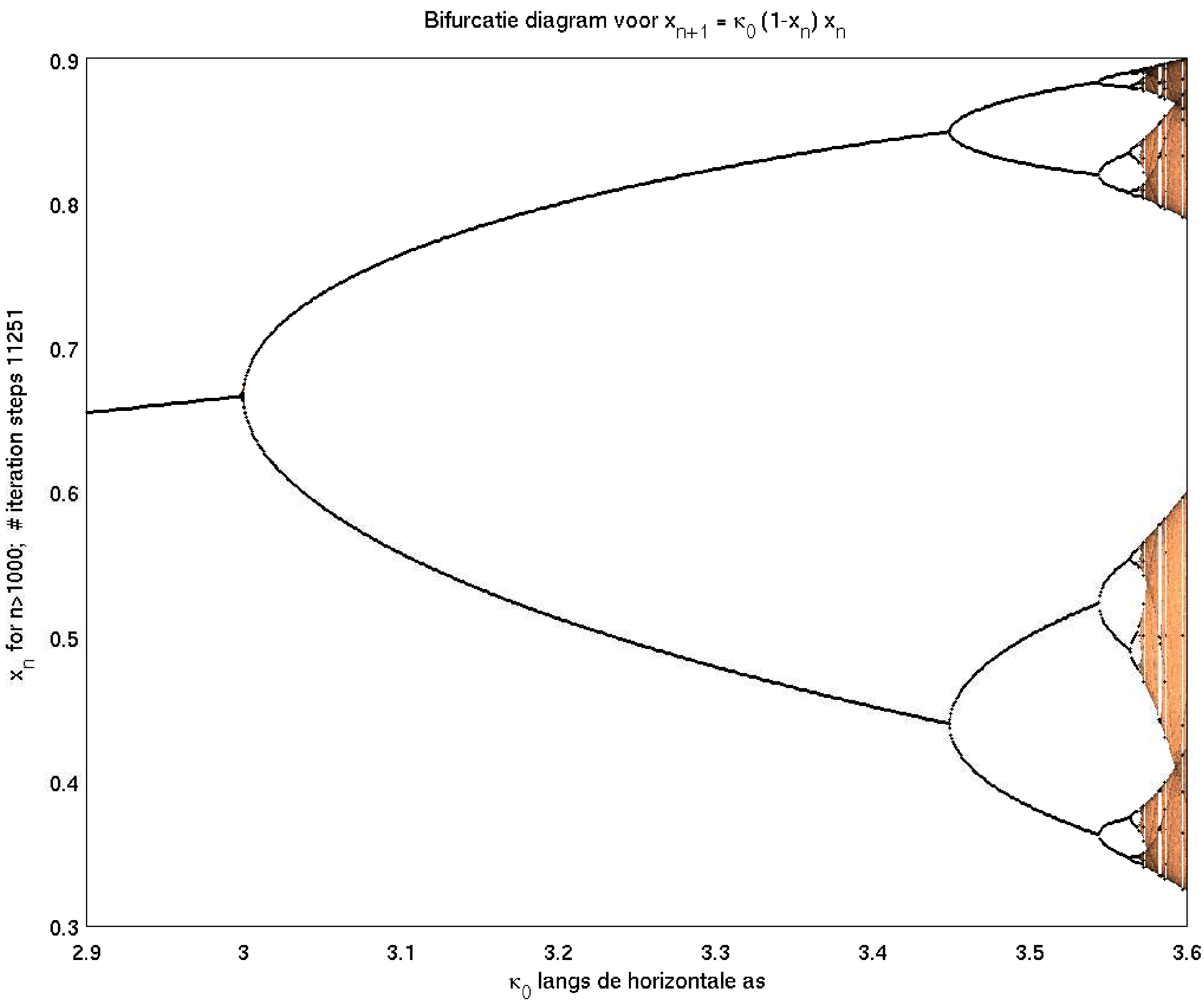
κ_0 staat langs de horizontale as (er zijn 1000 waarden gekozen voor κ_0 gelijkmatig verdeeld over de horizontale as). Eerst $\kappa_0 \in [0, 1]$, daarna wordt er ingezoomed.

Langs de verticale as staan de bij κ_0 behorende x_n voor $n = 10^3$ tot $\approx 10^4$ geplot (of, precieser, de 'dichtheid' van deze x_n: de verticale as is verdeeld in 1000 intervalletjes van gelijke lengte en voor ieder intervalletje wordt geteld hoeveel van deze x_n in dat intervalletje komen. Naarmate dat aantal hoger is, is de kleur van het intervalletje donkerder.)
x_0 is telkens 0.5 genomen (maar andere $x_0 \in (0, 1)$ geven hetzelfde plaatje).

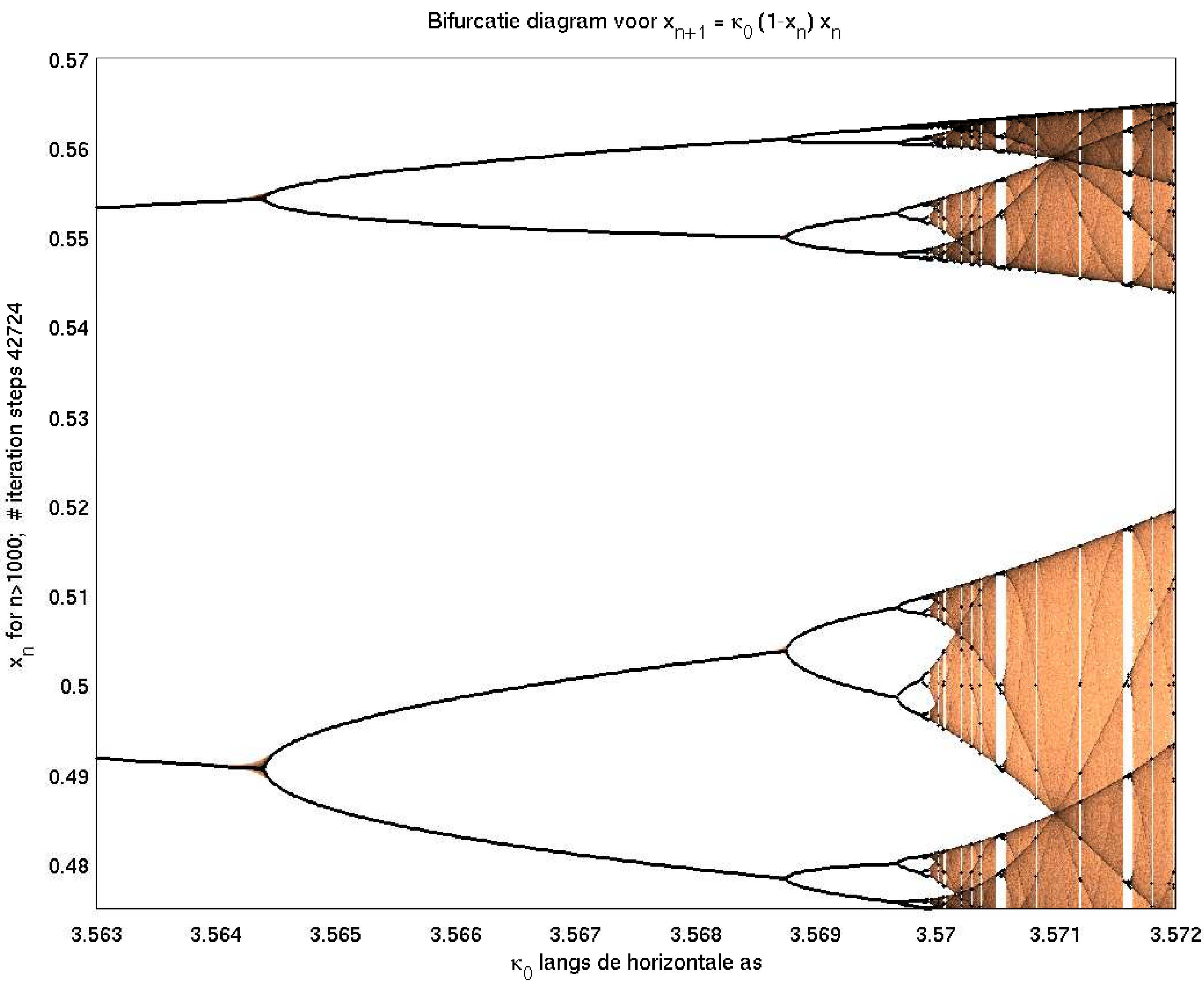
Voor $\kappa_0 < 3$ zien we functie $\alpha = \max(0, 1 - \frac{1}{\kappa_0})$ terug.



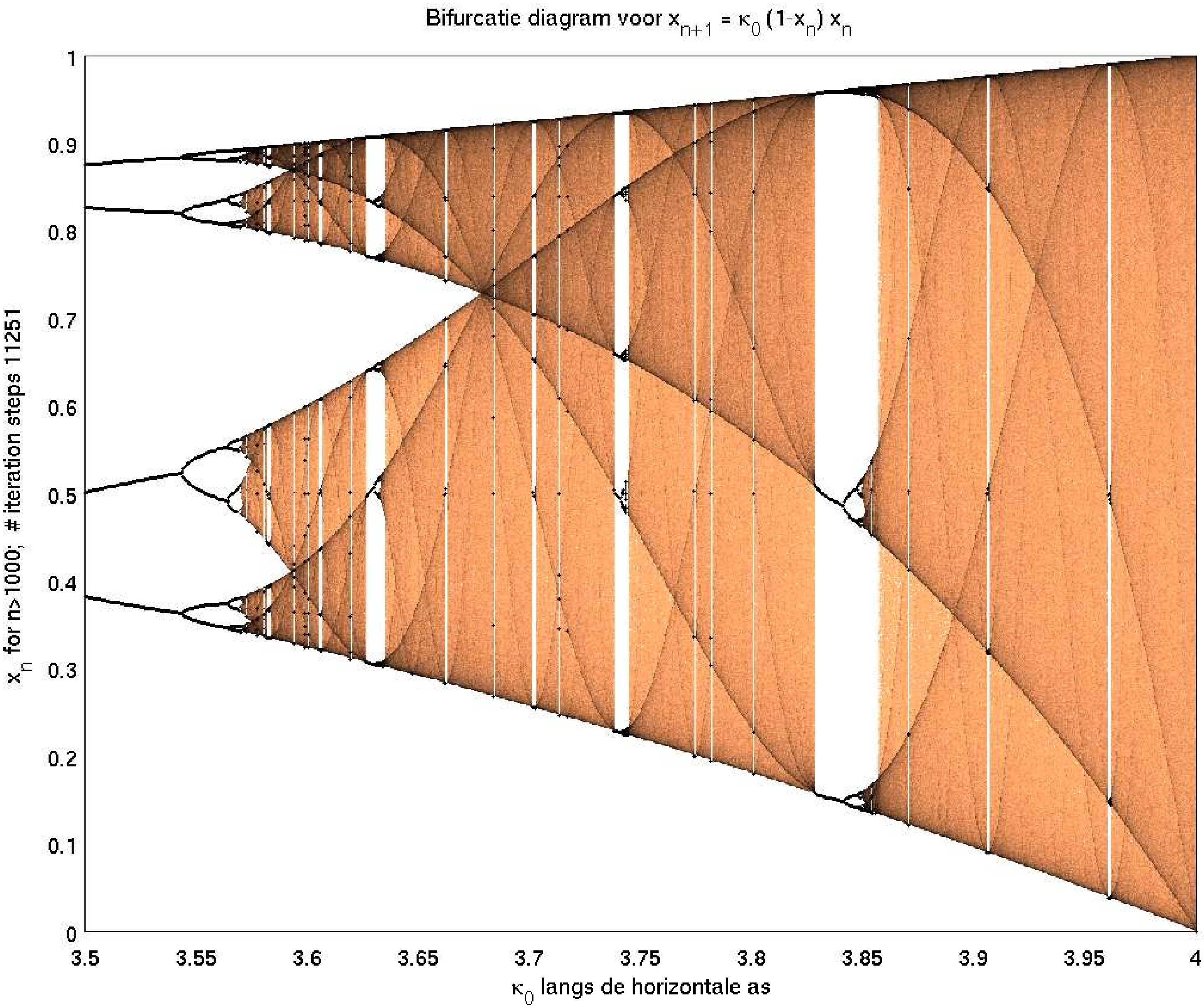
Bifurcatie diagram voor $x_{n+1} = \kappa_0\,(1-x_n)\,x_n$
x_n for n>1000; # iteration steps 11251
κ_0 langs de horizontale as
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
-0.1
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4



Bifurcatie diagram voor $x_{n+1} = \kappa_0 (1-x_n) x_n$
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
2.9
3
3.1
3.2
3.3
3.4
3.5
3.6
x_n for n>1000; # iteration steps 11251
κ_0 langs de horizontale as



Bifurcatie diagram voor $x_{n+1} = \kappa_0 (1-x_n) x_n$
0.57
0.56
0.55
0.54
0.53
0.52
0.51
0.5
0.49
0.48
x_n for n>1000; # iteration steps 42724
3.563
3.564
3.565
3.566
3.567
3.568
3.569
3.57
3.571
3.572
κ_0 langs de horizontale as


Bifurcatie diagram voor $x_{n+1} = \kappa_0 (1-x_n) x_n$
x_n for n>1000; # iteration steps 11251
κ_0 langs de horizontale as
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
3.5
3.55
3.6
3.65
3.7
3.75
3.8
3.85
3.9
3.95
4

Bifurcaties

Voorbeeld. $x_{n+1} = f(x_n)$ met $f(x) \equiv \kappa_0(1-x)x$.

Stabiel evenwicht verschuift

• tot zekere waarde κ_0 dan "splits" evenwicht in stabiele 2-periodieke baan + 1 instabiel evenwicht,

• punten op stabiele 2-periodieke baan verschuiven tot zekere waarde κ_0 dan splits deze baan in 1 stabiele 4-periodieke baan + 1 instab. 2-per. baan,

• punten op stabiele 4-periodieke baan verschuiven tot zekere waarde κ_0 dan splits deze baan in 1 stab. 8-per. baan + 1 instab. 4-per. baan

$\vdots$

Vanaf zekere κ_0 **chaos**.

Algemeen fenomeen.

De periode van de banen verdubbelt bij toenemende κ_0.
De banen met de lagere periode verdwijnen echter niet!

