Utrecht, 26 april 2013

Modellen en Simulatie
Lesliematrices
Markovketens

Gerard Sleijpen

Universiteit Utrecht

Department of Mathematics

http://www.staff.science.uu.nl/∼sleij101/

N_n: aantal individuen eind tijdvak n.

> **Aanname** [Malthus, 1798]:
> in ieder tijdvak: fractie s sterft, fractie g geboren

Model. $N_{n+1} = N_n + g\,N_n - s\,N_n = \kappa\,N_n$
met $\kappa = 1 + g - s$, κ is de **groeicoëfficiënt**

Oplossing. $N_n = (1 + g - s)^n\,N_0 = \kappa^n\,N_0$:

de groei is **exponentiëel**

Wat gebeurt er op den duur ($n \to \infty$)?

$$\boxed{\begin{array}{rcll} \kappa > 1 & \Rightarrow & N_n \to \infty & \text{voor } n \to \infty \\ 0 \le \kappa < 1 & \Rightarrow & N_n \to 0 & \text{voor } n \to \infty \end{array}}$$

$$\kappa = 1 \quad \Rightarrow \quad N_n = N_0 \quad \text{alle} \quad n$$

Bezwaren tegen het Malthus model

- groeicoëfficiënt kan afhangen van N_n,
- groeicoëfficiënt kan afhangen van n,
- groeicoëfficiënt kan afhangen van N_n, $N_{n-1}, \ldots$
- groeicoëfficiënt kan beïnvloed worden door andere soorten,
- veranderingen kunnen optreden op elk tijdstip (tijdsvakgedachte niet houdbaar)
- groei kan plaats afhankelijk zijn

$\vdots$

Bezwaren tegen het Malthus model

- groeicoëfficiënt kan afhangen van N_n,
- groeicoëfficiënt kan afhangen van n,
- groeicoëfficiënt kan afhangen van N_n, $N_{n-1}, \ldots$
- groeicoëfficiënt kan beïnvloed worden door andere soorten,
- veranderingen kunnen optreden op elk tijdstip (tijdsvakgedachte niet houdbaar)
- groei kan plaats afhankelijk zijn

$\vdots$

Bezwaren tegen het Malthus model

- groeicoëfficiënt kan afhangen van N_n,
- groeicoëfficiënt kan afhangen van n,
- groeicoëfficiënt kan afhangen van N_n, $N_{n-1}, \ldots$
- groeicoëfficiënt kan beïnvloed worden door andere soorten,
- veranderingen kunnen optreden op elk tijdstip (tijdsvakgedachte niet houdbaar)
- groei kan plaats afhankelijk zijn

$\vdots$

Program

- Meerdere leeftijdsklassen
- Leslie matrices
- Eigenwaarden en eigenvectoren
- Dominante eigenvector
- Irreducibele, a-periodieke matrices
- Markov ketens
- Google's PageRanking
- Lampen

Program

- Meerdere leeftijdsklassen
- Leslie matrices
- Eigenwaarden en eigenvectoren
- Dominante eigenvector
- Irreducibele, a-periodieke matrices
- Markov ketens
- Google's PageRanking
- Lampen

Twee jarige planten

In jaar n $N_1(n)$: aantal planten in jaar n ontkiemt
$N_2(n)$: aantal planten in jaar $n-1$ ontkiemt

Aanname:
- 50% van de 0-jarige geeft zaad
- gemiddeld twee zaden van 0-jarige ontkiemen
- 75% planten overleeft de winter
- gemiddeld vier zaden van de 1-jarige ontkiemen

Twee jarige planten

In jaar n $\quad N_1(n)$: aantal planten in jaar n ontkiemt
$N_2(n)$: aantal planten in jaar $n-1$ ontkiemt

Aanname:

- 50% van de 0-jarige geeft zaad
- gemiddeld twee zaden van 0-jarige ontkiemen
- 75% planten overleeft de winter
- gemiddeld vier zaden van de 1-jarige ontkiemen

Model: $N_1(n+1) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot N_1(n) + 4\, N_2(n)$

en $N_2(n+1) = \frac{3}{4} N_1(n)$.

Twee jarige planten

In jaar n $\quad N_1(n)$: aantal planten in jaar n ontkiemt
$N_2(n)$: aantal planten in jaar $n-1$ ontkiemt

Aanname:
- 50% van de 0-jarige geeft zaad
- gemiddeld twee zaden van 0-jarige ontkiemen
- 75% planten overleeft de winter
- gemiddeld vier zaden van de 1-jarige ontkiemen

Model: $N_1(n+1) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot N_1(n) + 4\, N_2(n)$
en $N_2(n+1) = \frac{3}{4} N_1(n)$.

In "matrix taal":

$$\begin{bmatrix} N_1(n+1) \\ N_2(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ \frac{3}{4} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1(n) \\ N_2(n) \end{bmatrix}$$

Evenwicht als

voor alle n: $N_1(n+1) = N_1(n) = \alpha_1$ en

$$N_2(n+1) = N_2(n) = \alpha_2$$

Evenwicht als

voor alle n: $N_1(n+1) = N_1(n) = \alpha_1$ en

$$N_2(n+1) = N_2(n) = \alpha_2$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ \frac{3}{4} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}$$

Evenwicht als

voor alle n: $N_1(n+1) = N_1(n) = \alpha_1$ en

$$N_2(n+1) = N_2(n) = \alpha_2$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ \frac{3}{4} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}$$

$\Leftrightarrow$ 1 eigenwaarde $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ \frac{3}{4} & 0 \end{bmatrix}$

Evenwicht als

voor alle n: $N_1(n+1) = N_1(n) = \alpha_1$ en

$N_2(n+1) = N_2(n) = \alpha_2$

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ \frac{3}{4} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 \text{ eigenwaarde } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ \frac{3}{4} & 0 \end{bmatrix}$$

Evenwichtige opbouw in leeftijd als

voor alle n: $N_1(n+1)/N_2(n+1) = N_1(n)/N_2(n)$

Evenwicht als

voor alle n: $N_1(n+1) = N_1(n) = \alpha_1$ en

$N_2(n+1) = N_2(n) = \alpha_2$

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ \frac{3}{4} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 \text{ eigenwaarde } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ \frac{3}{4} & 0 \end{bmatrix}$$

Evenwichtige opbouw in leeftijd als

voor alle n: $N_1(n+1)/N_2(n+1) = N_1(n)/N_2(n)$

$$\lambda \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ \frac{3}{4} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda \text{ eigenwaarde } \mathbf{A}$$

Evenwicht als

voor alle n: $N_1(n+1) = N_1(n) = \alpha_1$ en

$N_2(n+1) = N_2(n) = \alpha_2$

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ \frac{3}{4} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 \text{ eigenwaarde } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ \frac{3}{4} & 0 \end{bmatrix}$$

Evenwichtige opbouw in leeftijd als

voor alle n: $N_1(n+1)/N_2(n+1) = N_1(n)/N_2(n)$

$$\lambda \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ \frac{3}{4} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda \text{ eigenwaarde } \mathbf{A}$$

Wanneer is evenwicht stabiel?
Wanneer is evenwichtige leeftijdsopbouw stabiel?

Beschouw de **iteratie** in $\mathbb{R}^2$

$$\begin{bmatrix} x_1(n+1) \\ x_2(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{A}\,\mathbf{x}_n$$

Beschouw de **differentie vergelijking** in $\mathbb{R}^2$

$$\begin{bmatrix} x_1(n+1) \\ x_2(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{A}\,\mathbf{x}_n$$

Beschouw de **recursie** in $\mathbb{R}^2$

$$\begin{bmatrix} x_1(n+1) \\ x_2(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{A}\,\mathbf{x}_n$$

Beschouw de **iteratie** in $\mathbb{R}^2$

$$\begin{bmatrix} x_1(n+1) \\ x_2(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{A}\,\mathbf{x}_n$$

Dan $\quad \mathbf{x}_n = \mathbf{A}\,\mathbf{x}_{n-1} = \ldots = \mathbf{A}^n\,\mathbf{x}_0$

Beschouw de **iteratie** in $\mathbb{R}^2$

$$\begin{bmatrix} x_1(n+1) \\ x_2(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{A}\,\mathbf{x}_n$$

Dan $\qquad \mathbf{x}_n = \mathbf{A}\,\mathbf{x}_{n-1} = \ldots = \mathbf{A}^n\,\mathbf{x}_0$

Eigenwaarden en **eigenvektoren** van **A**:

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_1 = \lambda_1\,\mathbf{v}_1 \quad \text{en} \quad \mathbf{A}\mathbf{v}_2 = \lambda_2\,\mathbf{v}_2$$

Beschouw de **iteratie** in $\mathbb{R}^2$

$$\begin{bmatrix} x_1(n+1) \\ x_2(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{A}\,\mathbf{x}_n$$

Dan $\qquad \mathbf{x}_n = \mathbf{A}\,\mathbf{x}_{n-1} = \ldots = \mathbf{A}^n\,\mathbf{x}_0$

Eigenwaarden en **eigenvektoren** van **A**:

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_1 = \lambda_1\,\mathbf{v}_1 \quad \text{en} \quad \mathbf{A}\mathbf{v}_2 = \lambda_2\,\mathbf{v}_2$$

$$\mathbf{x}_0 = \gamma_1\mathbf{v}_1 + \gamma_2\mathbf{v}_2 \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_n &= \mathbf{A}^n\,\mathbf{x}_0 = \mathbf{A}^n\,(\gamma_1\mathbf{v}_1 + \gamma_2\mathbf{v}_2) \\ &= \gamma_1\,\mathbf{A}^n\,\mathbf{v}_1 + \gamma_2\,\mathbf{A}^n\,\mathbf{v}_2 \\ &= \gamma_1\,\lambda_1^n\,\mathbf{v}_1 + \gamma_2\,\lambda_2^n\,\mathbf{v}_2 \end{aligned}$$

Beschouw de **iteratie** in $\mathbb{R}^2$

$$\begin{bmatrix} x_1(n+1) \\ x_2(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{A}\,\mathbf{x}_n$$

Dan $\quad \mathbf{x}_n = \mathbf{A}\,\mathbf{x}_{n-1} = \ldots = \mathbf{A}^n\,\mathbf{x}_0$

Eigenwaarden en **eigenvektoren** van **A**:

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_1 = \lambda_1\,\mathbf{v}_1 \quad \text{en} \quad \mathbf{A}\mathbf{v}_2 = \lambda_2\,\mathbf{v}_2$$

$$\mathbf{x}_0 = \gamma_1\mathbf{v}_1 + \gamma_2\mathbf{v}_2 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}_n = \gamma_1\,\lambda_1^n\,\mathbf{v}_1 + \gamma_2\,\lambda_2^n\,\mathbf{v}_2$$

Beschouw de **iteratie** in $\mathbb{R}^2$

$$\begin{bmatrix} x_1(n+1) \\ x_2(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{A}\,\mathbf{x}_n$$

Dan $\qquad \mathbf{x}_n = \mathbf{A}\,\mathbf{x}_{n-1} = \ldots = \mathbf{A}^n\,\mathbf{x}_0$

Eigenwaarden en **eigenvektoren** van **A**:

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_1 = \lambda_1\,\mathbf{v}_1 \quad \text{en} \quad \mathbf{A}\mathbf{v}_2 = \lambda_2\,\mathbf{v}_2$$

$$\mathbf{x}_0 = \gamma_1\mathbf{v}_1 + \gamma_2\mathbf{v}_2 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}_n = \gamma_1\,\lambda_1^n\,\mathbf{v}_1 + \gamma_2\,\lambda_2^n\,\mathbf{v}_2$$

$$\mathbf{x}_n = \gamma_1\,\lambda_1^n \left(\mathbf{v}_1 + \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^n \mathbf{v}_2 \right)$$

Beschouw de **iteratie** in $\mathbb{R}^2$

$$\begin{bmatrix} x_1(n+1) \\ x_2(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{A}\,\mathbf{x}_n$$

Dan $\qquad \mathbf{x}_n = \mathbf{A}\,\mathbf{x}_{n-1} = \ldots = \mathbf{A}^n\,\mathbf{x}_0$

Eigenwaarden en **eigenvektoren** van $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_1 = \lambda_1\,\mathbf{v}_1 \quad \text{en} \quad \mathbf{A}\mathbf{v}_2 = \lambda_2\,\mathbf{v}_2$$

$$\mathbf{x}_0 = \gamma_1\mathbf{v}_1 + \gamma_2\mathbf{v}_2 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}_n = \gamma_1\,\lambda_1^n\,\mathbf{v}_1 + \gamma_2\,\lambda_2^n\,\mathbf{v}_2$$

$$\mathbf{x}_n = \gamma_1\,\lambda_1^n\left(\mathbf{v}_1 + \frac{\gamma_2}{\gamma_1}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^n\mathbf{v}_2\right)$$

Als $|\lambda_2| < |\lambda_1|$ en $\gamma_1 \neq 0$, dan $\mathbf{x}_n \approx \gamma_1\,\lambda_1^n\,\mathbf{v}_1$ voor grote n.

Als $|\lambda_2| < |\lambda_1|$, dan geldt, voor grote n,

$$\mathbf{x}_n = \gamma_1 \lambda_1^n \left[\mathbf{v}_1 + \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^n \mathbf{v}_2 \right] \approx \gamma_1 \lambda_1^n \mathbf{v}_1$$

λ_1 is een **dominante eigenwaarde** als $|\lambda_2| < |\lambda_1|$

$\mathbf{v}_1$ is dan een **dominante eigenvector**

Als $|\lambda_2| < |\lambda_1|$, dan geldt, voor grote n,

$$\mathbf{x}_n = \gamma_1 \lambda_1^n \left[\mathbf{v}_1 + \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^n \mathbf{v}_2 \right] \approx \gamma_1 \lambda_1^n \mathbf{v}_1$$

λ_1 is een **dominante eigenwaarde** als $|\lambda_2| < |\lambda_1|$

$\mathbf{v}_1$ is dan een **dominante eigenvector**

Stelling. **0** is een stabiel evenwicht als $1 > |\lambda_i|$, $i = 1, 2$.

Als $\quad |\lambda_2| < |\lambda_1|$, dan geldt, voor grote n,

$$\mathbf{x}_n = \gamma_1 \, \lambda_1^n \left[\mathbf{v}_1 + \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^n \mathbf{v}_2 \right] \approx \gamma_1 \, \lambda_1^n \, \mathbf{v}_1$$

λ_1 is een **dominante eigenwaarde** als $\quad |\lambda_2| < |\lambda_1|$

$\mathbf{v}_1$ is dan een **dominante eigenvector**

Stelling. $\mathbf{0}$ is een stabiel evenwicht als $1 > |\lambda_i|$, $i = 1, 2$.

Stelling. $\gamma \, \mathbf{v}_1$ is een stabiel evenwicht als $\lambda_1 = 1 > |\lambda_2|$.

Er is een stabiel evenwicht als 1 dominante eigenwaarde **A**.

Als $\quad |\lambda_2| < |\lambda_1|$, dan geldt, voor grote n,

$$\mathbf{x}_n = \gamma_1\,\lambda_1^n \left[\mathbf{v}_1 + \frac{\gamma_2}{\gamma_1}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^n \mathbf{v}_2\right] \approx \gamma_1\,\lambda_1^n\,\mathbf{v}_1$$

λ_1 is een **dominante eigenwaarde** als $\quad |\lambda_2| < |\lambda_1|$

$\mathbf{v}_1$ is dan een **dominante eigenvector**

Stelling. $\mathbf{0}$ is een stabiel evenwicht als $1 > |\lambda_i|$, $i = 1, 2$.

Stelling. $\gamma\,\mathbf{v}_1$ is een stabiel evenwicht als $\lambda_1 = 1 > |\lambda_2|$.

Er is een stabiel evenwicht als 1 dominante eigenwaarde $\mathbf{A}$.

Stelling. $\gamma\,\mathbf{v}_1$ is een stabiele opbouw als λ_1 dominant.

Er is een stabiele leeftijdsopbouw als

$\mathbf{A}$ een dominante eigenwaarde heeft.

Voorbeeld. [Twee jarige planten]

Bereken de eigenwaarden $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ \frac{3}{4} & 0 \end{bmatrix}$.

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{I}) &= (1-\lambda)\cdot(-\lambda) - 4\cdot\frac{3}{4} \\ &= \lambda^2 - \lambda - 3 \end{aligned}$$

λ eigenwaarde $\quad\Leftrightarrow\quad \lambda^2 - \lambda - 3 = 0 \quad\Leftrightarrow$

$$\lambda = \lambda_1 = \frac{1+\sqrt{13}}{2} \quad \text{of} \quad \lambda = \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{13}}{2}$$

Voorbeeld. [Twee jarige planten]

Bereken de eigenwaarden $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ \frac{3}{4} & 0 \end{bmatrix}$.

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{I}) &= (1-\lambda)\cdot(-\lambda) - 4\cdot\frac{3}{4} \\ &= \lambda^2 - \lambda - 3 \end{aligned}$$

λ eigenwaarde $\quad\Leftrightarrow\quad \lambda^2 - \lambda - 3 = 0 \quad\Leftrightarrow$

$$\lambda = \lambda_1 = \frac{1+\sqrt{13}}{2} \quad \text{of} \quad \lambda = \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{13}}{2}$$

---

1 geen eigenwaarde: dus geen evenwicht $\neq \mathbf{0}$.

Voorbeeld. [Twee jarige planten]

Bereken de eigenwaarden $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ \frac{3}{4} & 0 \end{bmatrix}$.

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) &= (1-\lambda)\cdot(-\lambda) - 4\cdot\frac{3}{4} \\ &= \lambda^2 - \lambda - 3 \end{aligned}$$

λ eigenwaarde $\quad\Leftrightarrow\quad \lambda^2 - \lambda - 3 = 0 \quad\Leftrightarrow$

$$\lambda = \lambda_1 = \frac{1+\sqrt{13}}{2} \quad \text{of} \quad \lambda = \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{13}}{2}$$

---

1 geen eigenwaarde: dus geen evenwicht $\neq \mathbf{0}$.

$\lambda_1 > 1$: dus $\mathbf{0}$ geen stabiel evenwicht.

Voorbeeld. [Twee jarige planten]

Bereken de eigenwaarden $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ \frac{3}{4} & 0 \end{bmatrix}$.

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) &= (1-\lambda)\cdot(-\lambda) - 4 \cdot \frac{3}{4} \\ &= \lambda^2 - \lambda - 3 \end{aligned}$$

λ eigenwaarde $\quad\Leftrightarrow\quad \lambda^2 - \lambda - 3 = 0 \quad\Leftrightarrow$

$$\lambda = \lambda_1 = \frac{1+\sqrt{13}}{2} \quad \text{of} \quad \lambda = \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{13}}{2}$$

---

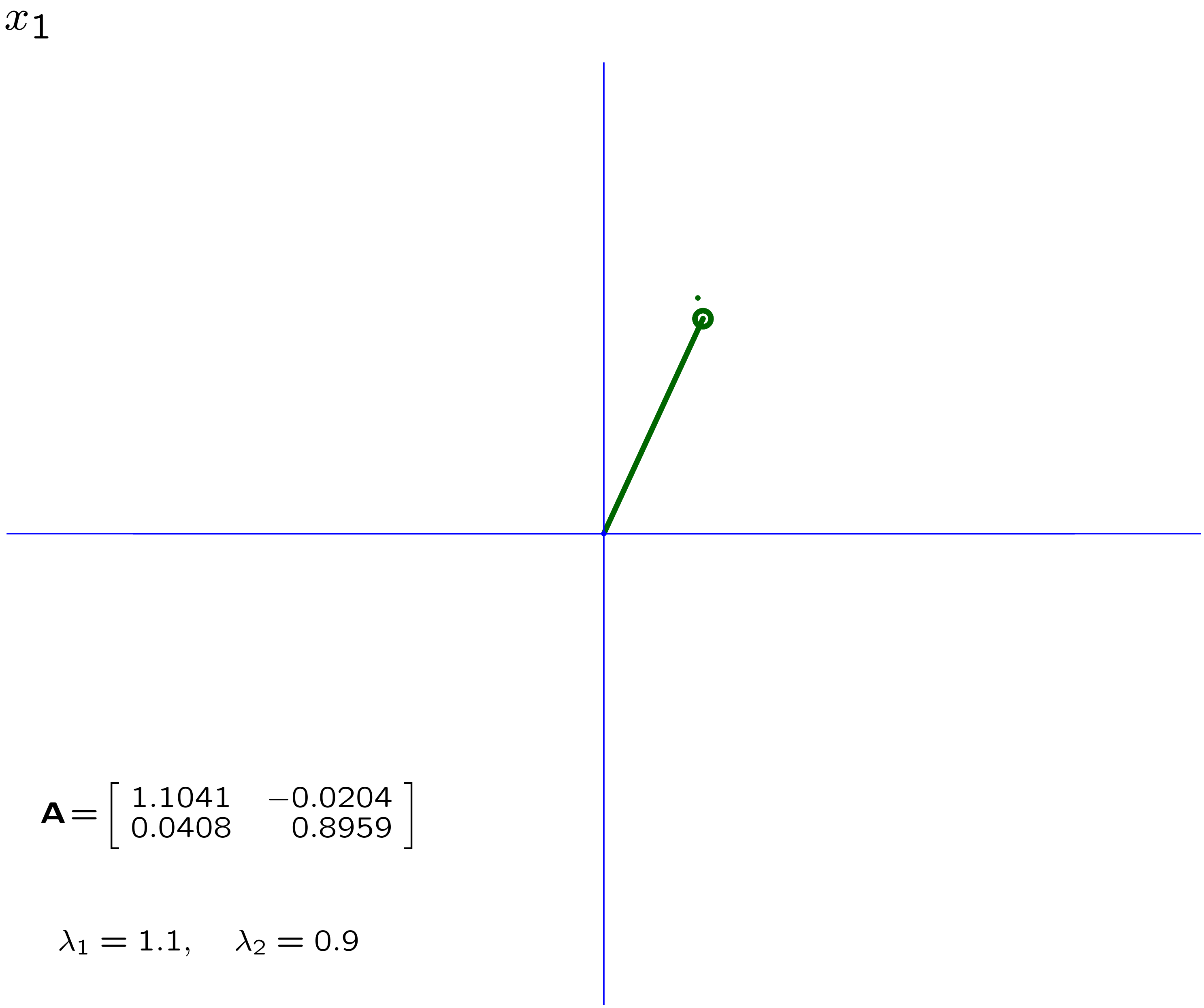
1 geen eigenwaarde: dus geen evenwicht $\neq \mathbf{0}$.

$\lambda_1 > 1$: dus $\mathbf{0}$ geen stabiel evenwicht.

$\lambda_1 > |\lambda_2|$: λ_1 dominante eigenwaarde met eigenv. $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \frac{3}{4} \end{bmatrix}$.

Dus $\gamma \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \frac{3}{4} \end{bmatrix}$ stabiele evenwichtige leeftijdsopbouw.

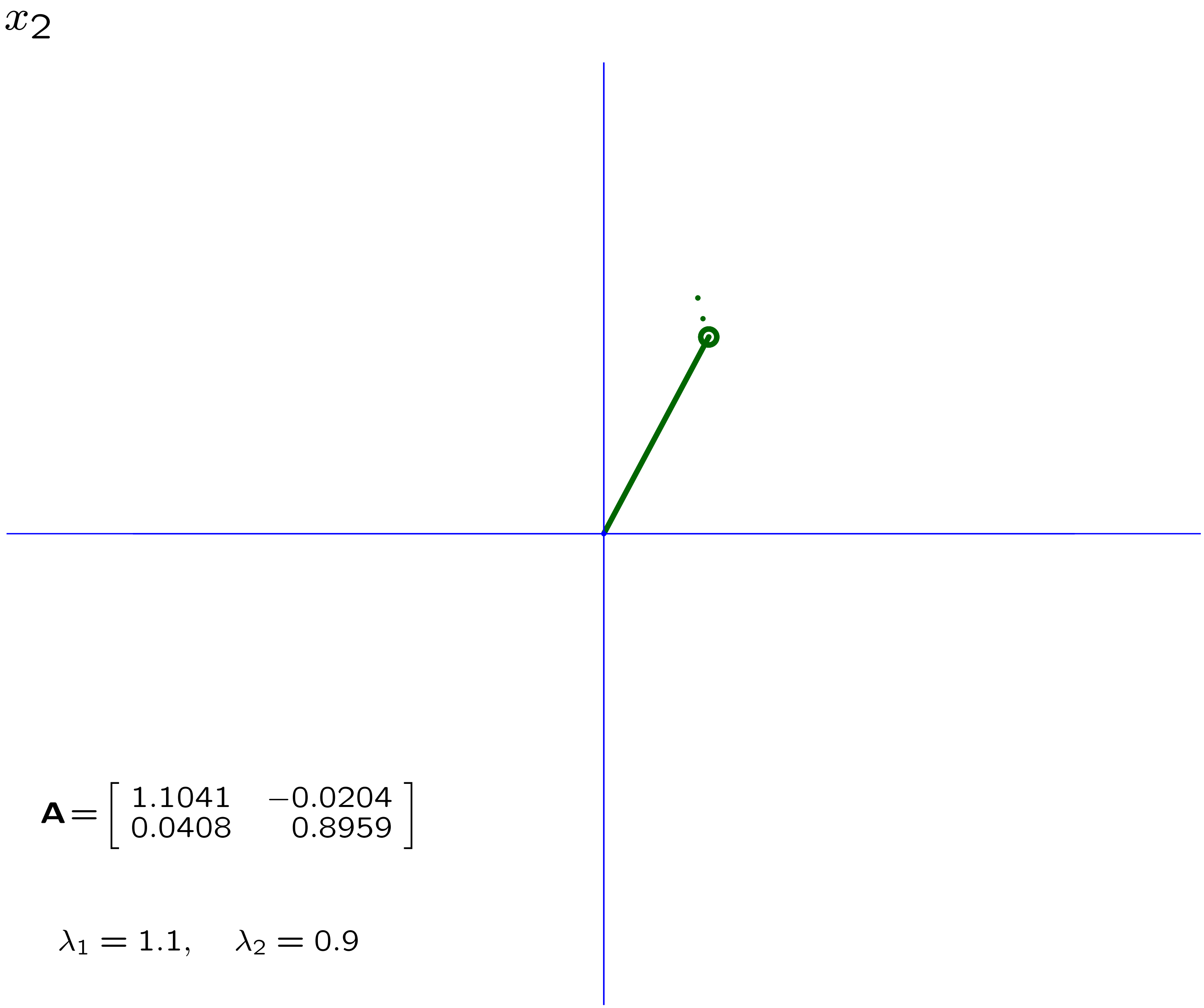
Iteratie in beeld



$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1.1041 & -0.0204 \\ 0.0408 & 0.8959 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 1.1, \quad \lambda_2 = 0.9$$

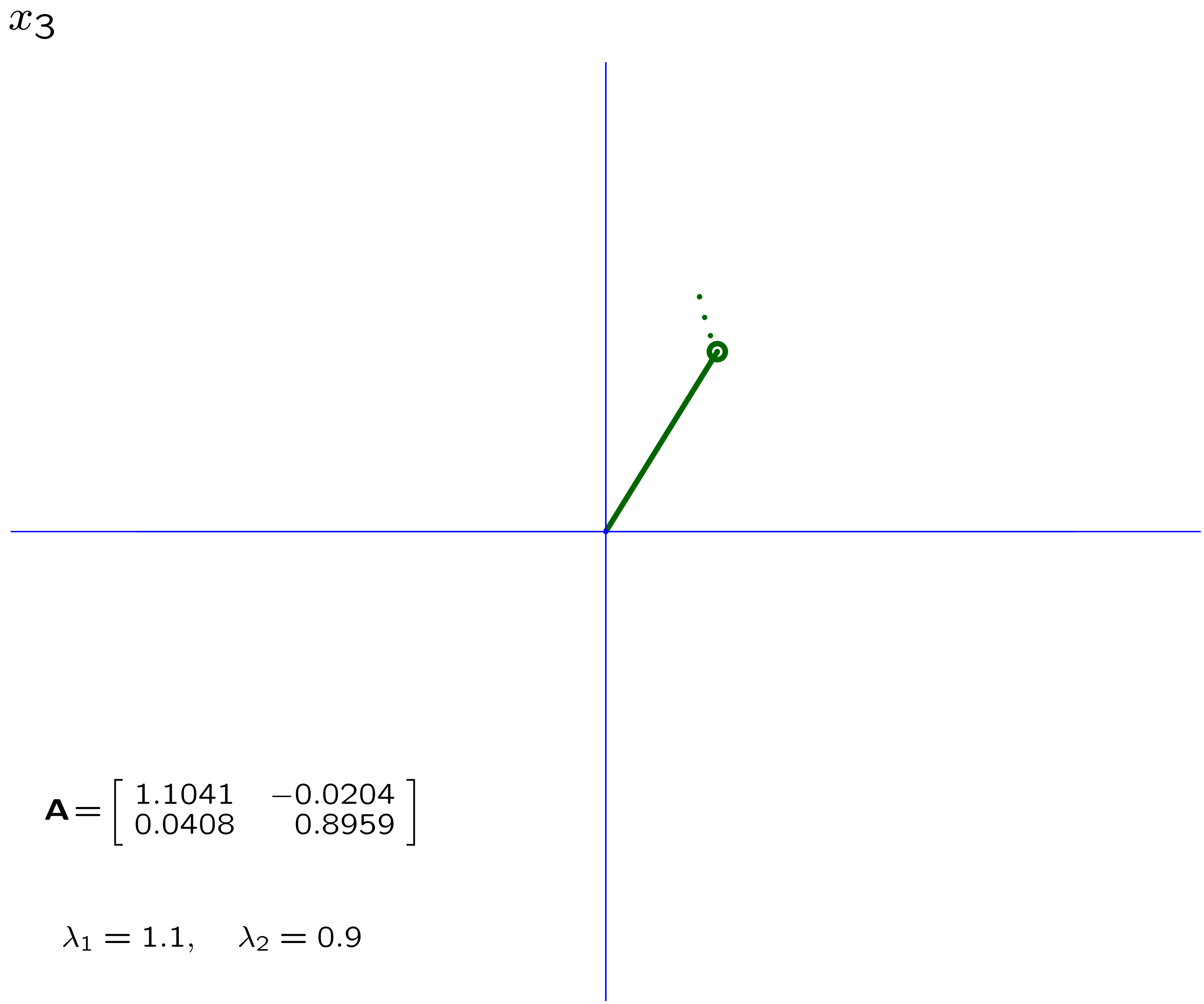
Iteratie in beeld



$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1.1041 & -0.0204 \\ 0.0408 & 0.8959 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 1.1, \quad \lambda_2 = 0.9$$

Iteratie in beeld

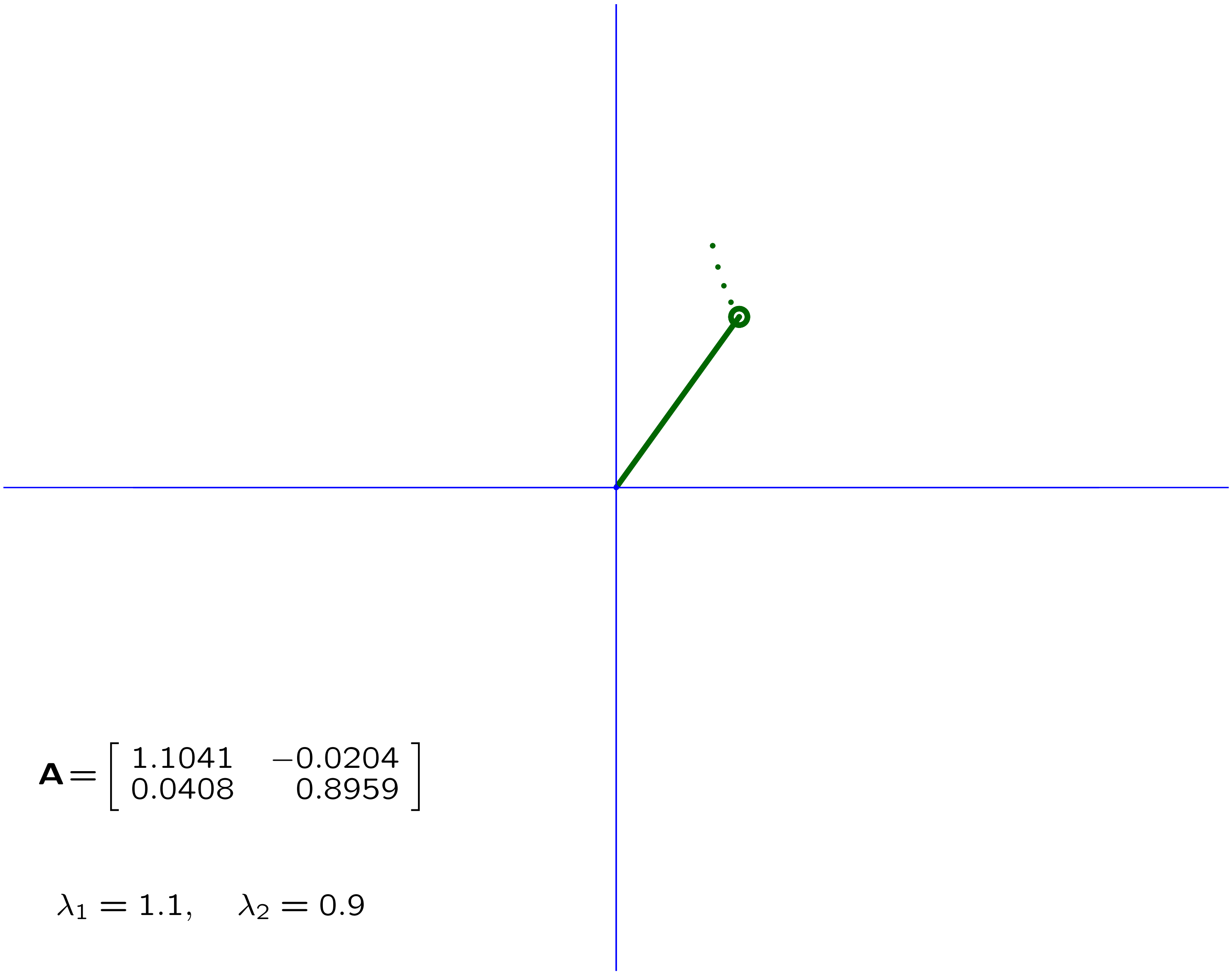


$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1.1041 & -0.0204 \\ 0.0408 & 0.8959 \end{bmatrix}$$

$\lambda_1 = 1.1, \quad \lambda_2 = 0.9$

Iteratie in beeld

x_4

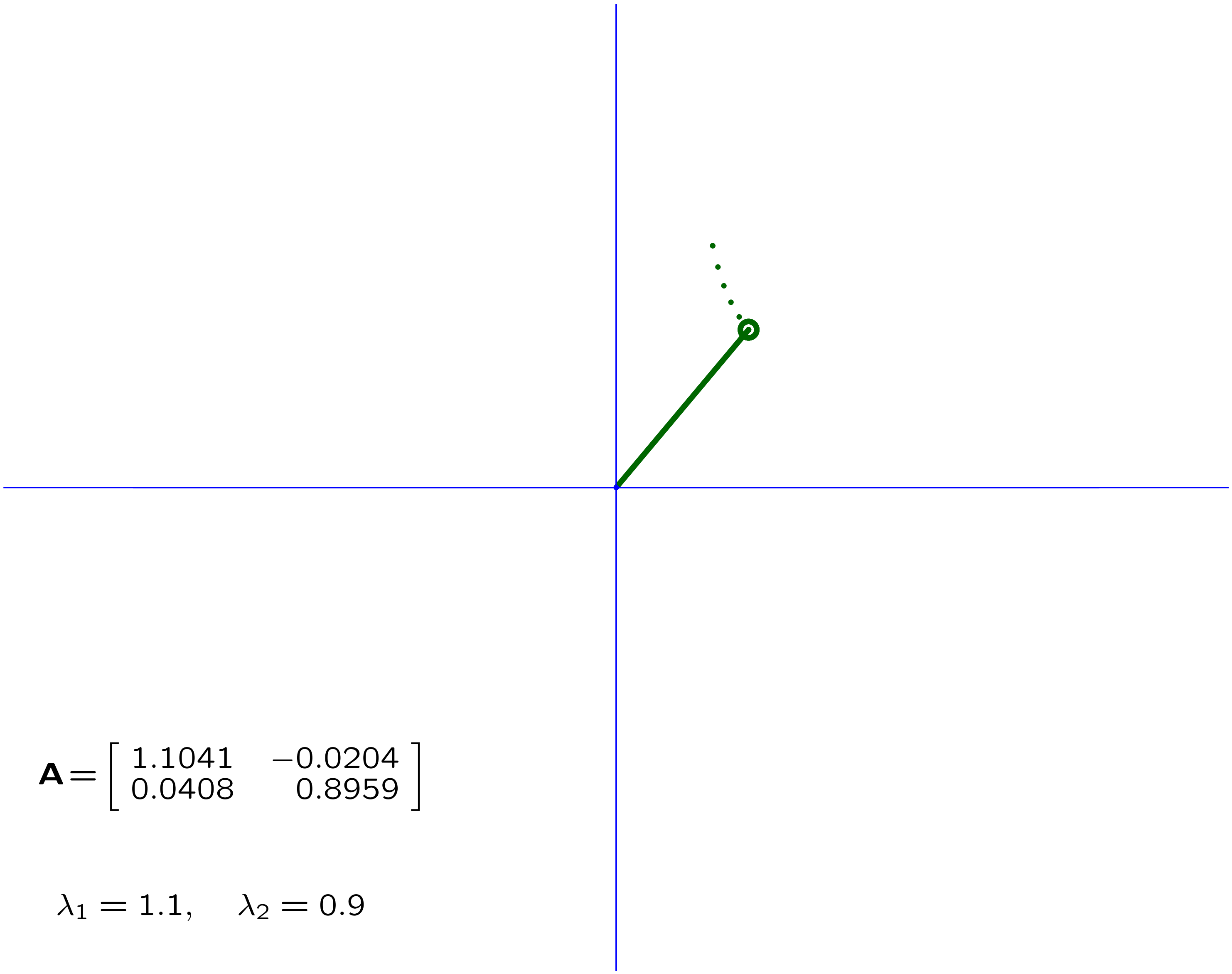


$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1.1041 & -0.0204 \\ 0.0408 & 0.8959 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 1.1, \quad \lambda_2 = 0.9$$

Iteratie in beeld

x_5

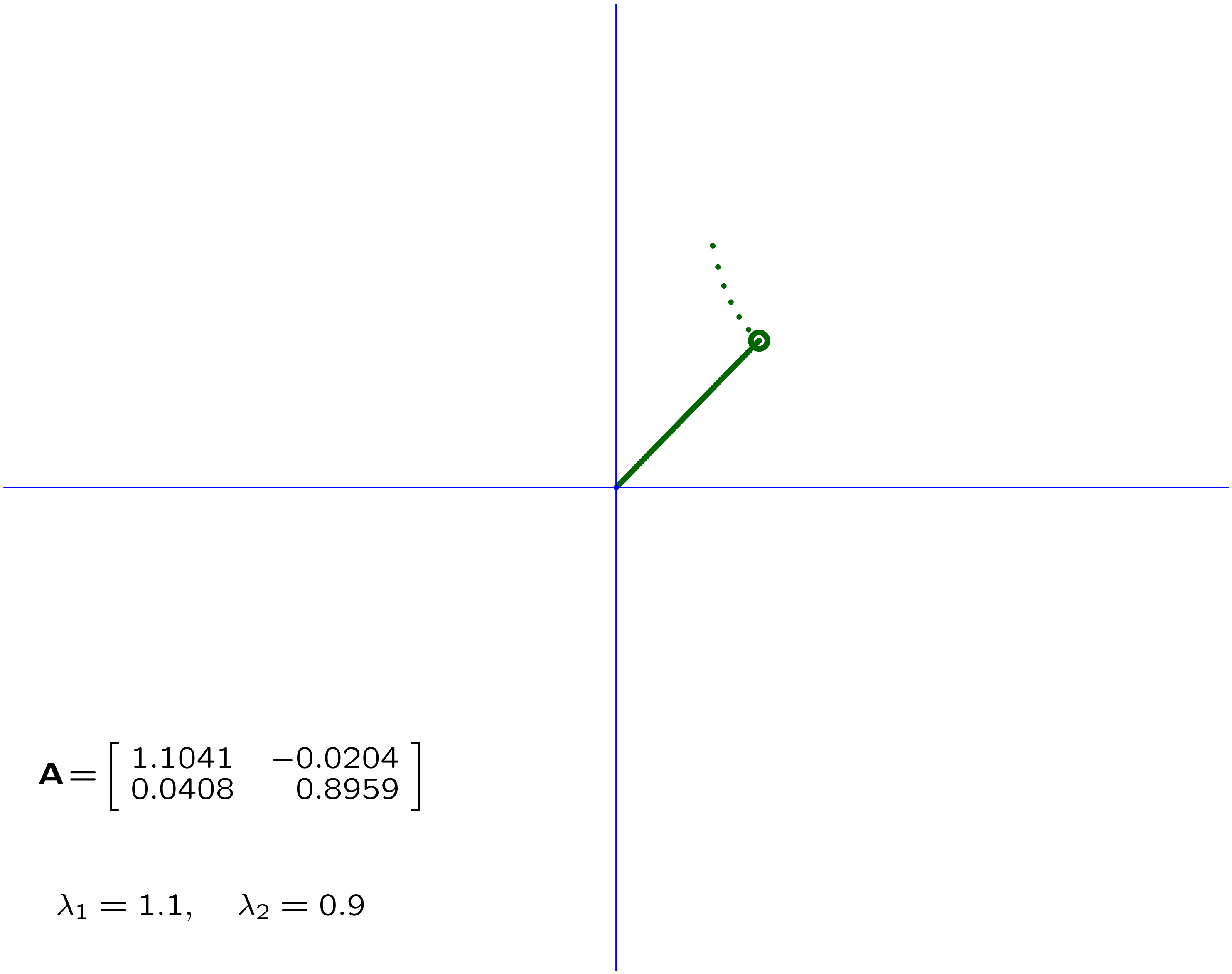


$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1.1041 & -0.0204 \\ 0.0408 & 0.8959 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 1.1, \quad \lambda_2 = 0.9$$

Iteratie in beeld

x_6

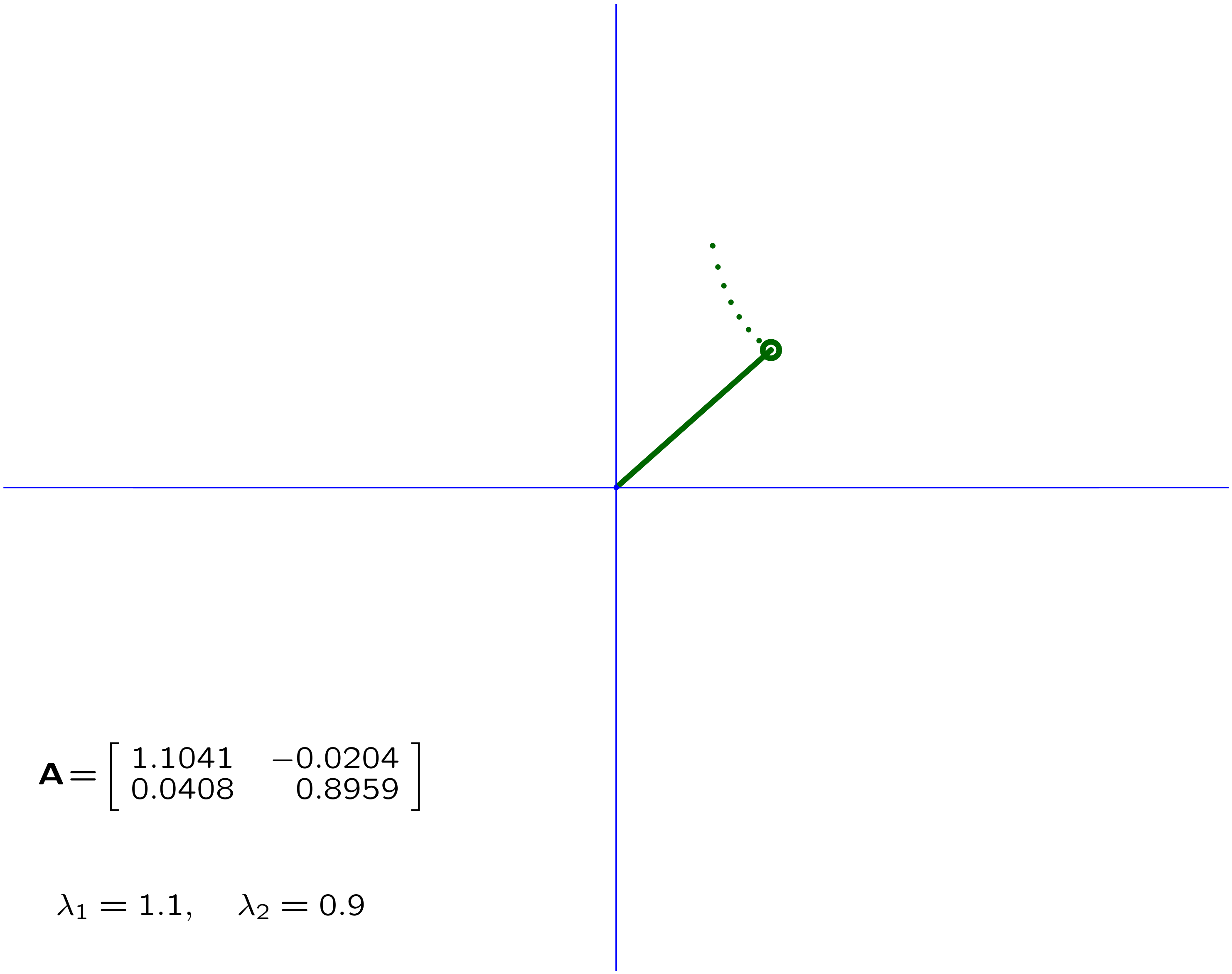


$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1.1041 & -0.0204 \\ 0.0408 & 0.8959 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 1.1, \quad \lambda_2 = 0.9$$