Als er een 16-periodieke baan is,
dan is er ook een 8-periodieke baan

De periode van de banen verdubbelt bij toenemende κ_0.
De banen met de lagere periode verdwijnen echter niet!

Als er een 8-periodieke baan is,
dan is er ook een 4-periodieke baan

De periode van de banen verdubbelt bij toenemende κ_0.
De banen met de lagere periode verdwijnen echter niet!

Als er een 2^ℓ-periodieke baan is,
dan is er ook een $2^{\ell-1}$-periodieke baan

De periode van de banen verdubbelt bij toenemende κ_0.
De banen met de lagere periode verdwijnen echter niet!

Als er een 2^ℓ-periodieke baan is,
dan is er ook een $2^{\ell-1}$-periodieke baan

Stelling. [Sharkovskii, 1964]
Als $f : [0,1] \to [0,1]$ continue is
en een 3-periodieke baan heeft,
dan heeft f, voor iedere $p \in \mathbb{N}$, een p-periodieke baan.

Program

- Populatie groei van één soort, recursies
- Evenwichtspunten
- Periodieke banen
- Bifurcatie
- Chaos
- Catastrofe

Chaos

$I \subset \mathbb{R}, \quad f : I \to I.$

Een iteratief proces $x_{n+1} = f(x_n)$ is **chaotisch** (op I) als

1) er voor iedere x_0 **kleine** verstoring zijn die
   op den duur tot **grote** afwijkingen leiden,

2) er in iedere buurt van iedere $x \in I$
   een x_0 te vinden is waarvoor de baan (x_n) periodiek is,

3) er een baan (x_n) te vinden is die voor iedere $x \in I$
   willekeurig dicht in de buurt van x komt.

Voorbeeld. $\quad x_{n+1} = 10\, x_n \bmod 1 \quad$ op $I = [0, 1]$

Chaos

Voorbeeld $x_{n+1} = 10\, x_n \bmod 1$ op $I = [0, 1]$.

$x_0 = 0.27578397684409087\ldots$

$x_1 = \ \ 0.7578397684409087 3\ldots$

Chaos

Voorbeeld $\quad x_{n+1} = 10\, x_n \bmod 1 \quad$ op $I = [0,1]$.

$x_0 = 0.27578397684409087\ldots$

$x_2 = \quad 0.57839768440908731 4\ldots$

Chaos

Voorbeeld $\quad x_{n+1} = 10\, x_n \bmod 1 \quad$ op $I = [0, 1]$.

$x_0 = 0.27578397684409087\ldots$

$x_3 = \qquad 0.78397684409087314 3\ldots$

Chaos

Voorbeeld $x_{n+1} = 10\,x_n \bmod 1$ op $I = [0,1]$.

$x_0 = 0.27578397684409087\ldots$

$x_4 = \qquad 0.83976844090873143 9\ldots$

Chaos

Voorbeeld $x_{n+1} = 10\,x_n \bmod 1$ op $I = [0, 1]$.

$x_0 = 0.27578397684409087\ldots$

$x_5 = \qquad\quad 0.397684409087314399\ldots$

Chaos

Voorbeeld $\quad x_{n+1} = 10\, x_n \bmod 1 \quad$ op $I = [0,1]$.

$x_0 = 0.27578397684409087\ldots$

$x_6 = \qquad\qquad 0.9768440908731439999\ldots$

Chaos

Voorbeeld $\quad x_{n+1} = 10\, x_n \bmod 1 \quad$ op $I = [0, 1]$.

$x_0 = 0.27578397684409087\ldots$

$x_7 = \qquad\qquad\qquad 0.76844090873143999\ldots$

Chaos

Voorbeeld $\quad x_{n+1} = 10\, x_n \bmod 1 \quad$ op $I = [0,1]$.

$x_0 = 0.27578397684409087\ldots$

$x_8 = \qquad\qquad 0.6844090873143999\ldots$

Chaos

Voorbeeld $\quad x_{n+1} = 10\, x_n \bmod 1 \quad$ op $I = [0, 1]$.

$x_0 = 0.27578397684409087\ldots$

$x_9 = \qquad\qquad\qquad\qquad 0.844090873143999\ldots$

Chaos

Voorbeeld $\quad x_{n+1} = 10\, x_n \bmod 1 \quad$ op $I = [0, 1]$.

1) er voor iedere x_0 **kleine** verstoring zijn die op den duur tot **grote** afwijkingen leiden,

$x_0 = 0.27578397684409087\ldots$

$\tilde{x}_0 = 0.27578397684423296\ldots$

Chaos

Voorbeeld $\quad x_{n+1} = 10\, x_n \bmod 1 \quad$ op $I = [0,1]$.

1) er voor iedere x_0 **kleine** verstoring zijn die op den duur tot **grote** afwijkingen leiden,

$$x_0 = 0.27578397684409087\ldots$$

$$\tilde{x}_0 = 0.27578397684423296\ldots$$

$$x_1 = \;0.7578397684409087\ldots$$

$$\tilde{x}_1 = \;0.757839768442329 63\ldots$$

Chaos

Voorbeeld $x_{n+1} = 10\, x_n \bmod 1$ op $I = [0, 1]$.

1) er voor iedere x_0 **kleine** verstoring zijn die op den duur tot **grote** afwijkingen leiden,

$x_0 = 0.275783976844409087\ldots$

$\tilde{x}_0 = 0.275783976844{\color{red}23296}\ldots$

$x_2 = \quad 0.5783976844090873 1\ldots$

$\tilde{x}_2 = \quad 0.5783976844{\color{red}2329638}\ldots$

Chaos

Voorbeeld $\quad x_{n+1} = 10\, x_n \bmod 1 \quad$ op $I = [0,1]$.

1) er voor iedere x_0 **kleine** verstoring zijn die op den duur tot **grote** afwijkingen leiden,

$$x_0 = 0.27578397684409087\ldots$$

$$\tilde{x}_0 = 0.27578397684423296\ldots$$

$$x_3 = \quad 0.78397684409087314\ldots$$

$$\tilde{x}_3 = \quad 0.78397684423296388\ldots$$

Chaos

Voorbeeld $\quad x_{n+1} = 10\, x_n \bmod 1 \quad$ op $I = [0, 1]$.

1) er voor iedere x_0 **kleine** verstoring zijn die op den duur tot **grote** afwijkingen leiden,

$$x_0 = 0.27578397684409087\ldots$$

$$\tilde{x}_0 = 0.27578397684423296\ldots$$

$$x_4 = 0.83976844090873143\ldots$$

$$\tilde{x}_4 = 0.83976844232963885\ldots$$

Chaos

Voorbeeld $\quad x_{n+1} = 10\, x_n \bmod 1 \quad$ op $I = [0,1]$.

1) er voor iedere x_0 **kleine** verstoring zijn die
op den duur tot **grote** afwijkingen leiden,

$$x_0 = 0.27578397684409087\ldots$$

$$\tilde{x}_0 = 0.27578397684423296\ldots$$

$$x_{12} = \qquad 0.090873143999758 0\ldots$$

$$\tilde{x}_{12} = \qquad 0.23296388576409\ldots$$

Chaos

Voorbeeld $x_{n+1} = 10\, x_n \bmod 1$ op $I = [0,1]$.

1) er voor iedere x_0 **kleine** verstoring zijn die op den duur tot **grote** afwijkingen leiden,

$x_0 = 0.2757839768440908 7\ldots$

$\tilde{x}_0 = 0.27578397684423296\ldots$

$x_{12} = 0.09087314\ldots$

$\tilde{x}_{12} = 0.23296388576409\ldots$

$|x_0 - \tilde{x}_0| \leq 2\, 10^{-12}$, terwijl $|x_{12} - \tilde{x}_{12}| \geq 0.1$

In de 10^{-16} buurt van x_0 is er een $\tilde{x}_0$

zodat $|x_{16} - \tilde{x}_{16}| \geq 0.1$, etc..

Chaos

Voorbeeld $\quad x_{n+1} = 10\,x_n \bmod 1 \quad$ op $I = [0,1]$.

2) er in iedere buurt van iedere $x \in I$
een x_0 te vinden is waarvoor de baan (x_n) periodiek is,

$$x = 0.2757839768440\,9087\ldots$$

$$x_0 = 0.2757839768440\,2757839768440\,2757839768440\ldots$$

Chaos

Voorbeeld $\quad x_{n+1} = 10\, x_n \bmod 1 \quad$ op $I = [0, 1]$.

2) er in iedere buurt van iedere $x \in I$
een x_0 te vinden is waarvoor de baan (x_n) periodiek is,

$x \;= 0.275783976844 0\, 9087\ldots$

$x_0 = 0.2757839768440\, 2757839768440\, 2757839768440\ldots$

Dan $\quad |x - x_0| \le 10^{-12}, \quad$ terwijl $\quad x_0 = x_{13} = x_{26} = \ldots$:
de baan is 13-periodiek

In de 10^{-16} buurt van x is er een 17-periodiek baan, etc..

Chaos

Voorbeeld $\quad x_{n+1} = 10\, x_n \bmod 1 \quad$ op $I = [0,1]$.

3) er een baan (x_n) te vinden is die voor iedere $x \in I$ willekeurig dicht in de buurt van x komt.

Sorteer alle getallen tussen 0 en 1 met een eindige decimale ontwikkeling als volgt

0.0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9,

0.00, 0.01, 0.02, 0.03, 0.04, . . . , 0.24, . . . 0.98, 0.99,

0.000, 0.001, 0.002, 0.003, 0.004, . . . 0.998, 0.999,

. . .

Merk op: Alle getallen komen vaker voor.

Chaos

Voorbeeld $x_{n+1} = 10\, x_n \bmod 1$ op $I = [0,1]$.

3) er een baan (x_n) te vinden is die voor iedere $x \in I$ willekeurig dicht in de buurt van x komt.

Sorteer alle getallen tussen 0 en 1 met een eindige decimale ontwikkeling als volgt

0.0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9,

0.00, 0.01, 0.02, 0.03, 0.04, . . . , 0.24, . . . 0.98, 0.99,

0.000, 0.001, 0.002, 0.003, 0.004, . . . 0.998, 0.999,

. . .

Maak x_0 als volgt: streep in bovenstaande getallen de '0.' weg en plaats de overblijvende cijfers achtereenvolgens achter '0.'.

Chaos

Voorbeeld $x_{n+1} = 10\, x_n \bmod 1$ op $I = [0, 1]$.

3) er een baan (x_n) te vinden is die voor iedere $x \in I$ willekeurig dicht in de buurt van x komt.

Sorteer alle getallen tussen 0 en 1 met een eindige decimale ontwikkeling als volgt

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,

00, 01, 02, 03, 04, . . . , 24, . . . 98, 99,

000, 001, 002, 003, 004, . . . 998, 999,

. . .

Maak x_0 als volgt: streep in bovenstaande getallen de ‘0.’ weg en plaats de overblijvende cijfers achtereenvolgens achter ‘0.’.

Chaos

Voorbeeld $\quad x_{n+1} = 10\, x_n \bmod 1 \quad$ op $I = [0, 1]$.

3) er een baan (x_n) te vinden is die voor iedere $x \in I$ willekeurig dicht in de buurt van x komt.

Sorteer alle getallen tussen 0 en 1 met een eindige decimale ontwikkeling als volgt

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,

00, 01, 02, 03, 04, . . . , 24, . . . 98, 99,

000, 001, 002, 003, 004, . . . 998, 999,

. . .

Maak x_0 als volgt: streep in bovenstaande getallen de '0.' weg en plaats de overblijvende cijfers achtereenvolgens achter '0.'.Dus

$x_0 = 0.012345678900010203 04 \ldots 24 \ldots 9899000001002003 \ldots 998999 \ldots.$

Chaos

Voorbeeld $\quad x_{n+1} = 10\, x_n \bmod 1 \quad$ op $I = [0, 1]$.

3) er een baan (x_n) te vinden is die voor iedere $x \in I$ willekeurig dicht in de buurt van x komt.

Sorteer alle getallen tussen 0 en 1 met een eindige decimale ontwikkeling als volgt

0.0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9,

0.00, 0.01, 0.02, 0.03, 0.04, . . . , 0.24, . . . 0.98, 0.99,

0.000, 0.001, 0.002, 0.003, 0.004, . . . 0.998, 0.999,

. . .

$x_0 = 0.01234567890001020304 \ldots 24 \ldots 9899000001002003 \ldots 998999 \ldots.$

Dan $\quad |0.7 - x_7| \leq 0.1$

Chaos

Voorbeeld $\quad x_{n+1} = 10\,x_n \bmod 1 \quad$ op $I = [0,1]$.

3) er een baan (x_n) te vinden is die voor iedere $x \in I$ willekeurig dicht in de buurt van x komt.

Sorteer alle getallen tussen 0 en 1 met een eindige decimale ontwikkeling als volgt

0.0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9,

0.00, 0.01, 0.02, 0.03, 0.04, . . . , 0.24, . . . 0.98, 0.99,

0.000, 0.001, 0.002, 0.003, 0.004, . . . 0.998, 0.999,

. . .

$x_0 = 0.01234567890001020304\ldots24\ldots9899000001002003\ldots998999\ldots$.

Dan $\quad |0.02 - x_{14}| \leq 0.01.$ etc.

Chaos

$I \subset \mathbb{R}, \quad f : I \to I.$

Een iteratief proces $x_{n+1} = f(x_n)$ is **chaotisch** (op I) als

1) er voor iedere x_0 **kleine** verstoring zijn die
   op den duur tot **grote** afwijkingen leiden,

2) er in iedere buurt van iedere $x \in I$
   een x_0 te vinden is waarvoor de baan (x_n) periodiek is,

3) er een baan (x_n) te vinden is die voor iedere $x \in I$
   willekeurig dicht in de buurt van x komt.

Voorbeeld. $\quad x_{n+1} = 2\,x_n \bmod 1 \quad$ op $I = [0, 1]$

Hetzelfde als het vorige voorbeeld, maar nu binair.

Chaos

$I \subset \mathbb{R}, \quad f : I \to I.$

Een iteratief proces $x_{n+1} = f(x_n)$ is **chaotisch** (op I) als

1) er voor iedere x_0 **kleine** verstoring zijn die
op den duur tot **grote** afwijkingen leiden,

2) er in iedere buurt van iedere $x \in I$
een x_0 te vinden is waarvoor de baan (x_n) periodiek is,

3) er een baan (x_n) te vinden is die voor iedere $x \in I$
willekeurig dicht in de buurt van x komt.

Voorbeeld. $\quad x_{n+1} = 2\,x_n \bmod 1 \quad$ op $I = [0, 1]$

Hetzelfde als het vorige voorbeeld, maar nu binair.

$$x_0 = 0.11001010\ldots =$$
$$1\,2^{-1} + 1\,2^{-2} + 0\,2^{-3} + 0\,2^{-4} + 1\,2^{-5} + 0\,2^{-6} + 1\,2^{-7} + 0\,2^{-8} + \ldots$$

Chaos

$I \subset \mathbb{R}$, $f : I \to I$.

Een iteratief proces $x_{n+1} = f(x_n)$ is **chaotisch** (op I) als

1) er voor iedere x_0 **kleine** verstoring zijn die
   op den duur tot **grote** afwijkingen leiden,

2) er in iedere buurt van iedere $x \in I$
   een x_0 te vinden is waarvoor de baan (x_n) periodiek is,

3) er een baan (x_n) te vinden is die voor iedere $x \in I$
   willekeurig dicht in de buurt van x komt.

Voorbeeld. $x_{n+1} = 2\,x_n \bmod 1$ op $I = [0, 1]$

Hetzelfde als het vorige voorbeeld, maar nu binair.

Als je dit proces op een computer uitvoert
(die binair rekent), dan zie je geen chaos. Waarom niet?

Chaos

$I \subset \mathbb{R}, \quad f : I \to I.$

Een iteratief proces $x_{n+1} = f(x_n)$ is **chaotisch** (op I) als

1) er voor iedere x_0 **kleine** verstoring zijn die op den duur tot **grote** afwijkingen leiden,

2) er in iedere buurt van iedere $x \in I$ een x_0 te vinden is waarvoor de baan (x_n) periodiek is,

3) er een baan (x_n) te vinden is die voor iedere $x \in I$ willekeurig dicht in de buurt van x komt.

Voorbeeld. $\quad x_{n+1} = 2\,x_n \bmod 1 \quad$ op $I = [0, 1]$

Hetzelfde als het vorige voorbeeld, maar nu binair.

De functie $f(x) = 2\,x \bmod 1$ is discontinu.

Chaos

$I \subset \mathbb{R}, \quad f : I \to I.$

Een iteratief proces $x_{n+1} = f(x_n)$ is **chaotisch** (op I) als

1) er voor iedere x_0 **kleine** verstoring zijn die op den duur tot **grote** afwijkingen leiden,

2) er in iedere buurt van iedere $x \in I$ een x_0 te vinden is waarvoor de baan (x_n) periodiek is,

3) er een baan (x_n) te vinden is die voor iedere $x \in I$ willekeurig dicht in de buurt van x komt.

Voorbeeld.

$$x_{n+1} = 2\,x_n \qquad \text{als } x_n \in [0, 0.5]$$
$$x_{n+1} = 2 - 2\,x_n \qquad \text{als } x_n \in (0.5, 1]$$

Chaos

$I \subset \mathbb{R}, \quad f : I \to I.$

Een iteratief proces $x_{n+1} = f(x_n)$ is **chaotisch** (op I) als

1) er voor iedere x_0 **kleine** verstoring zijn die
op den duur tot **grote** afwijkingen leiden,

2) er in iedere buurt van iedere $x \in I$
een x_0 te vinden is waarvoor de baan (x_n) periodiek is,

3) er een baan (x_n) te vinden is die voor iedere $x \in I$
willekeurig dicht in de buurt van x komt.

Voorbeeld.
$$x_{n+1} = 2\,x_n \qquad \text{als } x_n \in [0, 0.5]$$
$$x_{n+1} = 2 - 2\,x_n \qquad \text{als } x_n \in (0.5, 1]$$

Deze functie f is continu!

Chaos

$I \subset \mathbb{R}, \quad f : I \to I.$

Een iteratief proces $x_{n+1} = f(x_n)$ is **chaotisch** (op I) als

1) er voor iedere x_0 **kleine** verstoring zijn die
op den duur tot **grote** afwijkingen leiden,

2) er in iedere buurt van iedere $x \in I$
een x_0 te vinden is waarvoor de baan (x_n) periodiek is,

3) er een baan (x_n) te vinden is die voor iedere $x \in I$
willekeurig dicht in de buurt van x komt.

Voorbeeld. $\quad x_{n+1} = 4\,(1 - x_n)x_n \quad$ op $I = [0, 1]$

Met $x_n = \sin^2(\pi\phi_n)$ is $\phi_{n+1} = \begin{cases} 2\,\phi_n & \text{voor } \phi_n \leq \frac{1}{2} \\ 2 - 2\,\phi_n & \text{voor } \phi_n \geq \frac{1}{2} \end{cases}$

Chaos

$I \subset \mathbb{R}, \quad f : I \to I.$

Een iteratief proces $x_{n+1} = f(x_n)$ is **chaotisch** (op I) als

1) er voor iedere x_0 **kleine** verstoring zijn die op den duur tot **grote** afwijkingen leiden,

2) er in iedere buurt van iedere $x \in I$ een x_0 te vinden is waarvoor de baan (x_n) periodiek is,

3) er een baan (x_n) te vinden is die voor iedere $x \in I$ willekeurig dicht in de buurt van x komt.

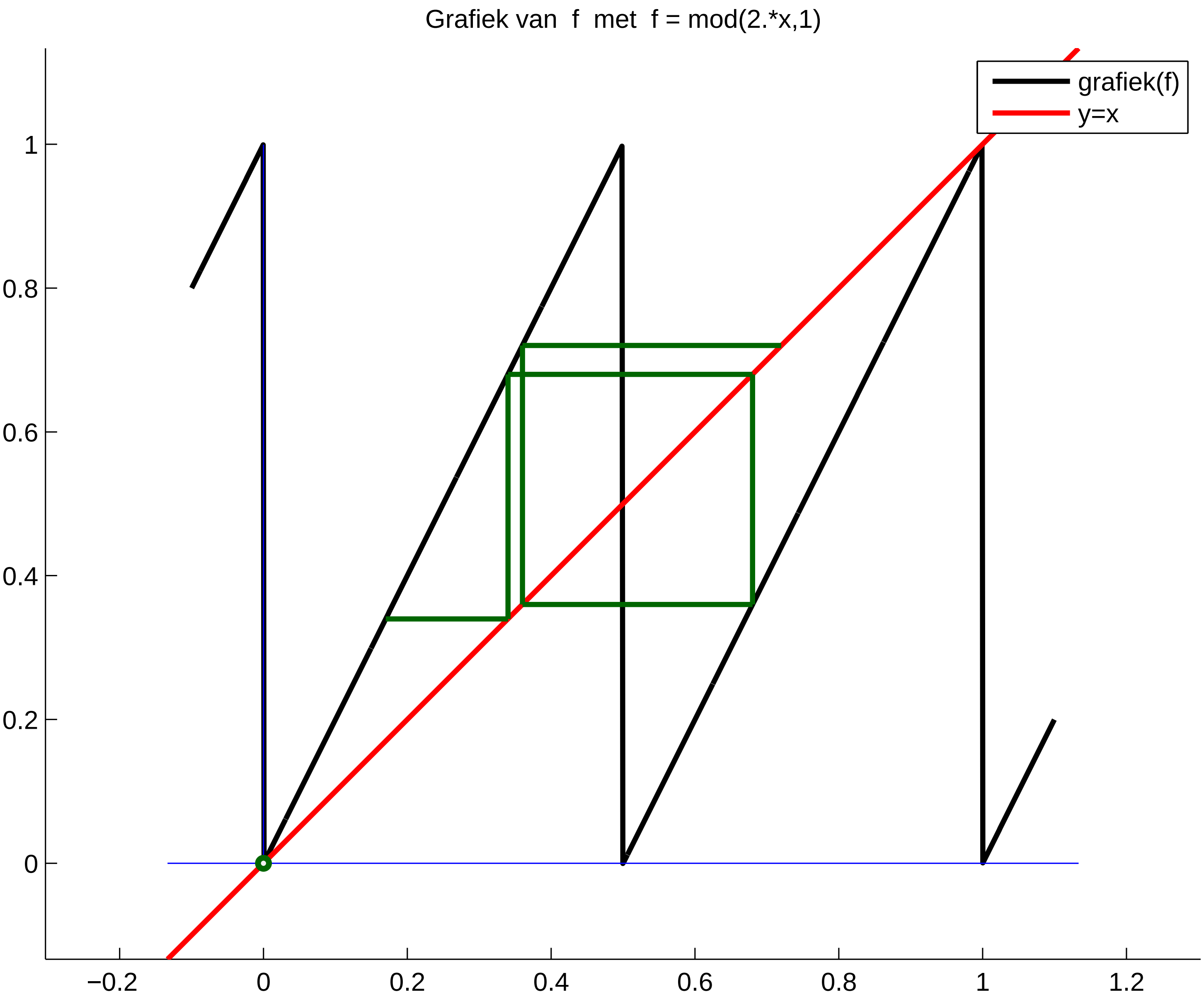
Voorbeeld. $\quad x_{n+1} = 4\,(1 - x_n)x_n \quad$ op $I = [0, 1]$

Deze functie f,

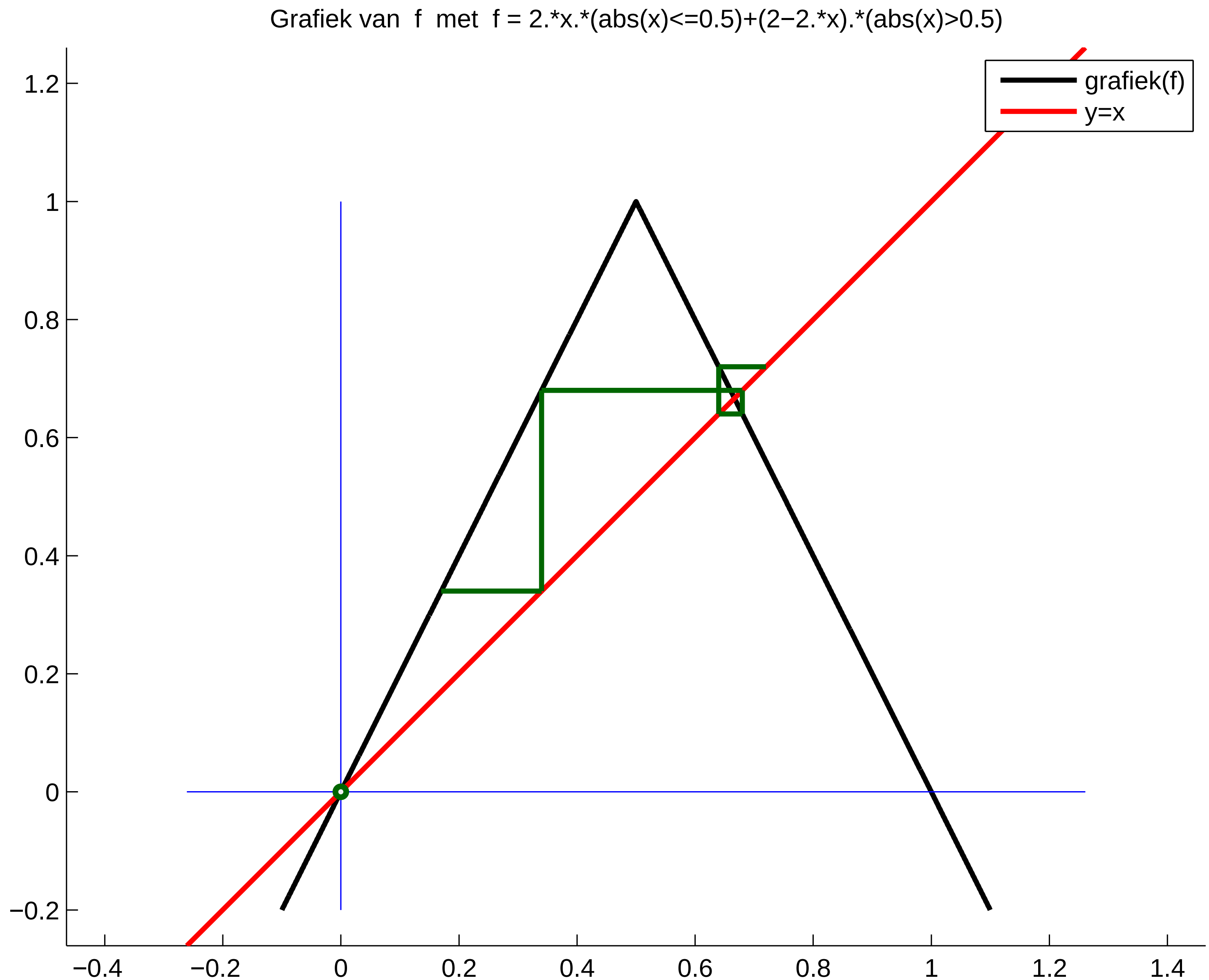
$$f(x) = 4(1 - x)x,$$

is ∞ vaak continu differentieerbaar!