Iteratie in beeld

x_7

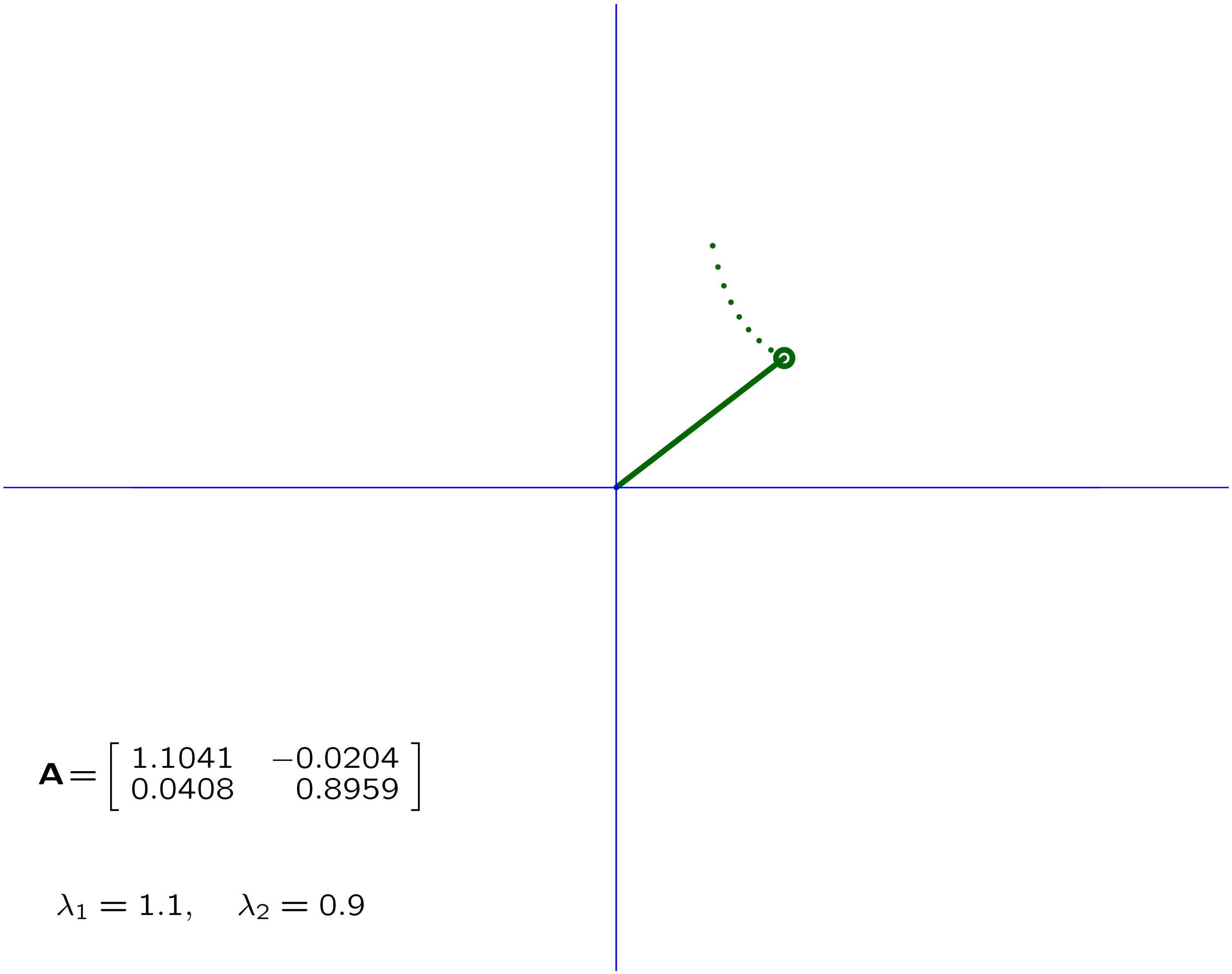


$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1.1041 & -0.0204 \\ 0.0408 & 0.8959 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 1.1, \quad \lambda_2 = 0.9$$

Iteratie in beeld

x_8

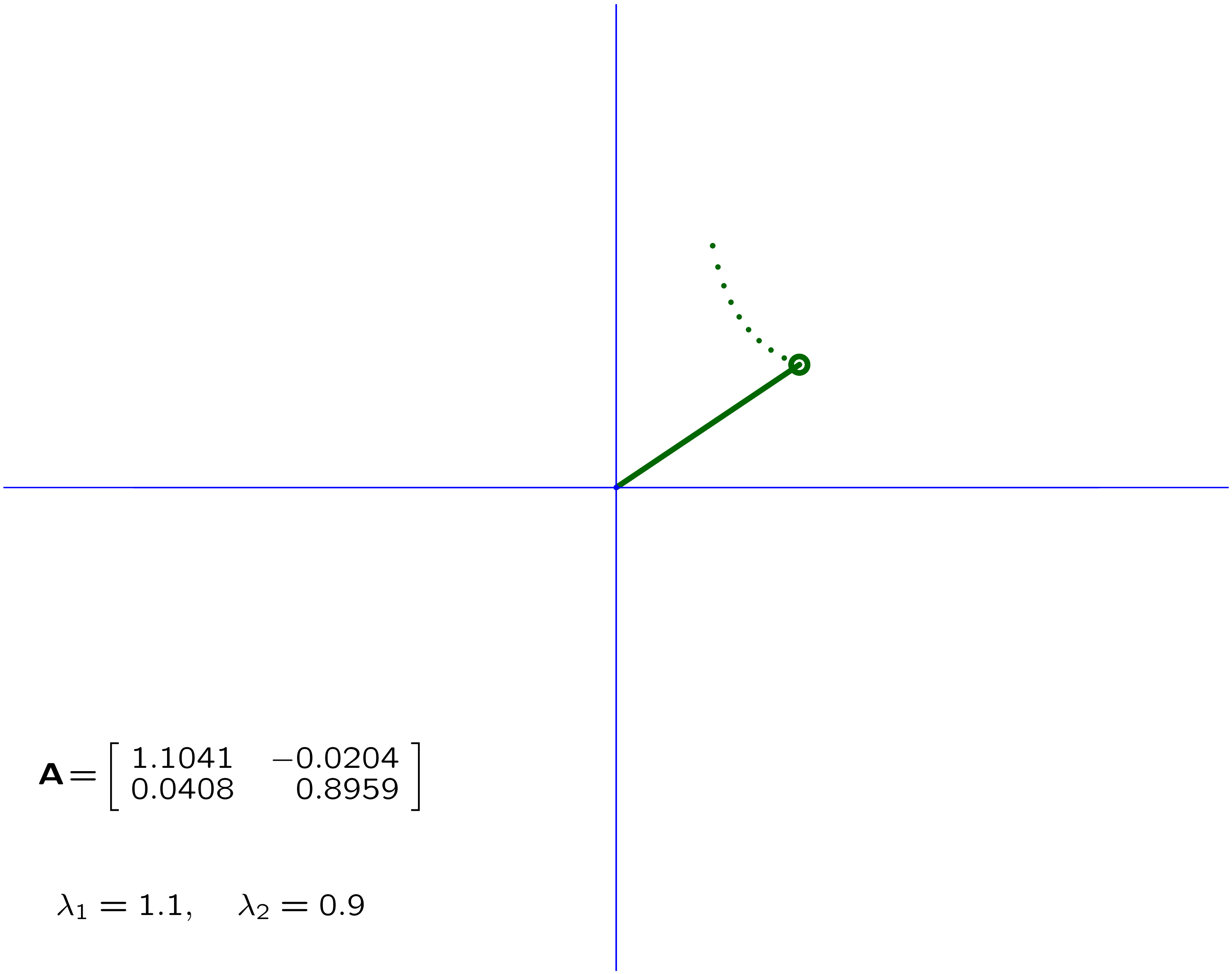


$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1.1041 & -0.0204 \\ 0.0408 & 0.8959 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 1.1, \quad \lambda_2 = 0.9$$

Iteratie in beeld

x_9

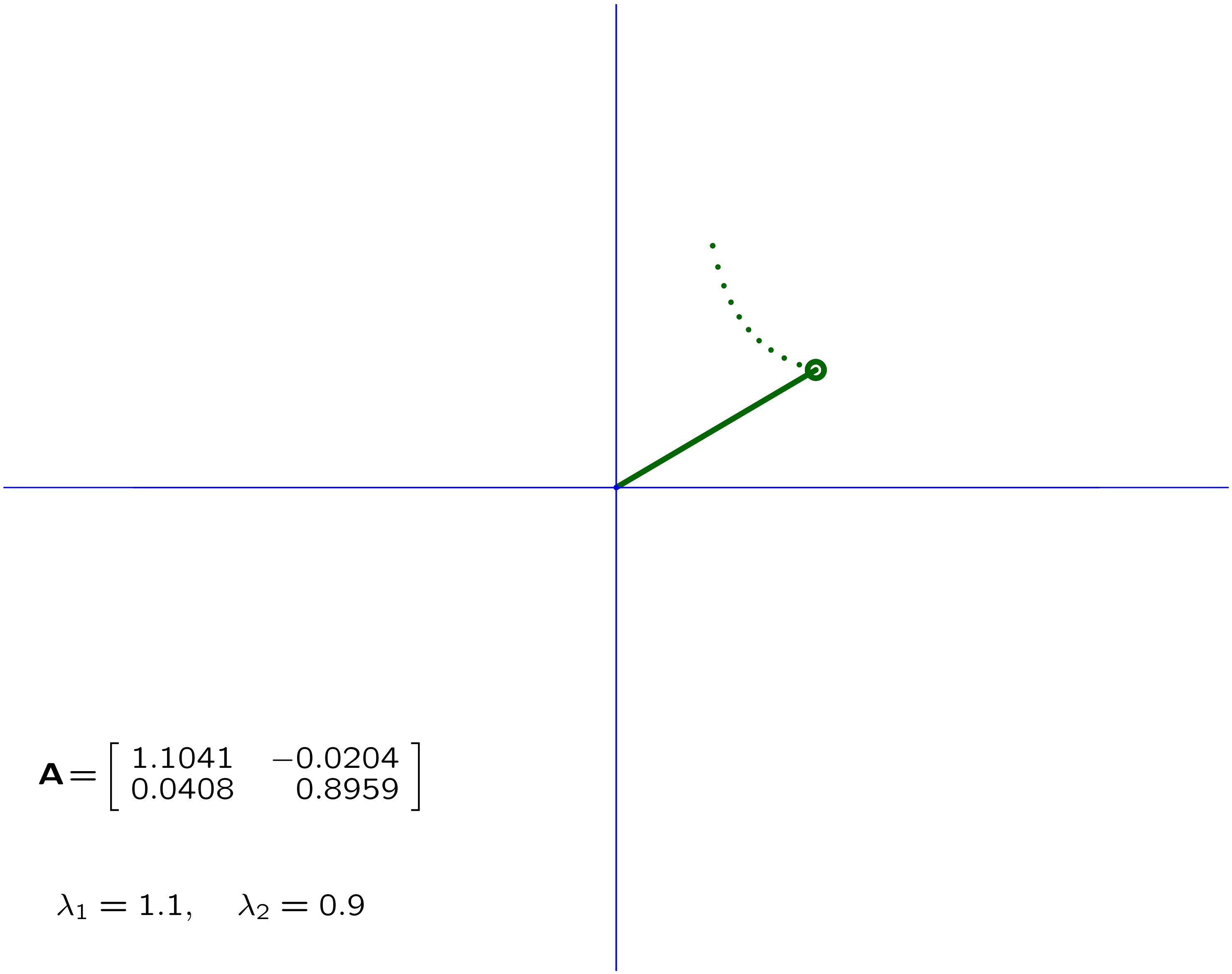


$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1.1041 & -0.0204 \\ 0.0408 & 0.8959 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 1.1, \quad \lambda_2 = 0.9$$

Iteratie in beeld

x_{10}

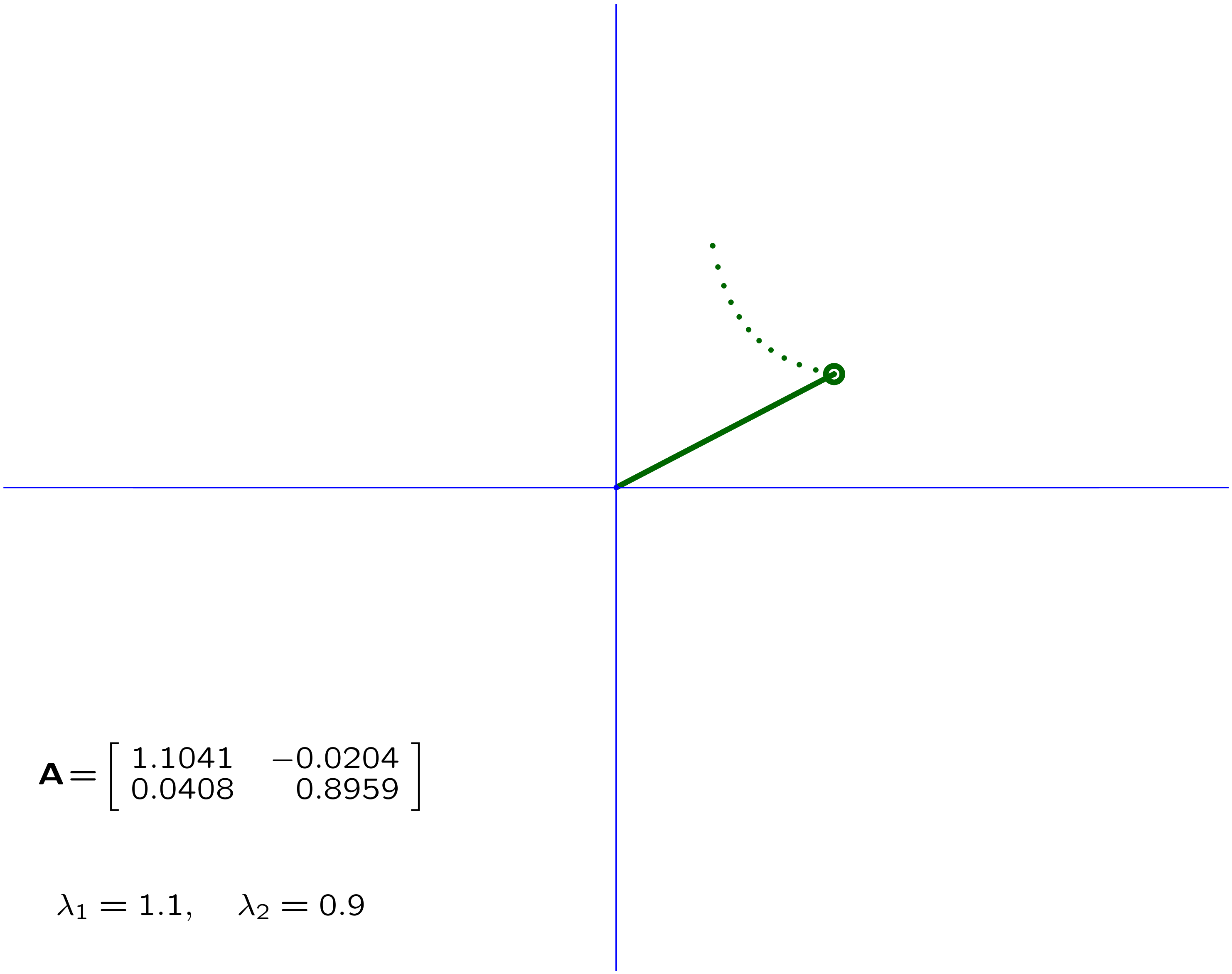


$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1.1041 & -0.0204 \\ 0.0408 & 0.8959 \end{bmatrix}$$

$\lambda_1 = 1.1, \quad \lambda_2 = 0.9$

Iteratie in beeld

x_{11}

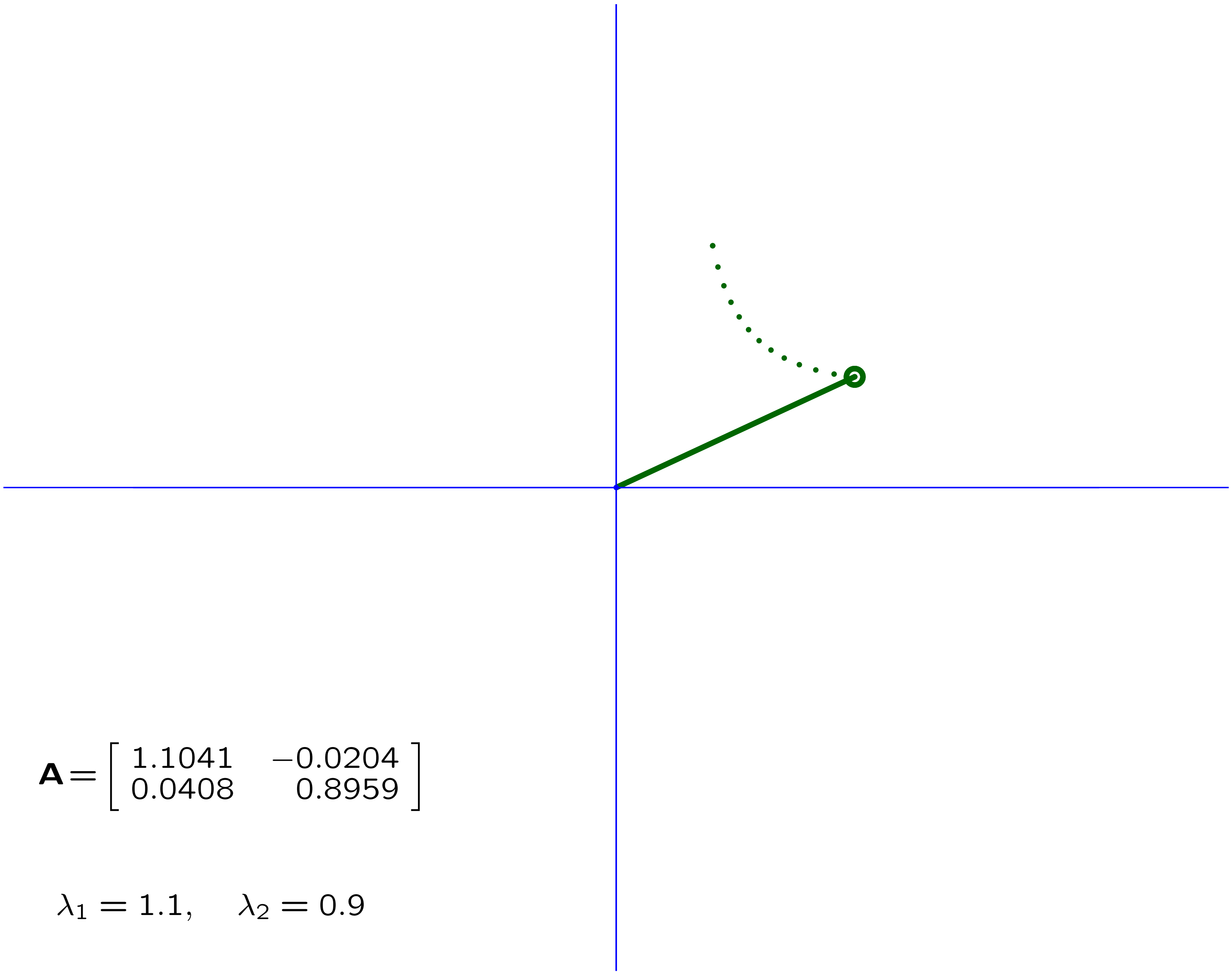


$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1.1041 & -0.0204 \\ 0.0408 & 0.8959 \end{bmatrix}$$

$\lambda_1 = 1.1, \quad \lambda_2 = 0.9$

Iteratie in beeld

x_{12}

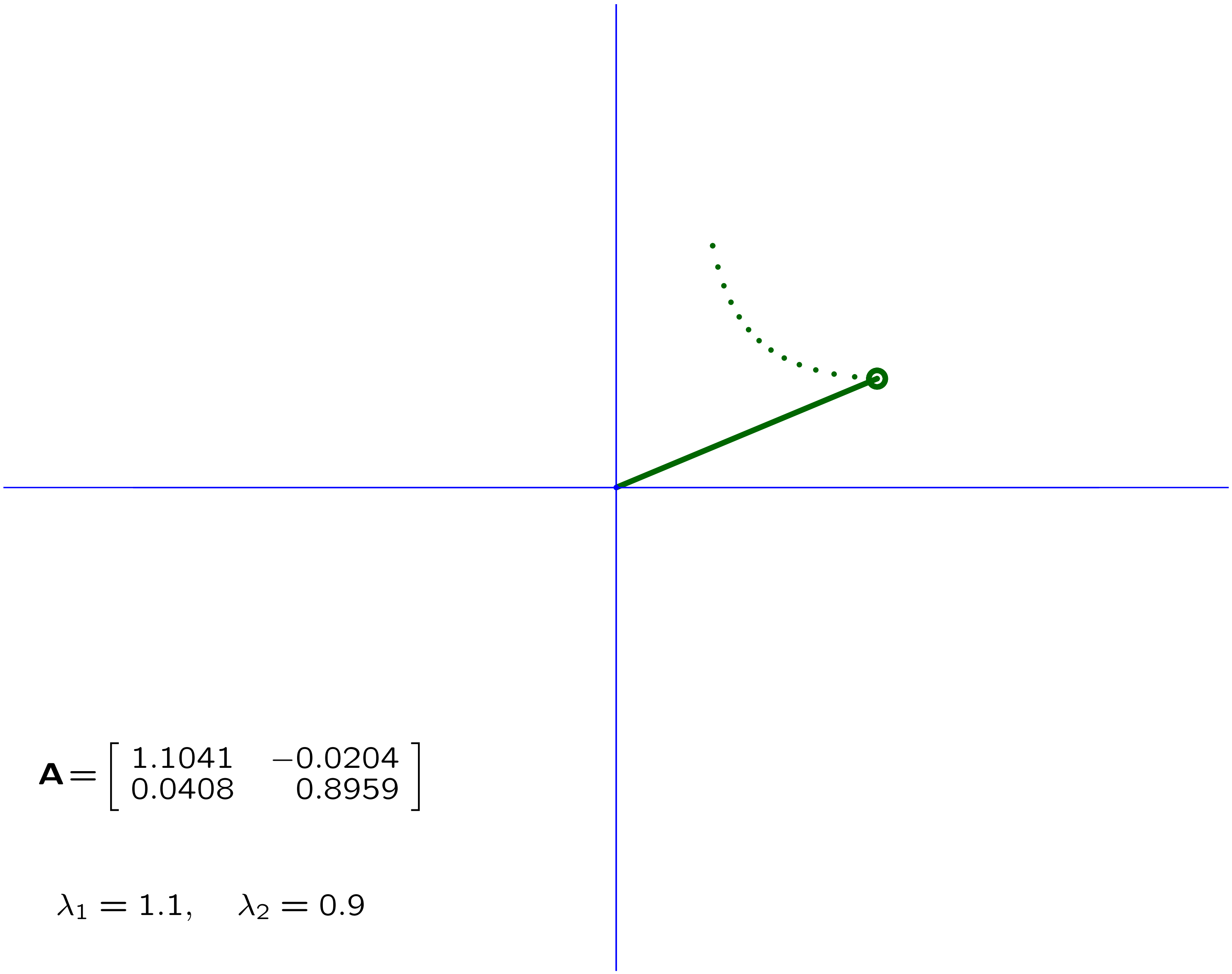


$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1.1041 & -0.0204 \\ 0.0408 & 0.8959 \end{bmatrix}$$

$\lambda_1 = 1.1, \quad \lambda_2 = 0.9$

Iteratie in beeld

x_{13}

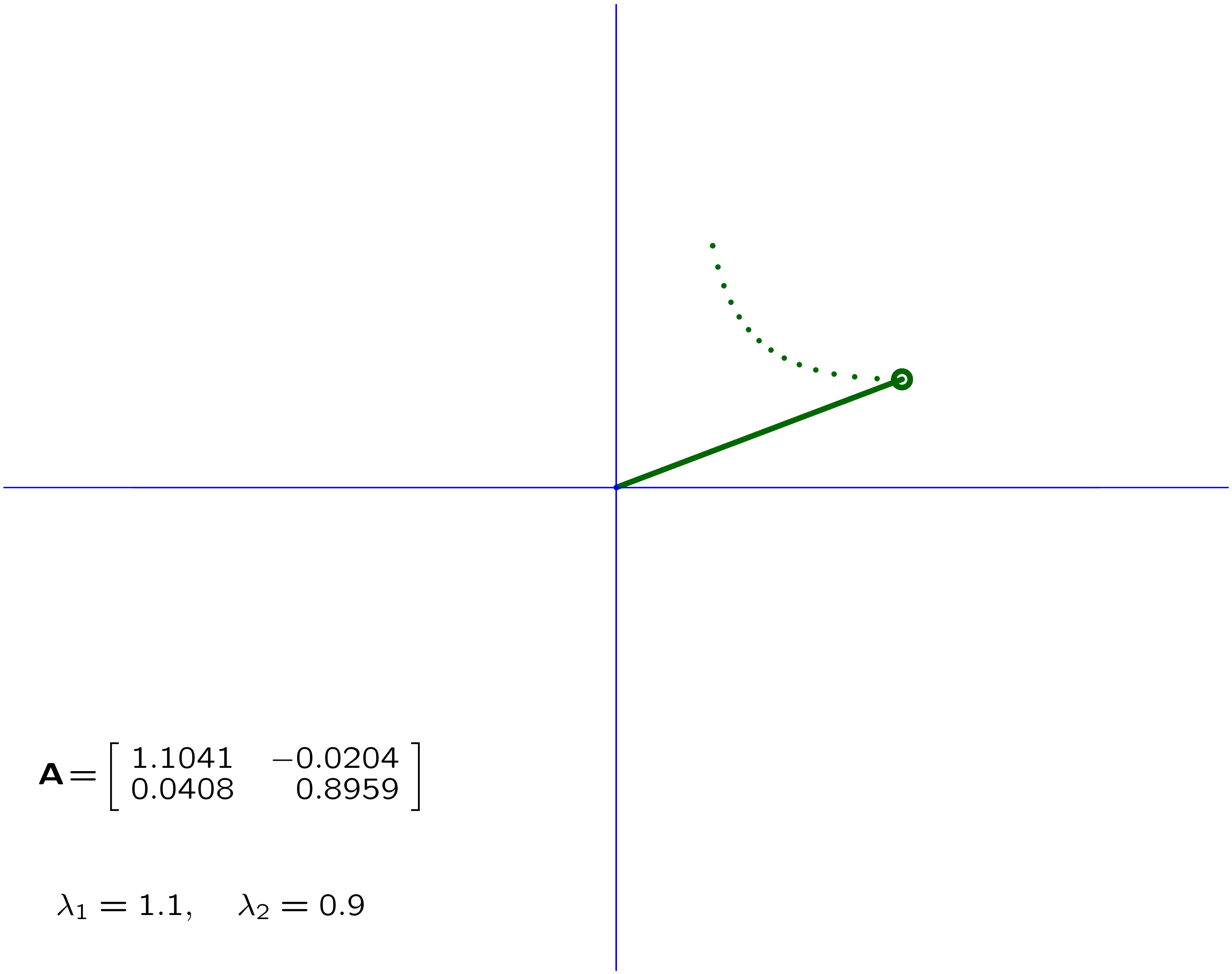


$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1.1041 & -0.0204 \\ 0.0408 & 0.8959 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 1.1, \quad \lambda_2 = 0.9$$

Iteratie in beeld

x_{14}

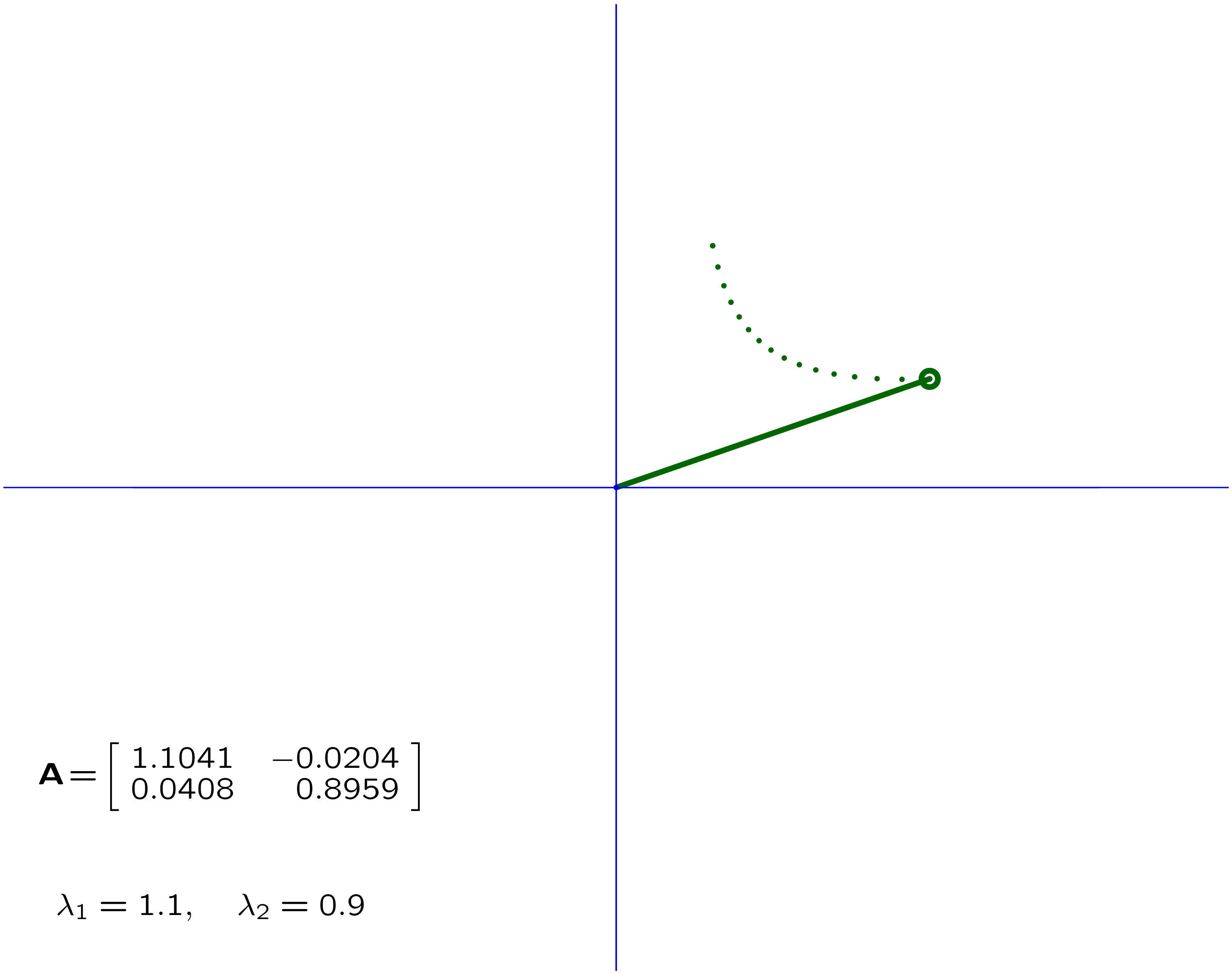


$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1.1041 & -0.0204 \\ 0.0408 & 0.8959 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 1.1, \quad \lambda_2 = 0.9$$

Iteratie in beeld

x_{15}

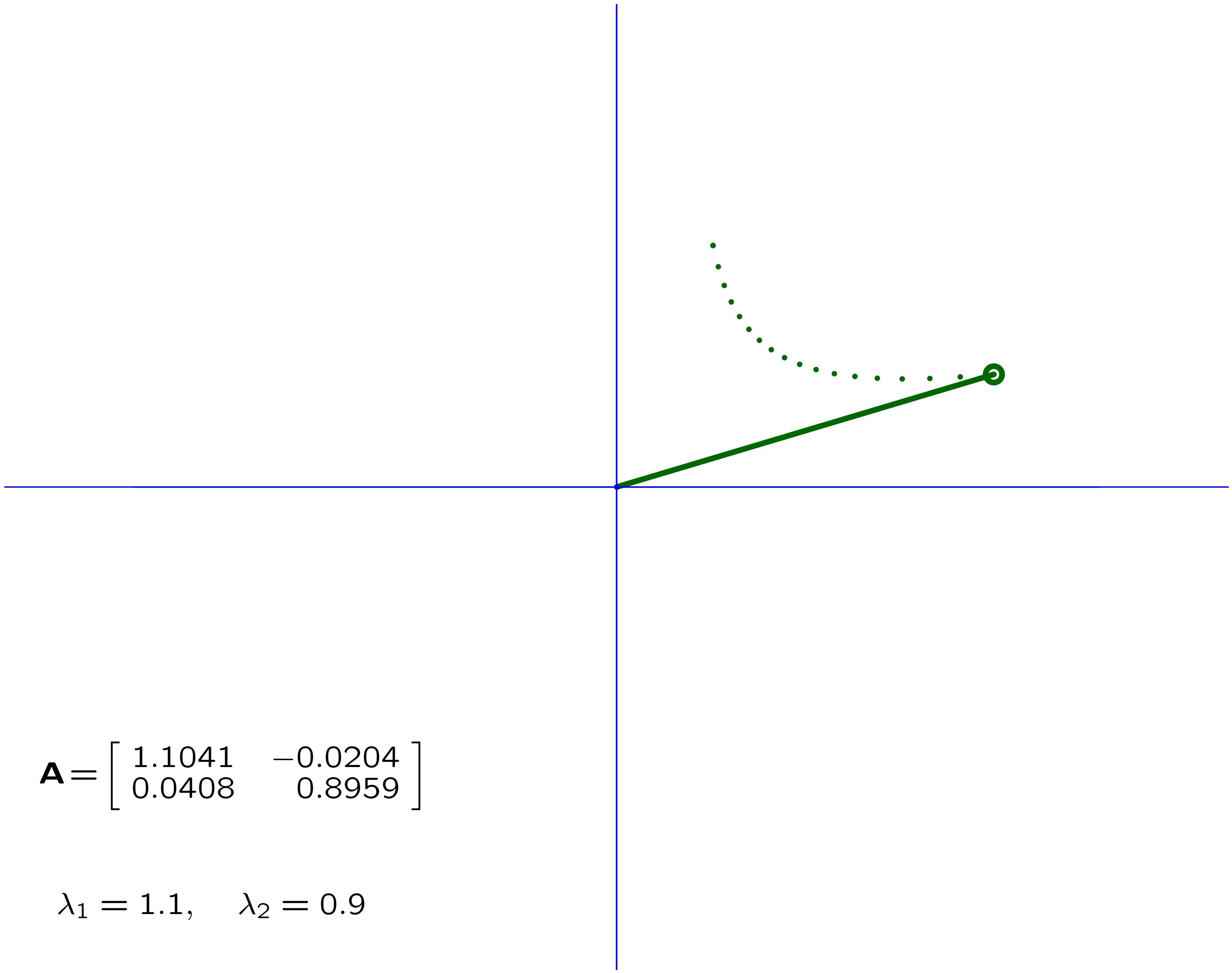


$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1.1041 & -0.0204 \\ 0.0408 & 0.8959 \end{bmatrix}$$

$\lambda_1 = 1.1, \quad \lambda_2 = 0.9$

Iteratie in beeld

x_{17}

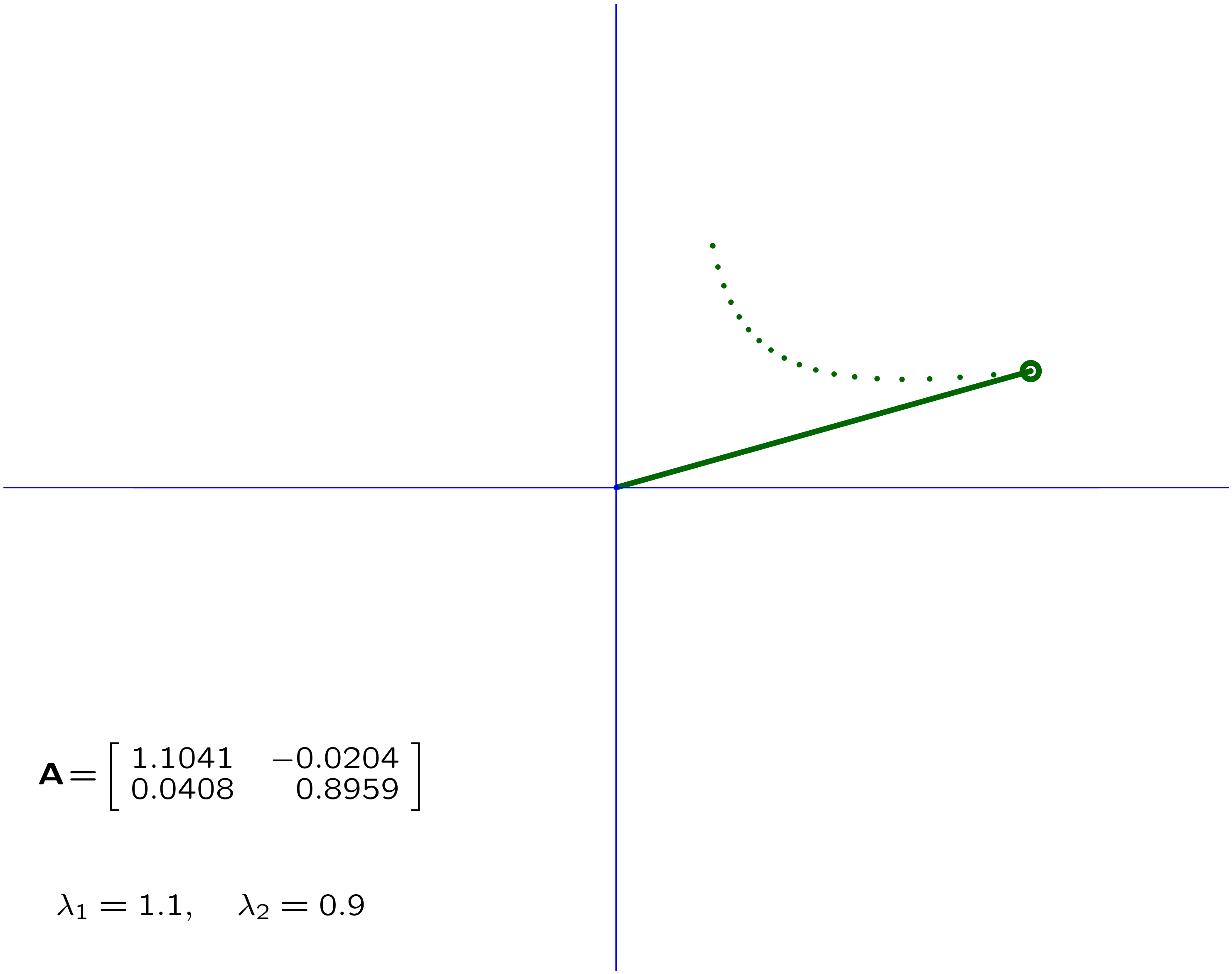


$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1.1041 & -0.0204 \\ 0.0408 & 0.8959 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 1.1, \quad \lambda_2 = 0.9$$

Iteratie in beeld

x_{18}

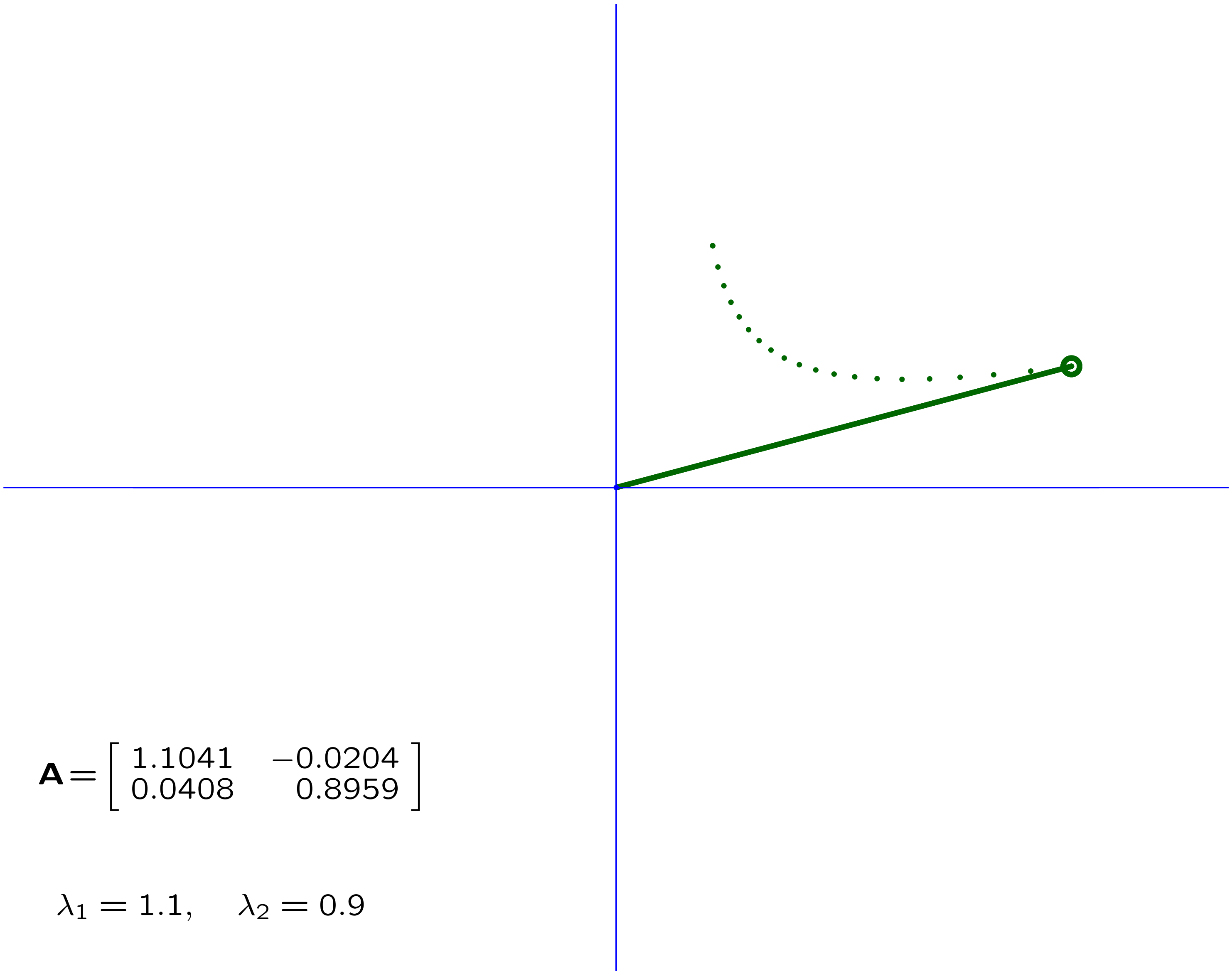


$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1.1041 & -0.0204 \\ 0.0408 & 0.8959 \end{bmatrix}$$