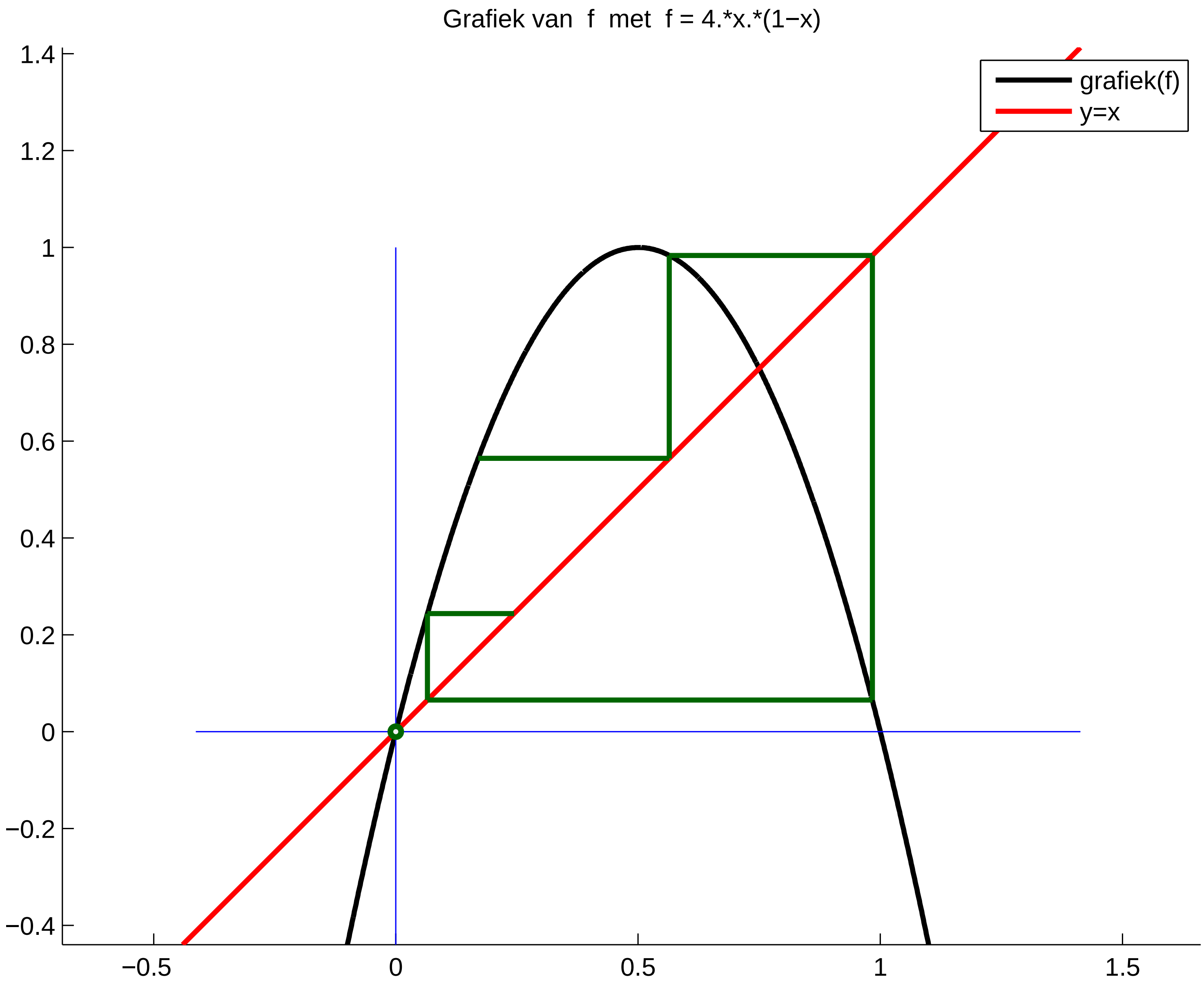
$$f(x) = 2\,x\,\mathrm{mod}1$$



$f(x) = 1-2|x-0.5|$. Merk op $|f'(x)| > 1$ alle $x \in [0,1] \backslash \{0.5\}$



$$f(x) = 4x(1-x)$$



Grafiek van f met f = 4.*x.*(1−x)
grafiek(f)
y=x
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
−0.2
−0.4
−0.5
0
0.5
1
1.5

Chaos

$I \subset \mathbb{R}, \quad f : I \to I.$

Een iteratief proces $x_{n+1} = f(x_n)$ is **chaotisch** (op I) als

1) er voor iedere x_0 **kleine** verstoring zijn die op den duur tot **grote** afwijkingen leiden,
2) er in iedere buurt van iedere $x \in I$ een x_0 te vinden is waarvoor de baan (x_n) periodiek is,
3) er een baan (x_n) te vinden is die voor iedere $x \in I$ willekeurig dicht in de buurt van x komt.

Voorbeeld. $\quad x_{n+1} = \kappa_0 (1 - x_n) x_n \quad$ op $I = [0, 1]$

Chaos ook voor $\kappa_0 \in J$ met $J \subset (0.35 \ldots, 4)$:

zie bifurcatie diagram. Bewijs is lastig.

Chaos

$I \subset \mathbb{R}, \quad f : I \to I.$

Een iteratief proces $x_{n+1} = f(x_n)$ is **chaotisch** (op I) als

1) er voor iedere x_0 **kleine** verstoring zijn die
   op den duur tot **grote** afwijkingen leiden,

2) er in iedere buurt van iedere $x \in I$
   een x_0 te vinden is waarvoor de baan (x_n) periodiek is,

3) er een baan (x_n) te vinden is die voor iedere $x \in I$
   willekeurig dicht in de buurt van x komt.

Voorbeeld. $\quad x_{n+1} = 4\,(1 - x_n)x_n \quad$ op $I = [0, 1]$

Is het proces ook chaotisch op $I = \mathbb{R}$*?*

Chaos

$I \subset \mathbb{R}, \quad f : I \to I.$

Een iteratief proces $x_{n+1} = f(x_n)$ is **chaotisch** (op I) als

1) er voor iedere x_0 **kleine** verstoring zijn die op den duur tot **grote** afwijkingen leiden,

2) er in iedere buurt van iedere $x \in I$ een x_0 te vinden is waarvoor de baan (x_n) periodiek is,

3) er een baan (x_n) te vinden is die voor iedere $x \in I$ willekeurig dicht in de buurt van x komt.

Voorbeeld. $\quad x_{n+1} = 4\,(1 - x_n)x_n \quad$ op $I = [0, 1]$

Voor $\kappa_0 = 3.8$ *is het proces chaotisch op een deel* I *van* $(0, 1)$.

Chaos

$I \subset \mathbb{R}, \quad f : I \to I.$

Een iteratief proces $x_{n+1} = f(x_n)$ is **chaotisch** (op I) als

1) er voor iedere x_0 **kleine** verstoring zijn die
op den duur tot **grote** afwijkingen leiden,

2) er in iedere buurt van iedere $x \in I$
een x_0 te vinden is waarvoor de baan (x_n) periodiek is,

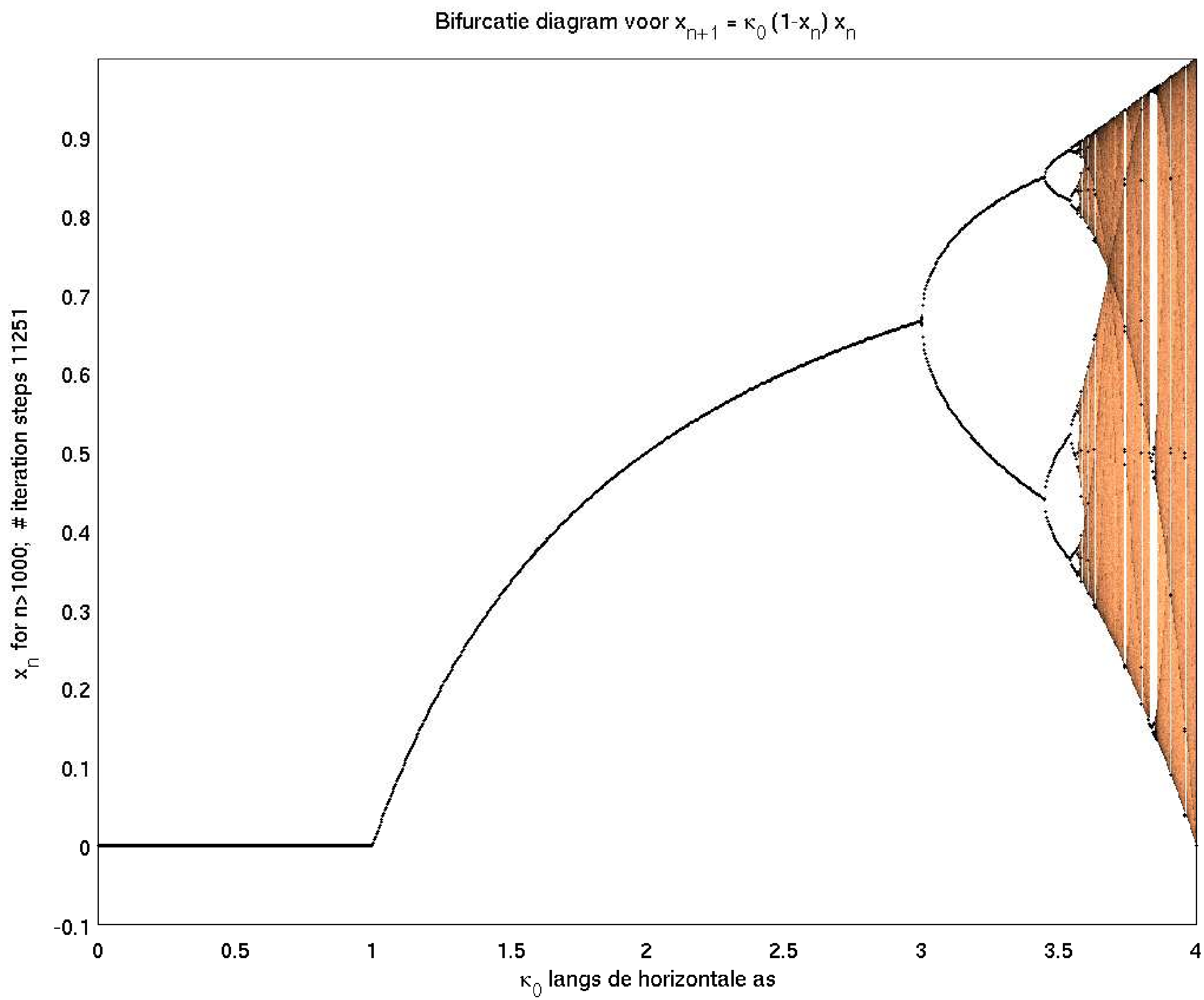
3) er een baan (x_n) te vinden is die voor iedere $x \in I$
willekeurig dicht in de buurt van x komt.

Voorbeeld. $\quad x_{n+1} = 4\,(1 - x_n)x_n \quad$ op $I = [0, 1]$

Waarom chaotische verschijnselen bestuderen?

Discussie

Het bifurcatie-diagram in dictaat en op de volgende transparant zijn verschillend. Welke is het correcte? Waarom is er een verschil?



Bifurcatie diagram voor $x_{n+1} = \kappa_0 (1-x_n) x_n$
x_n for n>1000; # iteration steps 11251
κ_0 langs de horizontale as
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
-0.1
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9

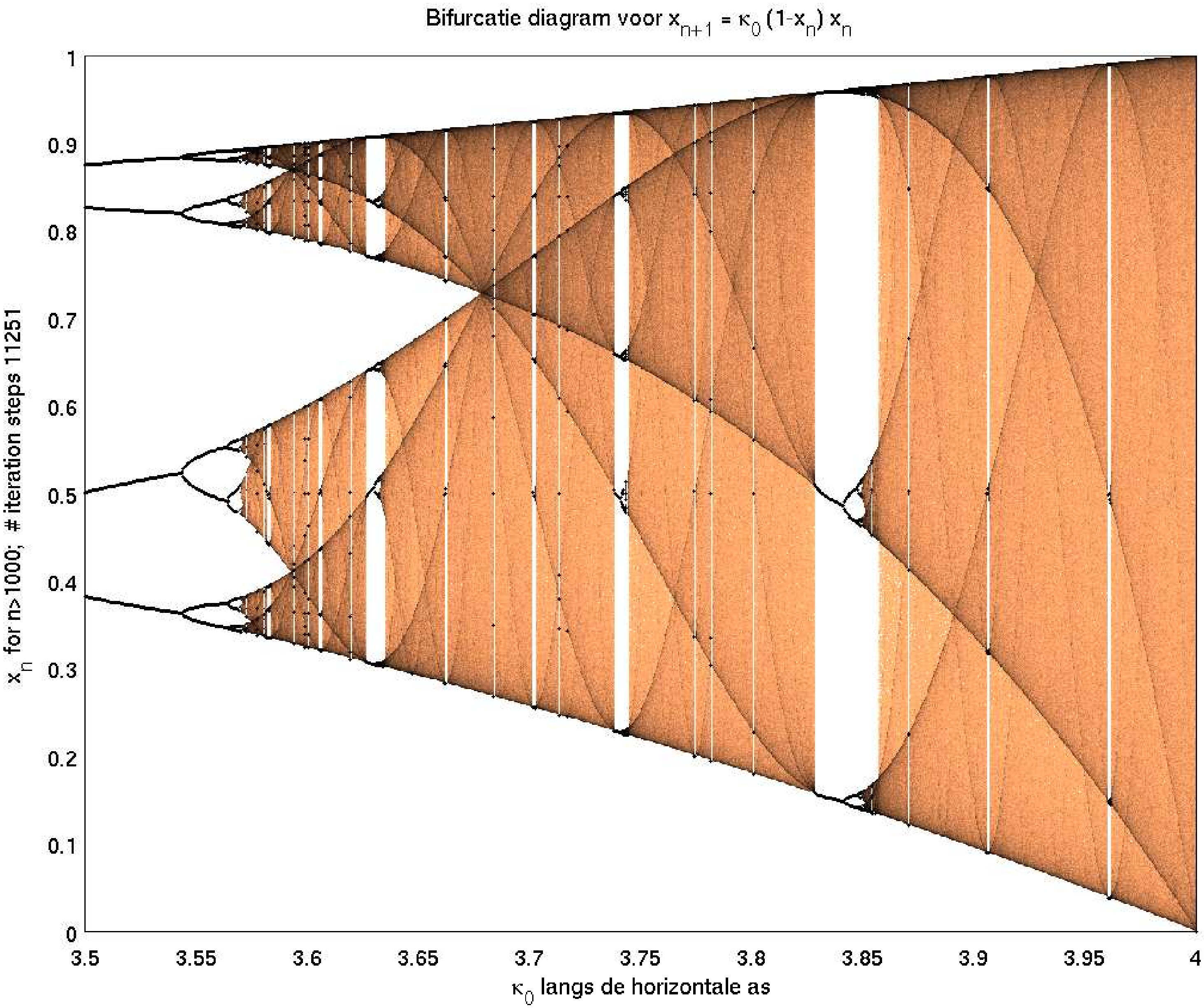
Discussie

Het bifurcatie-diagram in dictaat en op de volgende transparant zijn verschillend. Welke is het correcte? Waarom is er een verschil?