$\lambda_1 = 1.1, \quad \lambda_2 = 0.9$

Iteratie in beeld

x_{19}

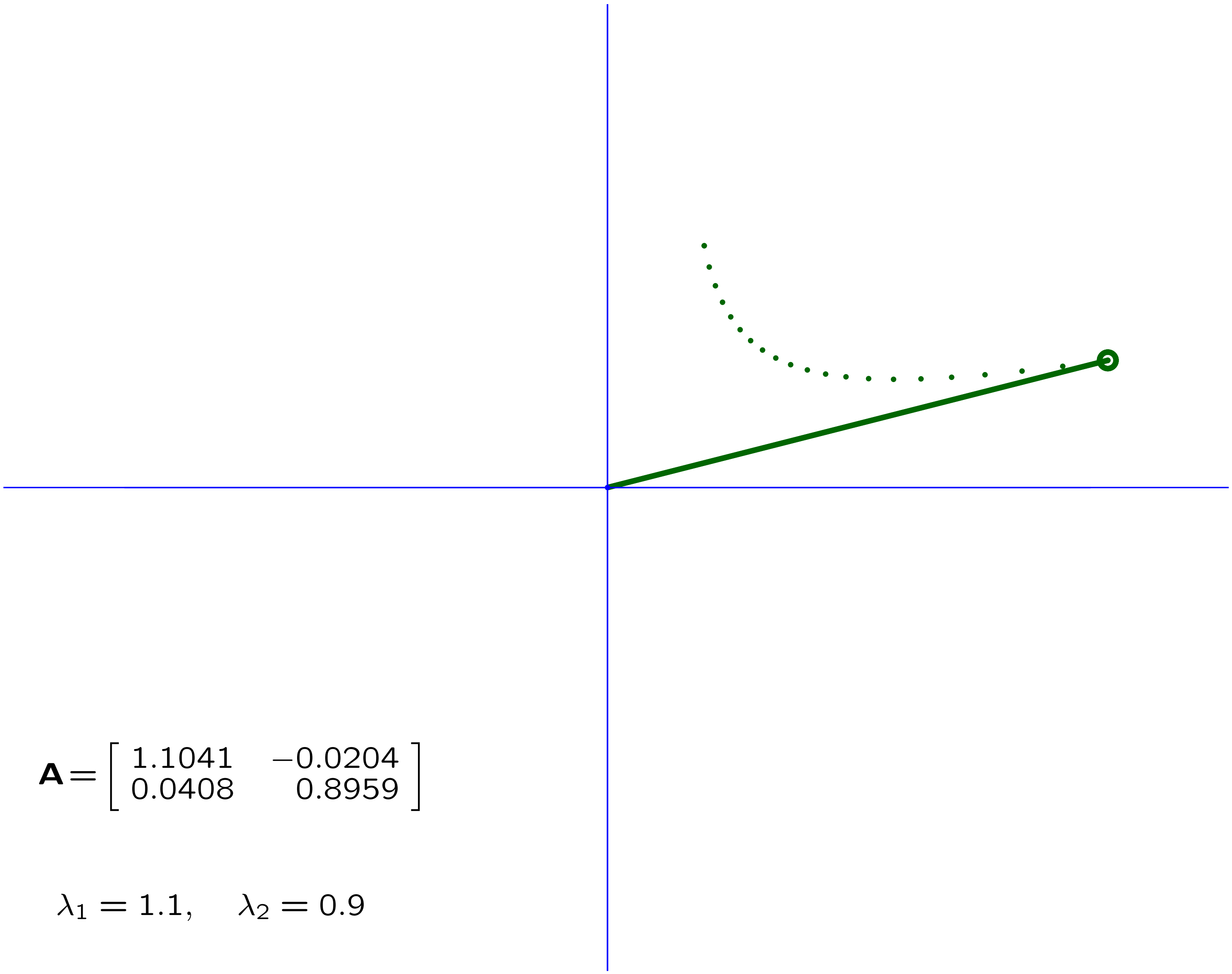


$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1.1041 & -0.0204 \\ 0.0408 & 0.8959 \end{bmatrix}$$

$\lambda_1 = 1.1, \quad \lambda_2 = 0.9$

Iteratie in beeld

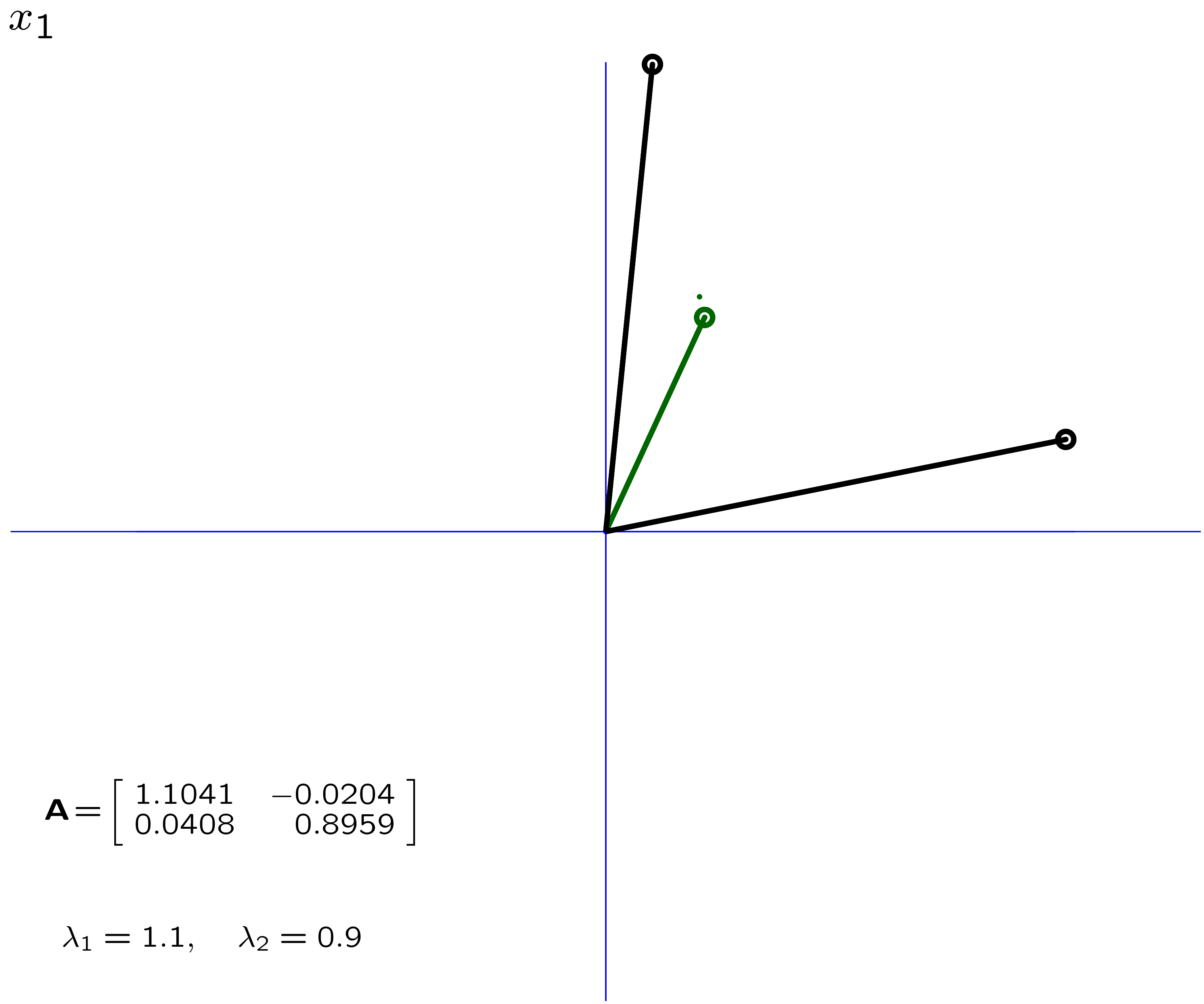
x_{20}



$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1.1041 & -0.0204 \\ 0.0408 & 0.8959 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 1.1, \quad \lambda_2 = 0.9$$

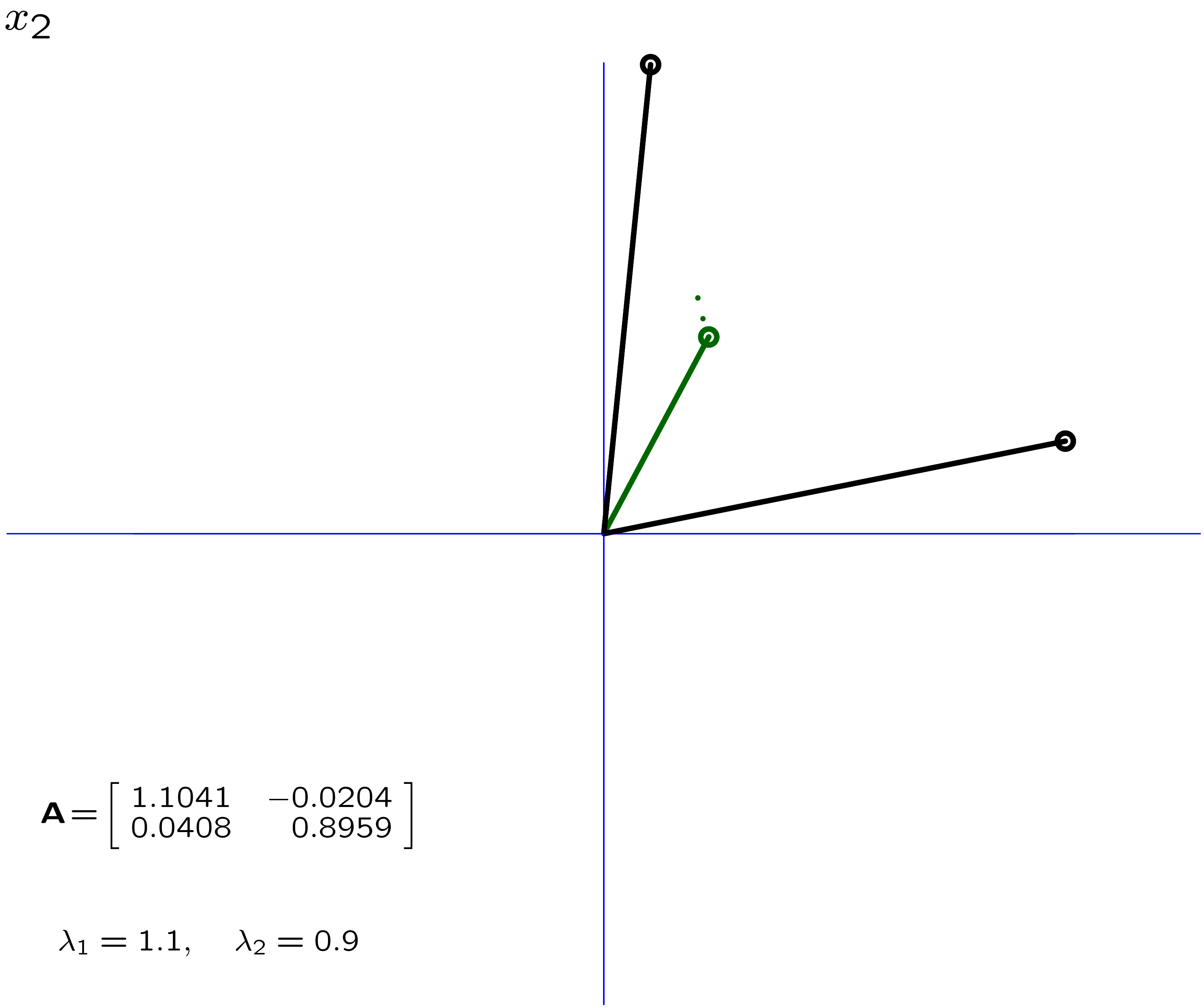
Iteratie in beeld



$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1.1041 & -0.0204 \\ 0.0408 & 0.8959 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 1.1, \quad \lambda_2 = 0.9$$

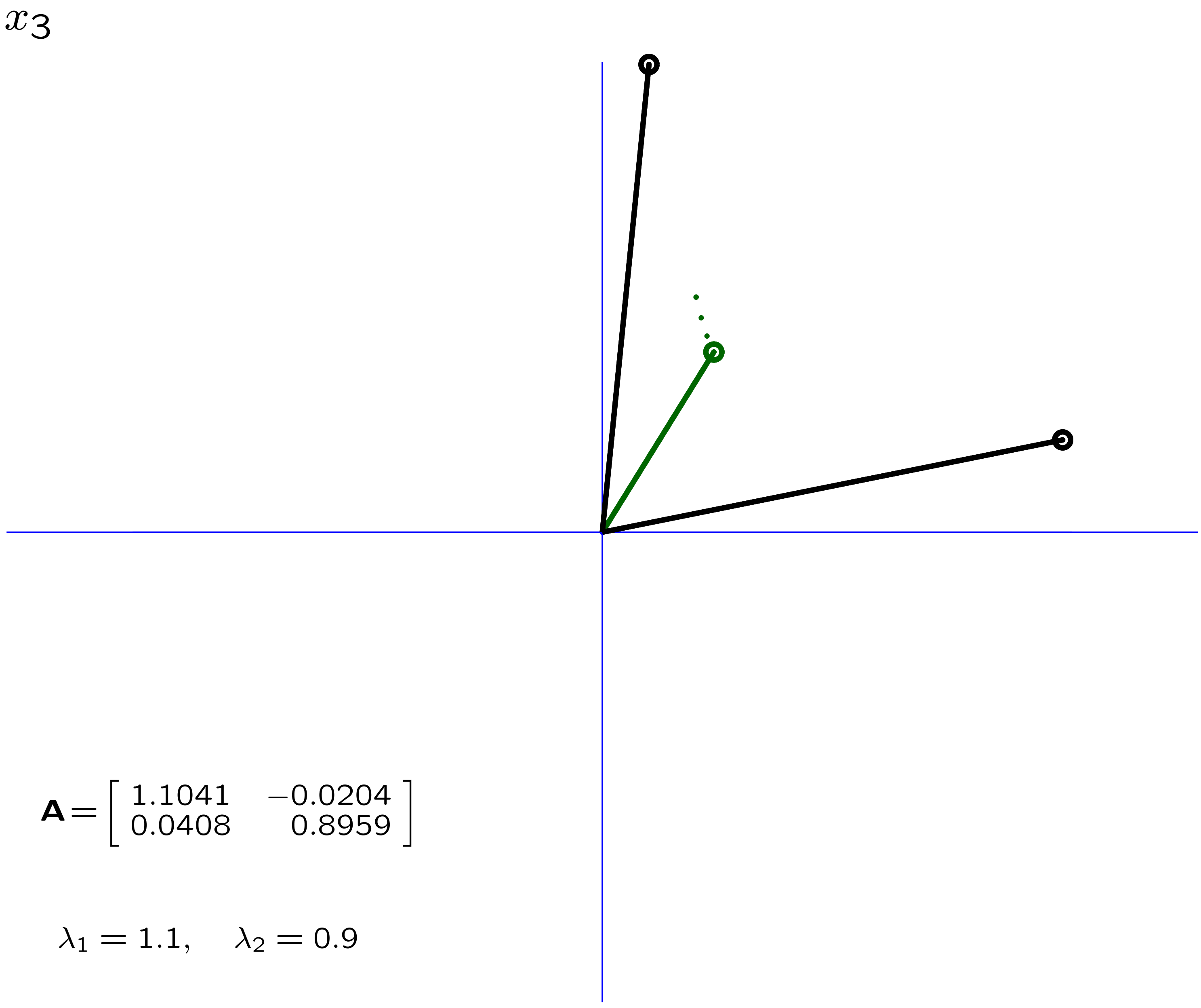
Iteratie in beeld



$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1.1041 & -0.0204 \\ 0.0408 & 0.8959 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 1.1, \quad \lambda_2 = 0.9$$

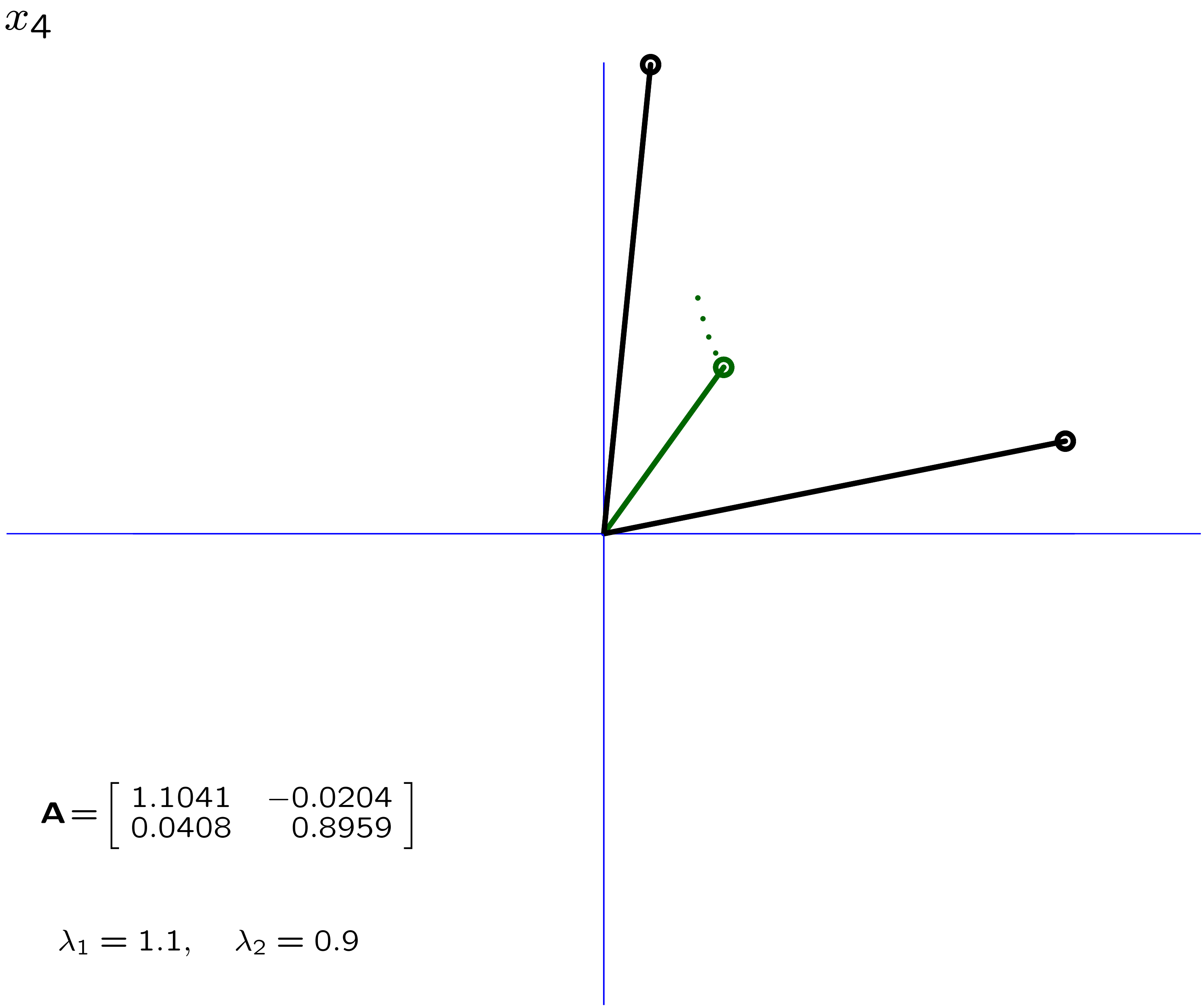
Iteratie in beeld



$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1.1041 & -0.0204 \\ 0.0408 & 0.8959 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 1.1, \quad \lambda_2 = 0.9$$

Iteratie in beeld

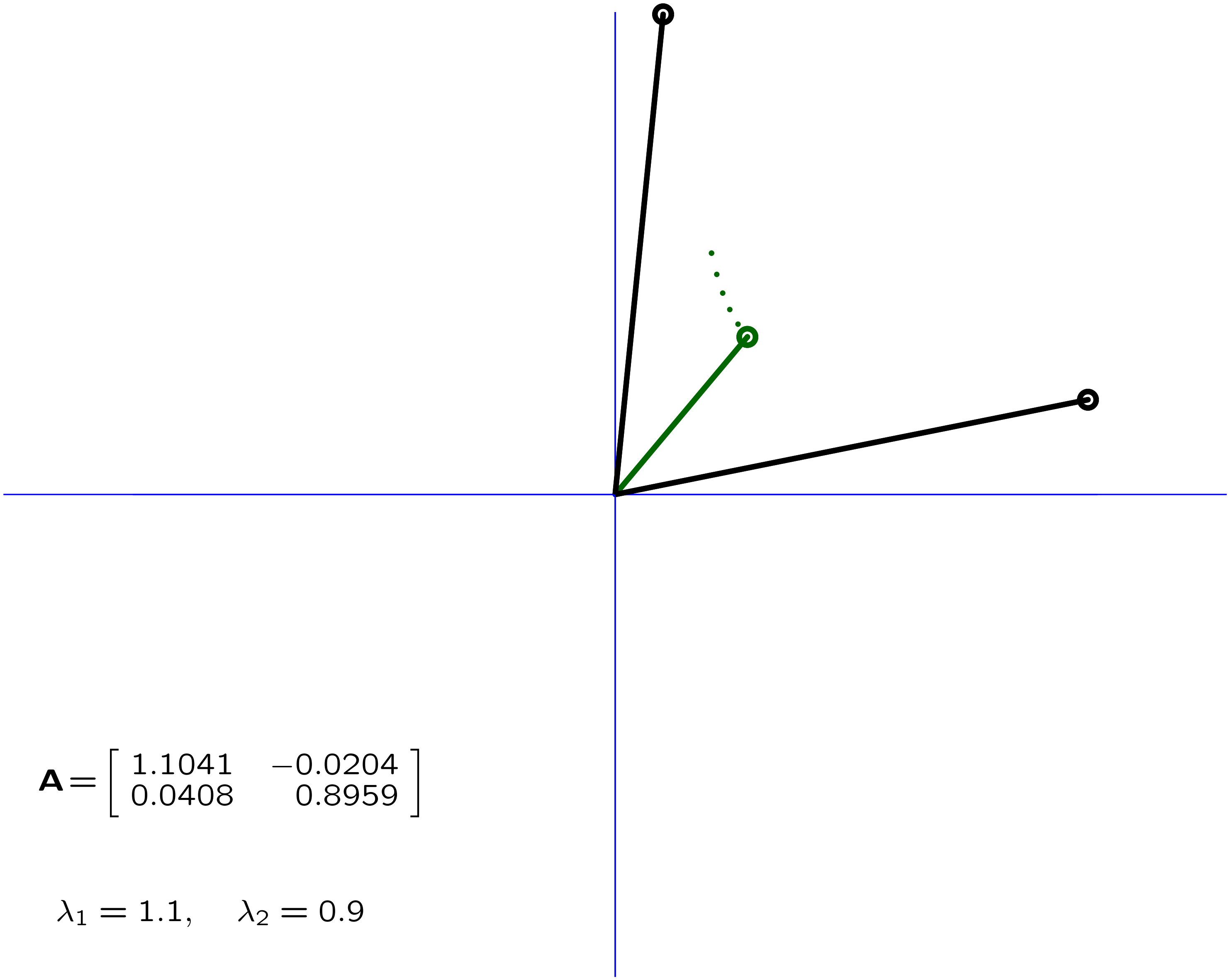


$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1.1041 & -0.0204 \\ 0.0408 & 0.8959 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 1.1, \quad \lambda_2 = 0.9$$

Iteratie in beeld

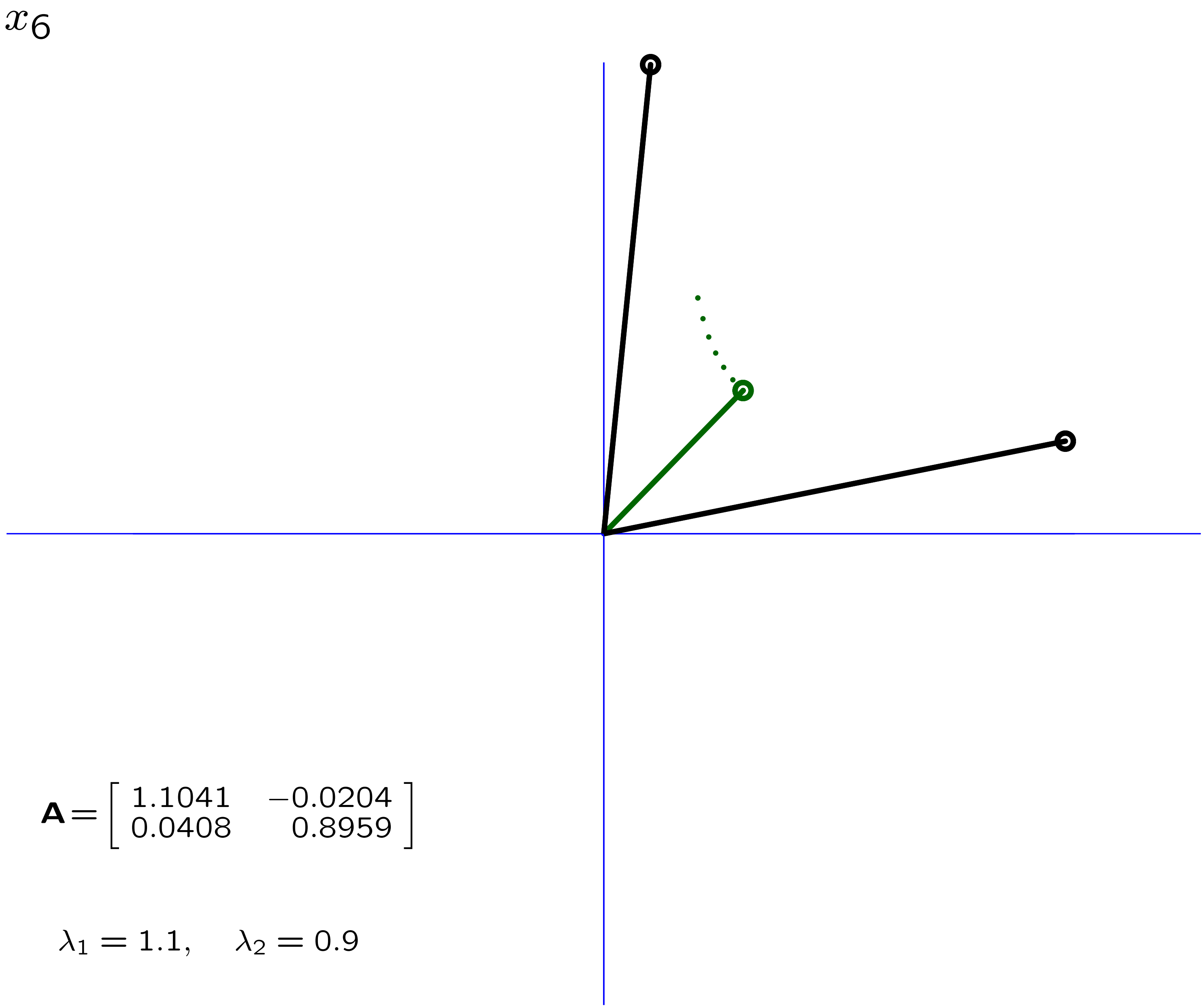
x_5



$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1.1041 & -0.0204 \\ 0.0408 & 0.8959 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 1.1, \quad \lambda_2 = 0.9$$

Iteratie in beeld

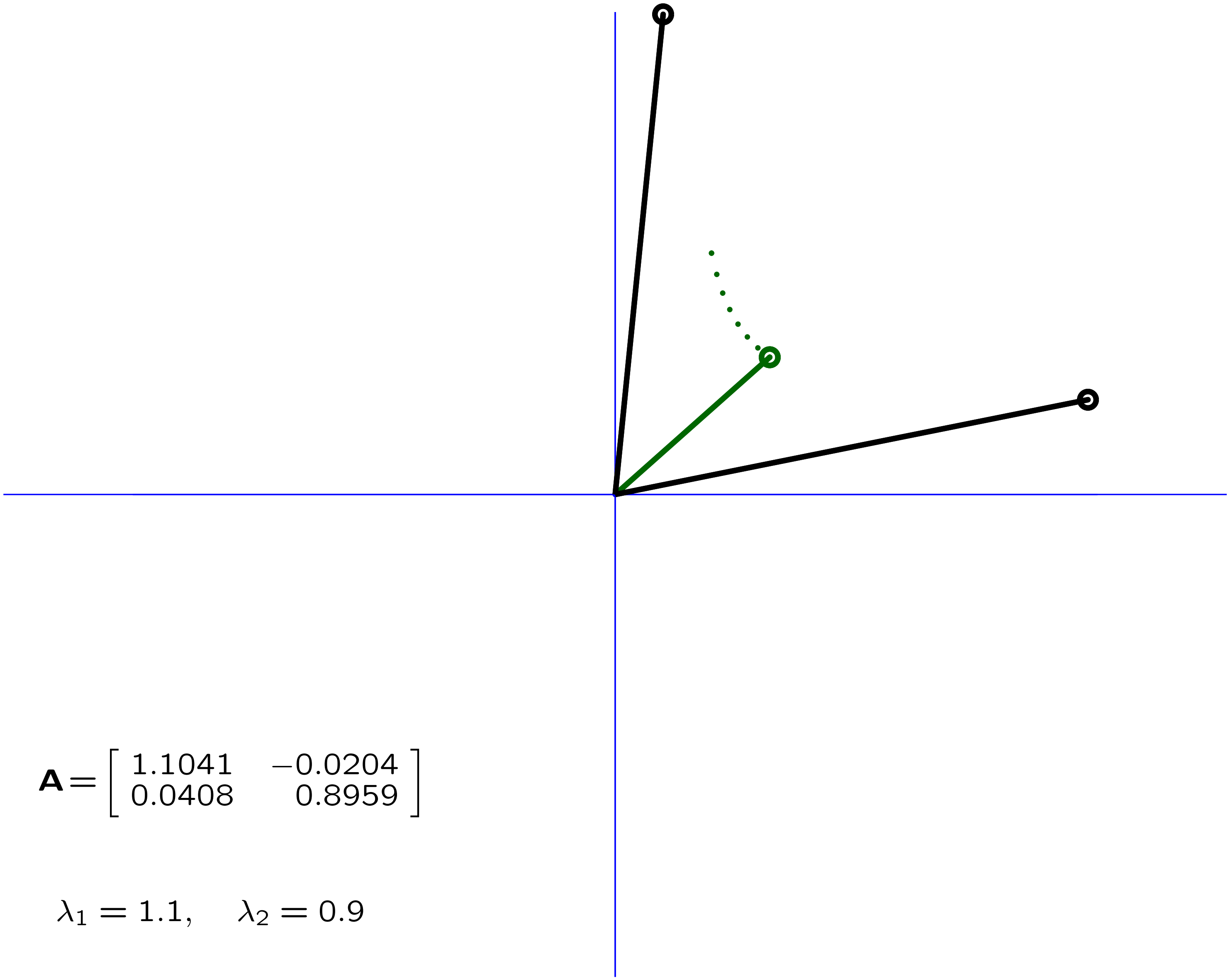


$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1.1041 & -0.0204 \\ 0.0408 & 0.8959 \end{bmatrix}$$

$\lambda_1 = 1.1, \quad \lambda_2 = 0.9$

Iteratie in beeld

x_7

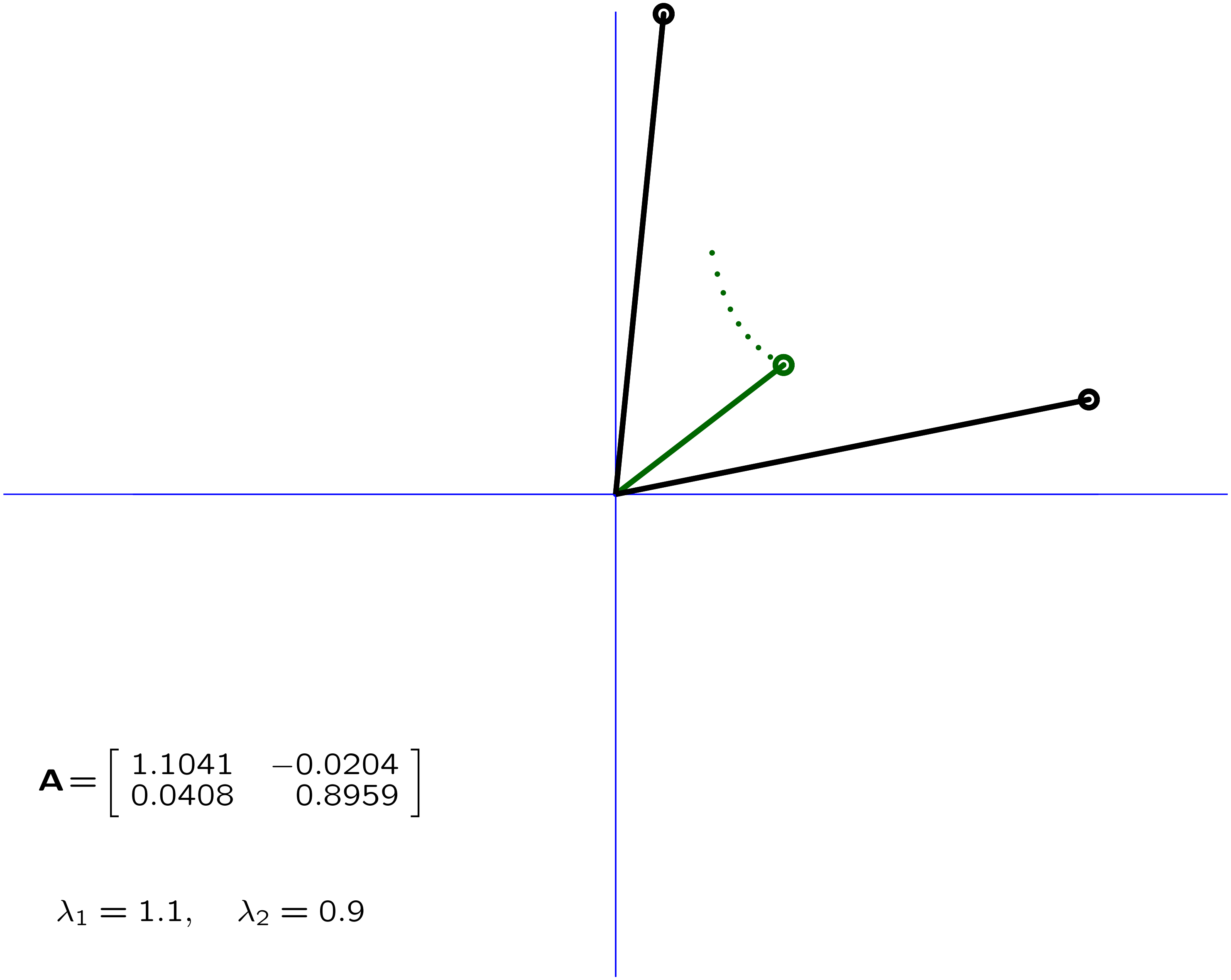


$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1.1041 & -0.0204 \\ 0.0408 & 0.8959 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 1.1, \quad \lambda_2 = 0.9$$

Iteratie in beeld

x_8

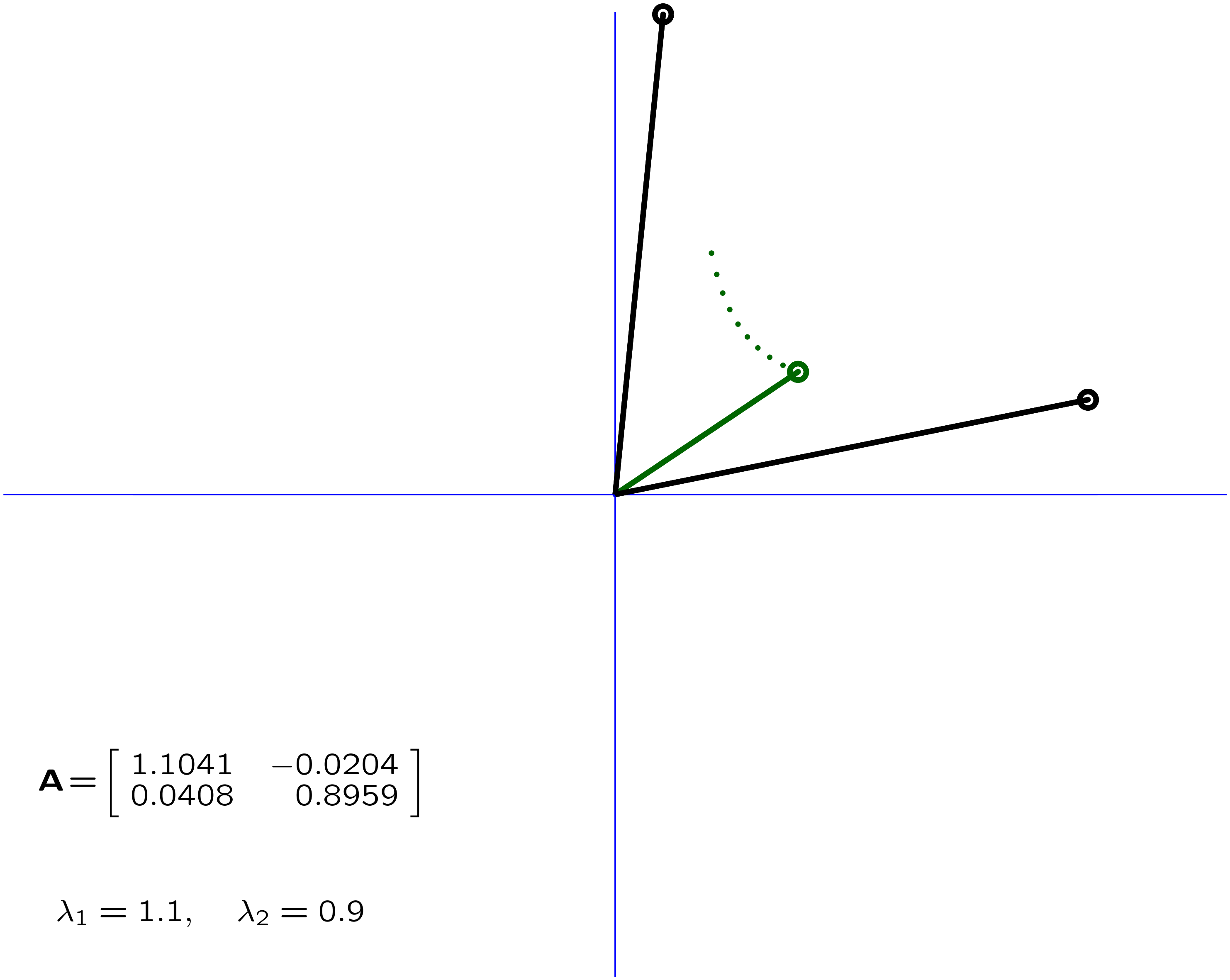


$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1.1041 & -0.0204 \\ 0.0408 & 0.8959 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 1.1, \quad \lambda_2 = 0.9$$

Iteratie in beeld

x_9

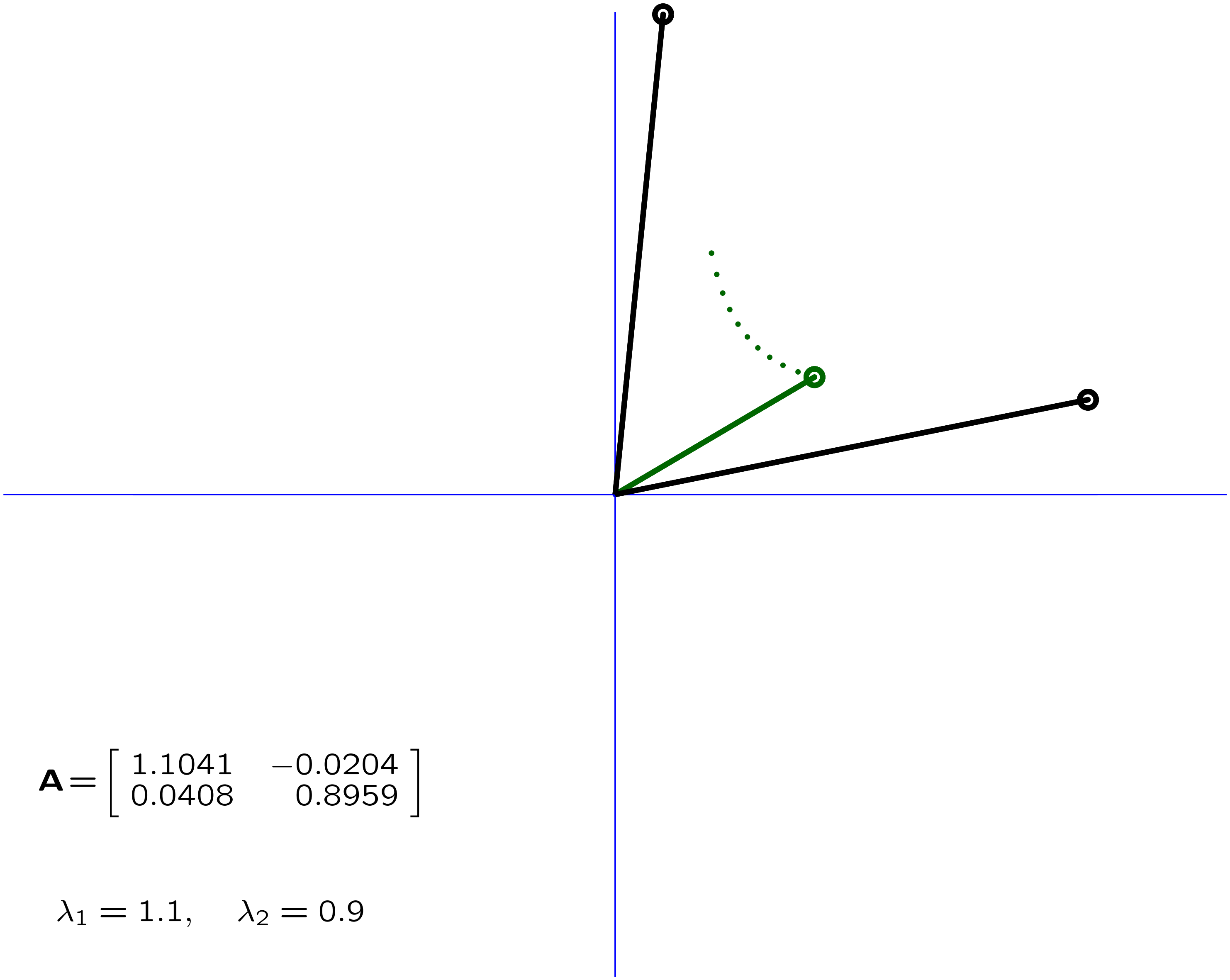


$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1.1041 & -0.0204 \\ 0.0408 & 0.8959 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 1.1, \quad \lambda_2 = 0.9$$

Iteratie in beeld

x_{10}

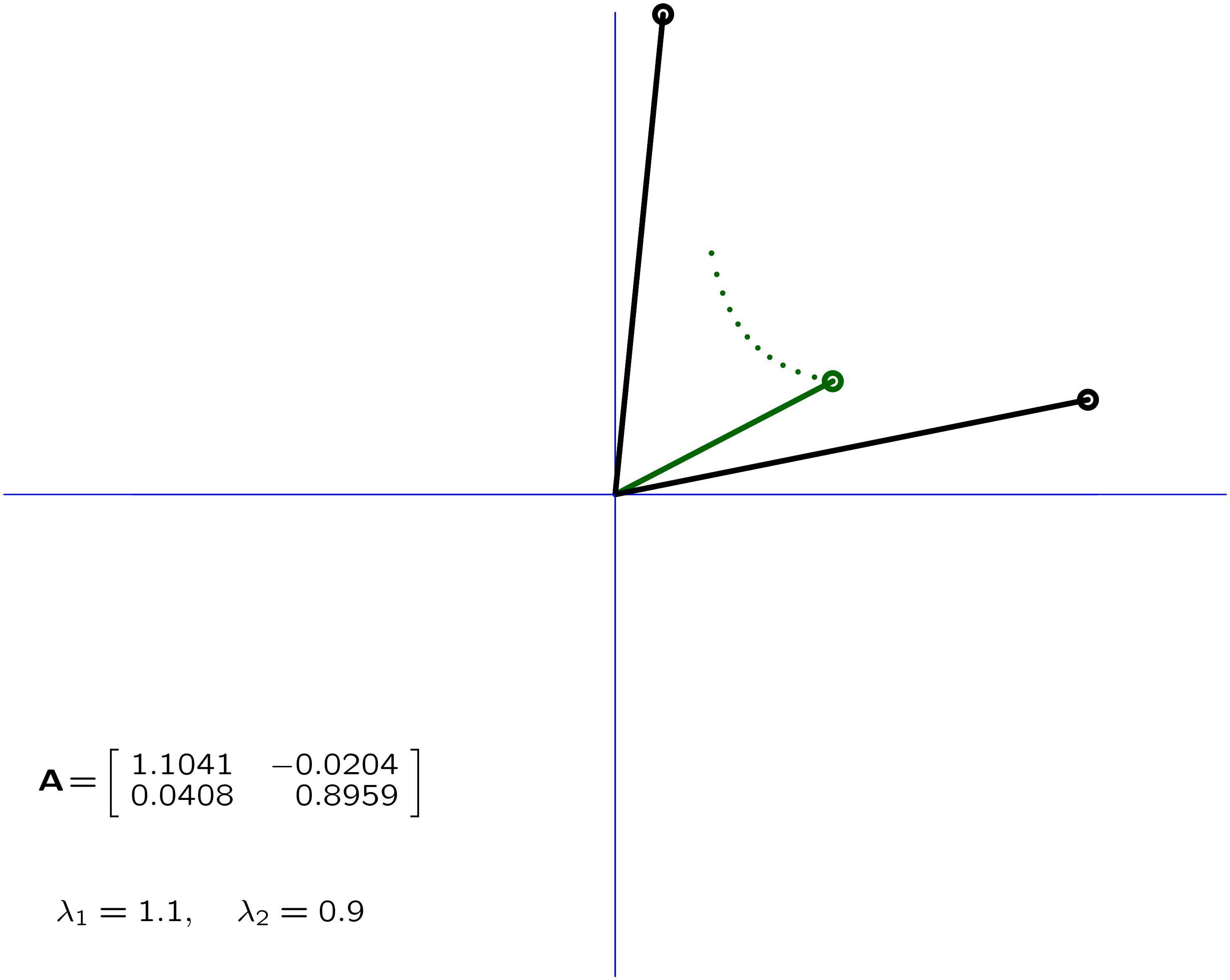


$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1.1041 & -0.0204 \\ 0.0408 & 0.8959 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 1.1, \quad \lambda_2 = 0.9$$