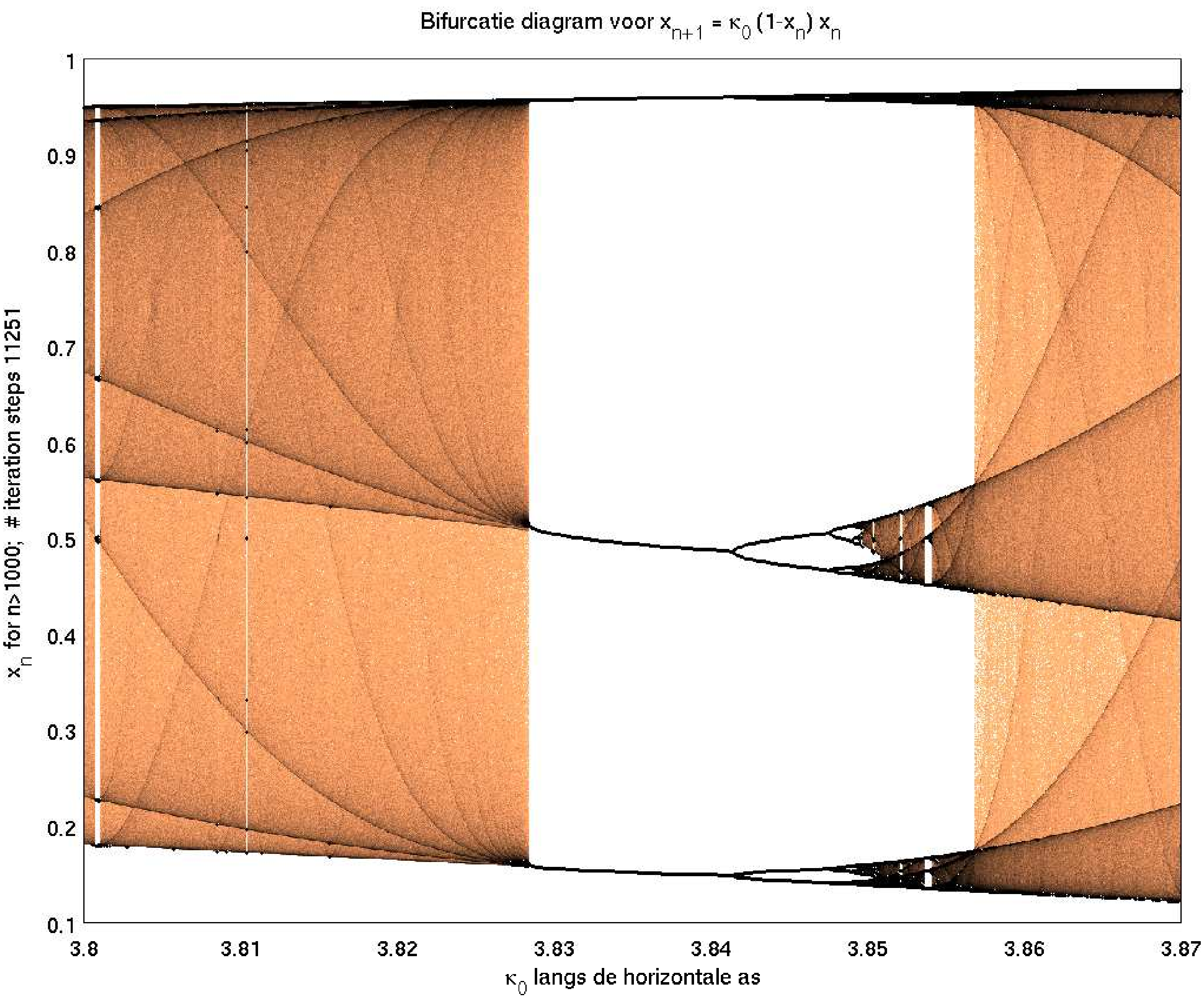
In het Verhulst model lijkt er voor $\kappa_0 \approx 3.84$ een stabiel 3-periodieke baan te zijn. Hoe zie je dat die stabiel is?

Sharkovskii zegt dat er dan ook voor iedere $p \in \mathbb{N}$ een p-periodieke baan is. Zie je dat terug in het bifurcatie-diagram? Verklaring?

Is het proces voor deze waarde van κ_0 chaotisch?

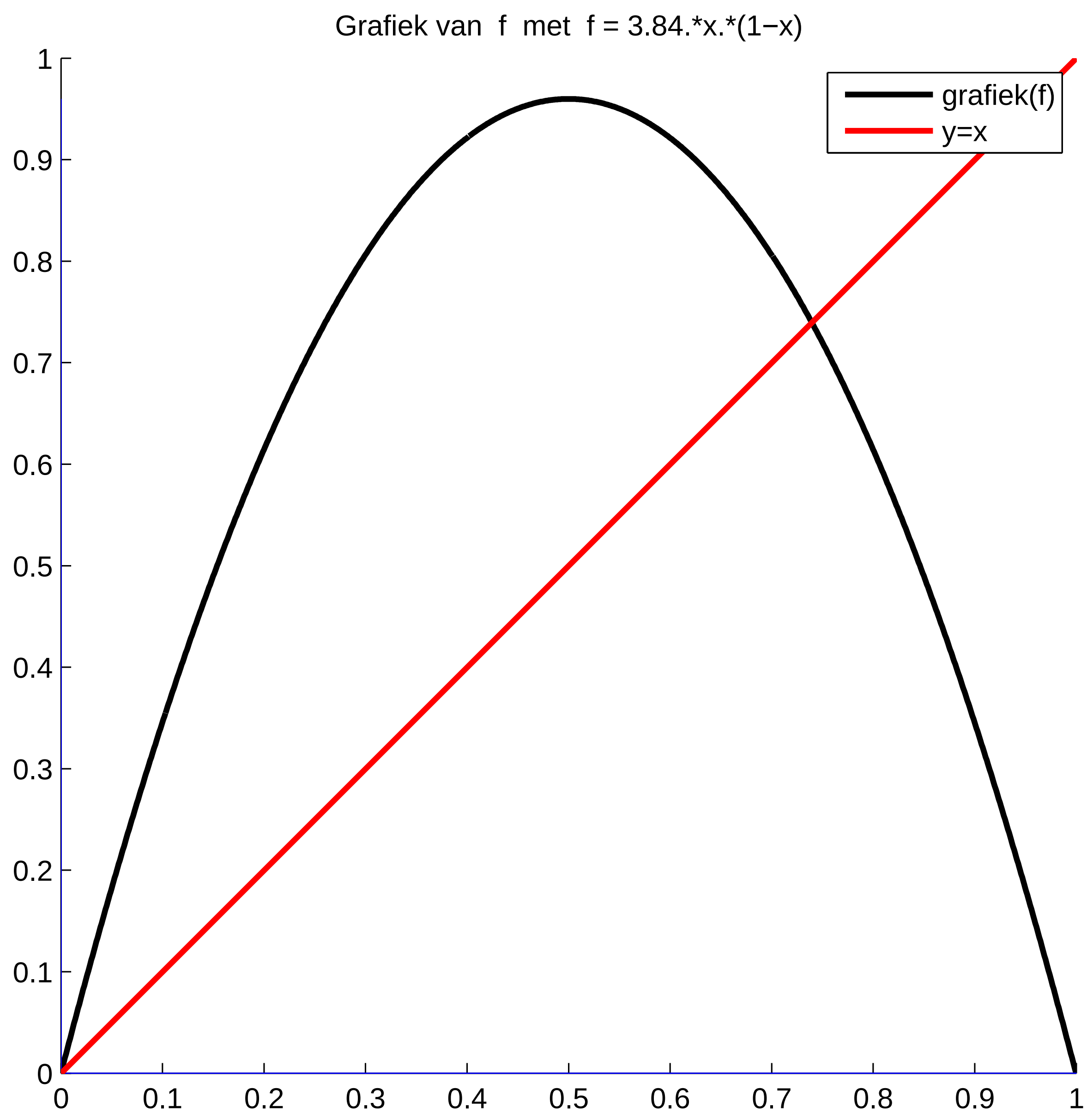


Bifurcatie diagram voor $x_{n+1} = \kappa_0 (1-x_n) x_n$
x_n for n>1000; # iteration steps 11251
κ_0 langs de horizontale as
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
3.5
3.55
3.6
3.65
3.7
3.75
3.8
3.85
3.9
3.95
4

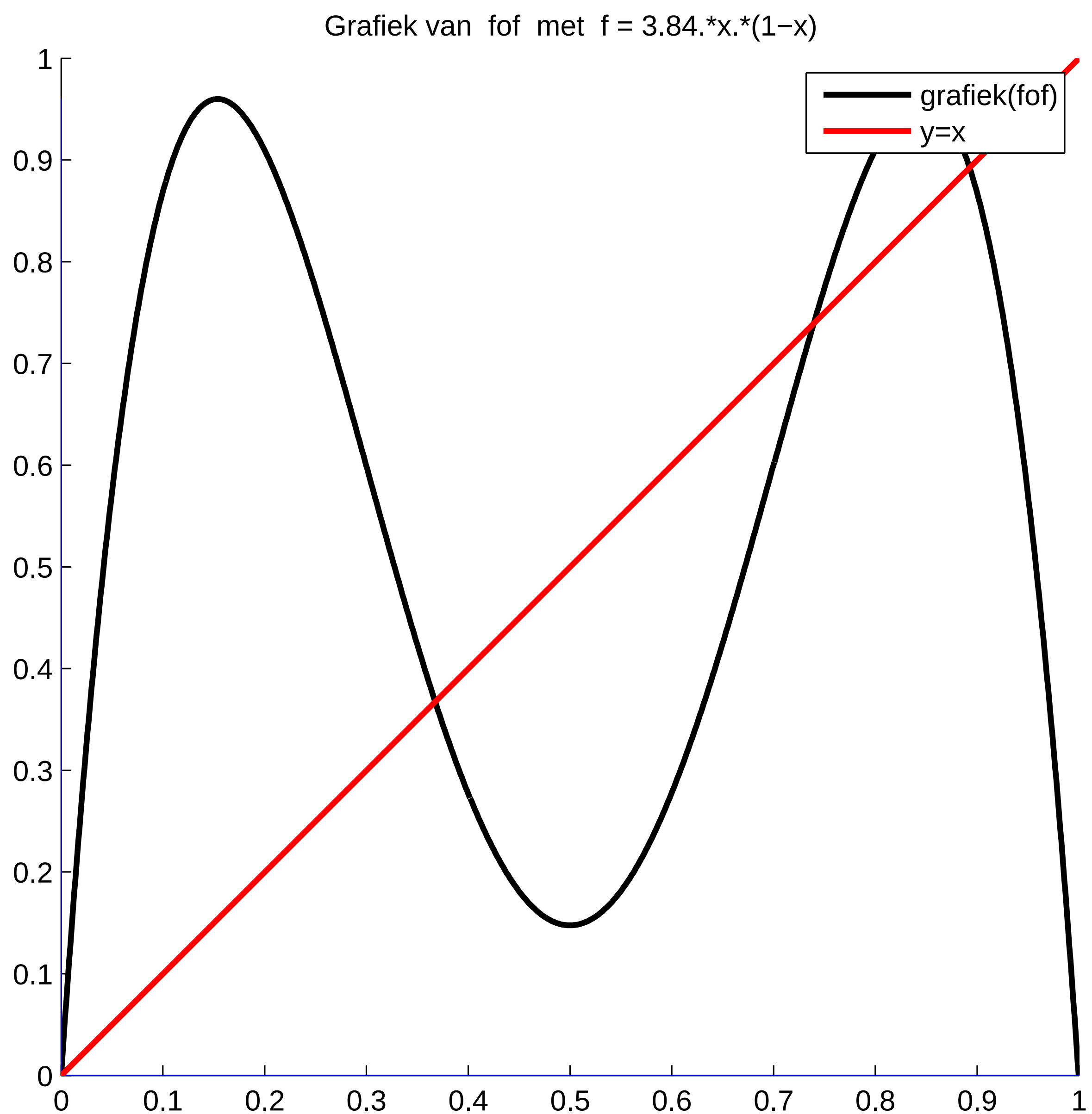


Bifurcatie diagram voor $x_{n+1} = \kappa_0 (1-x_n) x_n$
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
x_n for n>1000; # iteration steps 11251
3.8
3.81
3.82
3.83
3.84
3.85
3.86
3.87
κ_0 langs de horizontale as