Iteratie in beeld

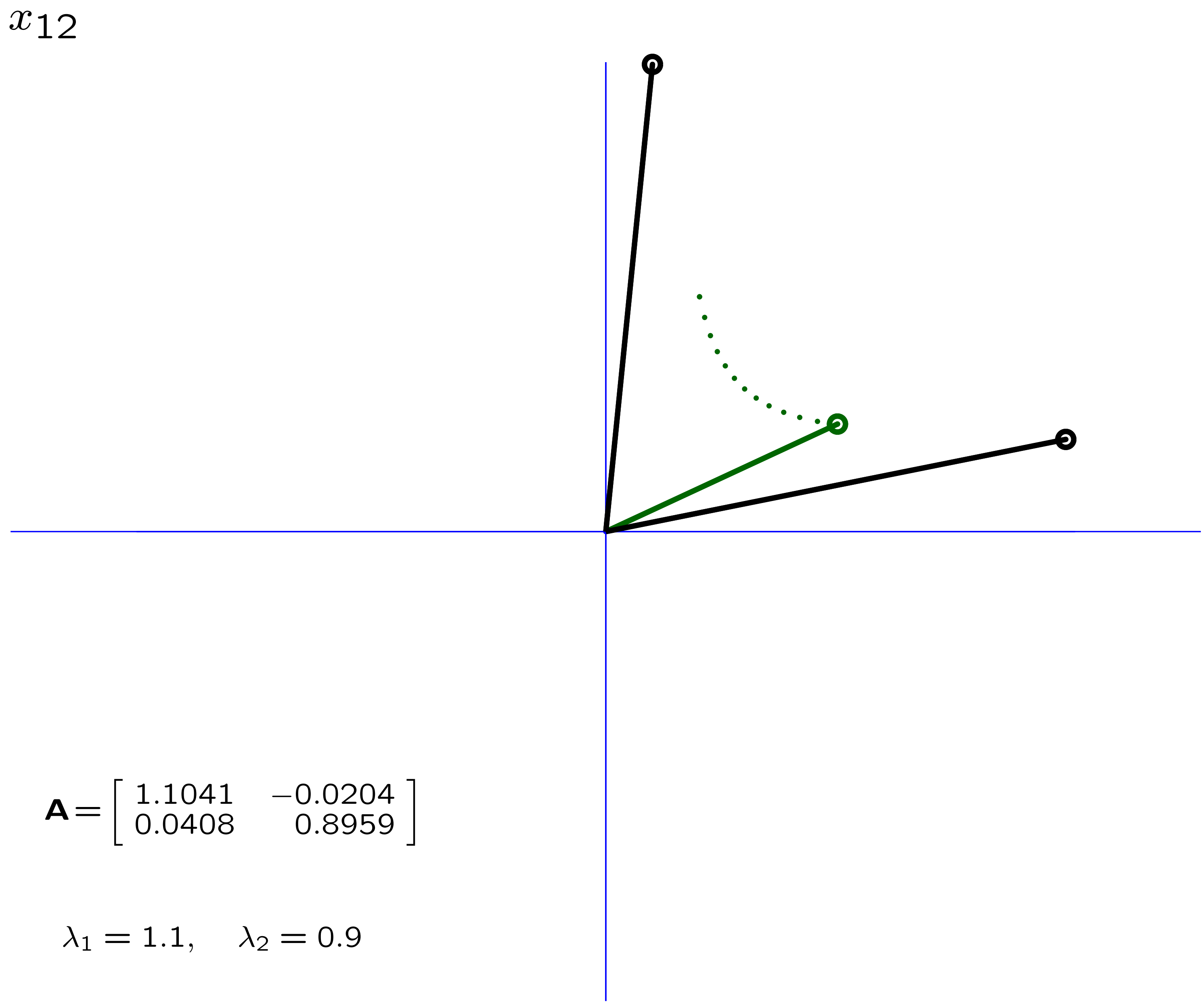
x_{11}



$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1.1041 & -0.0204 \\ 0.0408 & 0.8959 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 1.1, \quad \lambda_2 = 0.9$$

Iteratie in beeld

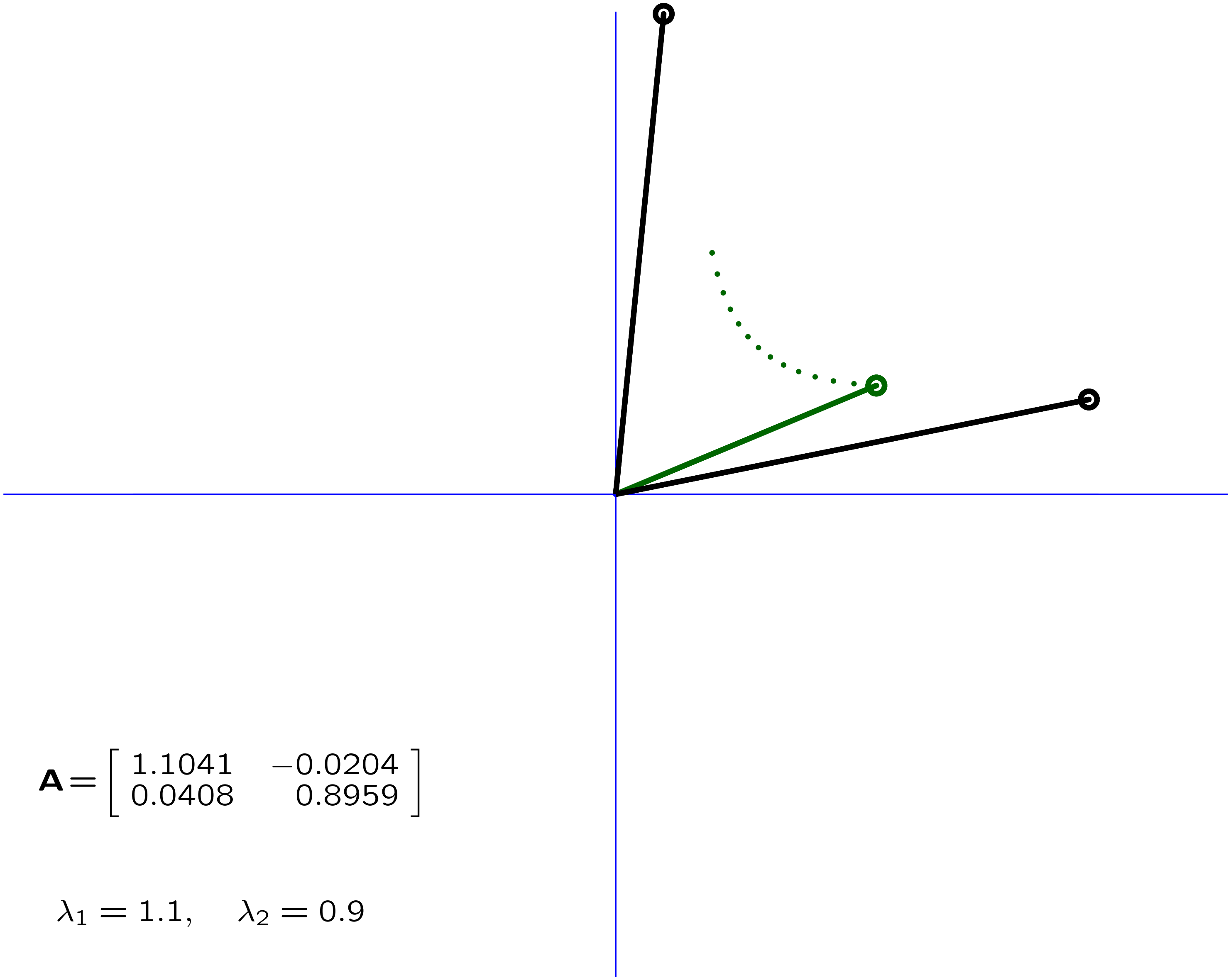


$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1.1041 & -0.0204 \\ 0.0408 & 0.8959 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 1.1, \quad \lambda_2 = 0.9$$

Iteratie in beeld

x_{13}

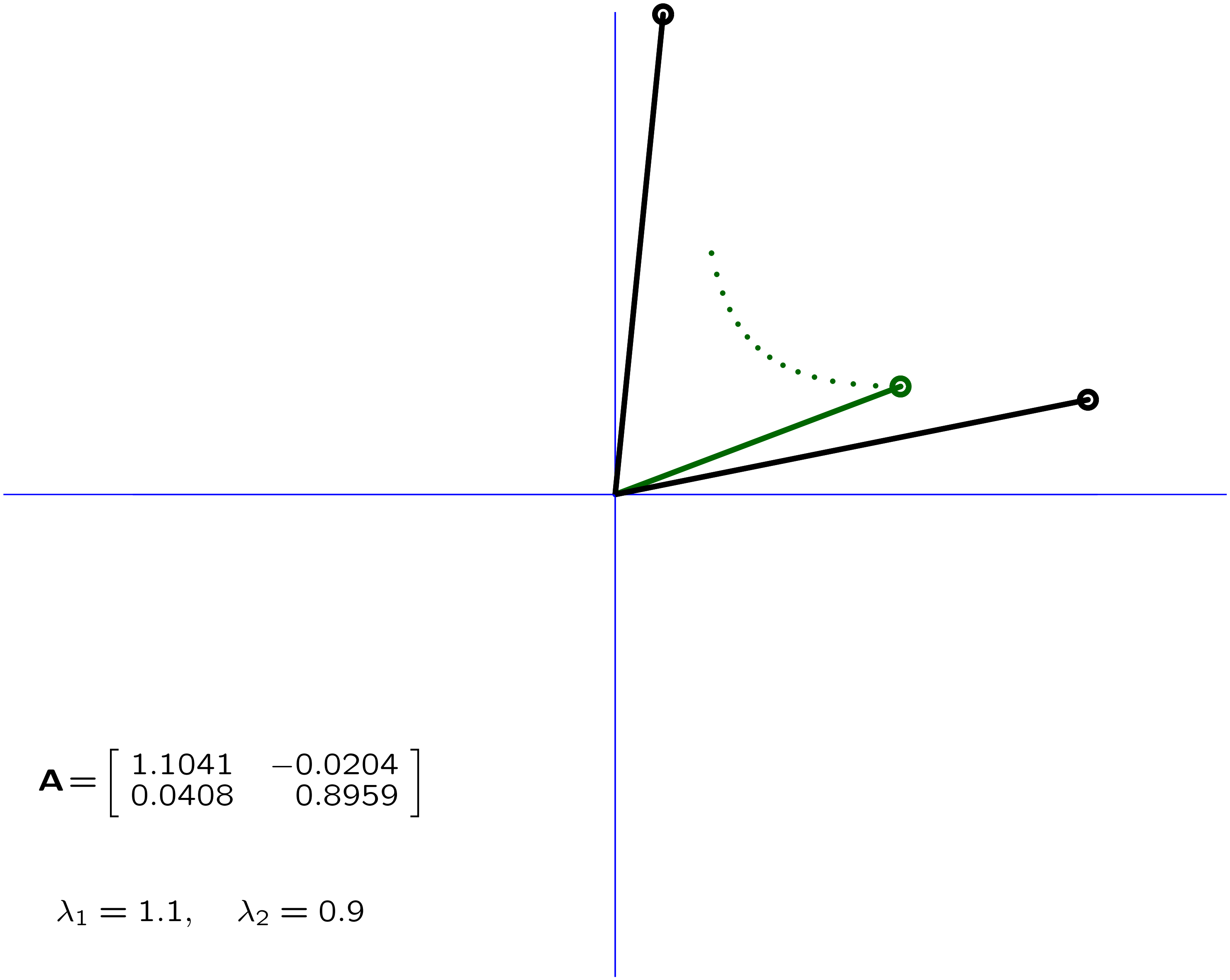


$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1.1041 & -0.0204 \\ 0.0408 & 0.8959 \end{bmatrix}$$

$\lambda_1 = 1.1, \quad \lambda_2 = 0.9$

Iteratie in beeld

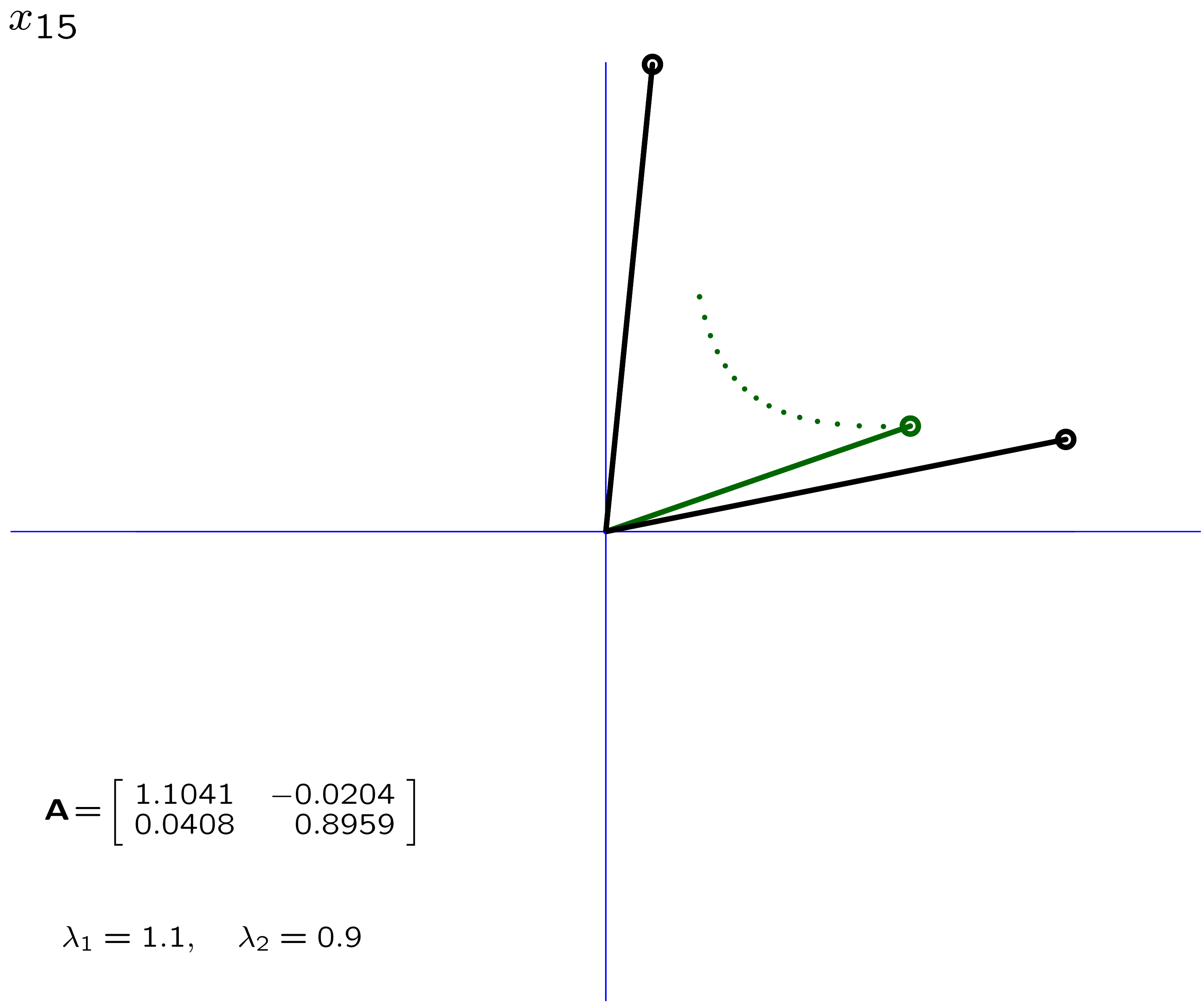
x_{14}



$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1.1041 & -0.0204 \\ 0.0408 & 0.8959 \end{bmatrix}$$

$\lambda_1 = 1.1, \quad \lambda_2 = 0.9$

Iteratie in beeld

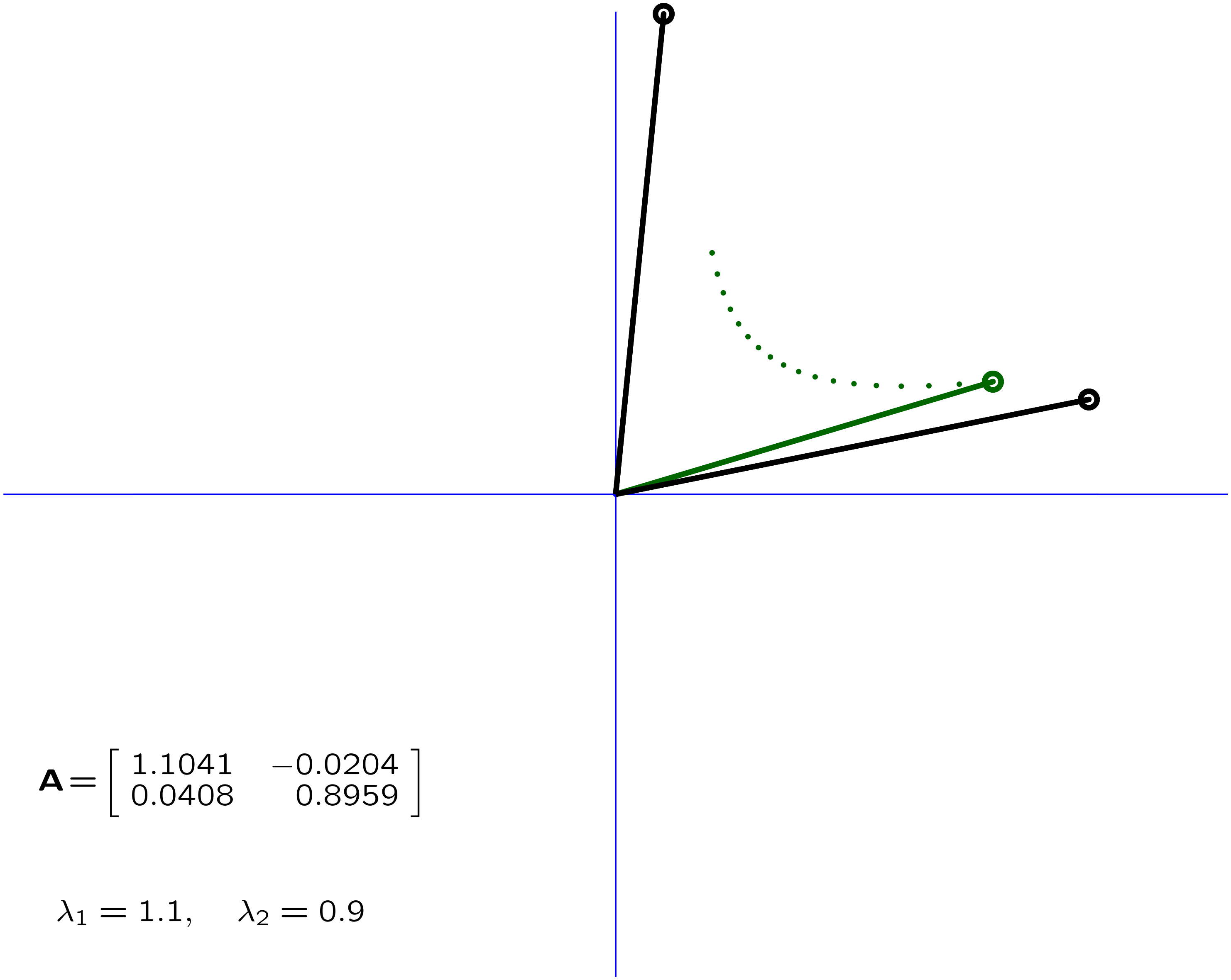


$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1.1041 & -0.0204 \\ 0.0408 & 0.8959 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 1.1, \quad \lambda_2 = 0.9$$

Iteratie in beeld

x_{17}

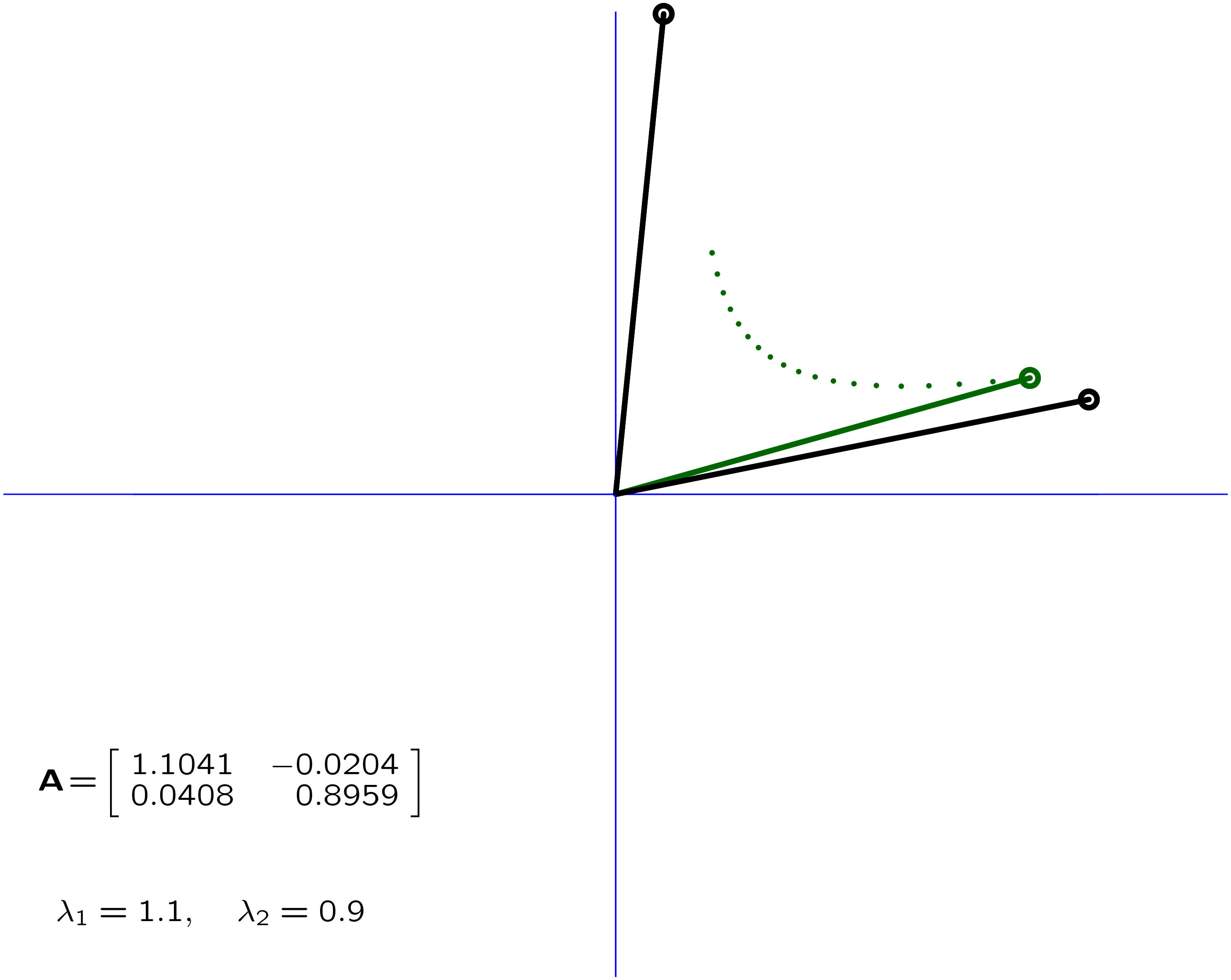


$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1.1041 & -0.0204 \\ 0.0408 & 0.8959 \end{bmatrix}$$

$\lambda_1 = 1.1, \quad \lambda_2 = 0.9$

Iteratie in beeld

x_{18}

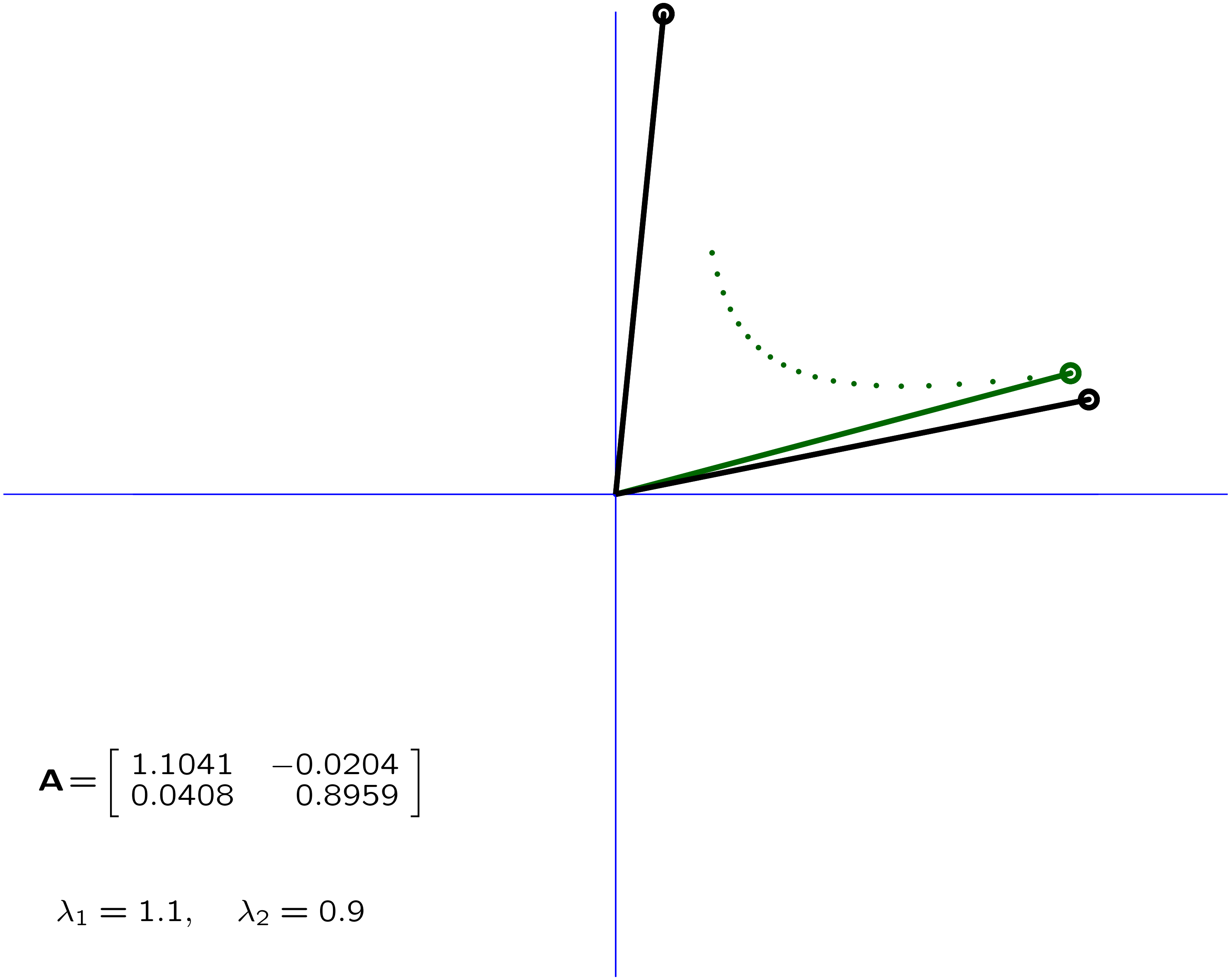


$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1.1041 & -0.0204 \\ 0.0408 & 0.8959 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 1.1, \quad \lambda_2 = 0.9$$

Iteratie in beeld

x_{19}

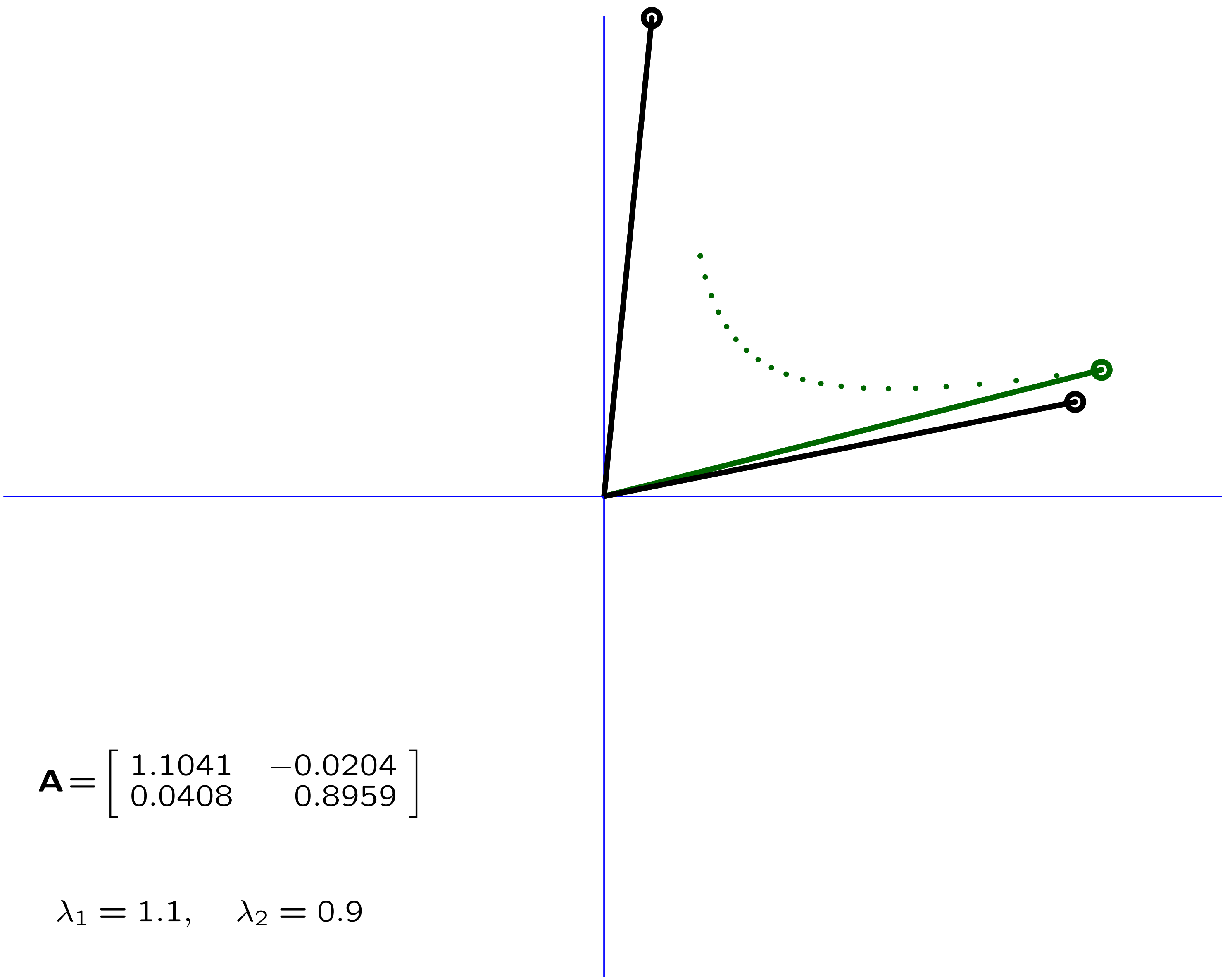


$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1.1041 & -0.0204 \\ 0.0408 & 0.8959 \end{bmatrix}$$

$\lambda_1 = 1.1, \quad \lambda_2 = 0.9$

Iteratie in beeld

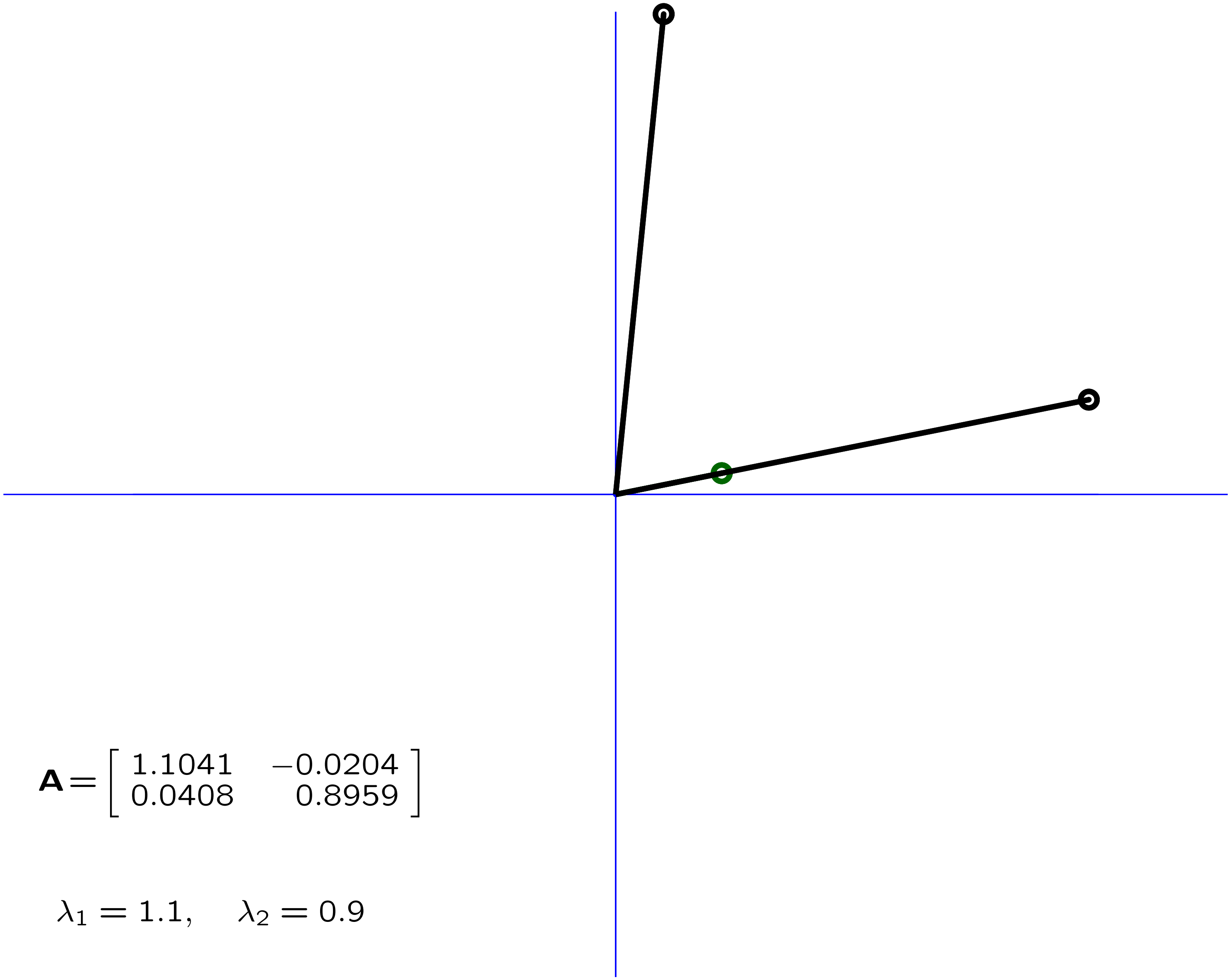
x_{20}



$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1.1041 & -0.0204 \\ 0.0408 & 0.8959 \end{bmatrix}$$

$\lambda_1 = 1.1, \quad \lambda_2 = 0.9$

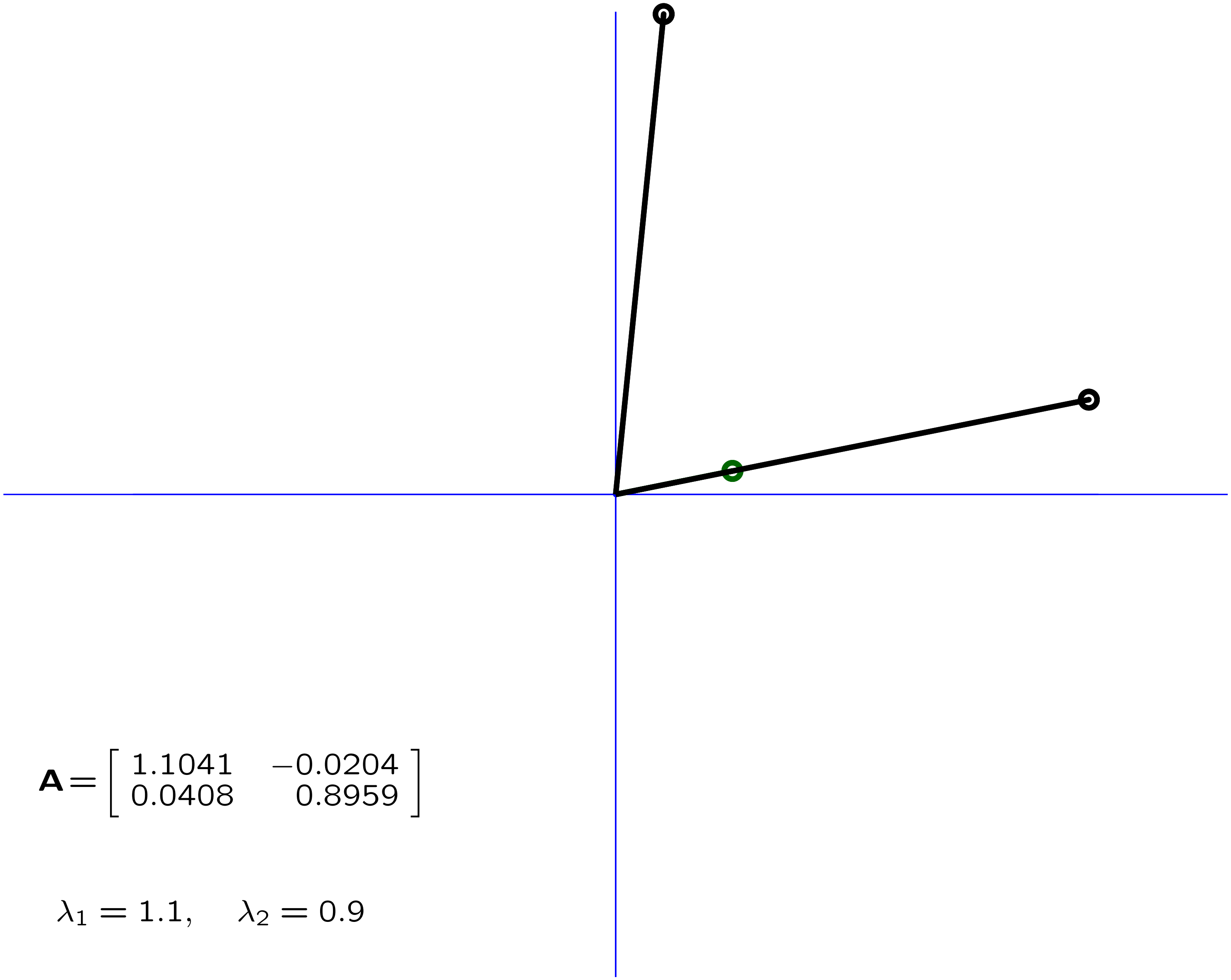
Iteratie in beeld



$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1.1041 & -0.0204 \\ 0.0408 & 0.8959 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 1.1, \quad \lambda_2 = 0.9$$

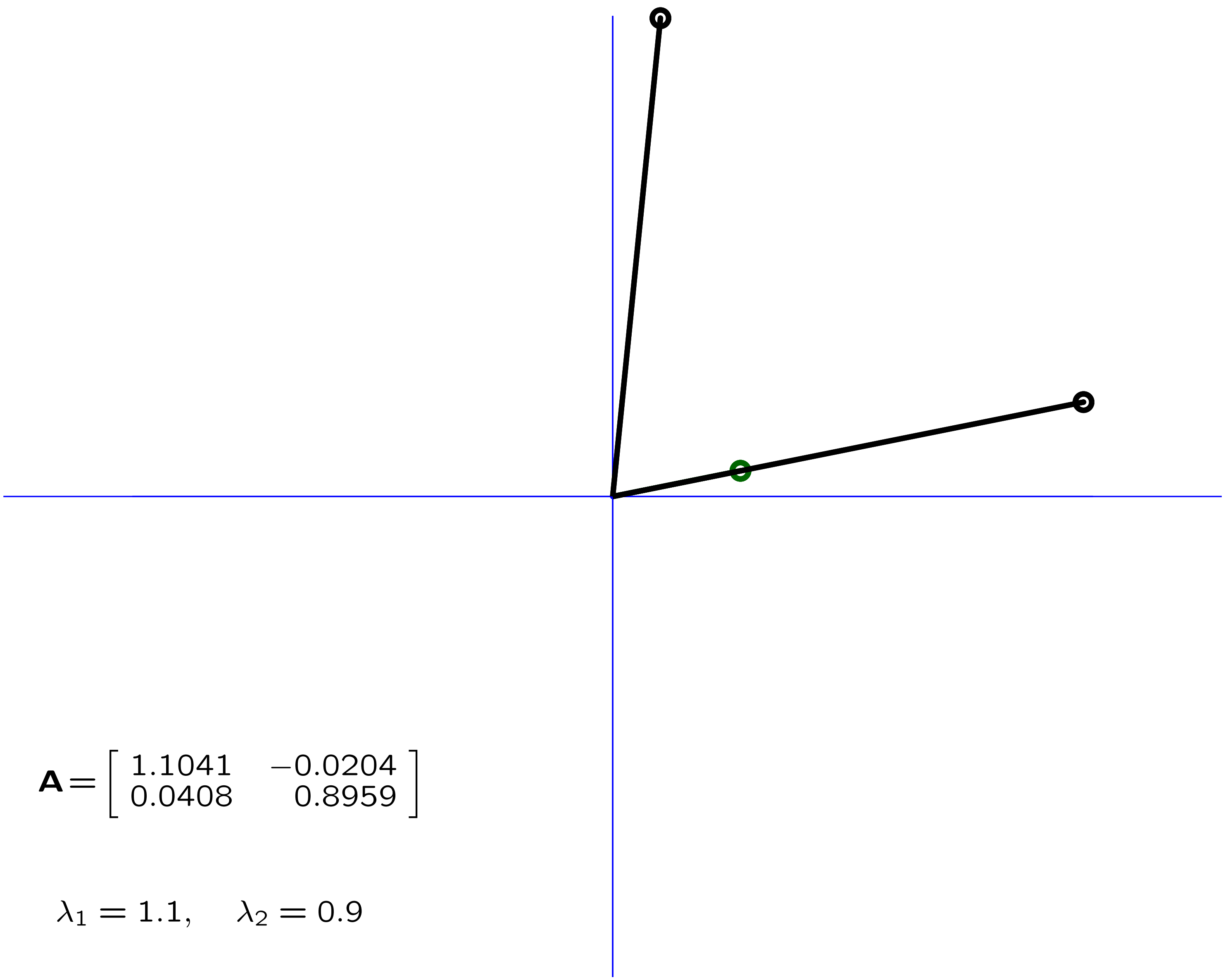
Iteratie in beeld



$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1.1041 & -0.0204 \\ 0.0408 & 0.8959 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 1.1, \quad \lambda_2 = 0.9$$

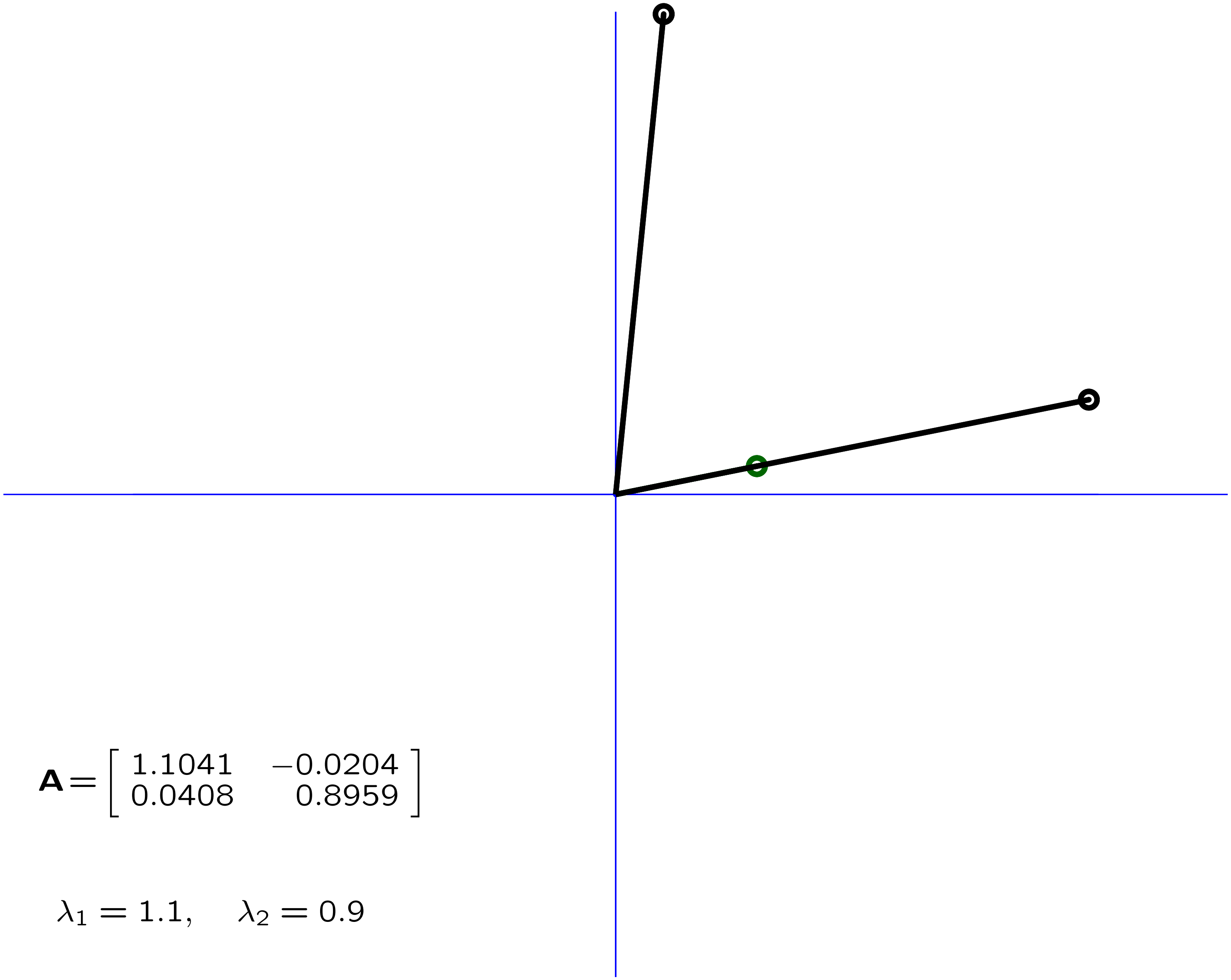
Iteratie in beeld



$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1.1041 & -0.0204 \\ 0.0408 & 0.8959 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 1.1, \quad \lambda_2 = 0.9$$

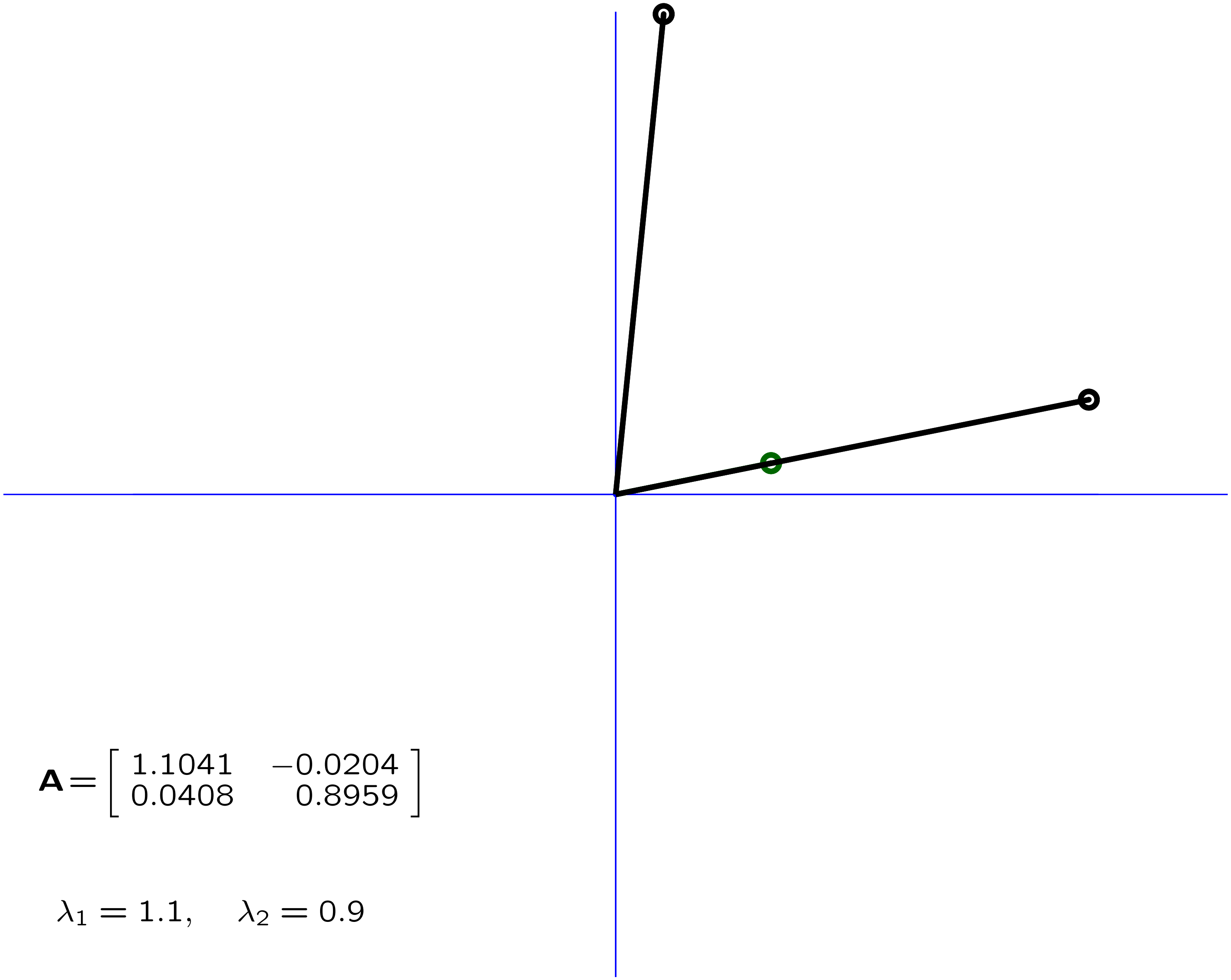
Iteratie in beeld



$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1.1041 & -0.0204 \\ 0.0408 & 0.8959 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 1.1, \quad \lambda_2 = 0.9$$

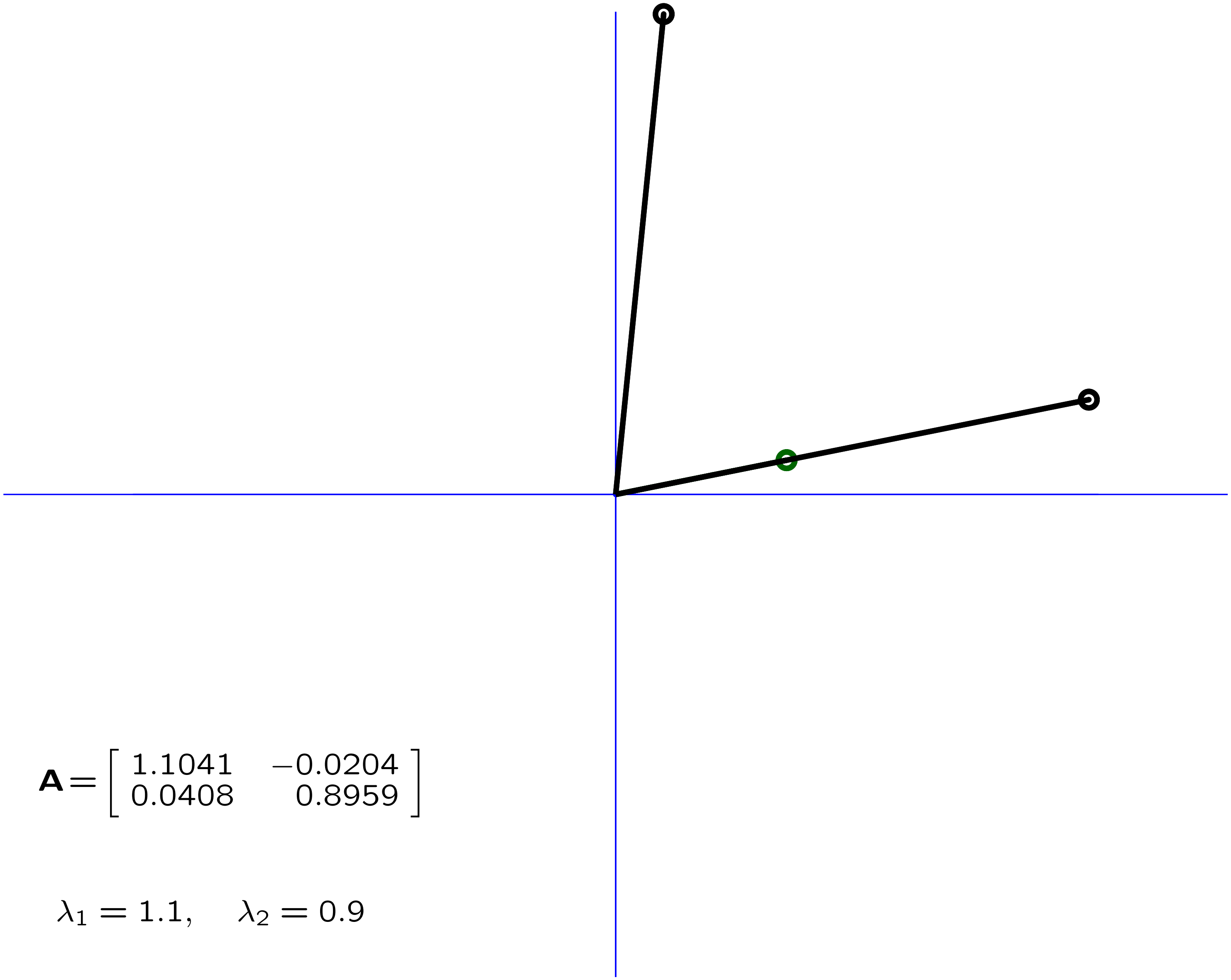
Iteratie in beeld



$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1.1041 & -0.0204 \\ 0.0408 & 0.8959 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 1.1, \quad \lambda_2 = 0.9$$

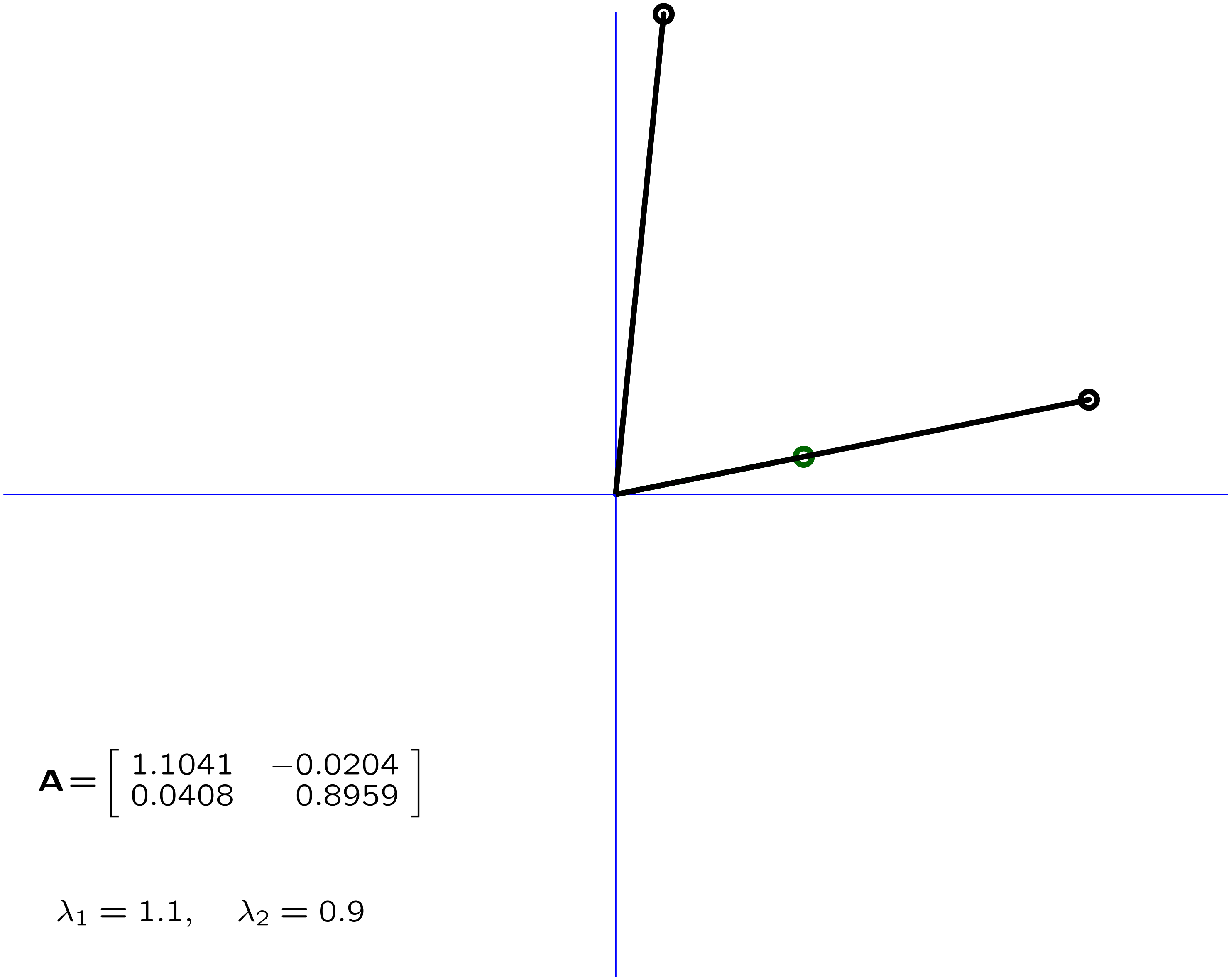
Iteratie in beeld



$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1.1041 & -0.0204 \\ 0.0408 & 0.8959 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 1.1, \quad \lambda_2 = 0.9$$

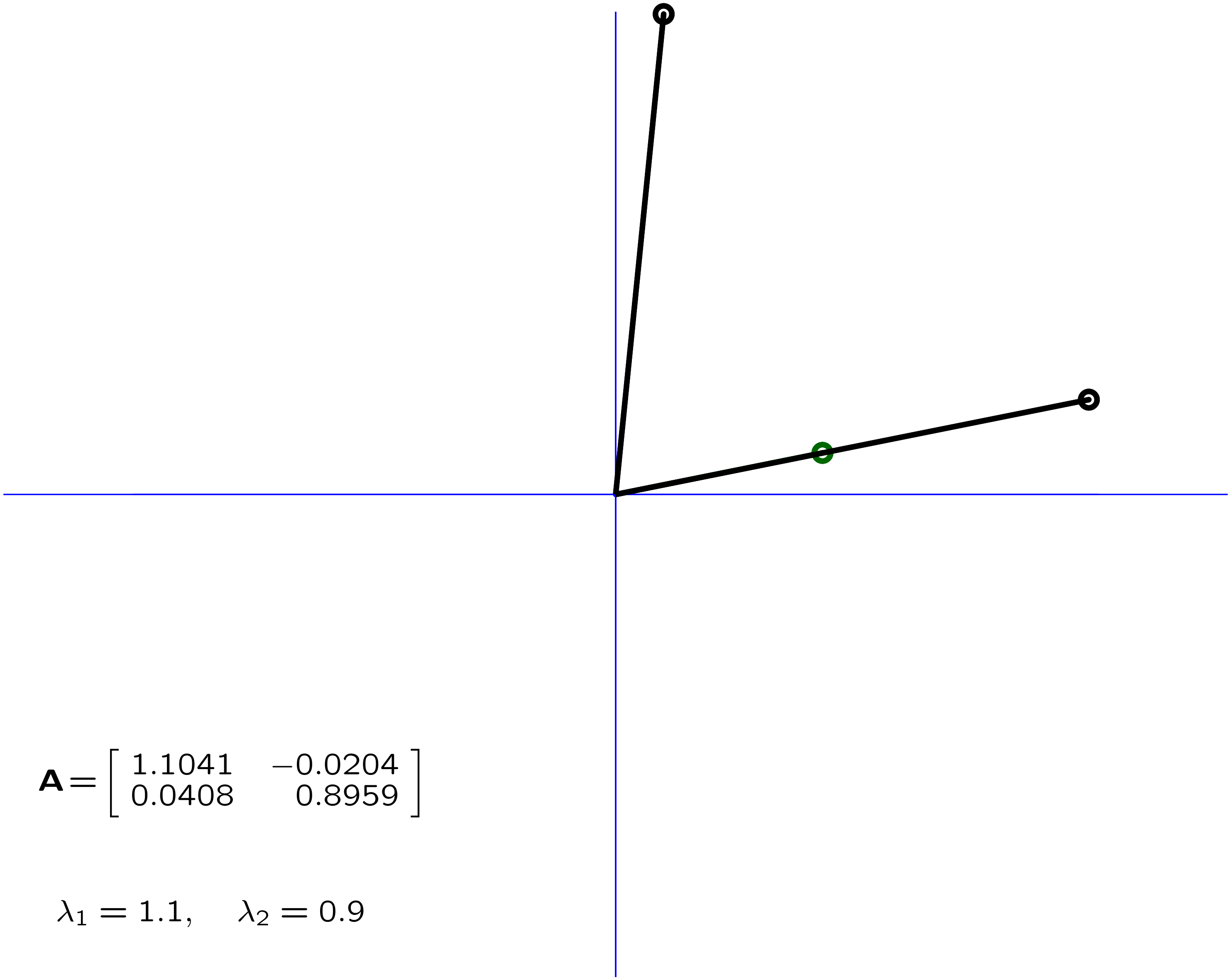
Iteratie in beeld



$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1.1041 & -0.0204 \\ 0.0408 & 0.8959 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 1.1, \quad \lambda_2 = 0.9$$

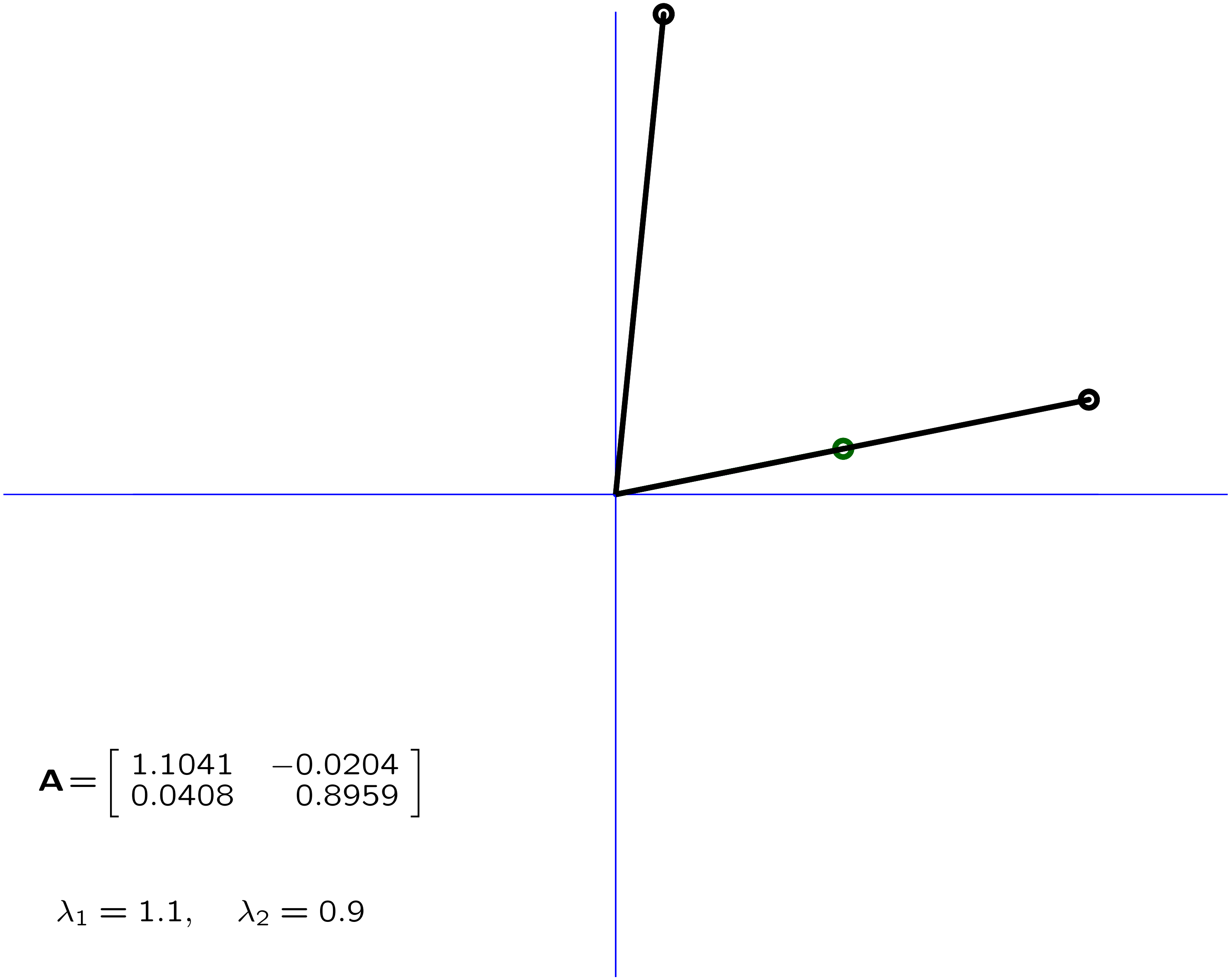
Iteratie in beeld



$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1.1041 & -0.0204 \\ 0.0408 & 0.8959 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 1.1, \quad \lambda_2 = 0.9$$

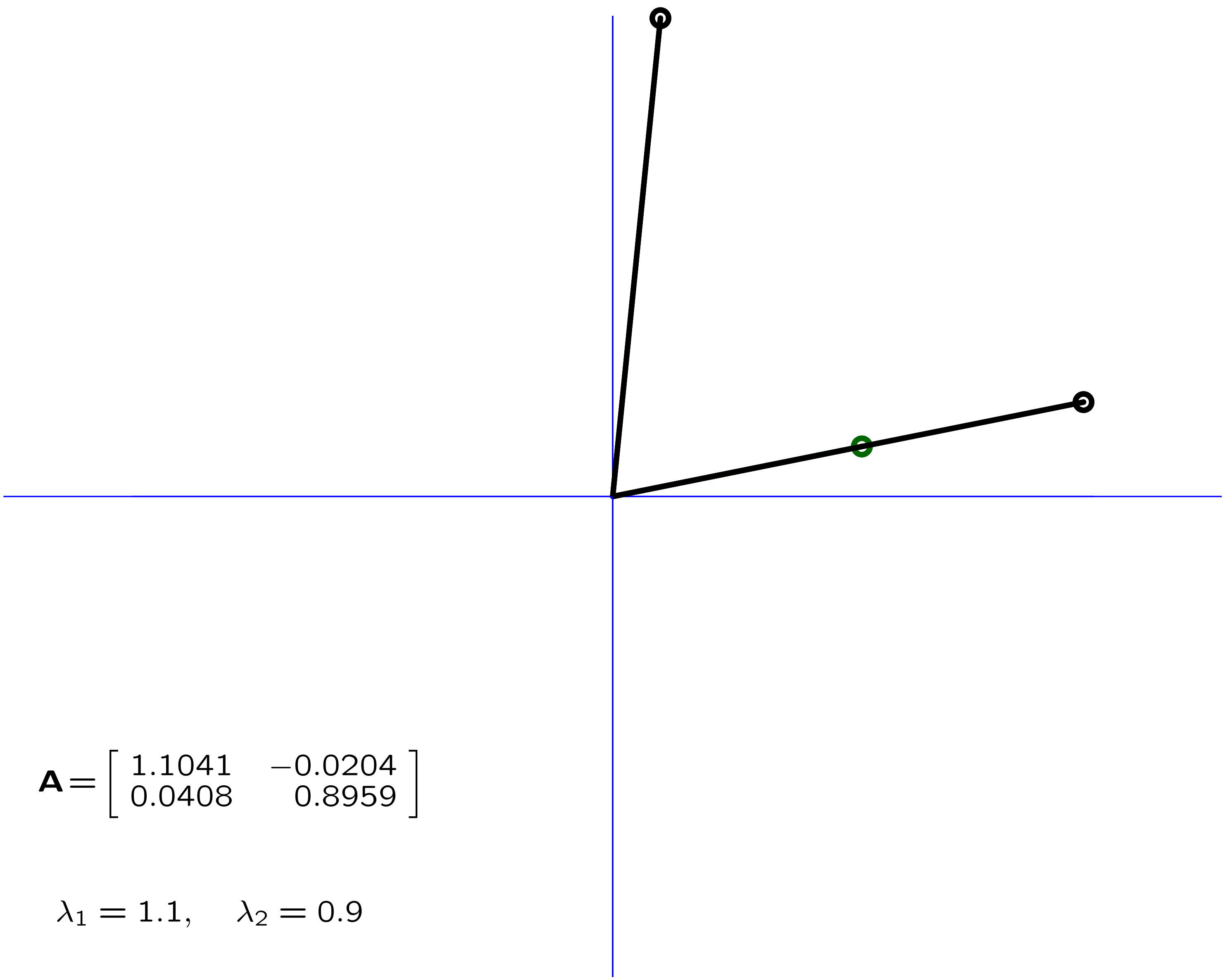
Iteratie in beeld



$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1.1041 & -0.0204 \\ 0.0408 & 0.8959 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 1.1, \quad \lambda_2 = 0.9$$

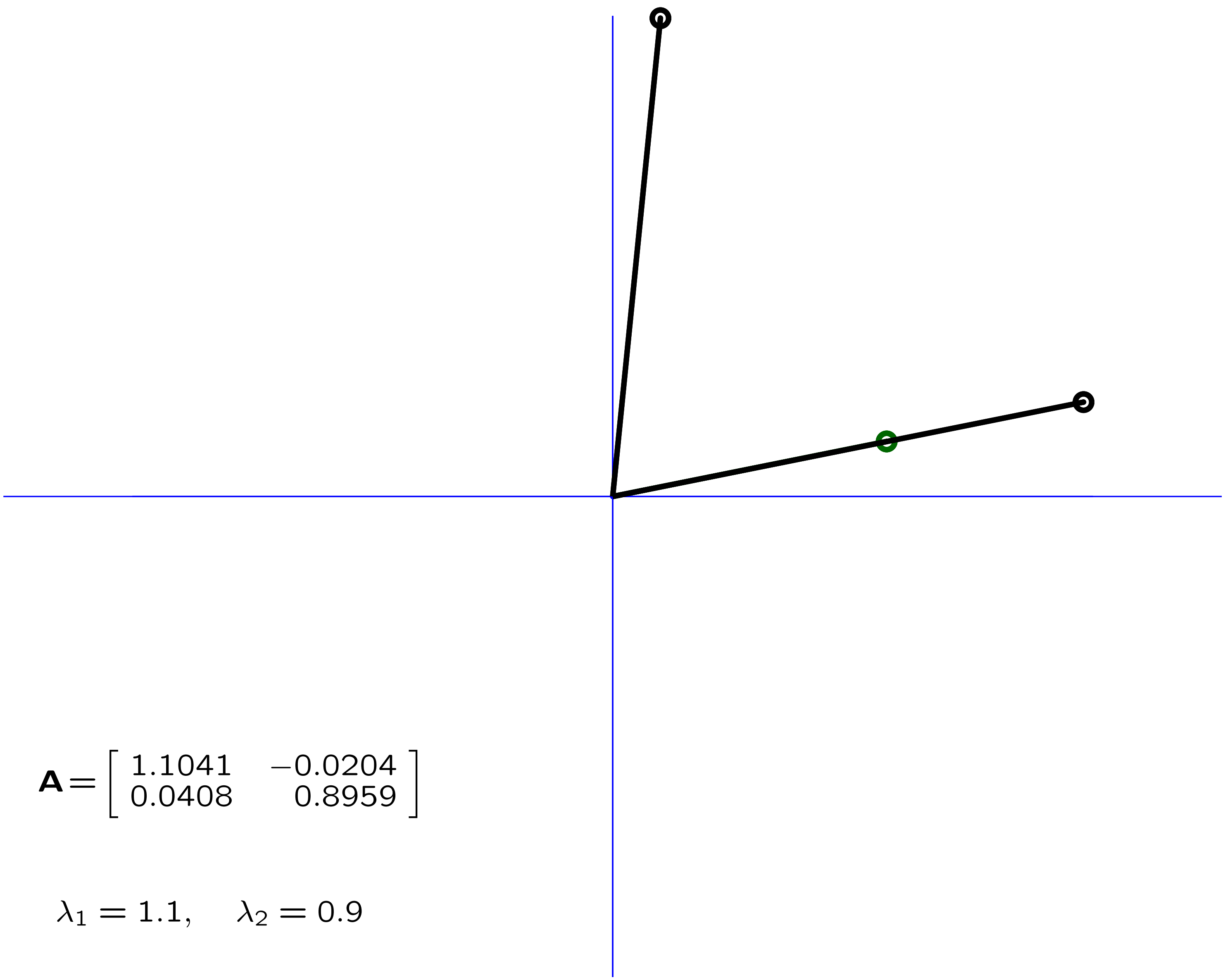
Iteratie in beeld



$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1.1041 & -0.0204 \\ 0.0408 & 0.8959 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 1.1, \quad \lambda_2 = 0.9$$

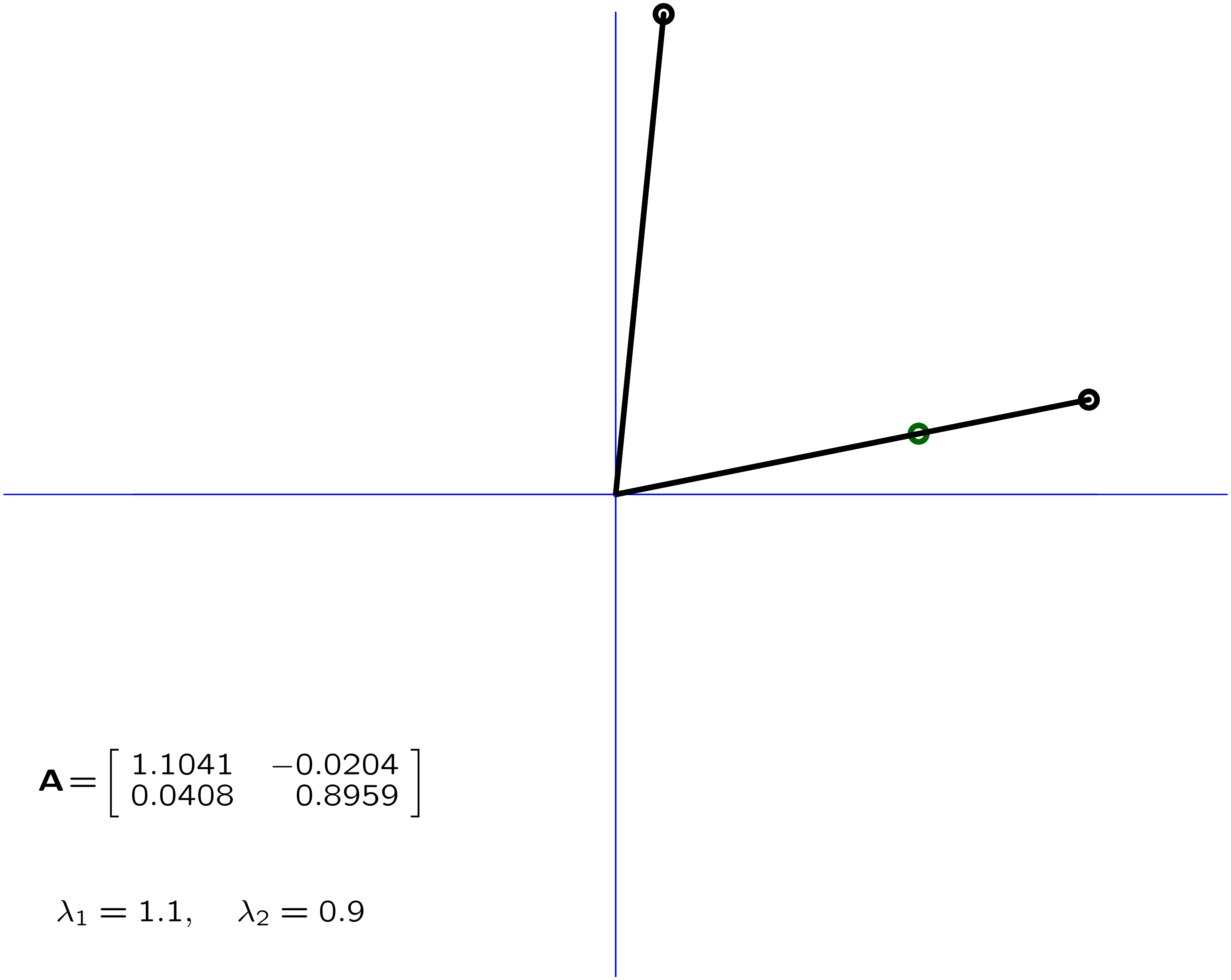
Iteratie in beeld



$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1.1041 & -0.0204 \\ 0.0408 & 0.8959 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 1.1, \quad \lambda_2 = 0.9$$

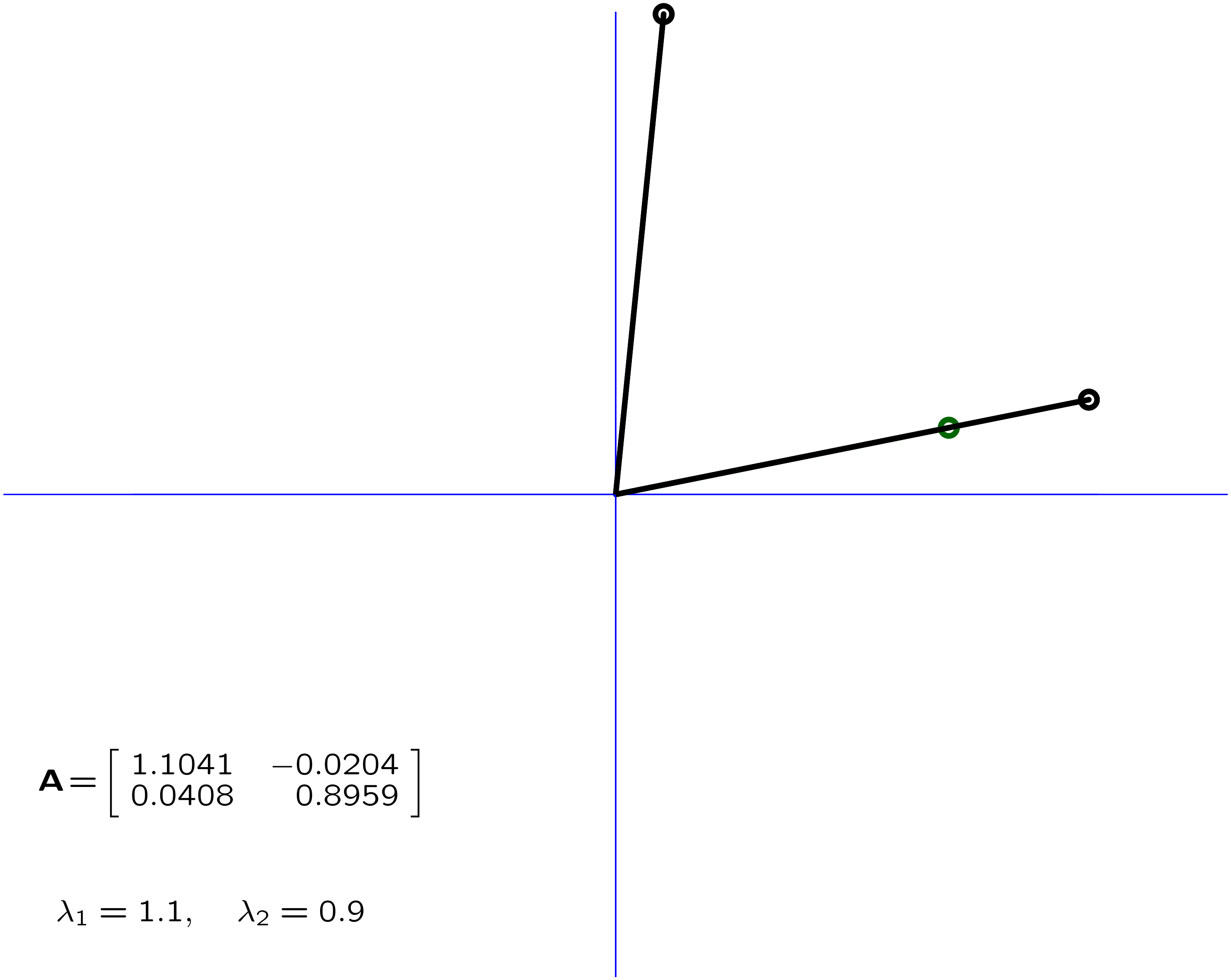
Iteratie in beeld



$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1.1041 & -0.0204 \\ 0.0408 & 0.8959 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 1.1, \quad \lambda_2 = 0.9$$

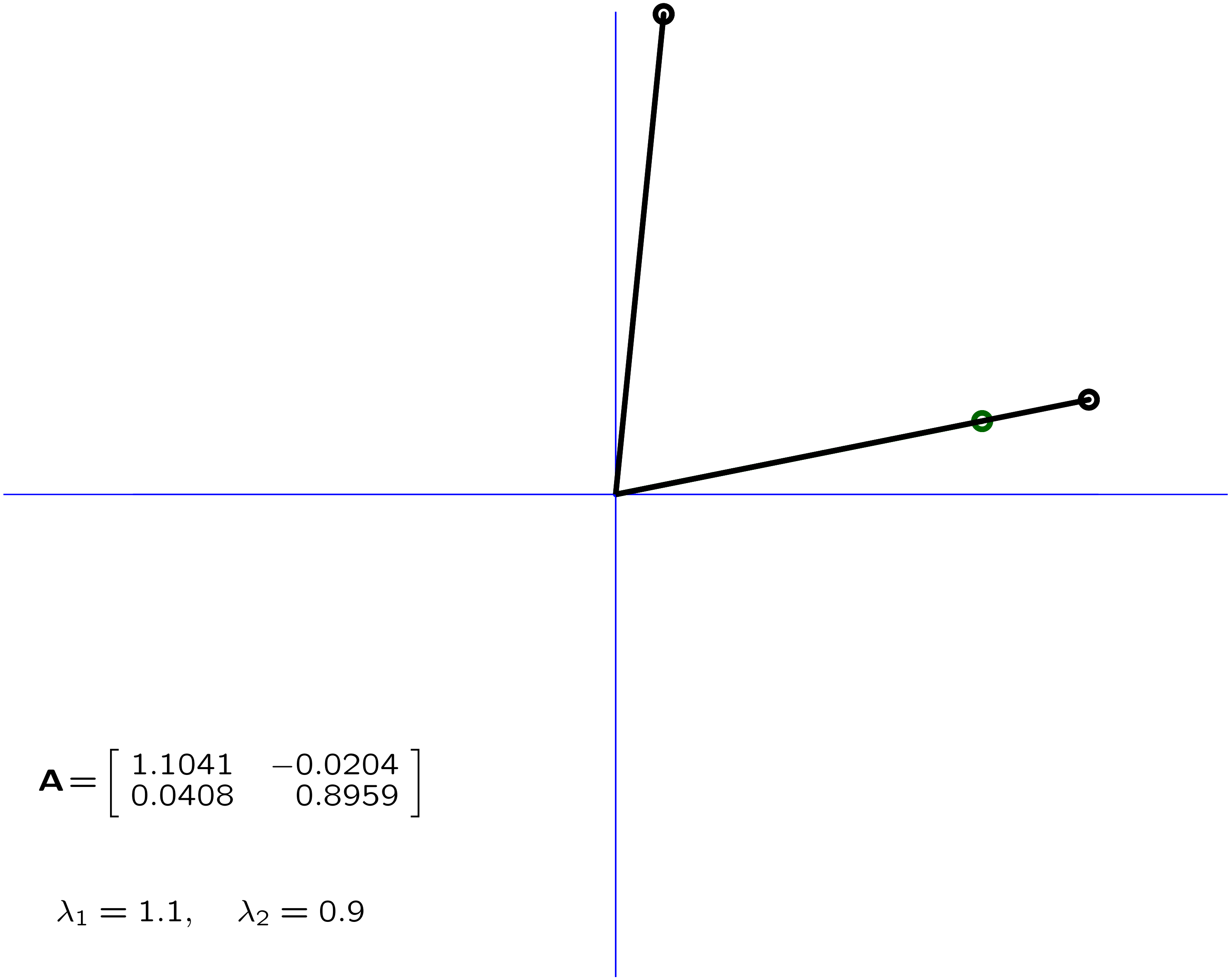
Iteratie in beeld



$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1.1041 & -0.0204 \\ 0.0408 & 0.8959 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 1.1, \quad \lambda_2 = 0.9$$

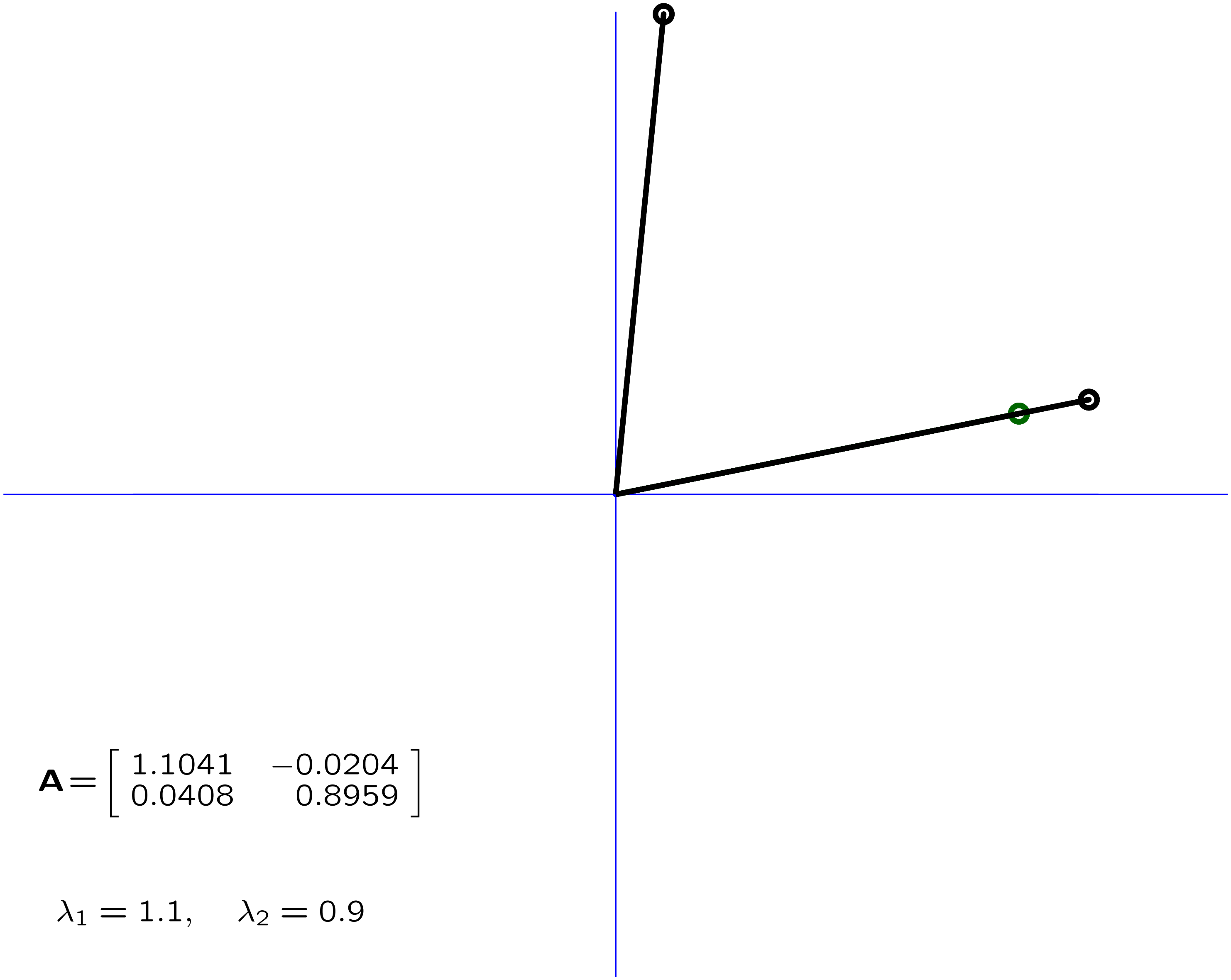
Iteratie in beeld



$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1.1041 & -0.0204 \\ 0.0408 & 0.8959 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 1.1, \quad \lambda_2 = 0.9$$