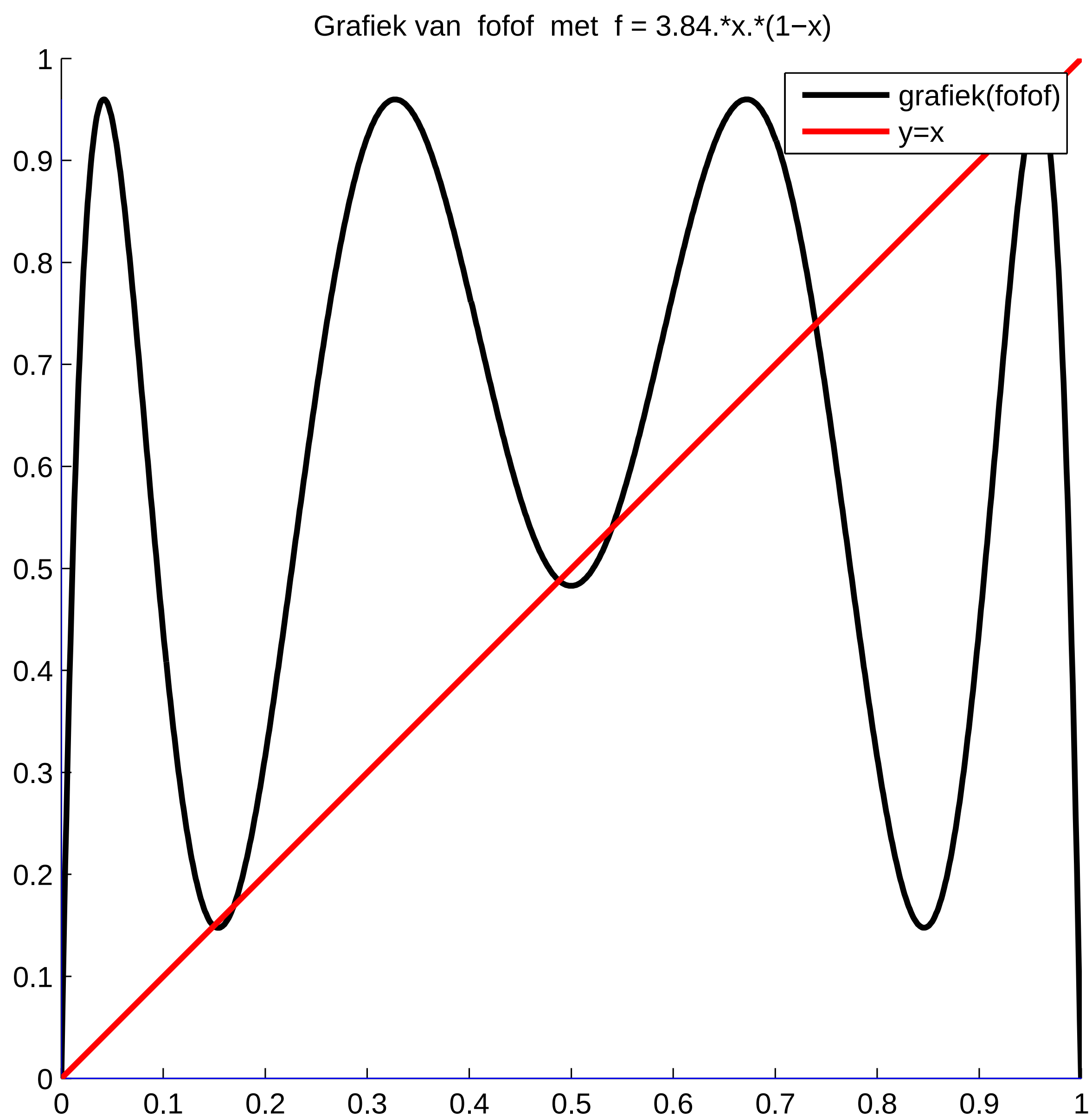
Grafische analyse



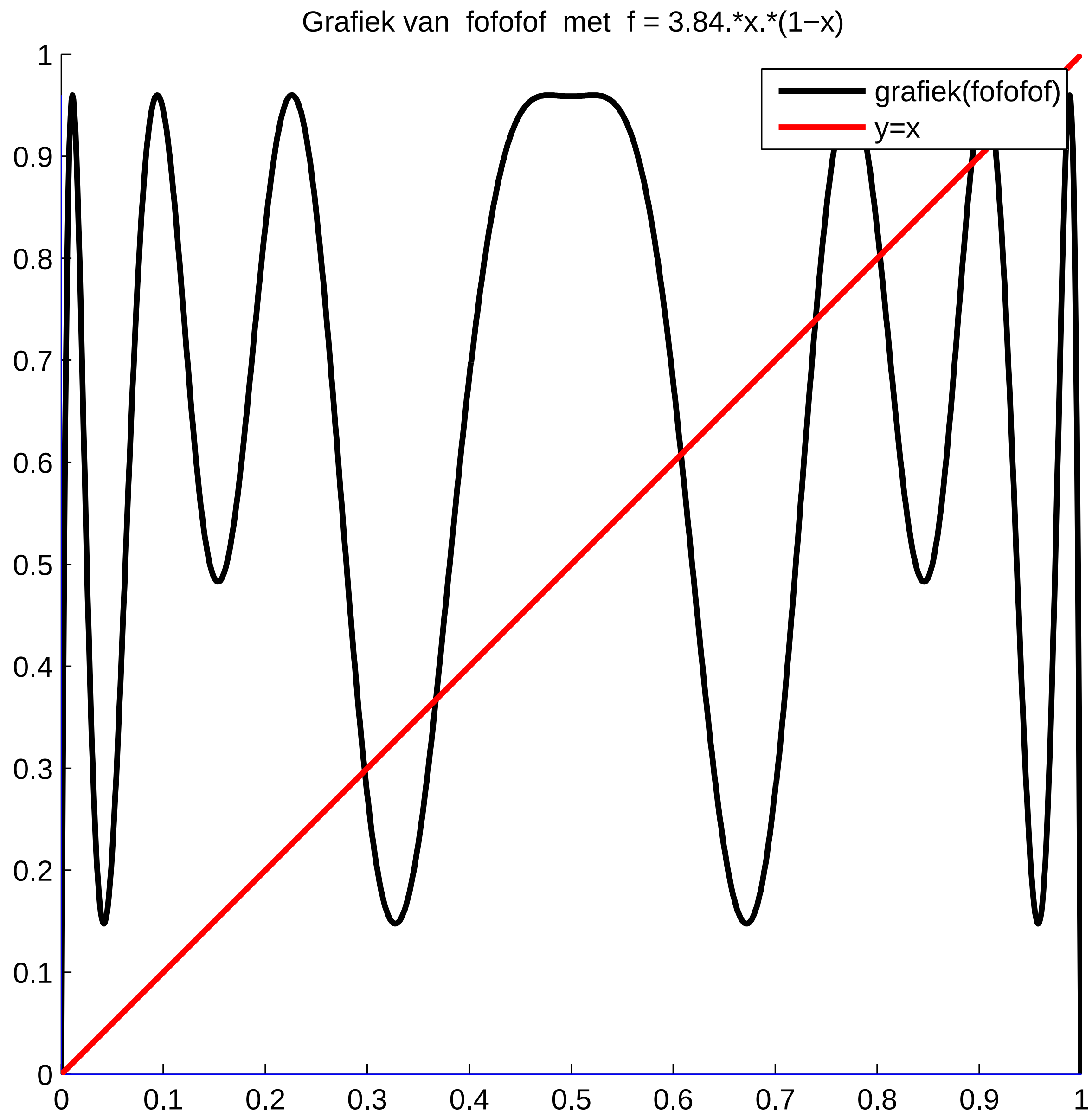
Grafische analyse



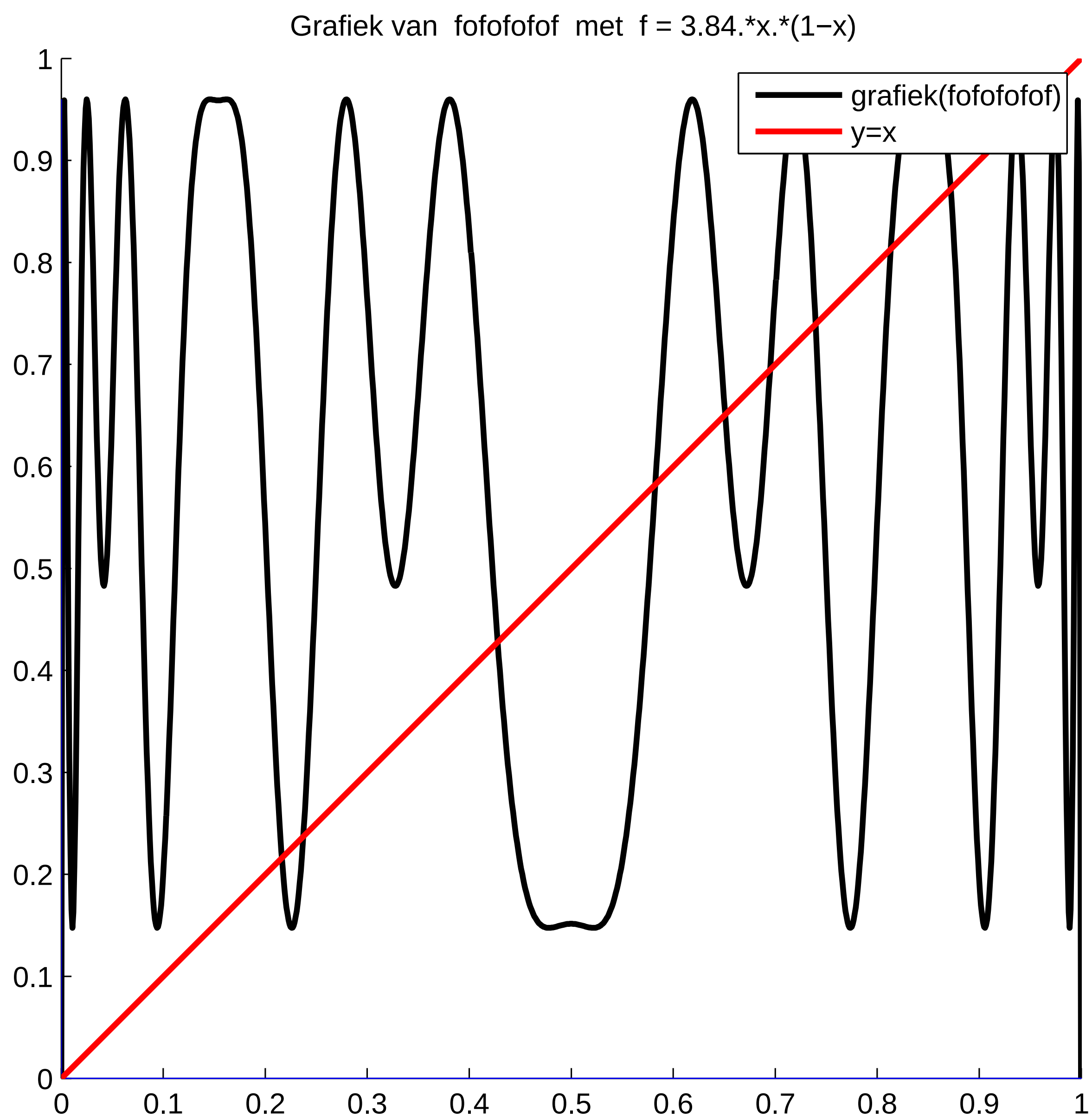
Grafische analyse



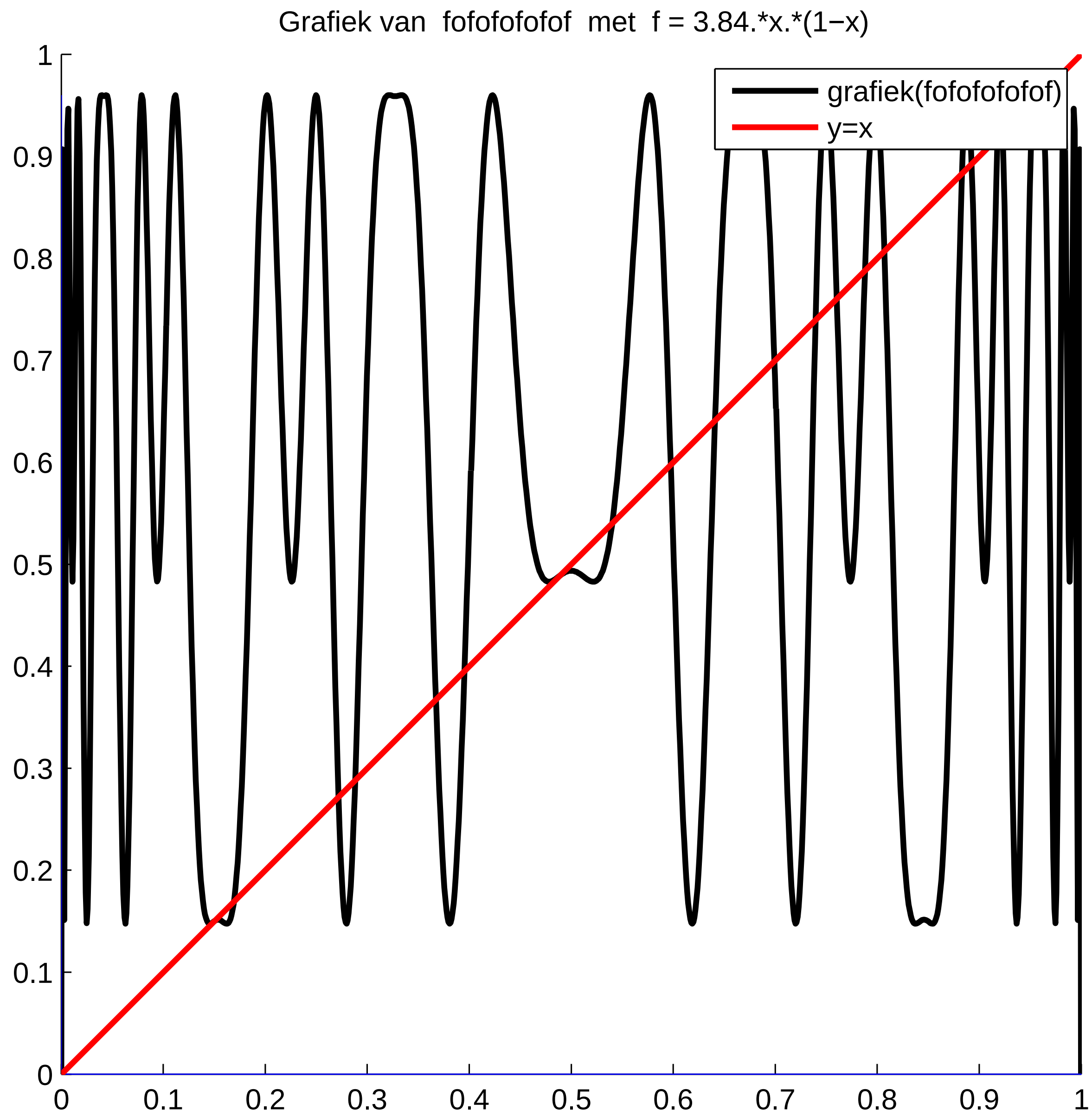
Grafische analyse



Grafische analyse



Grafische analyse



Discussie

Het bifurcatie-diagram in dictaat en op de volgende transparant zijn verschillend. Welke is het correcte? Waarom is er een verschil?

In het Verhulst model lijkt er voor $\kappa_0 \approx 3.84$ een stabiel 3-periodieke baan te zijn. Hoe zie je dat die stabiel is?

Sharkovskii zegt dat er dan ook voor iedere $p \in \mathbb{N}$ een p-periodieke baan is. Zie je dat terug in het bifurcatie-diagram? Verklaring?

Is het proces voor deze waarde van κ_0 chaotisch?

Wat gebeurt er in het Verhulst model voor $\kappa_0 > 4$?
En in het Ricker model voor grote κ_0?