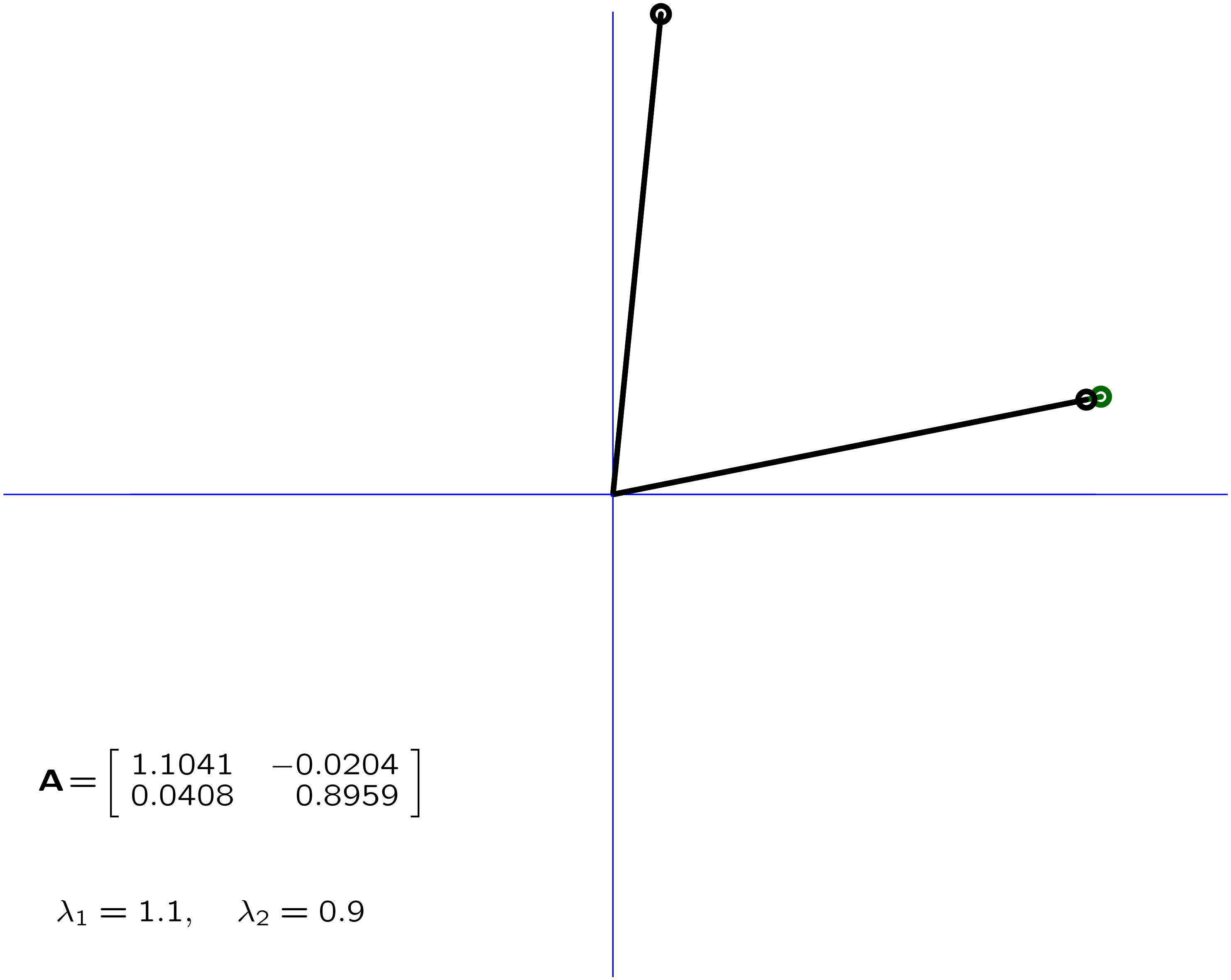
Iteratie in beeld



$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1.1041 & -0.0204 \\ 0.0408 & 0.8959 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 1.1, \quad \lambda_2 = 0.9$$

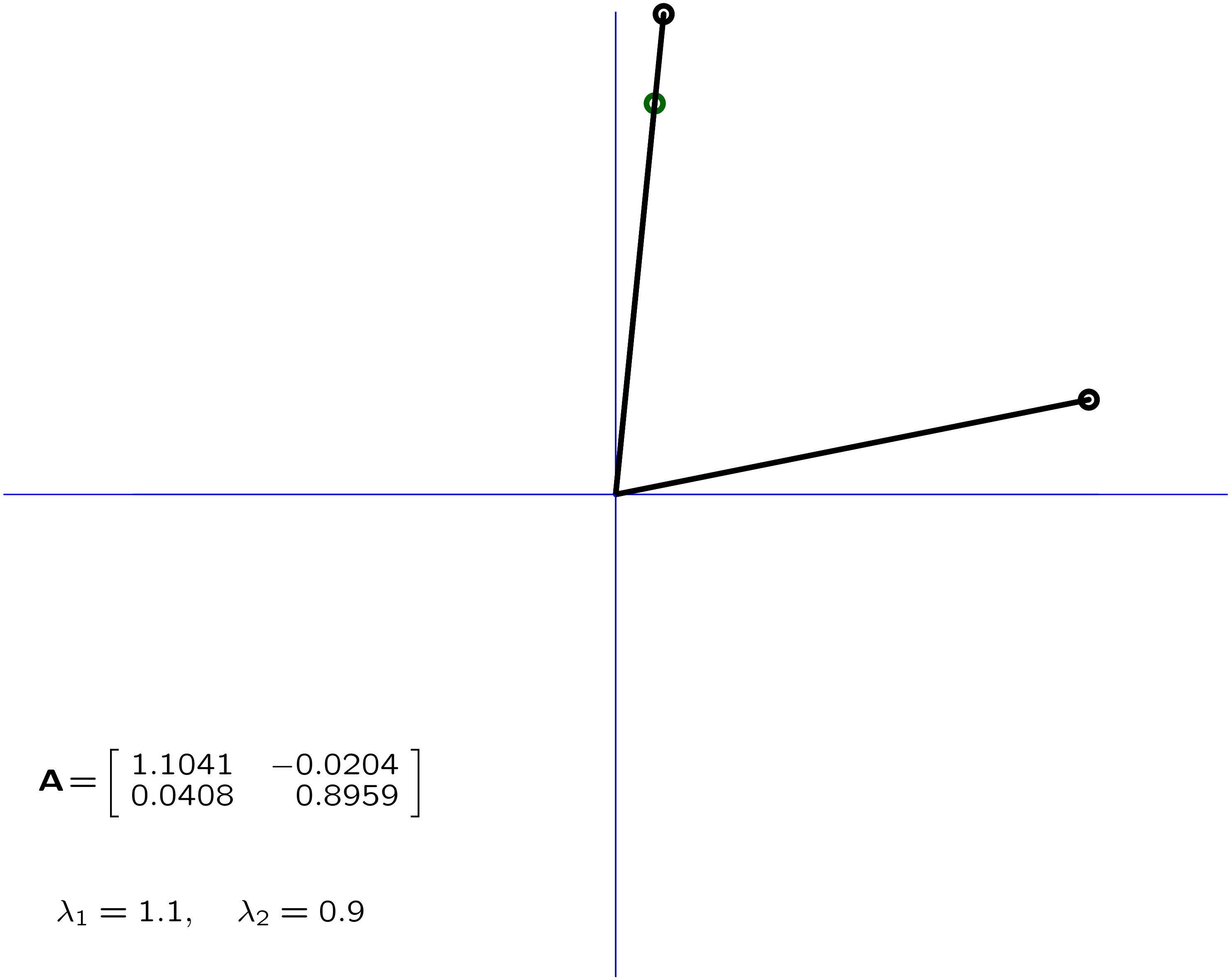
Iteratie in beeld



$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1.1041 & -0.0204 \\ 0.0408 & 0.8959 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 1.1, \quad \lambda_2 = 0.9$$

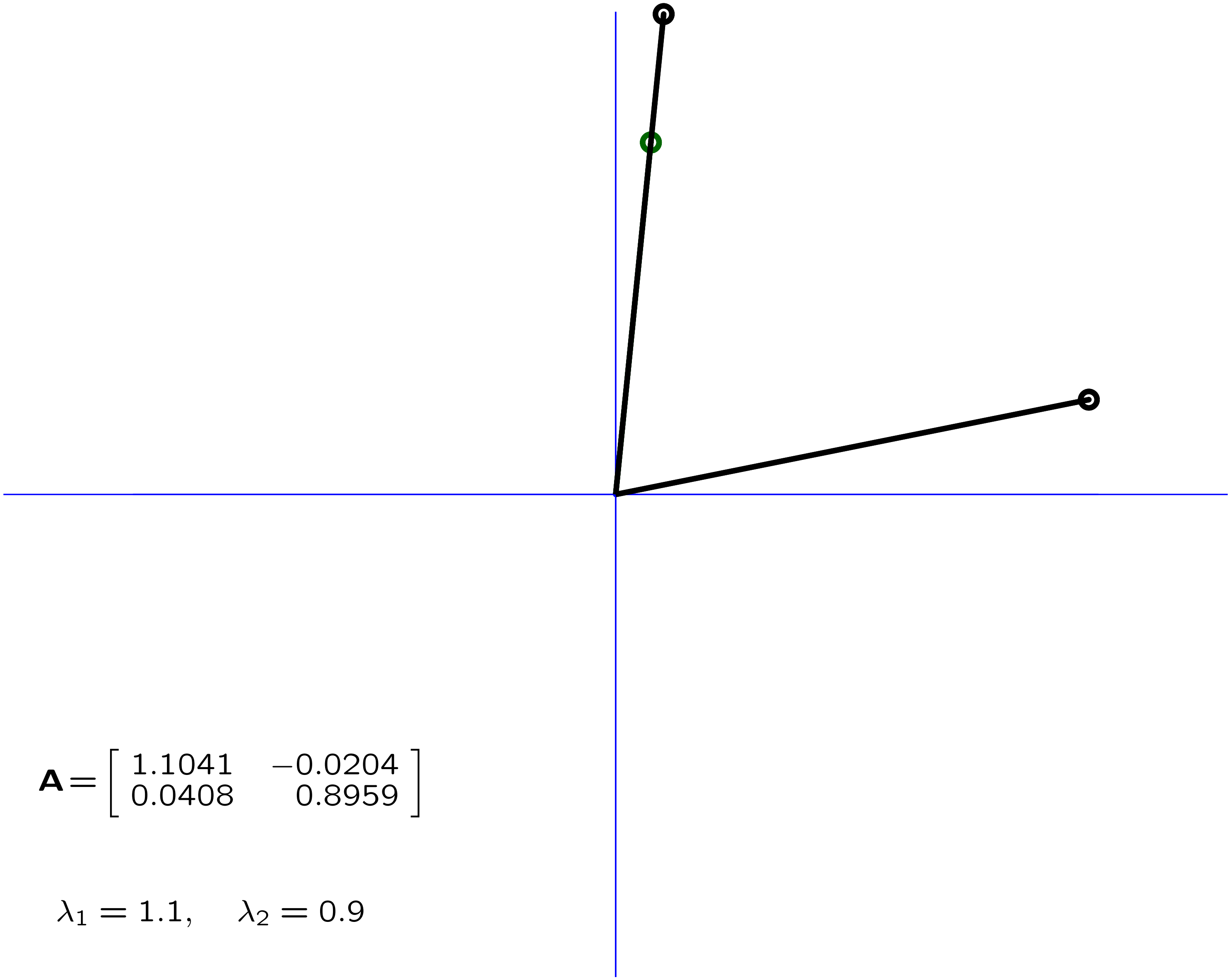
Iteratie in beeld



$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1.1041 & -0.0204 \\ 0.0408 & 0.8959 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 1.1, \quad \lambda_2 = 0.9$$

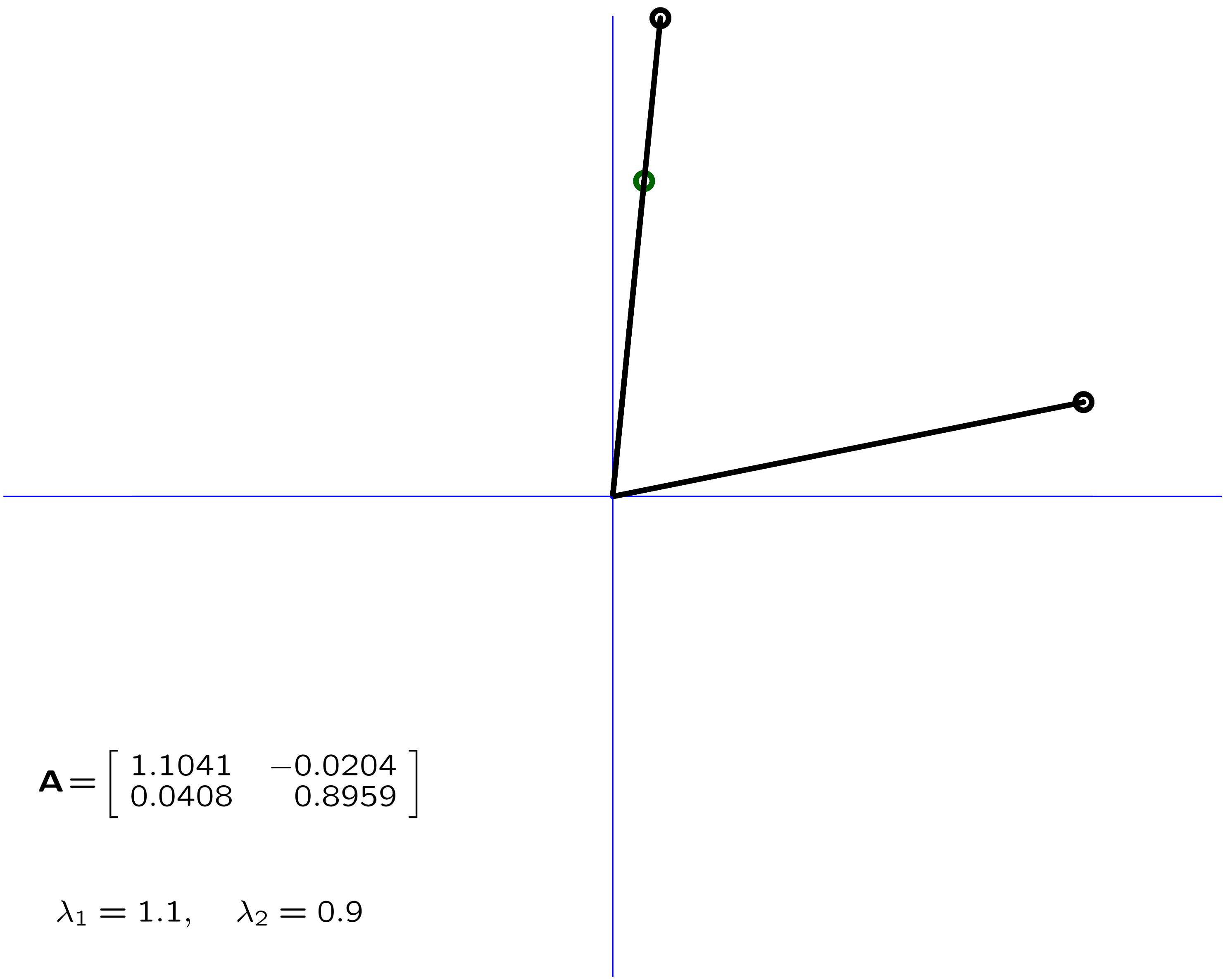
Iteratie in beeld



$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1.1041 & -0.0204 \\ 0.0408 & 0.8959 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 1.1, \quad \lambda_2 = 0.9$$

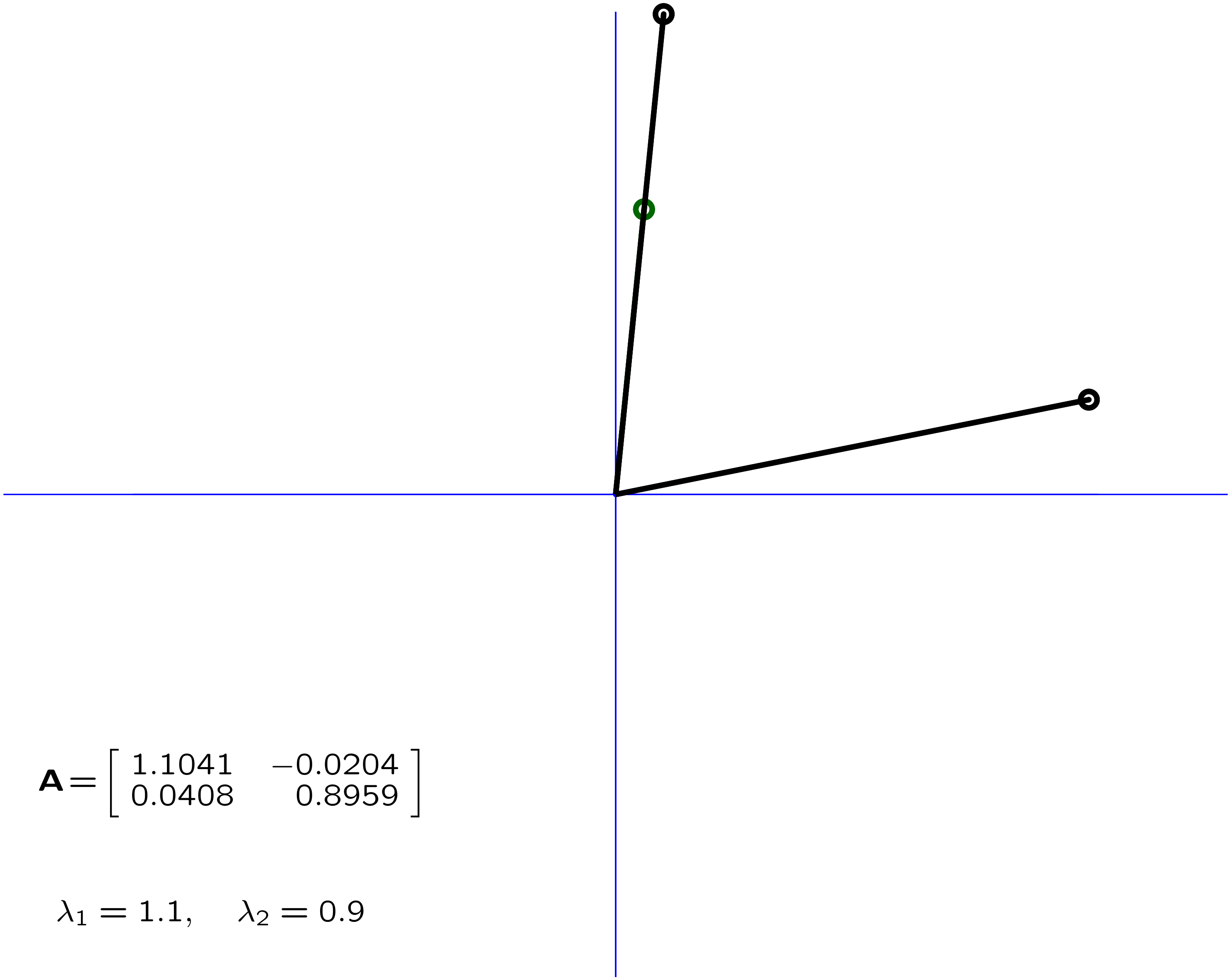
Iteratie in beeld



$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1.1041 & -0.0204 \\ 0.0408 & 0.8959 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 1.1, \quad \lambda_2 = 0.9$$

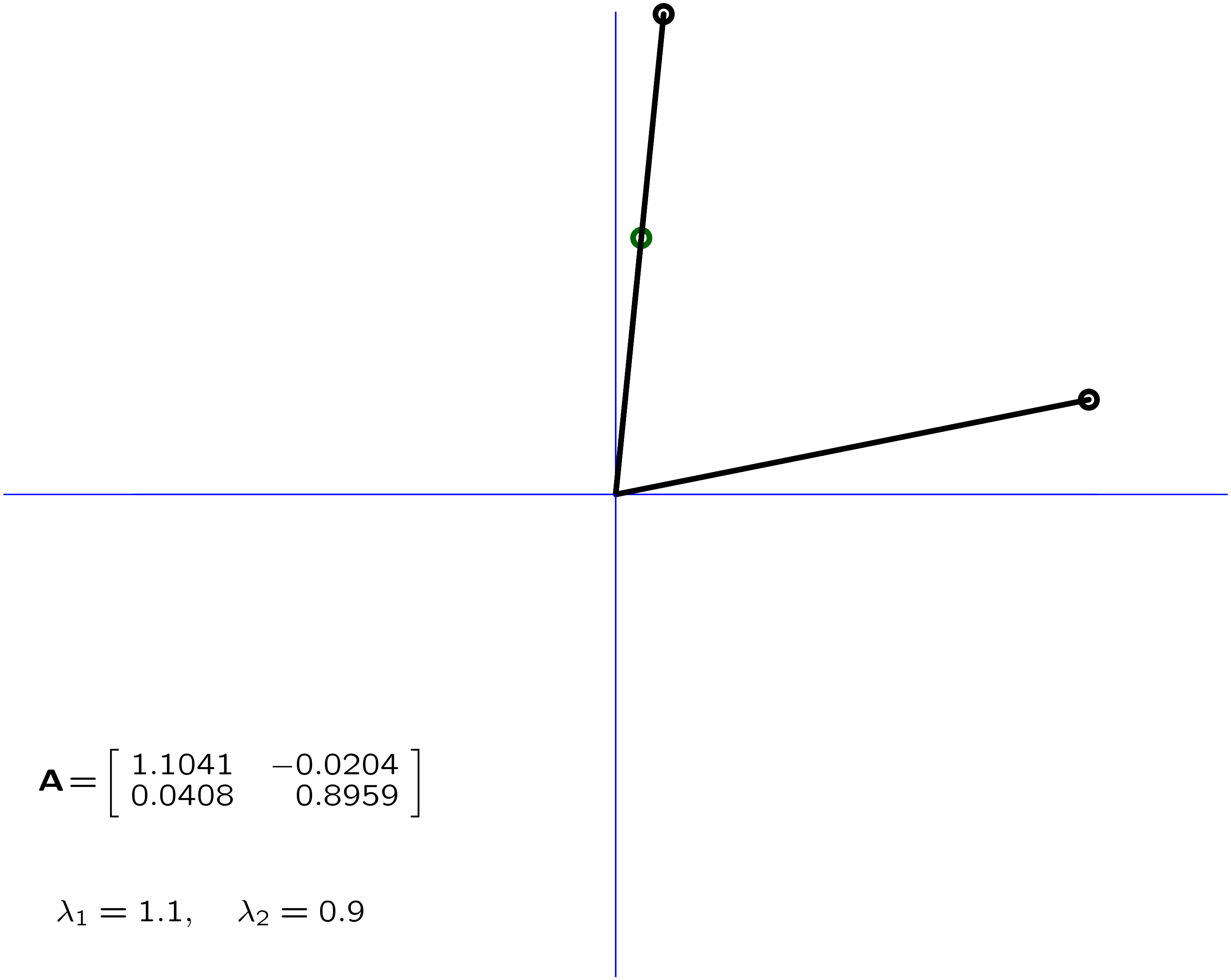
Iteratie in beeld



$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1.1041 & -0.0204 \\ 0.0408 & 0.8959 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 1.1, \quad \lambda_2 = 0.9$$

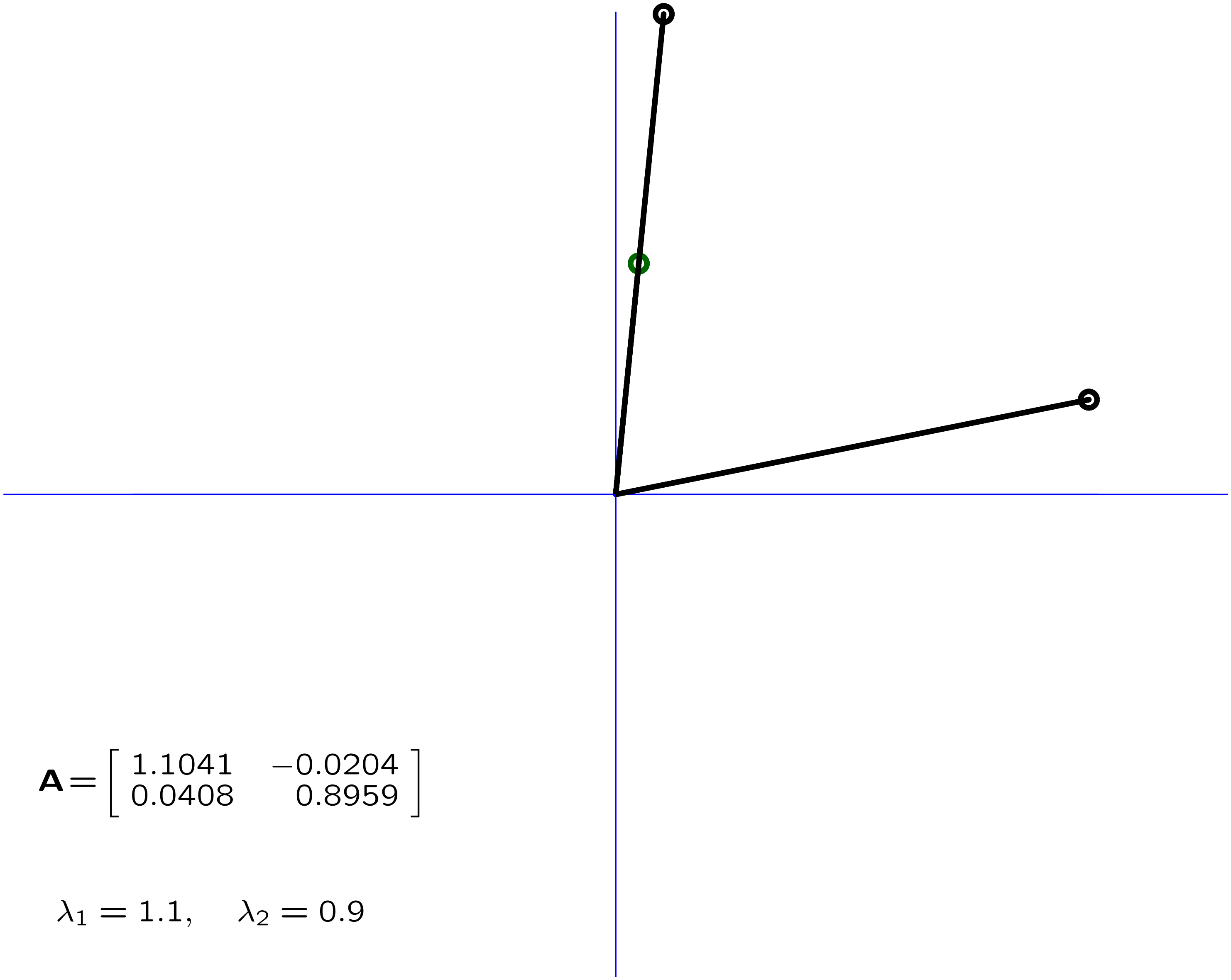
Iteratie in beeld



$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1.1041 & -0.0204 \\ 0.0408 & 0.8959 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 1.1, \quad \lambda_2 = 0.9$$

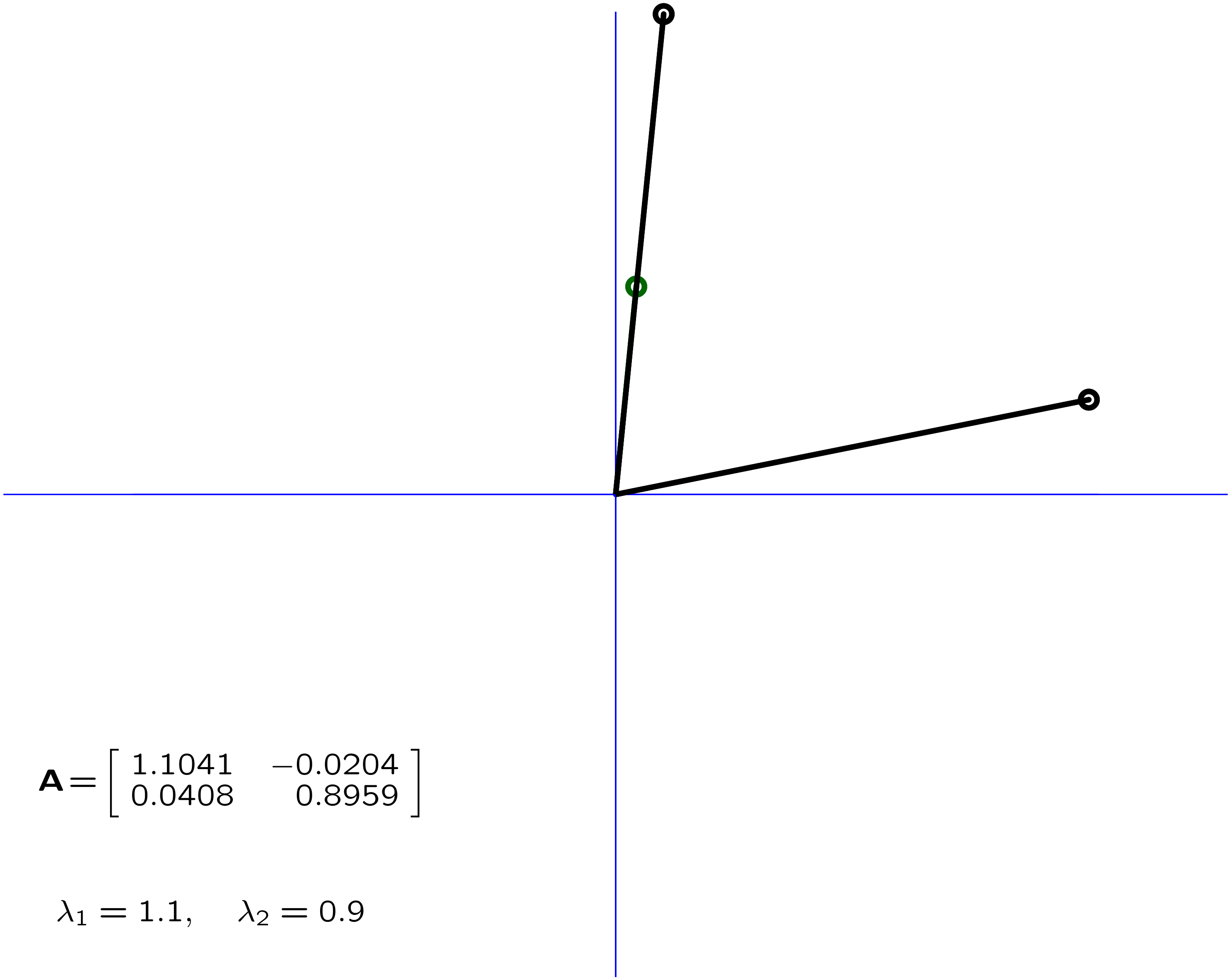
Iteratie in beeld



$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1.1041 & -0.0204 \\ 0.0408 & 0.8959 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 1.1, \quad \lambda_2 = 0.9$$

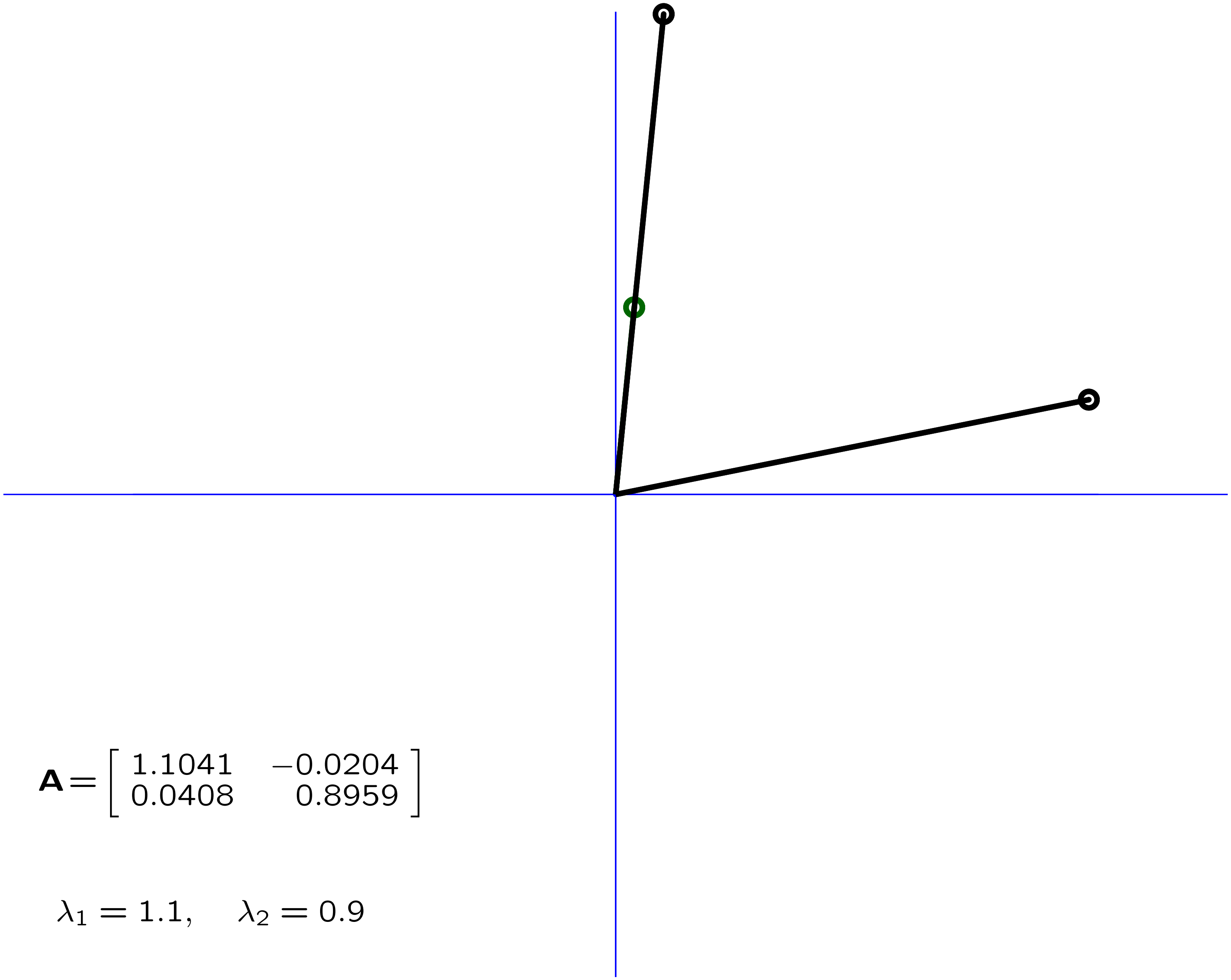
Iteratie in beeld



$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1.1041 & -0.0204 \\ 0.0408 & 0.8959 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 1.1, \quad \lambda_2 = 0.9$$

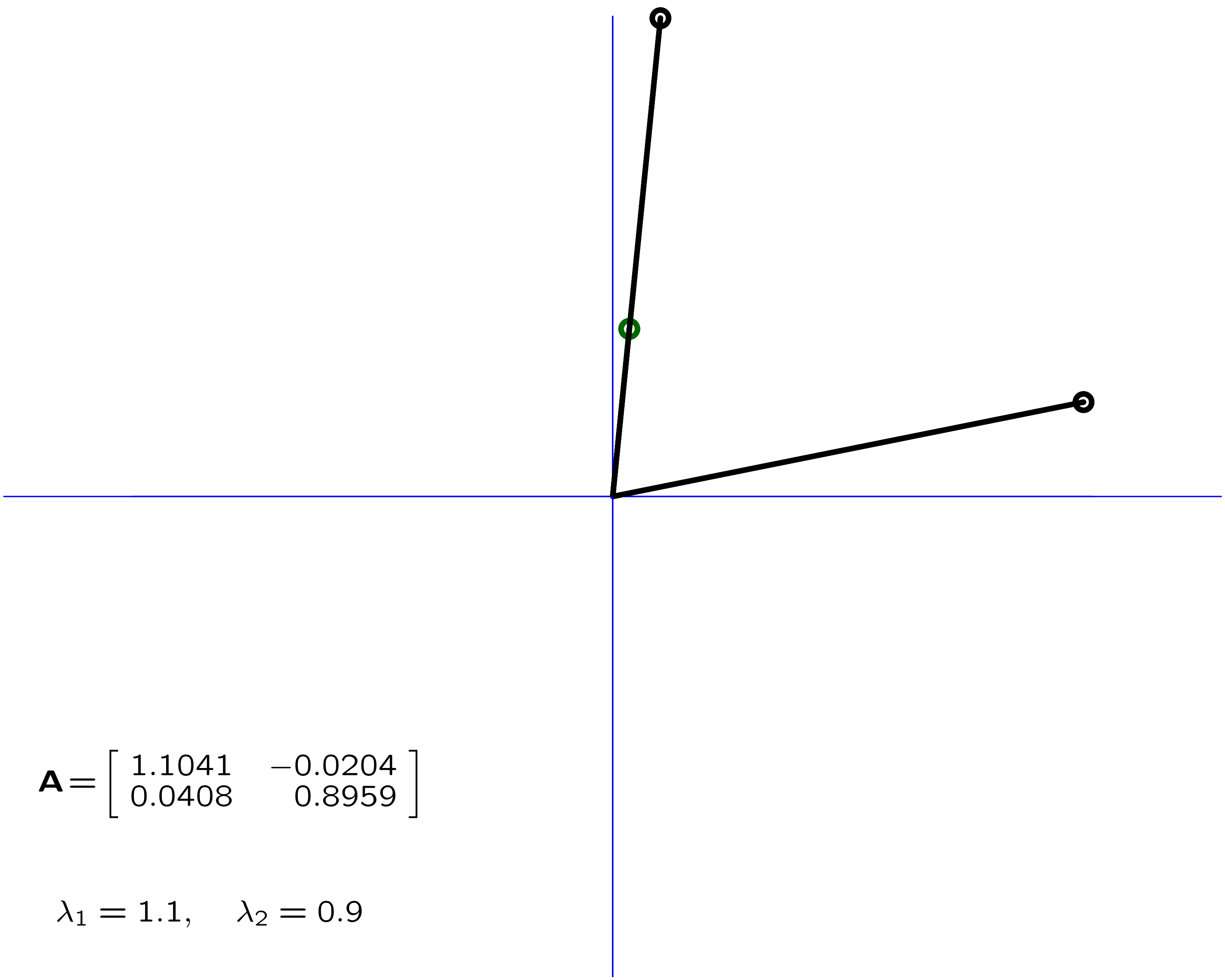
Iteratie in beeld



$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1.1041 & -0.0204 \\ 0.0408 & 0.8959 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 1.1, \quad \lambda_2 = 0.9$$

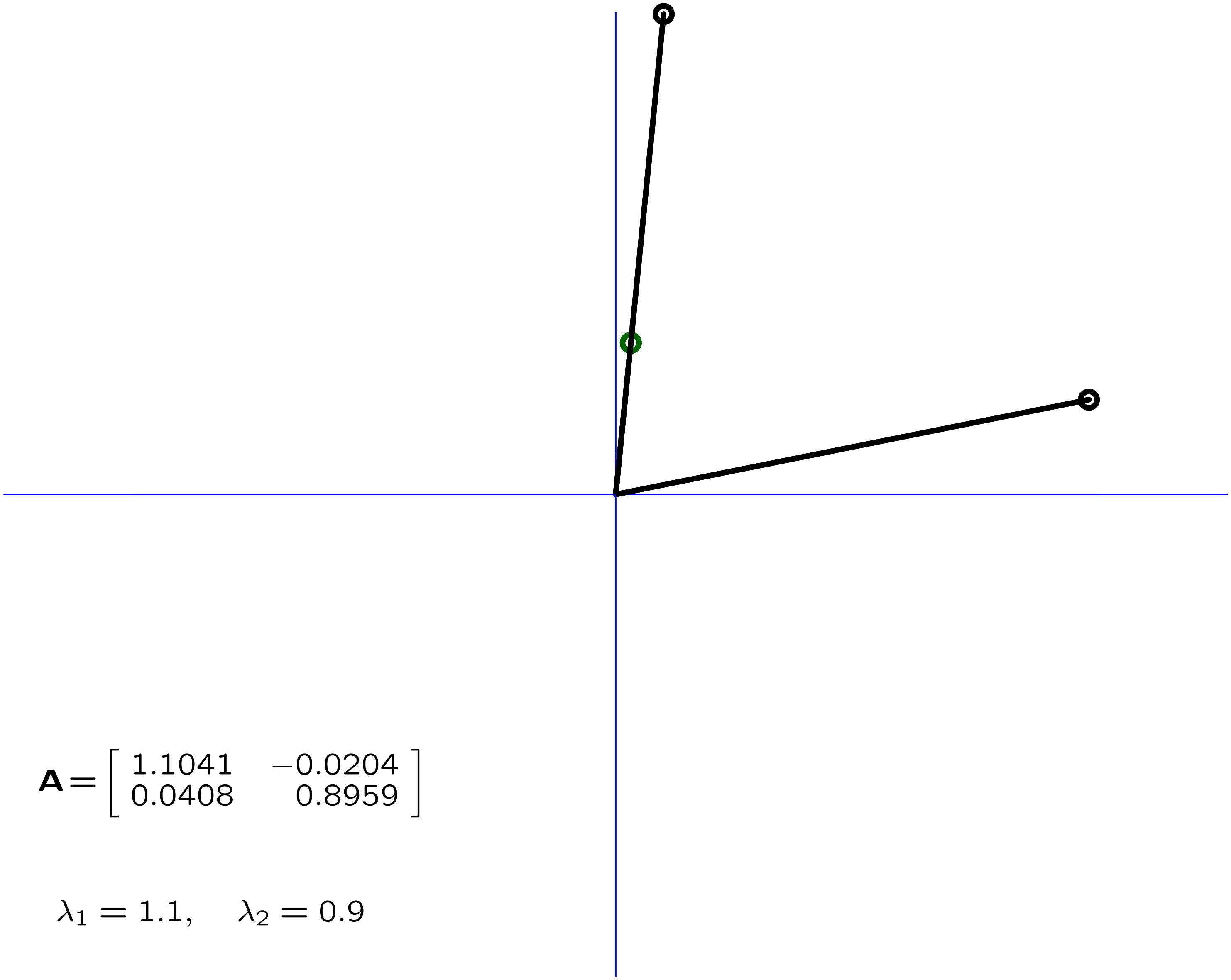
Iteratie in beeld



$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1.1041 & -0.0204 \\ 0.0408 & 0.8959 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 1.1, \quad \lambda_2 = 0.9$$

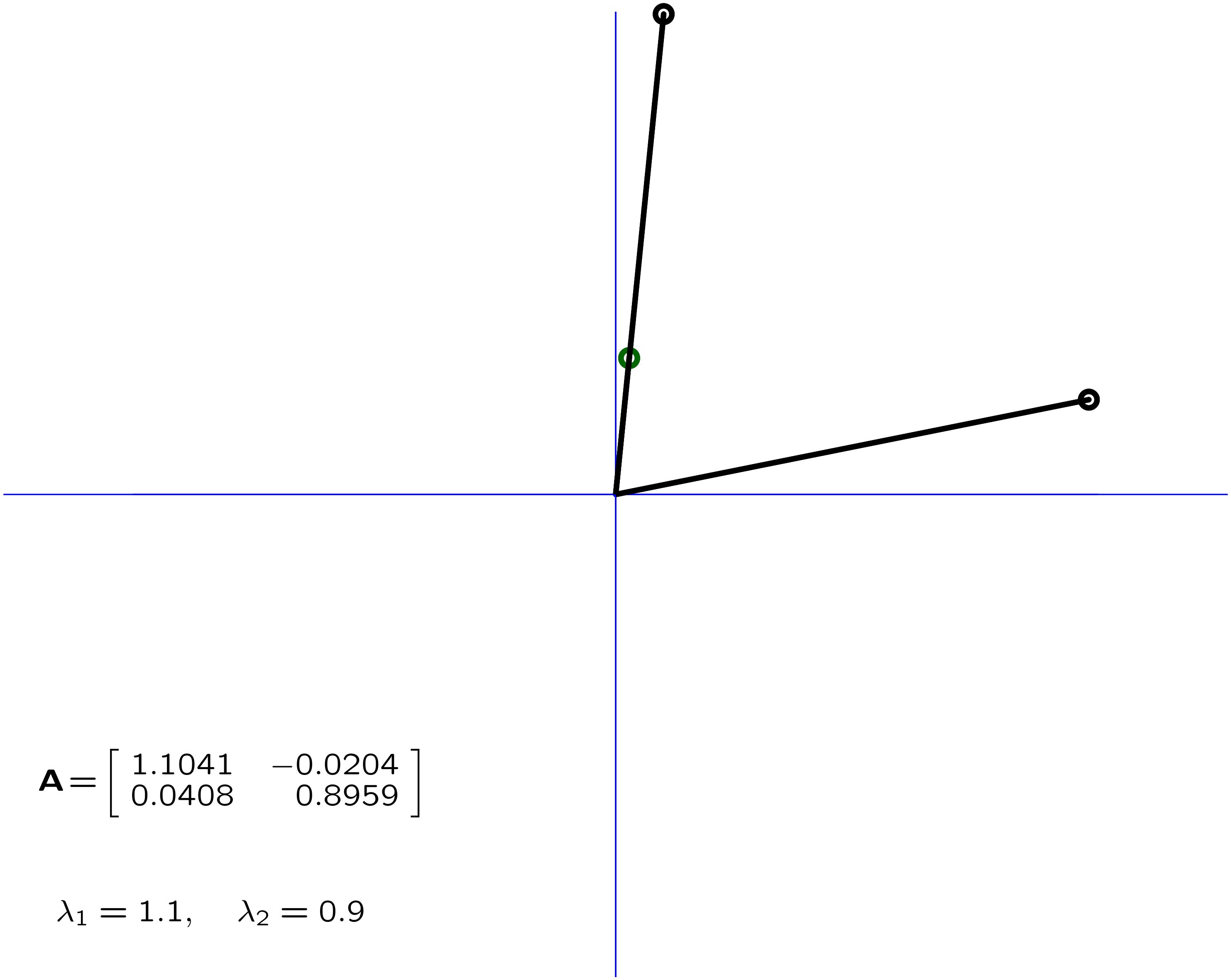
Iteratie in beeld



$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1.1041 & -0.0204 \\ 0.0408 & 0.8959 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 1.1, \quad \lambda_2 = 0.9$$

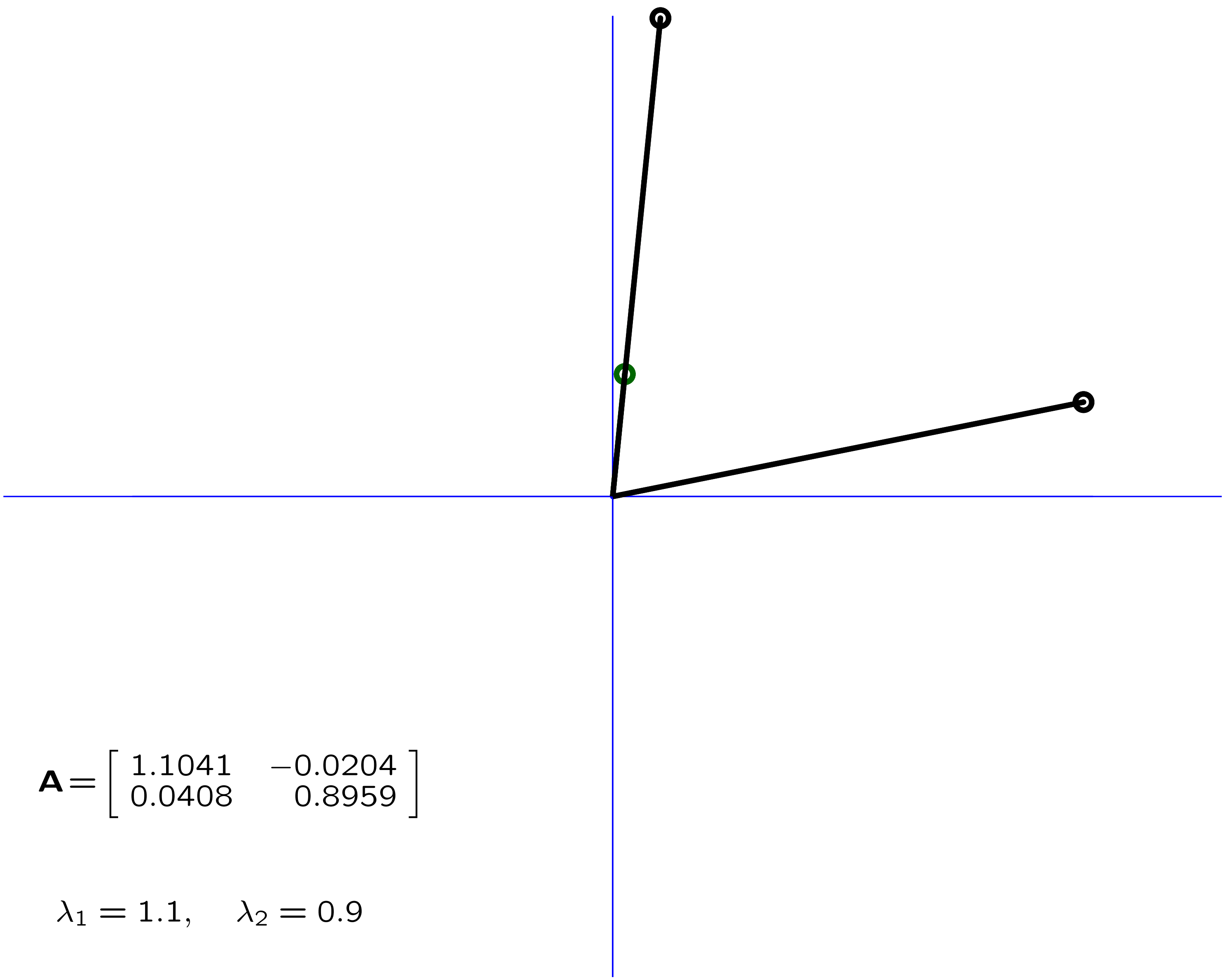
Iteratie in beeld



$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1.1041 & -0.0204 \\ 0.0408 & 0.8959 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 1.1, \quad \lambda_2 = 0.9$$

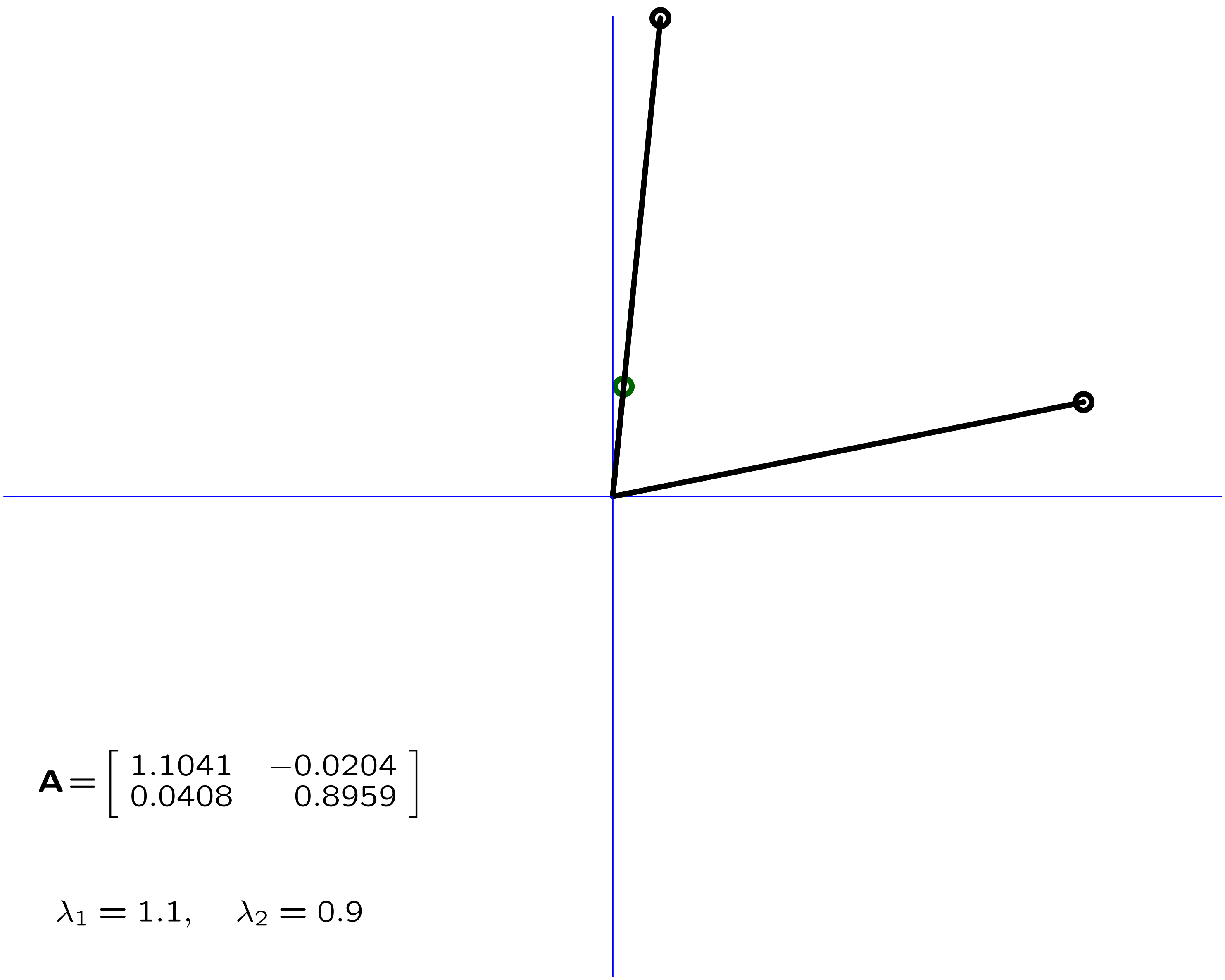
Iteratie in beeld



$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1.1041 & -0.0204 \\ 0.0408 & 0.8959 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 1.1, \quad \lambda_2 = 0.9$$

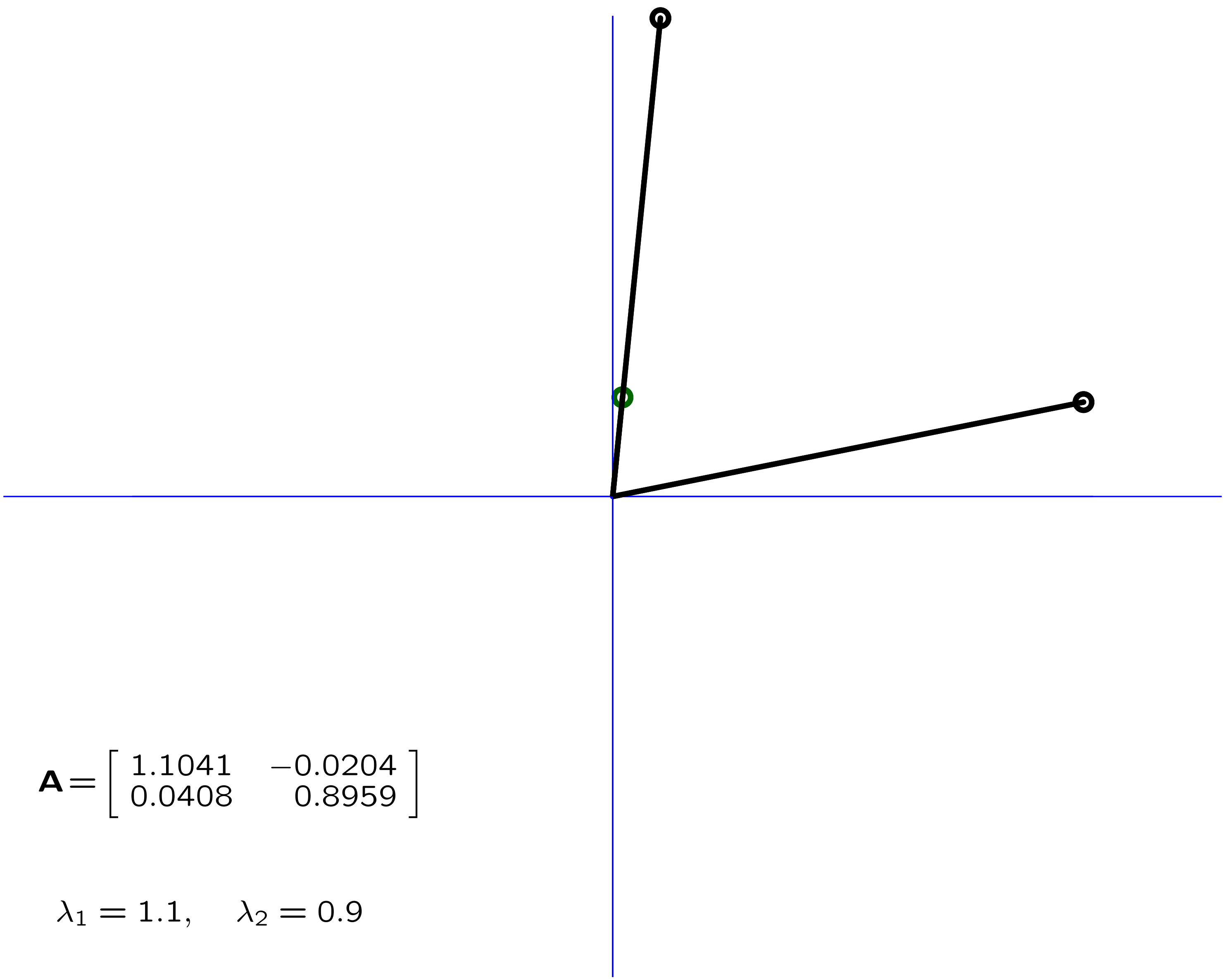
Iteratie in beeld



$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1.1041 & -0.0204 \\ 0.0408 & 0.8959 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 1.1, \quad \lambda_2 = 0.9$$

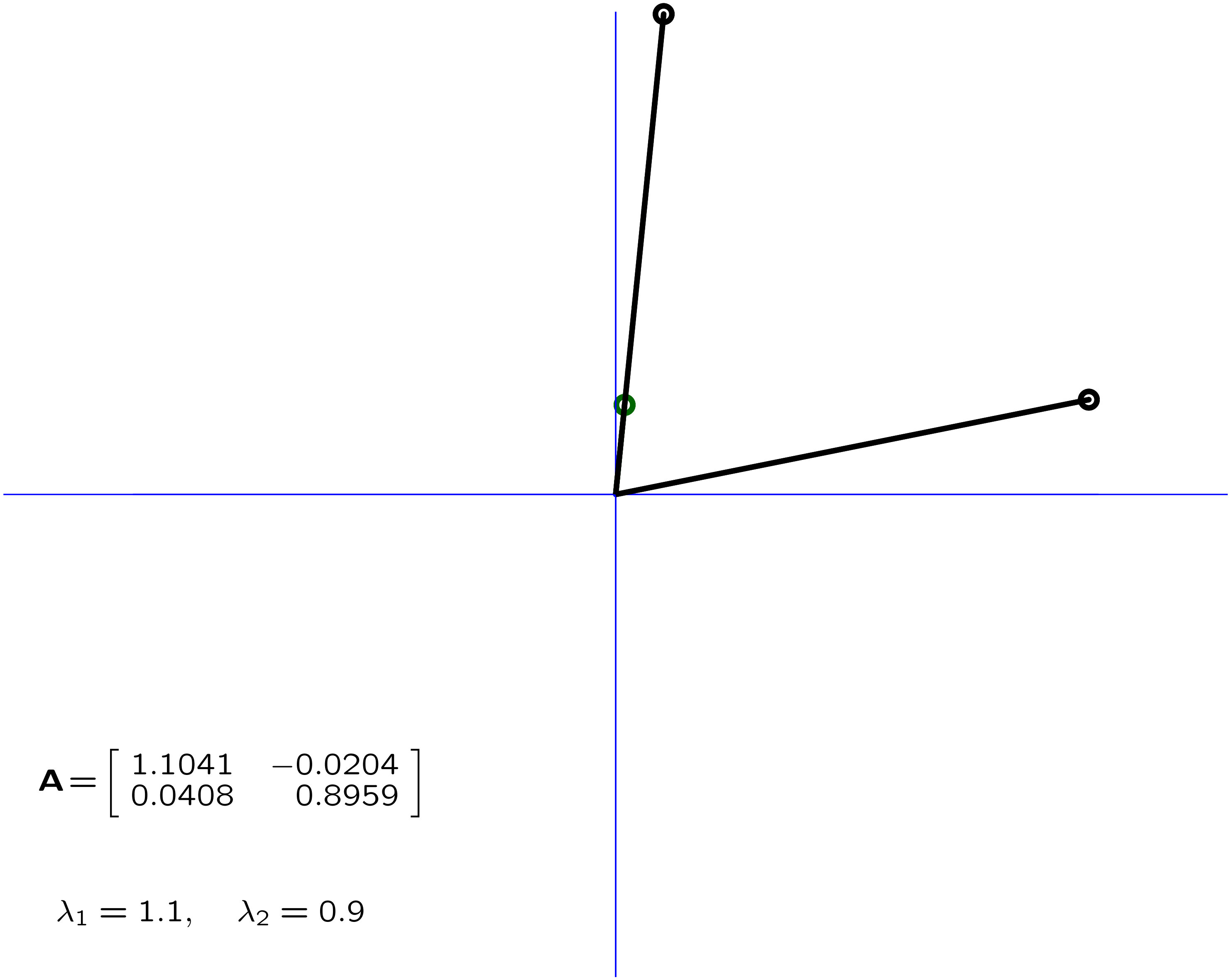
Iteratie in beeld



$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1.1041 & -0.0204 \\ 0.0408 & 0.8959 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 1.1, \quad \lambda_2 = 0.9$$

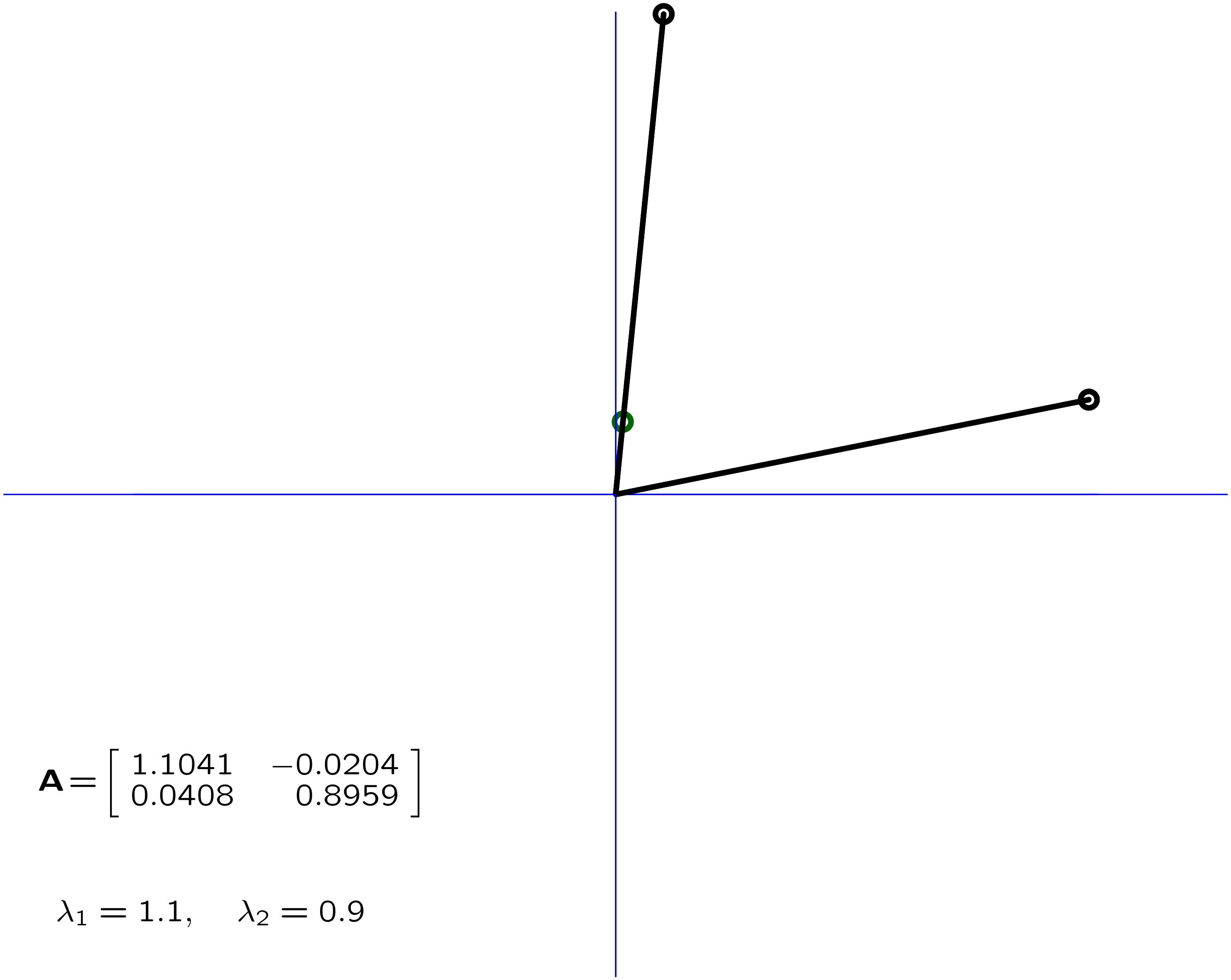
Iteratie in beeld



$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1.1041 & -0.0204 \\ 0.0408 & 0.8959 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 1.1, \quad \lambda_2 = 0.9$$

Iteratie in beeld

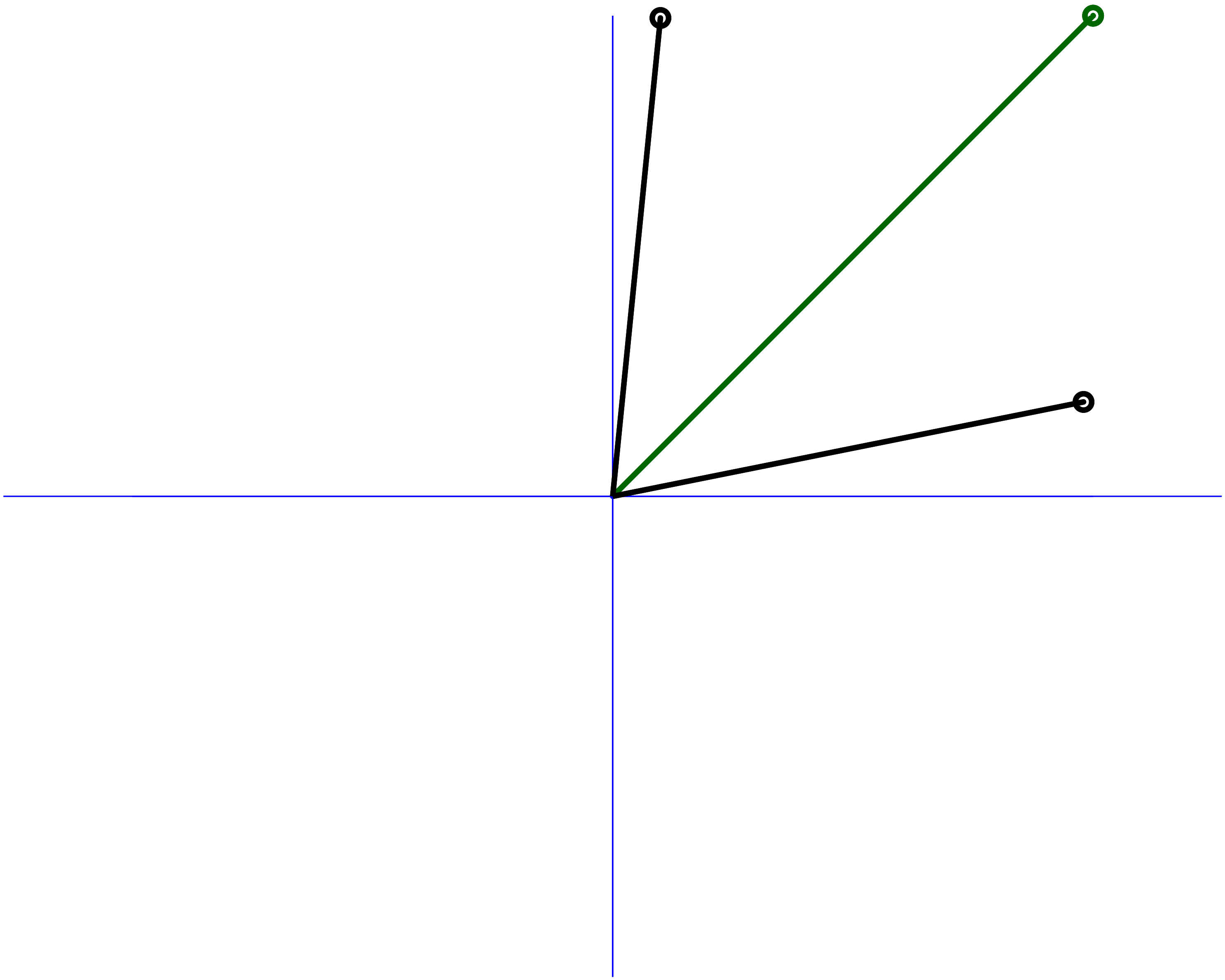


$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1.1041 & -0.0204 \\ 0.0408 & 0.8959 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 1.1, \quad \lambda_2 = 0.9$$

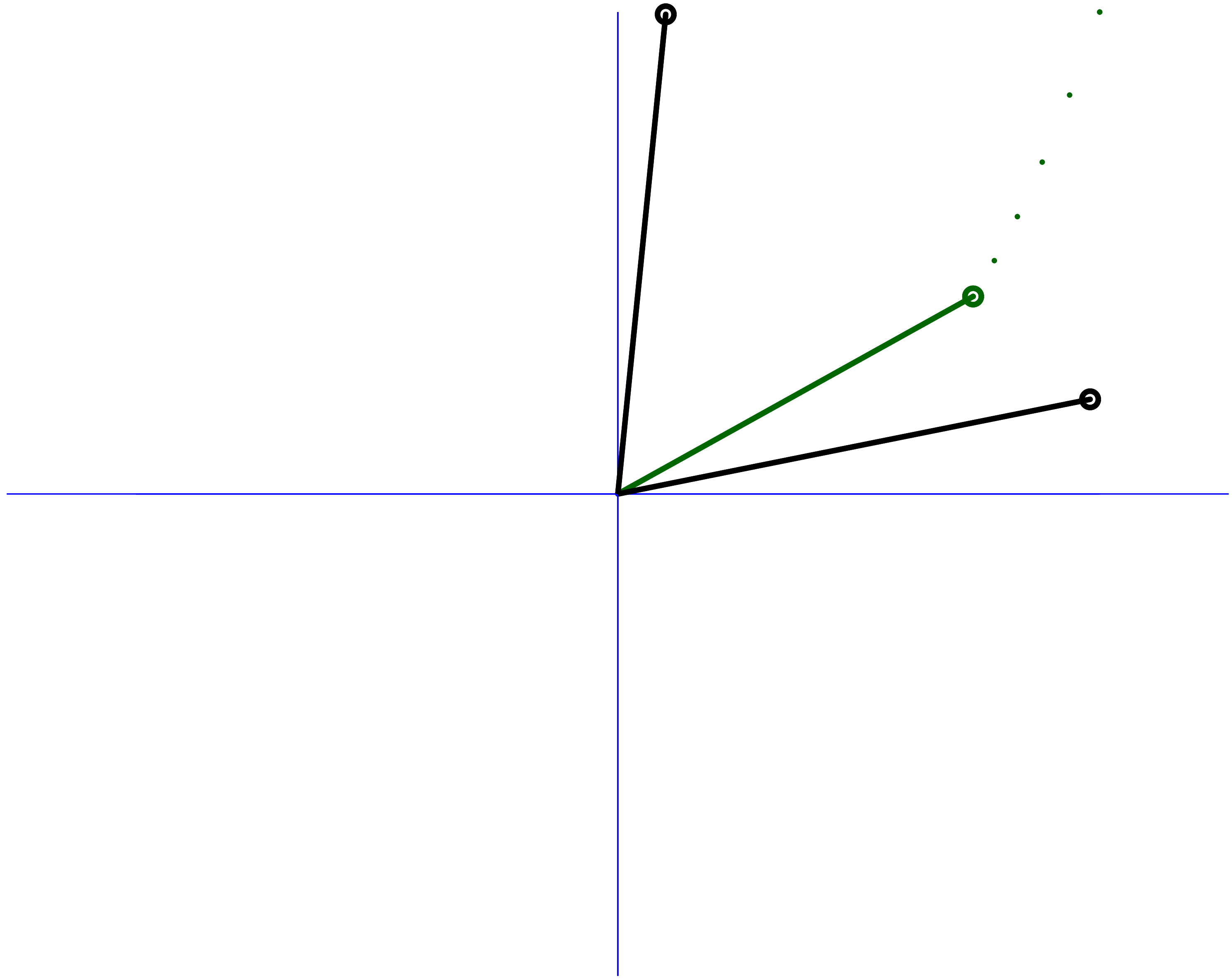
Iteratie in beeld

x_0

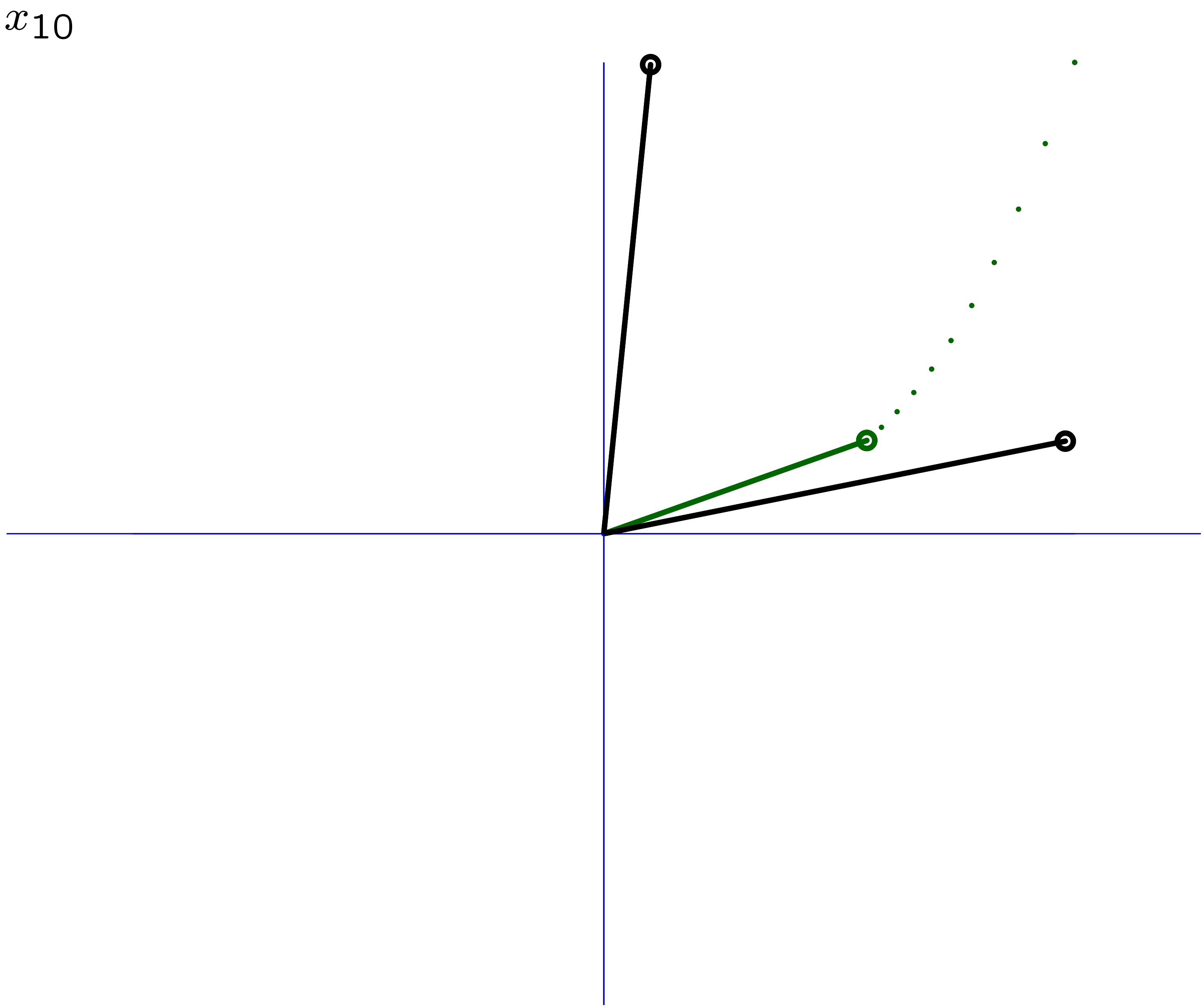


Iteratie in beeld

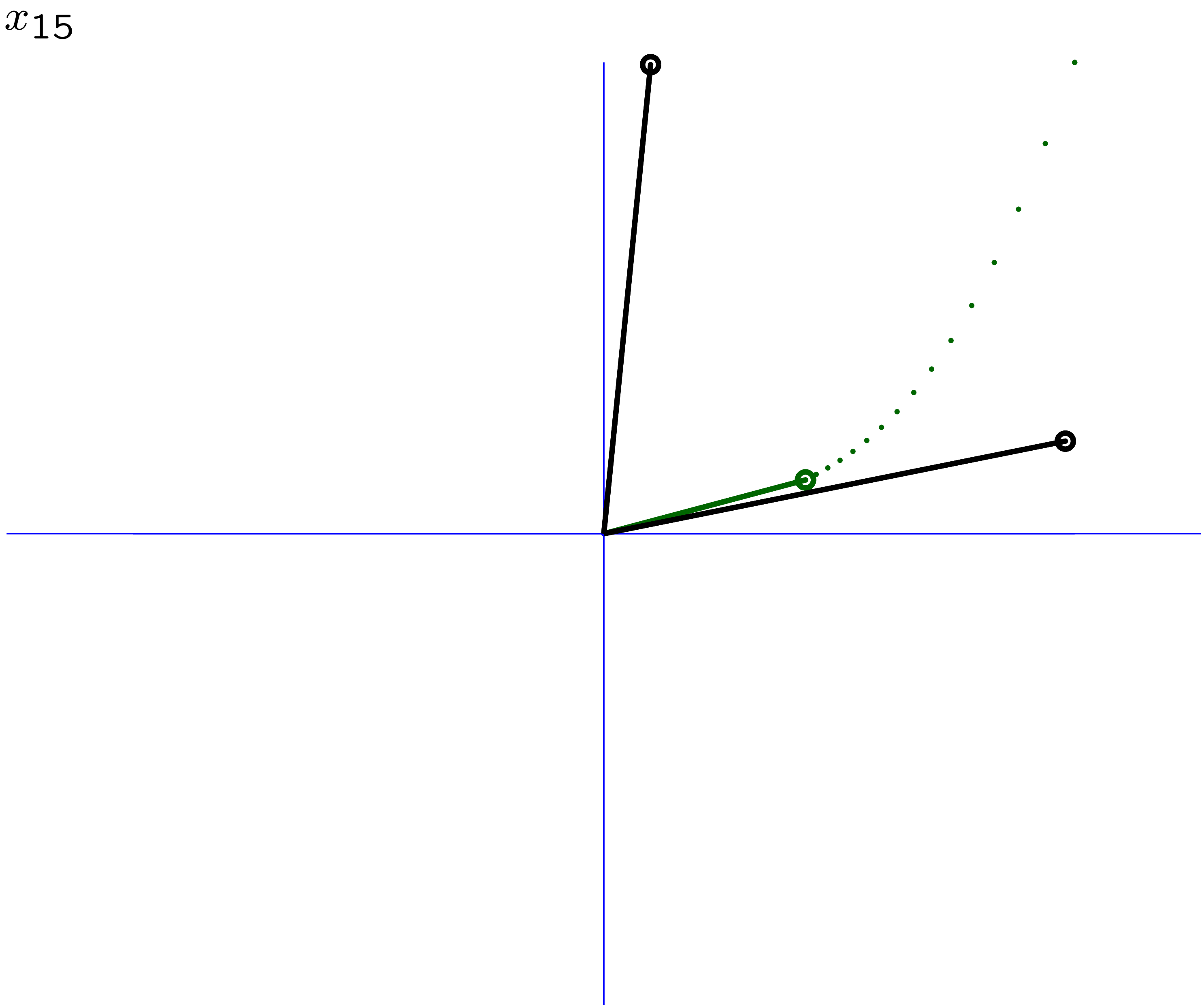
x_5



Iteratie in beeld

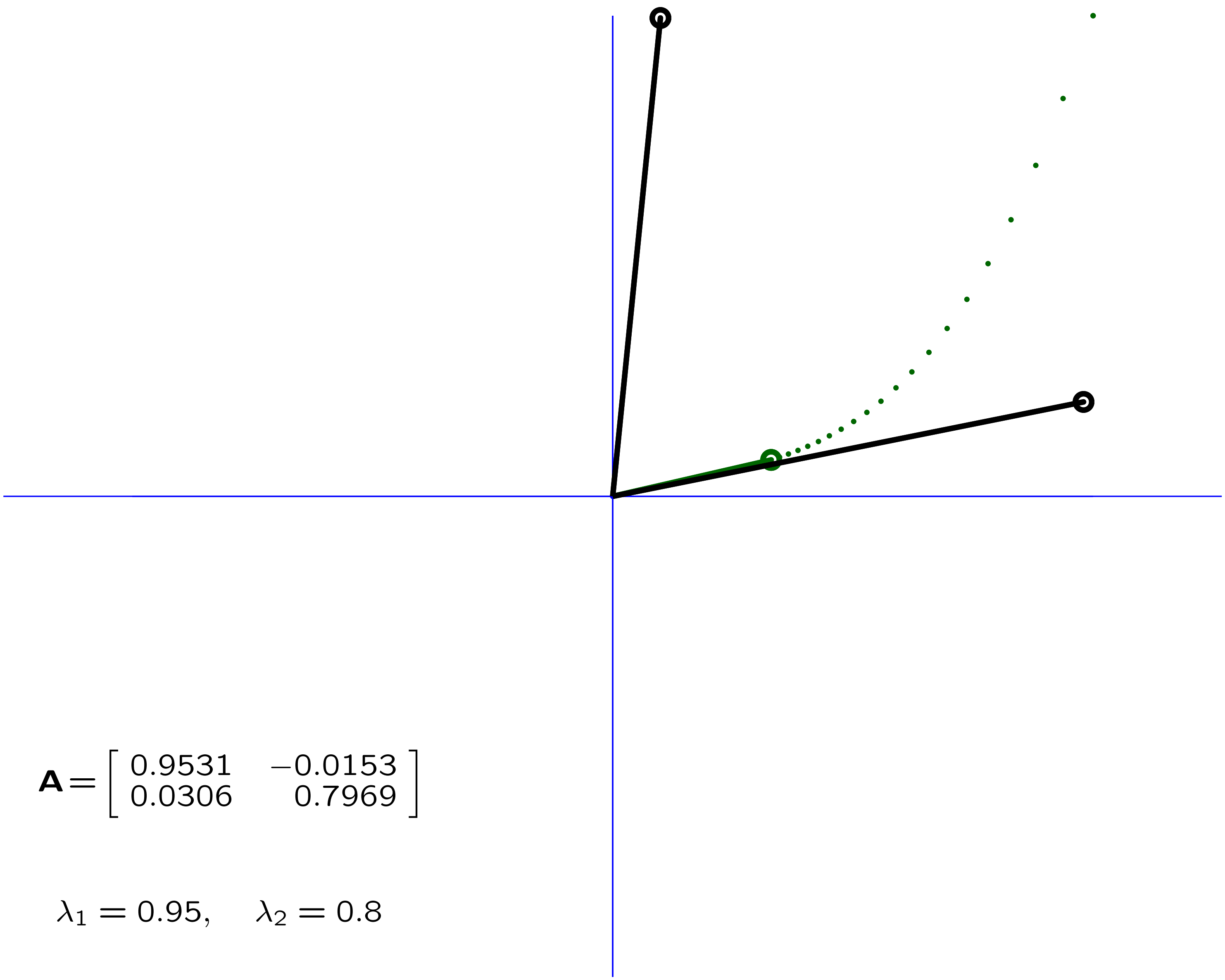


Iteratie in beeld



Iteratie in beeld

x_{20}

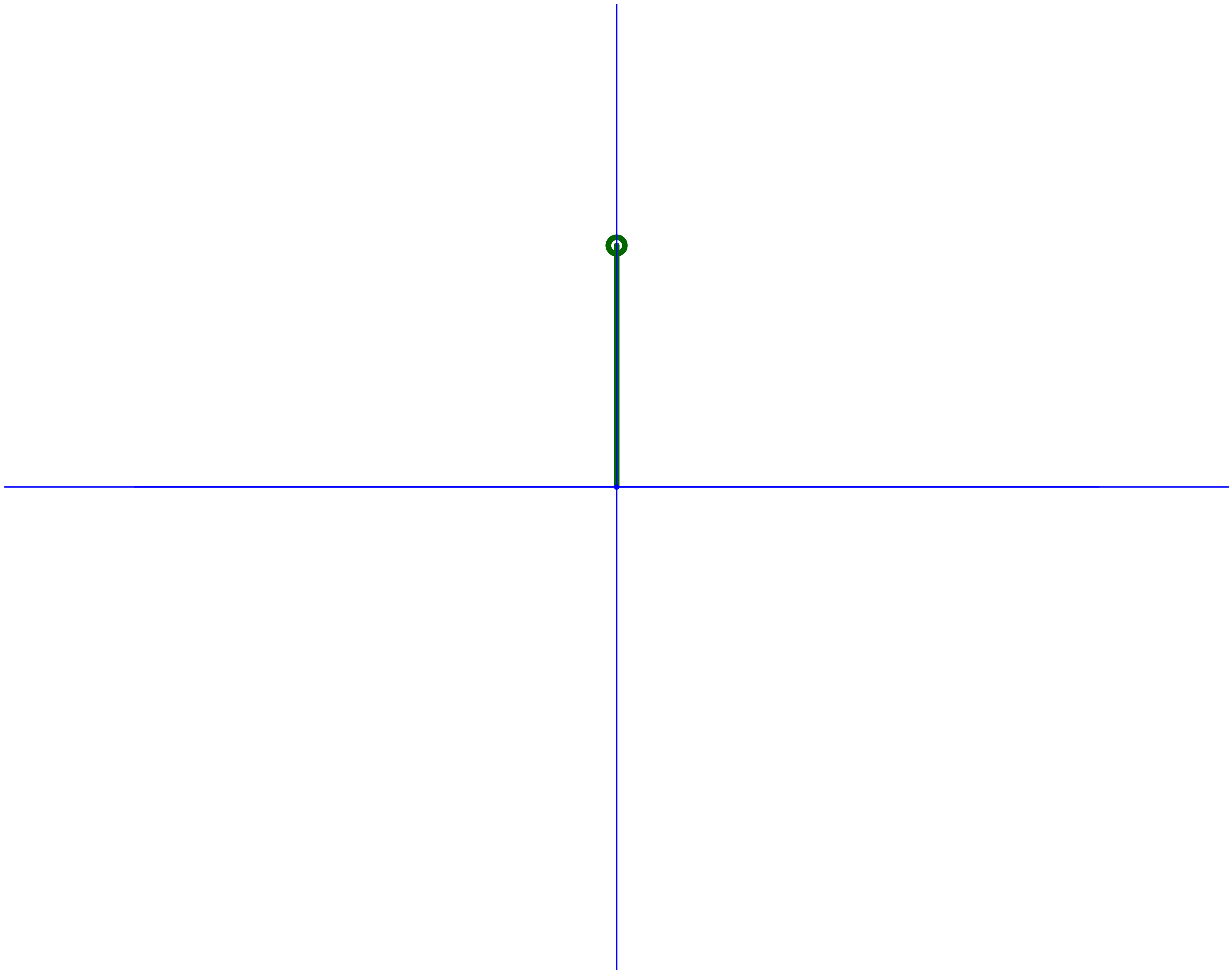


$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.9531 & -0.0153 \\ 0.0306 & 0.7969 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 0.95, \quad \lambda_2 = 0.8$$