Program

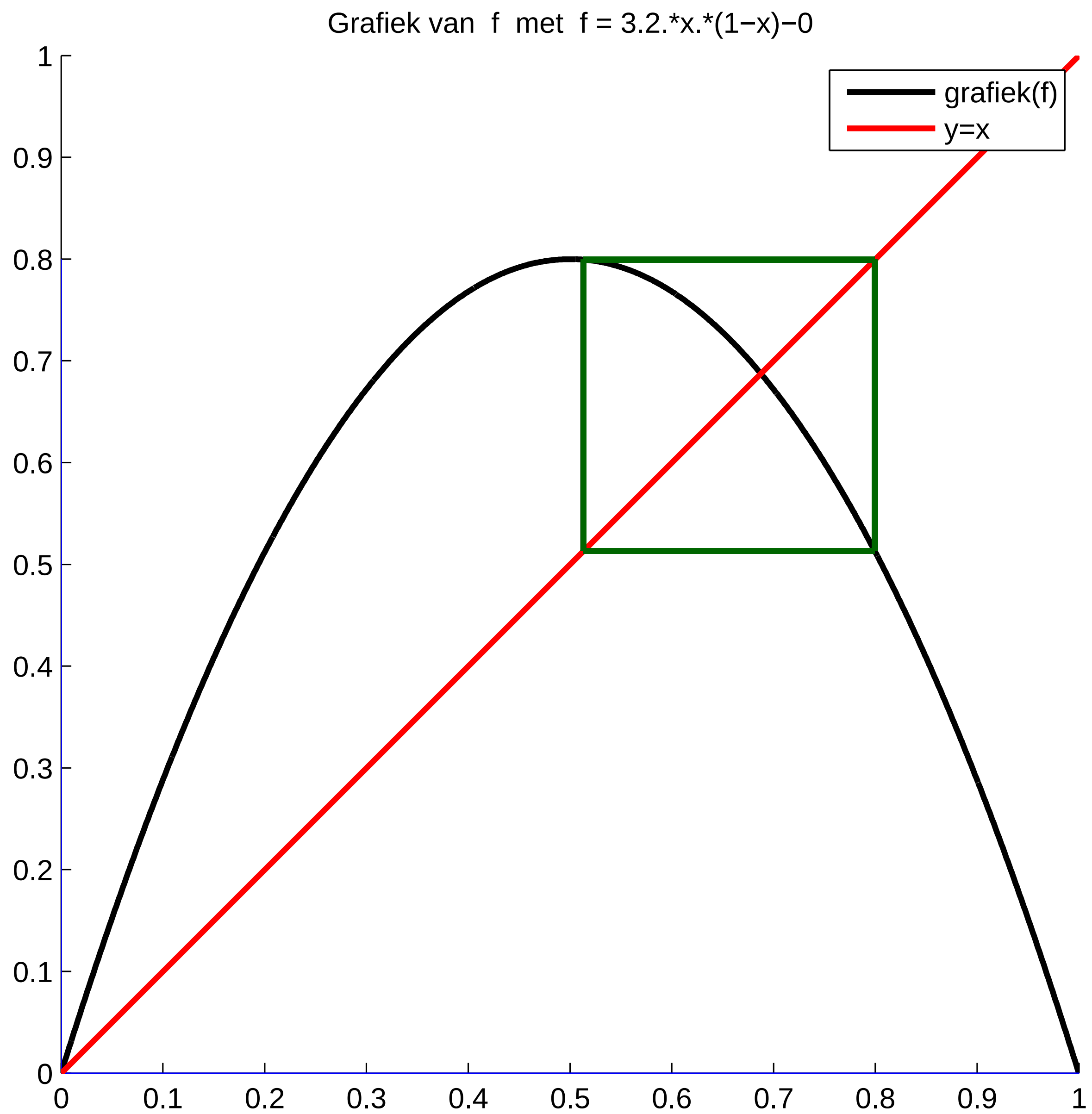
- Populatie groei van één soort, recursies
- Evenwichtspunten
- Periodieke banen
- Bifurcatie
- Chaos
- Catastrofe

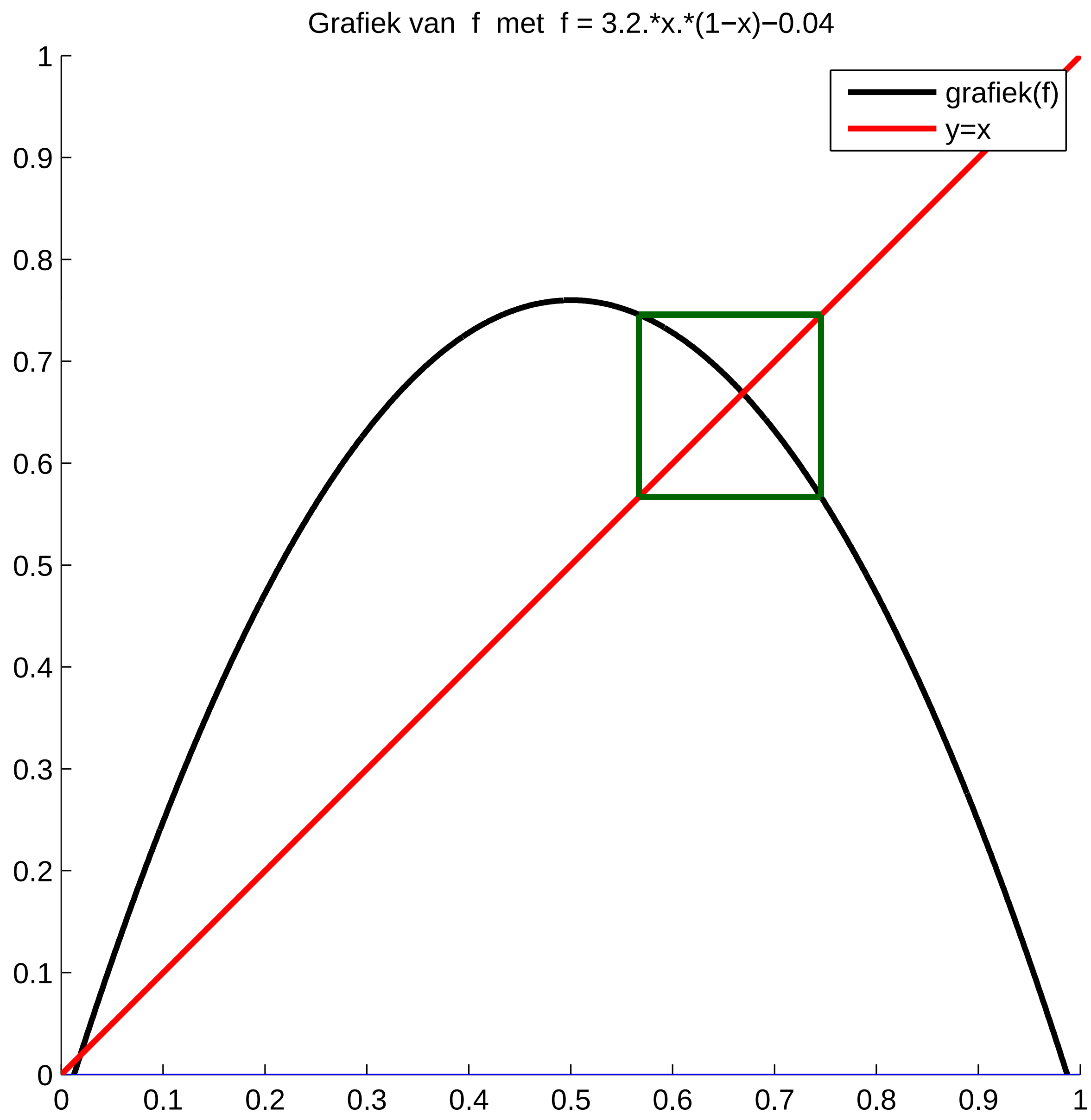
Catastrofe

Voorbeeld. $x_{n+1} = 3.2\,(1 - x_n)\,x_n - b.$

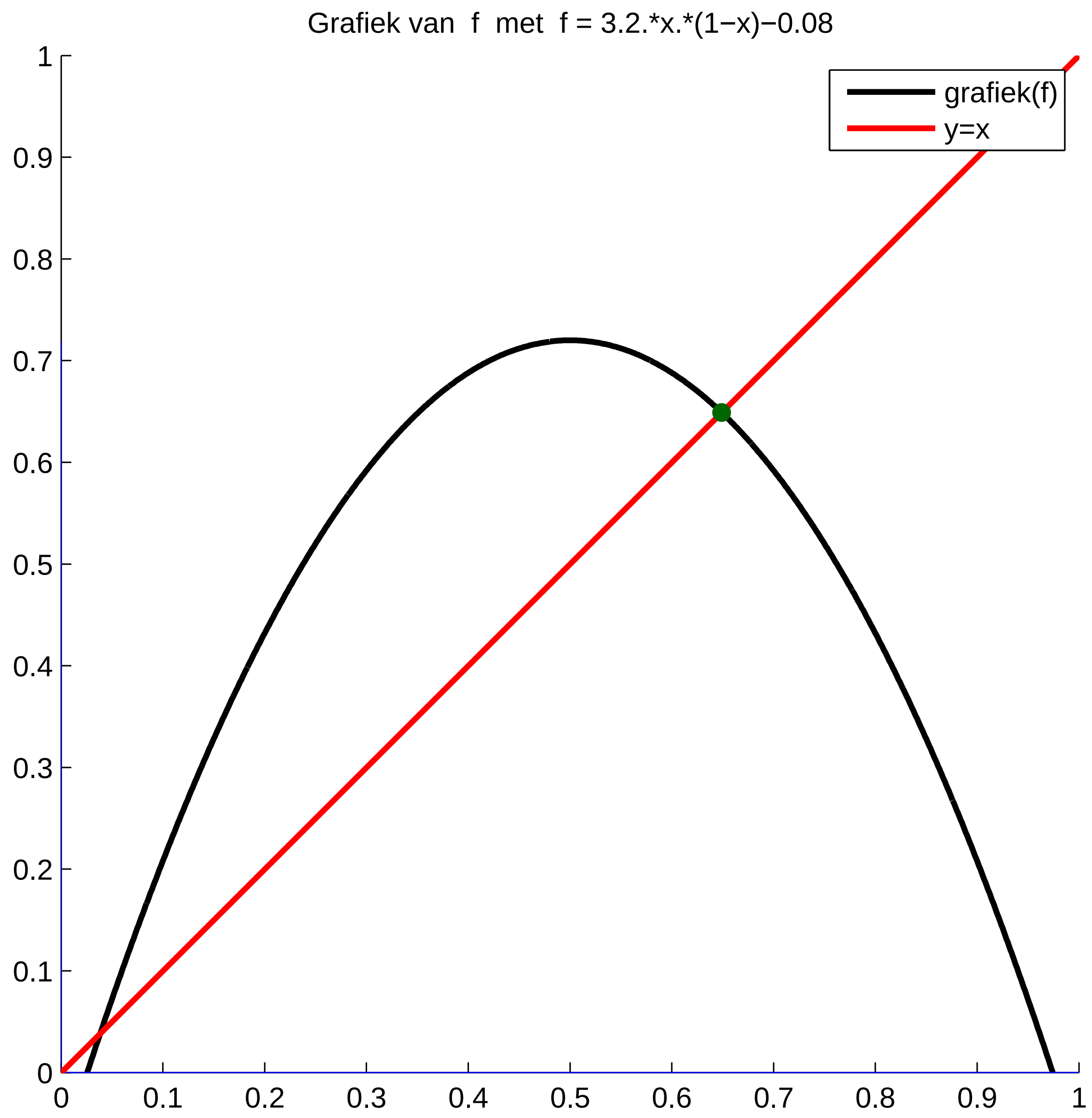
Voor $b = 0$: stabiele 2-periodieke baan.

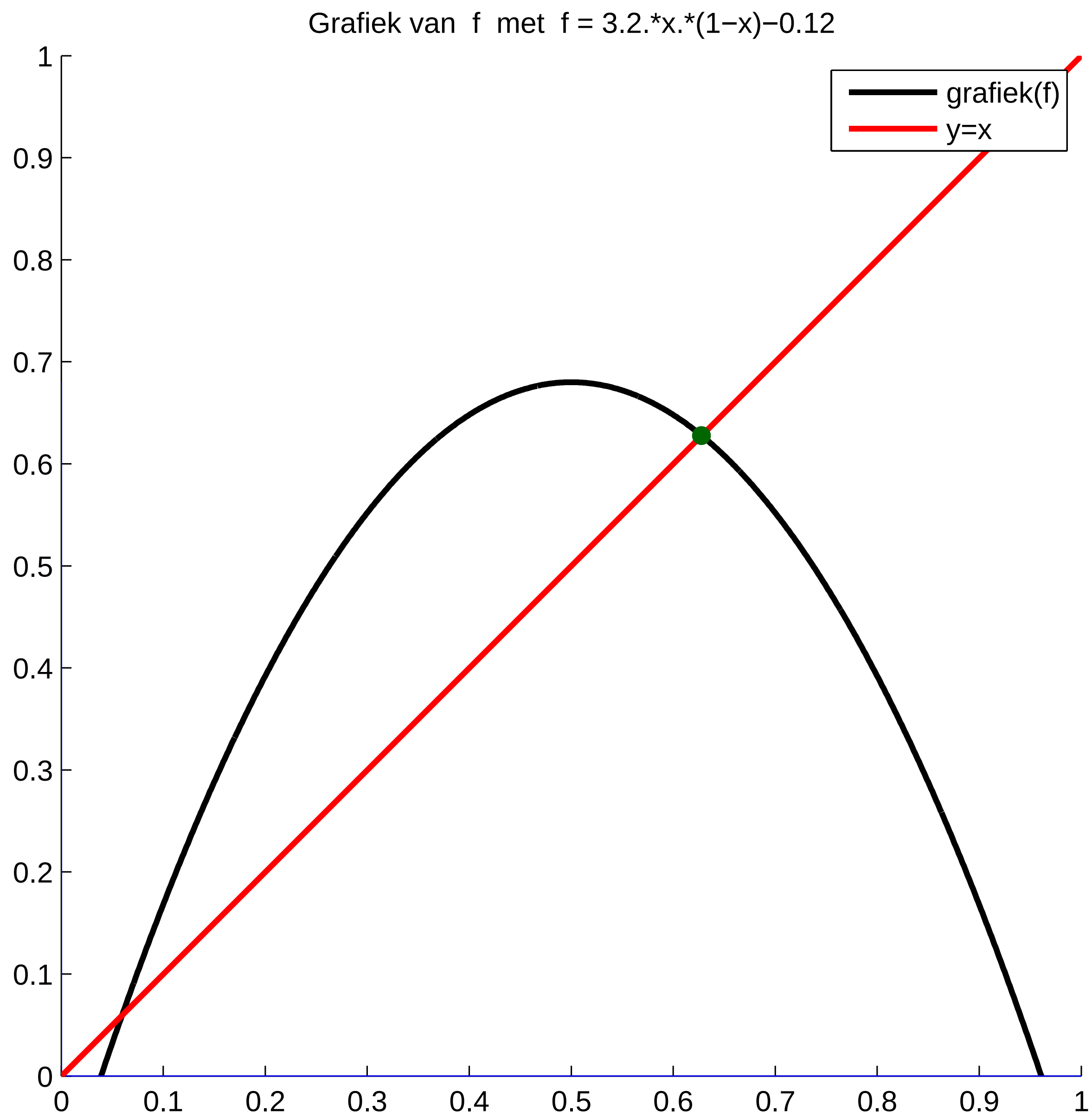
Wat gebeurt er als b oploopt vanaf $b = 0$?


Grafiek van f met f = 3.2.*x.*(1−x)−0
grafiek(f)
y=x
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1

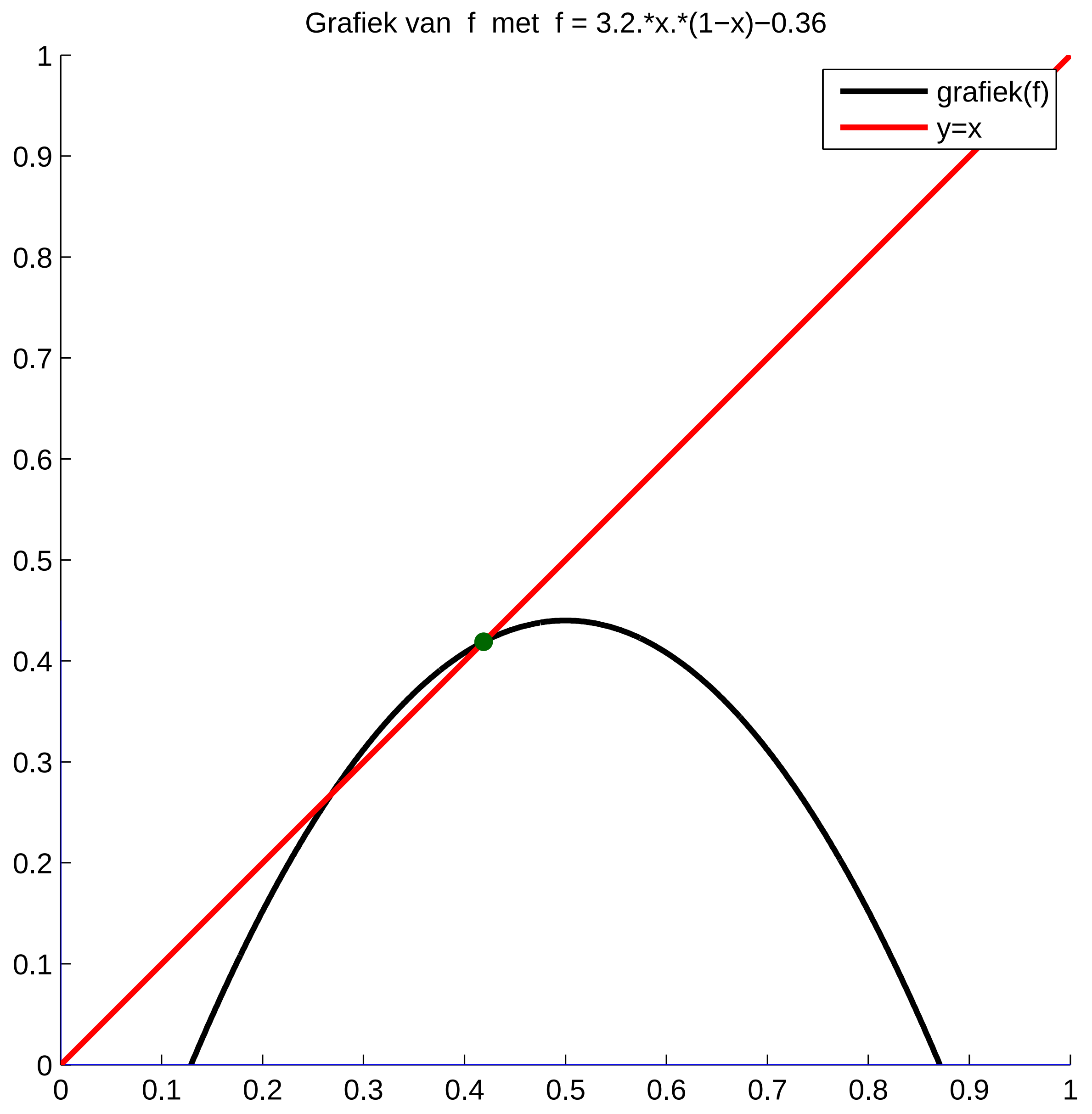


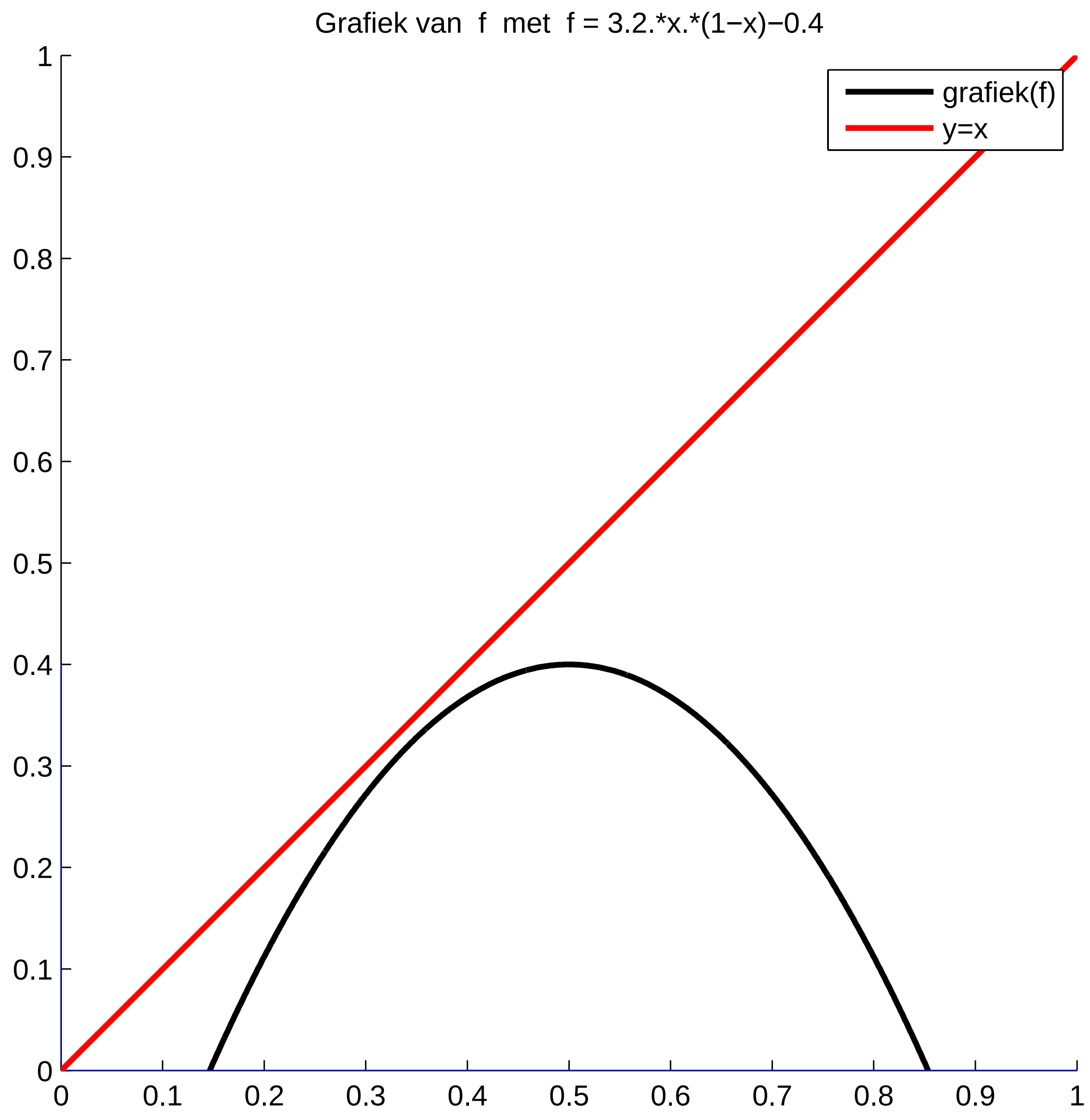
Grafiek van f met f = 3.2.*x.*(1−x)−0.04
grafiek(f)
y=x
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1


Grafiek van f met f = 3.2.*x.*(1−x)−0.08
grafiek(f)
y=x
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1



Grafiek van f met f = 3.2.*x.*(1−x)−0.12
grafiek(f)
y=x
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1


Grafiek van f met f = 3.2.*x.*(1−x)−0.36
grafiek(f)
y=x
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1


Grafiek van f met f = 3.2.*x.*(1−x)−0.4
grafiek(f)
y=x
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1

Catastrofe

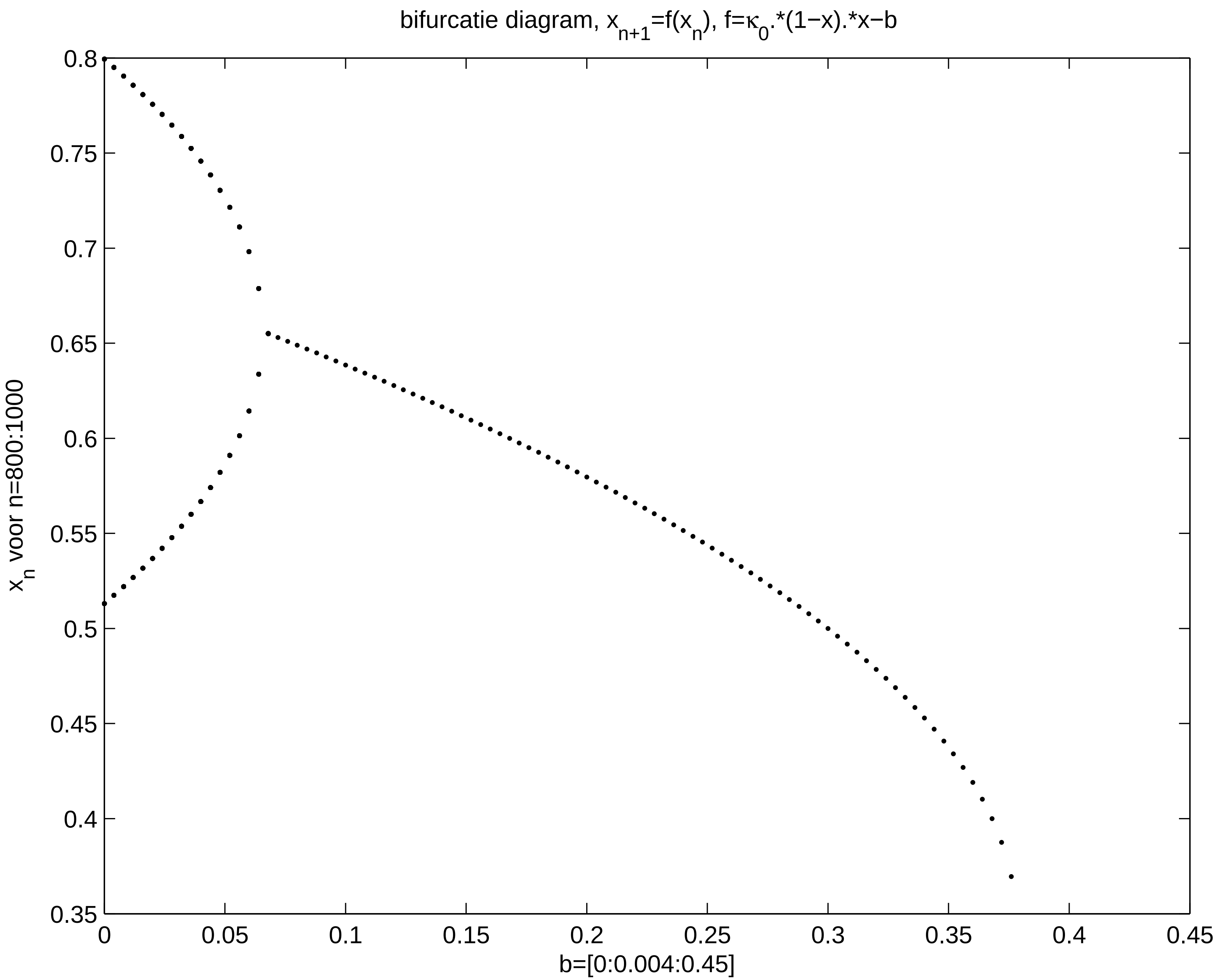
Voorbeeld. $x_{n+1} = 3.2\,(1 - x_n)\,x_n - b.$

Voor $b = 0$: stabiele 2-periodieke baan.

Wat gebeurt er als b oploopt vanaf $b = 0$?

• Punten op baan verschuiven en vallen
vanaf zekere waarde b samen tot 1 stabiel evenwicht.

• Stabiel evenwicht verschuift en **verdwijnt**
vanaf zekere waarde voor b: **catastrofe**.



bifurcatie diagram, x_{n+1}=f(x_n), f=κ_0.*(1−x).*x−b
x_n voor n=800:1000
b=[0:0.004:0.45]
0.8
0.75
0.7
0.65
0.6
0.55
0.5
0.45
0.4
0.35
0
0.05
0.1
0.15
0.2
0.25
0.3
0.35
0.4
0.45

Volgende les.

Meer dimensionale variant van het Malthus model:

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_n$$

met $\mathbf{A}$ een $k \times k$ matrix.
x_n is dus nu een k-vector $\mathbf{x}_n$ geworden, κ een $k \times k$ matrix $\mathbf{A}$.

Lees voor de volgende les je lineaire algebra boek er op na over eigenwaarden en eigenvectoren