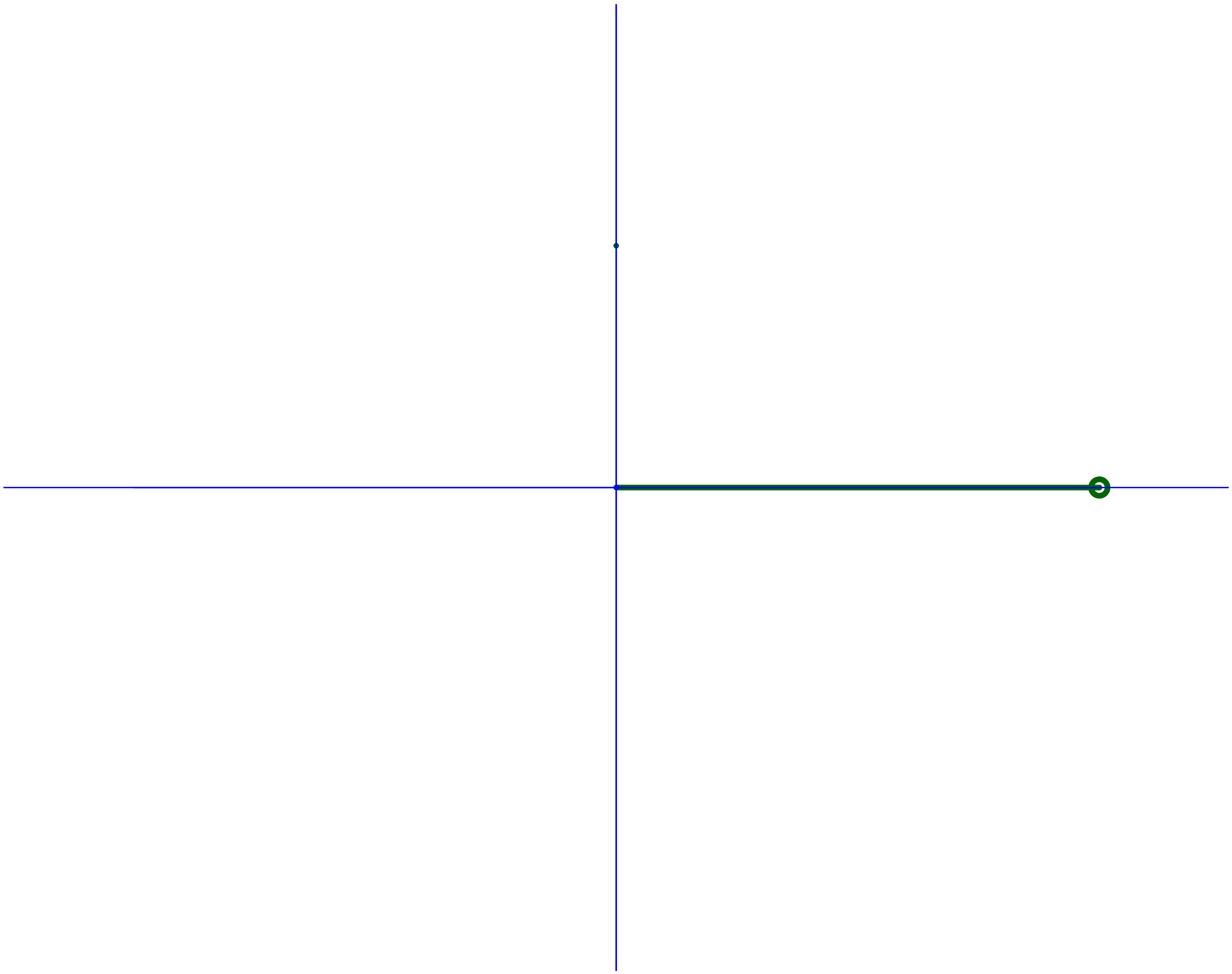
Iteratie in beeld

x_0



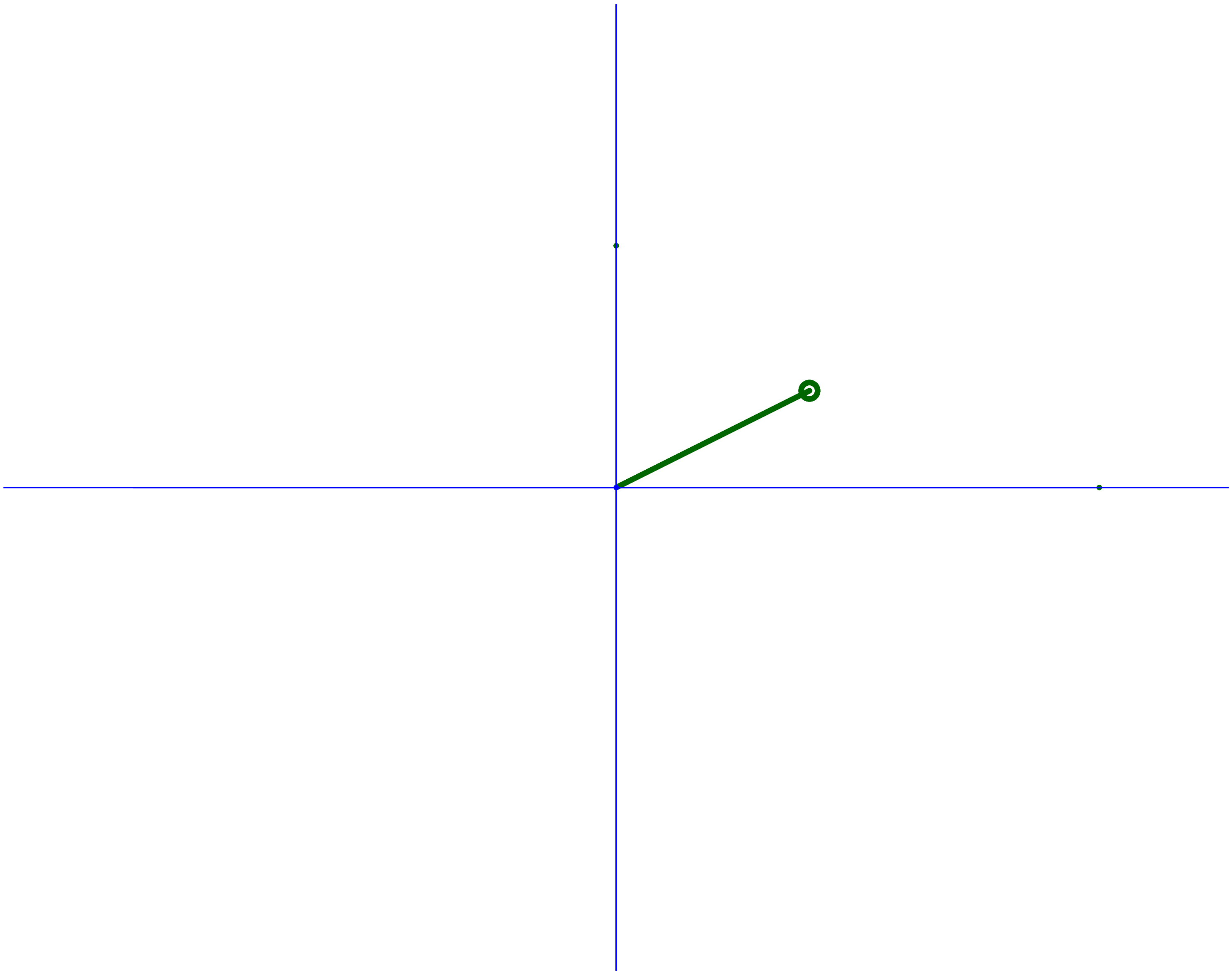
Iteratie in beeld

x_1



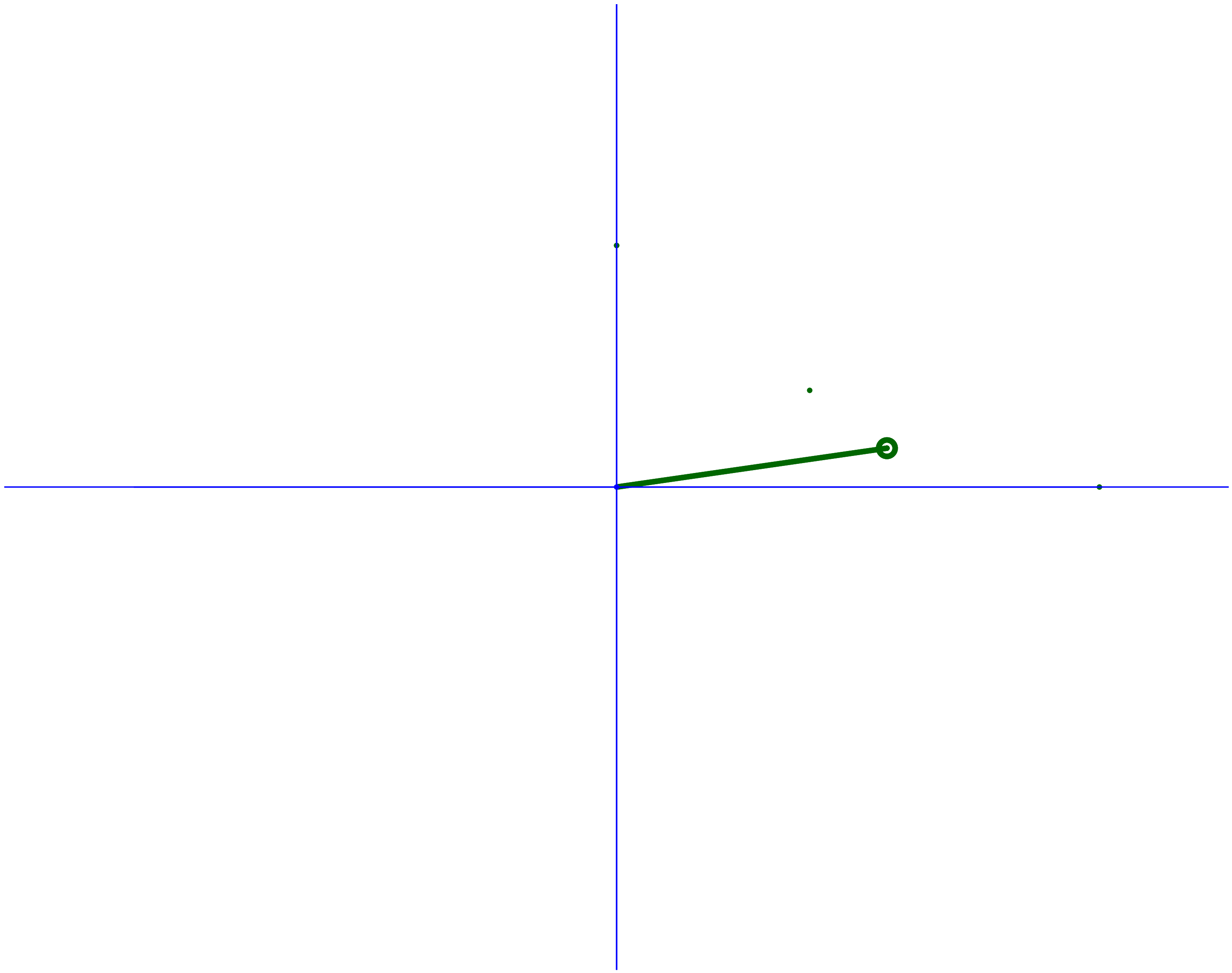
Iteratie in beeld

x_2



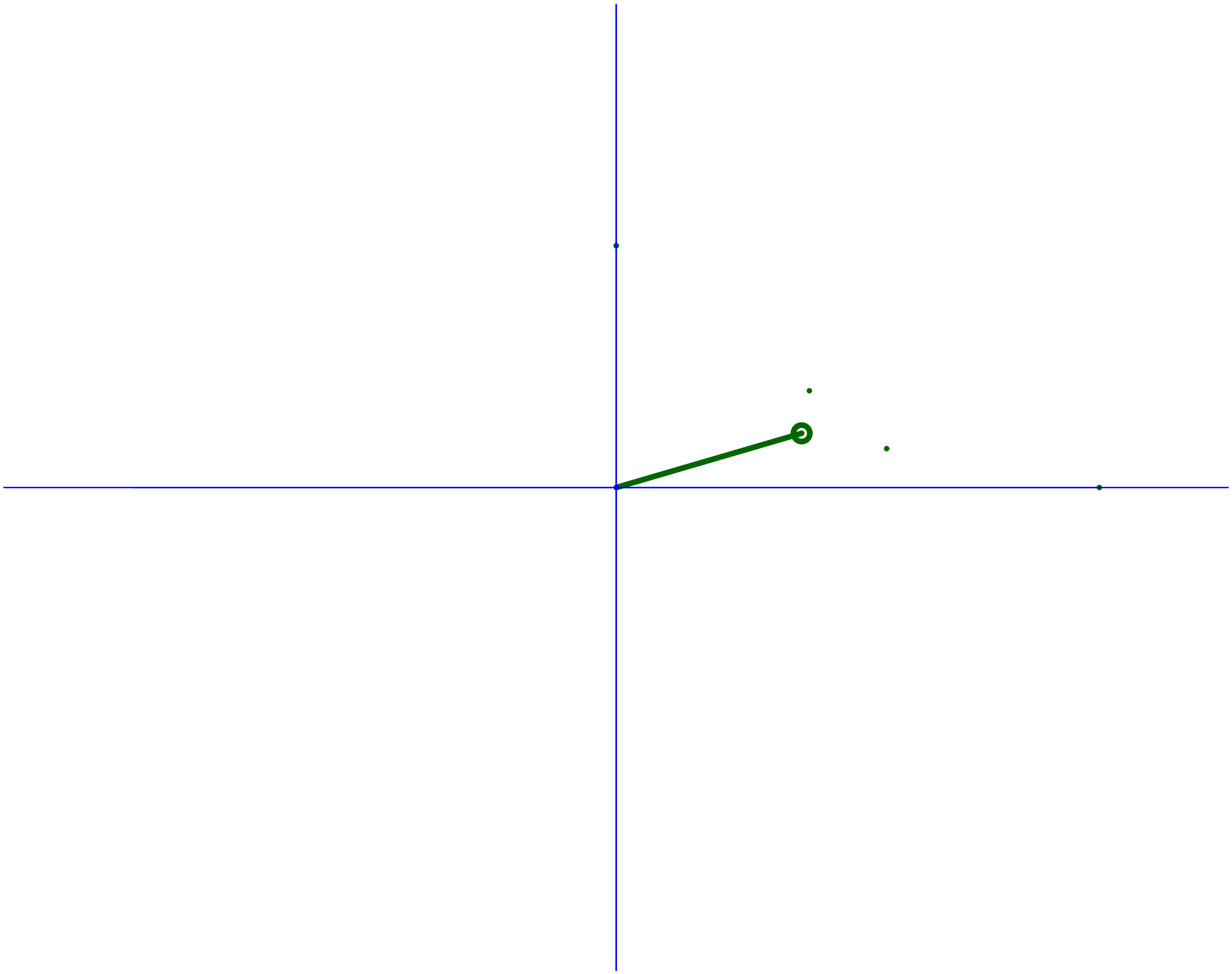
Iteratie in beeld

x_3



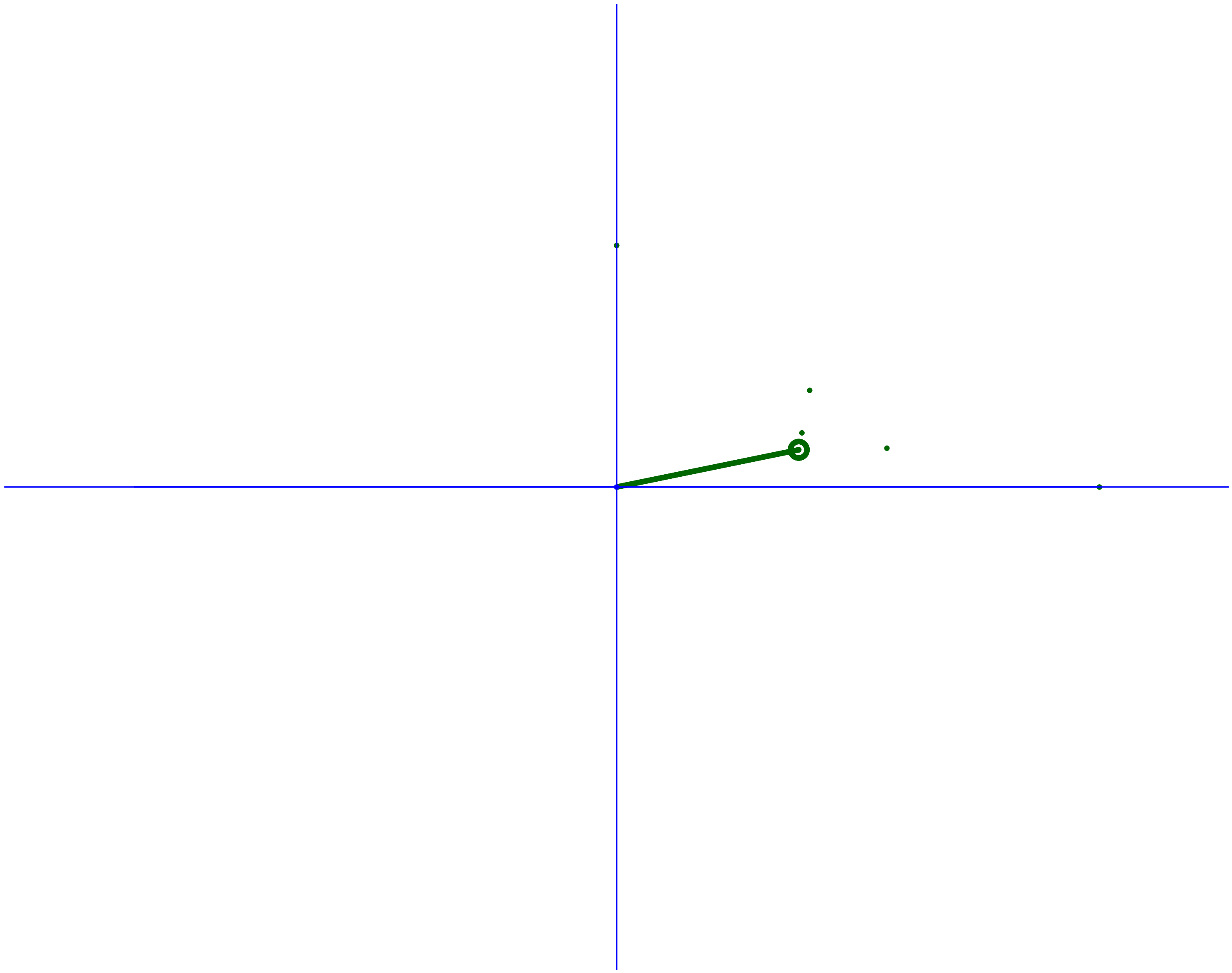
Iteratie in beeld

x_4



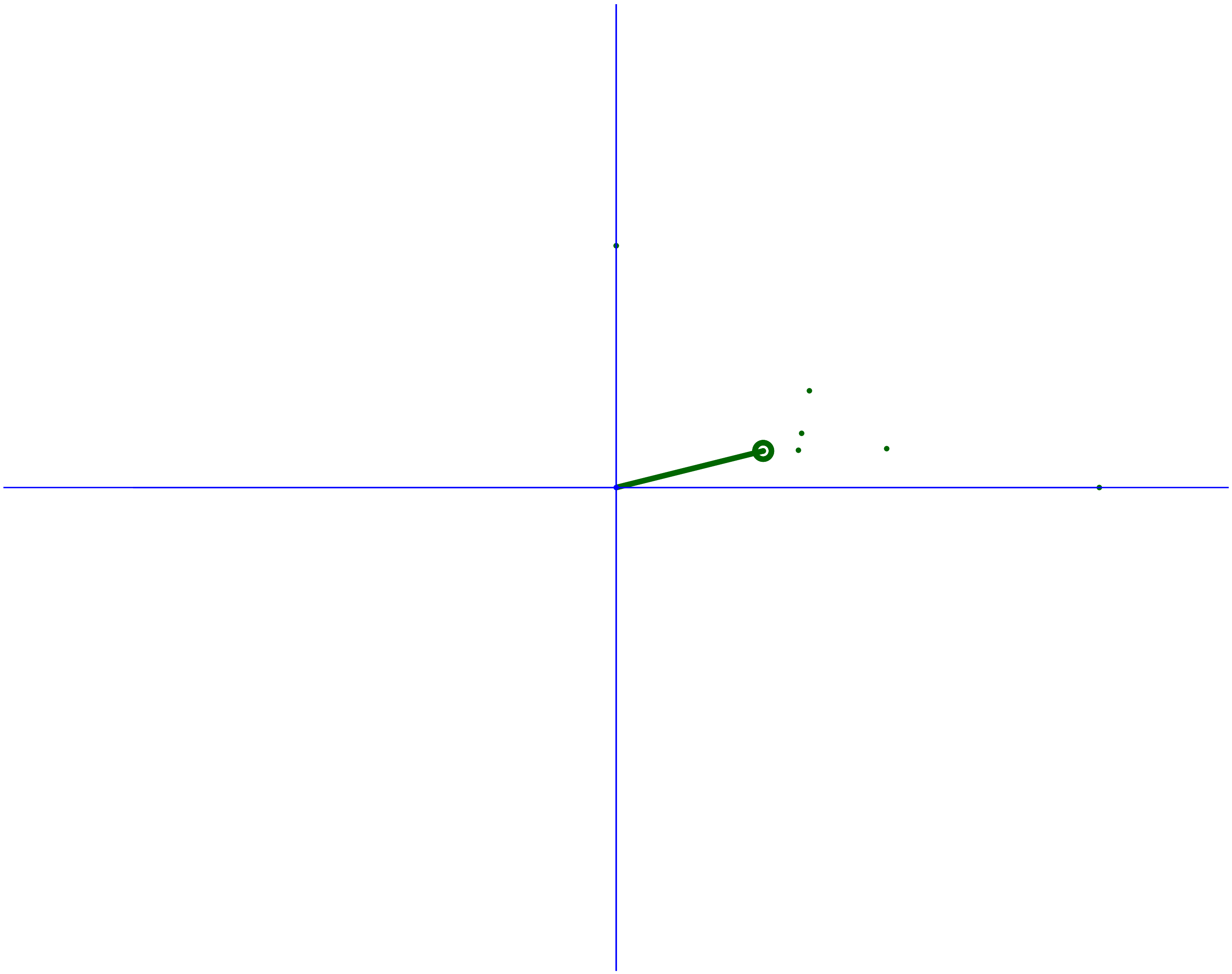
Iteratie in beeld

x_5



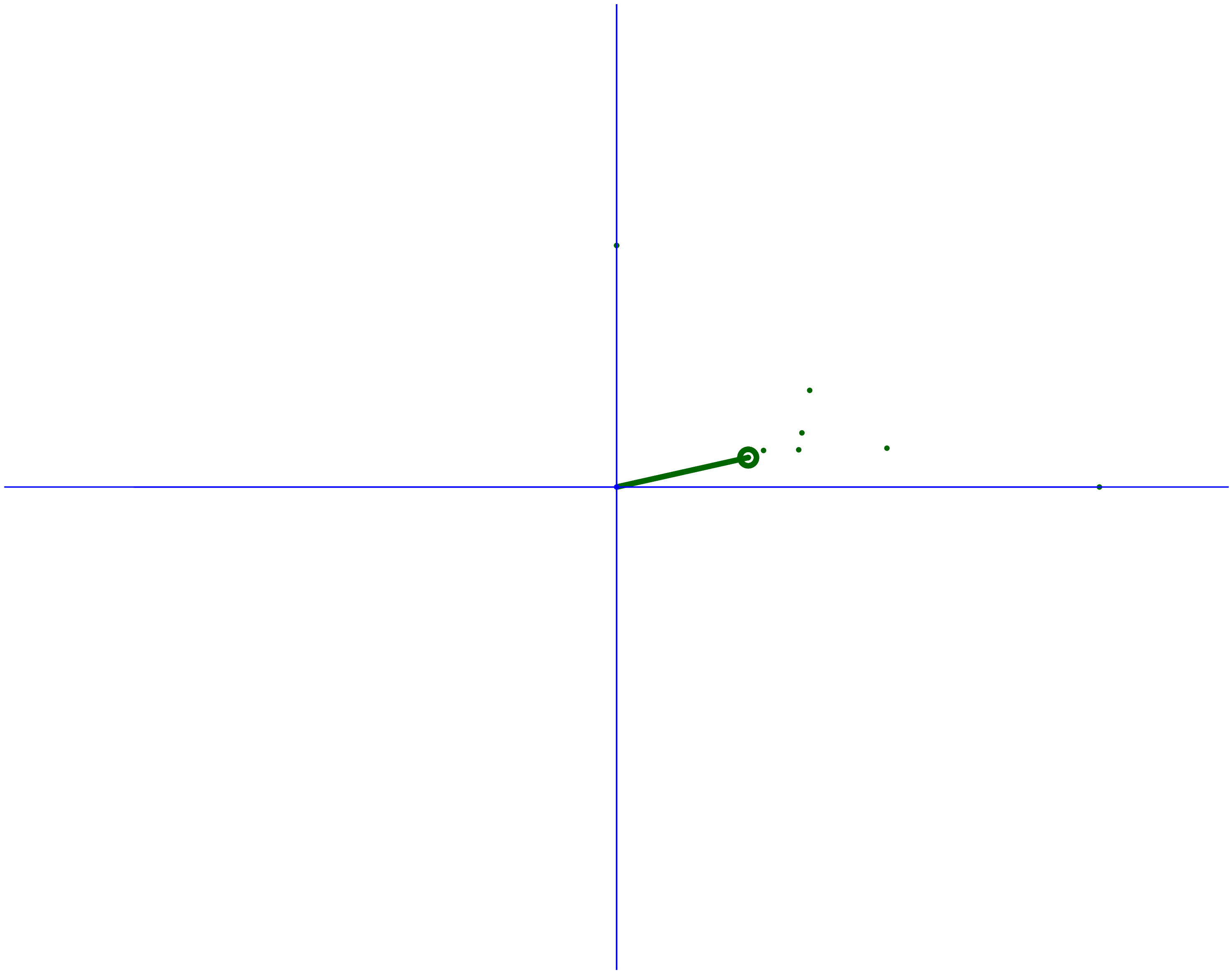
Iteratie in beeld

x_6



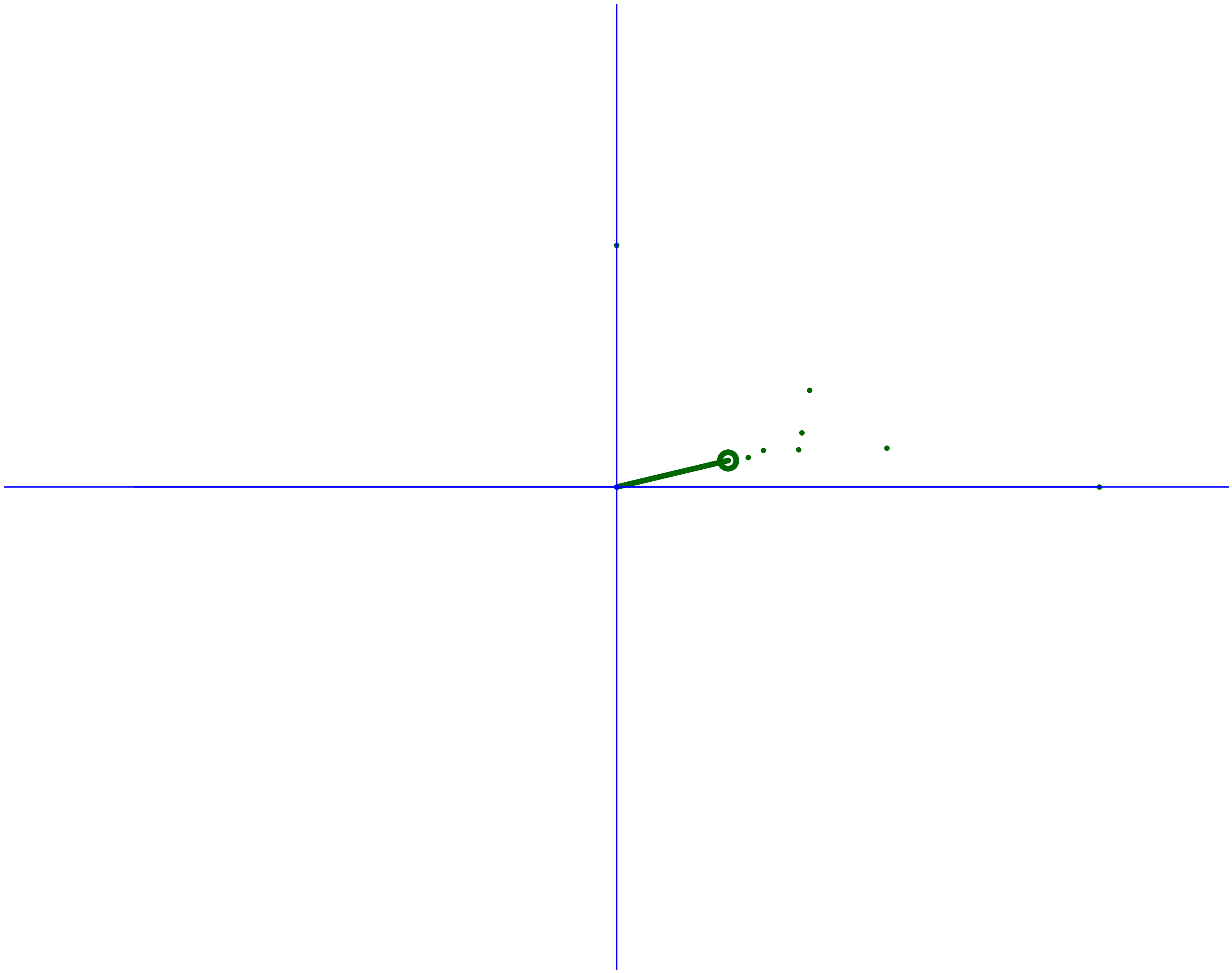
Iteratie in beeld

x_7



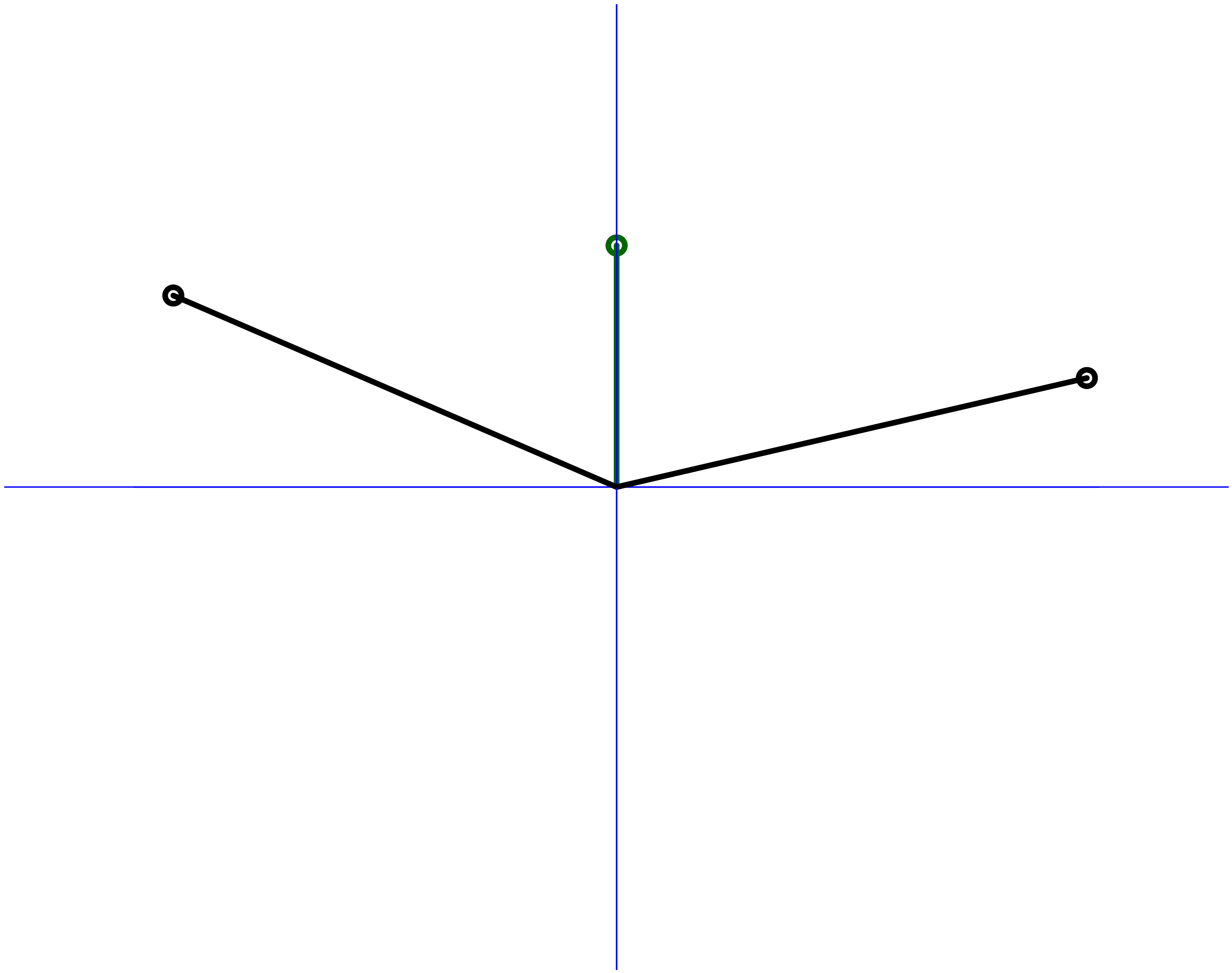
Iteratie in beeld

x_8



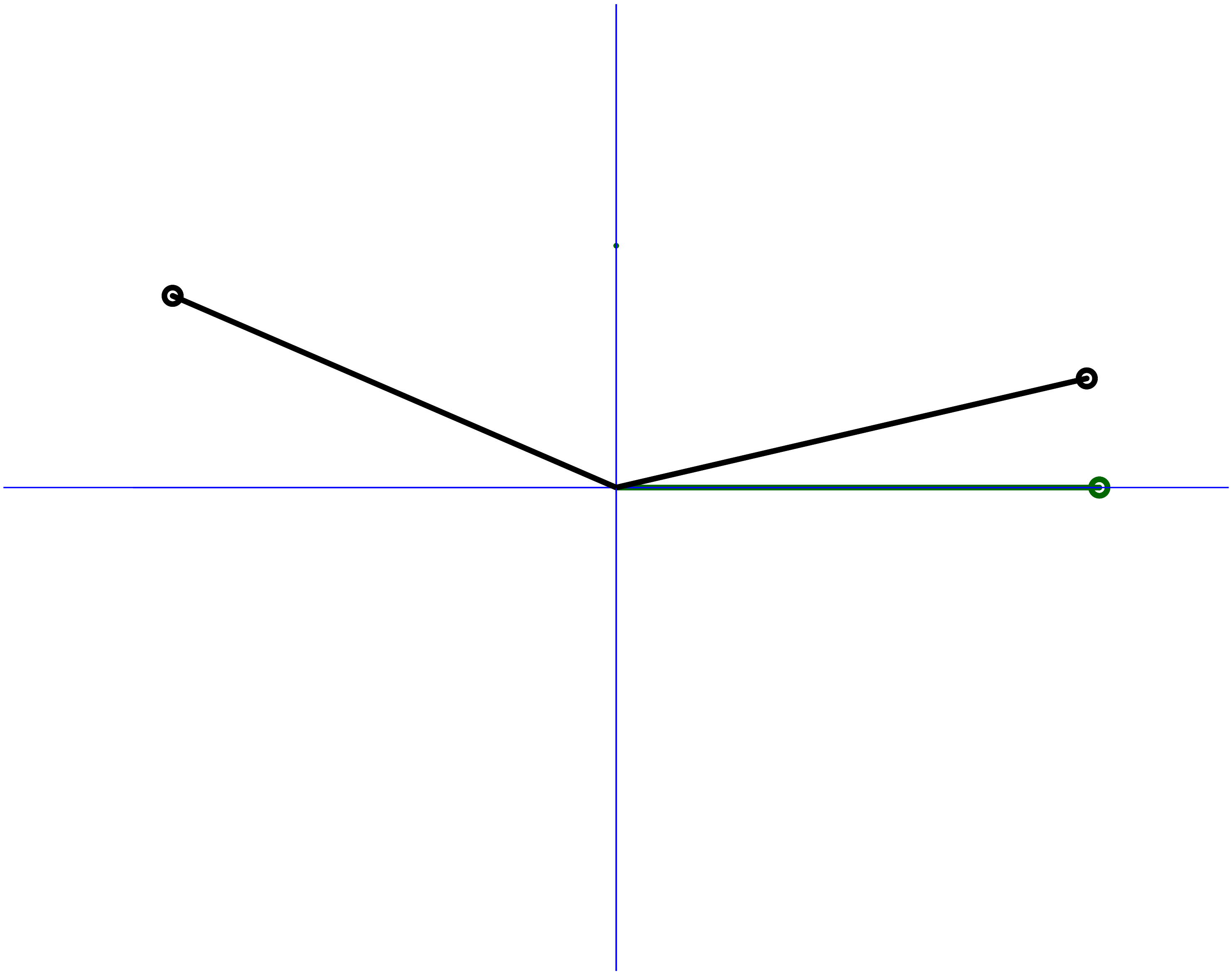
Iteratie in beeld

x_0



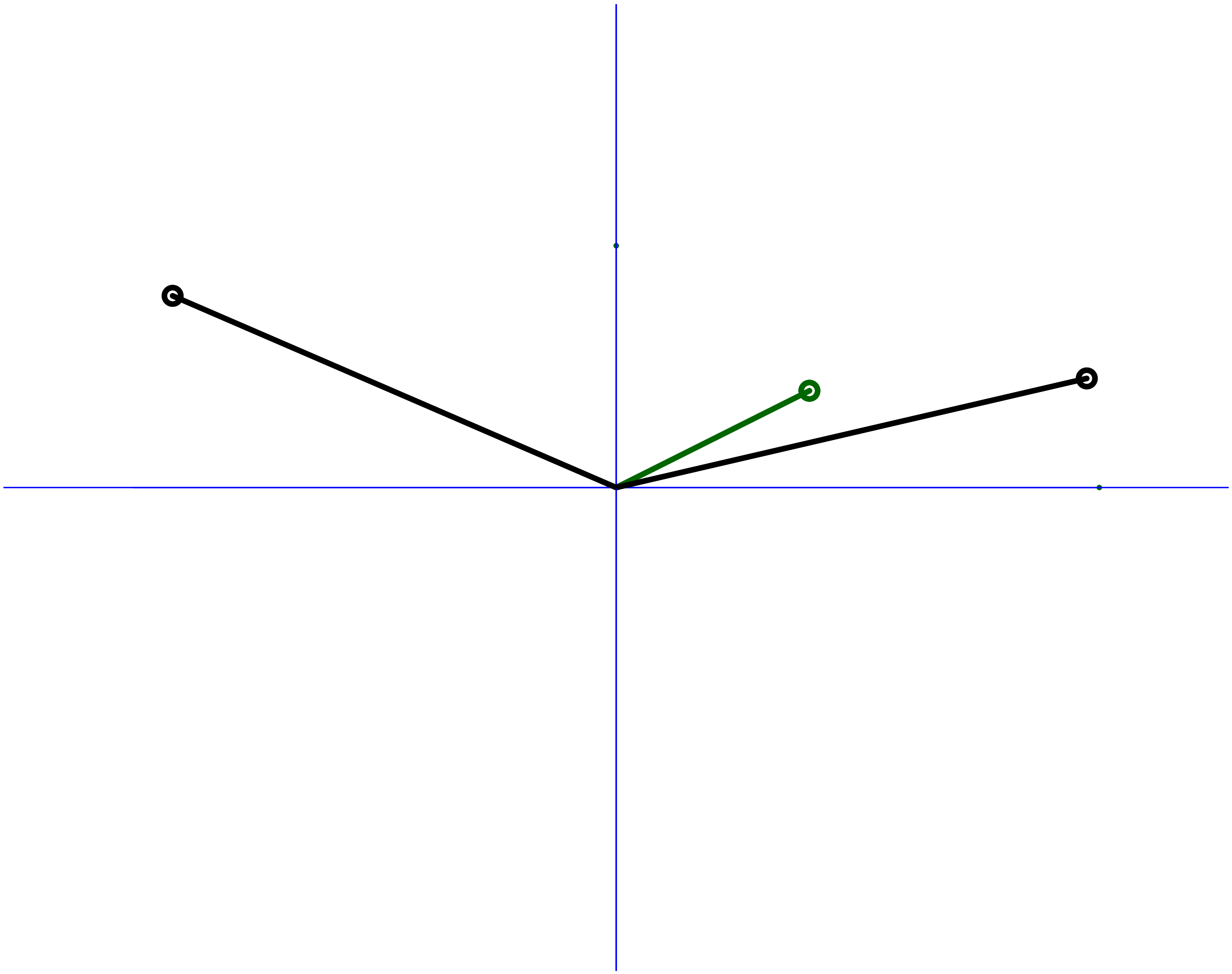
Iteratie in beeld

x_1

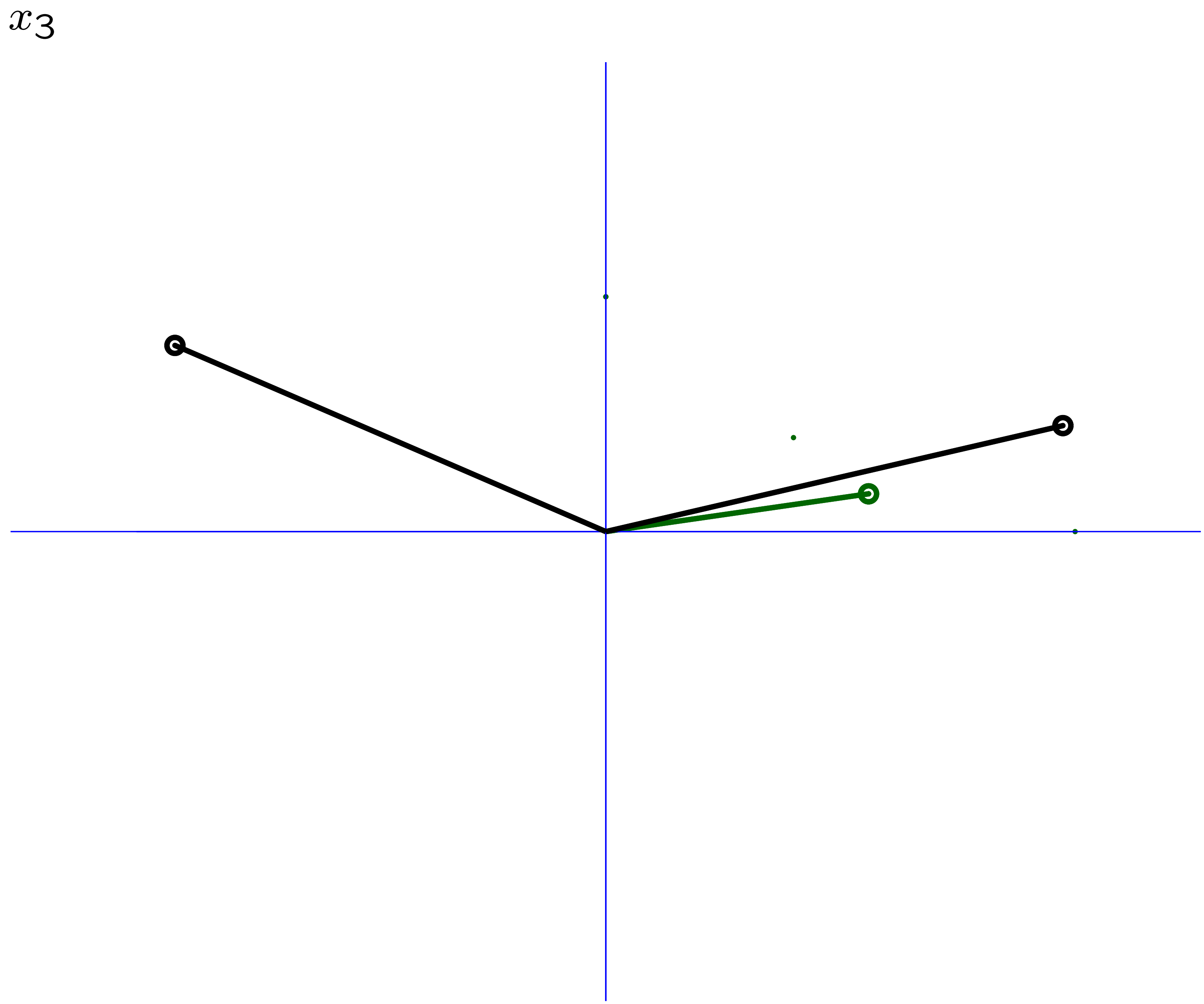


Iteratie in beeld

x_2

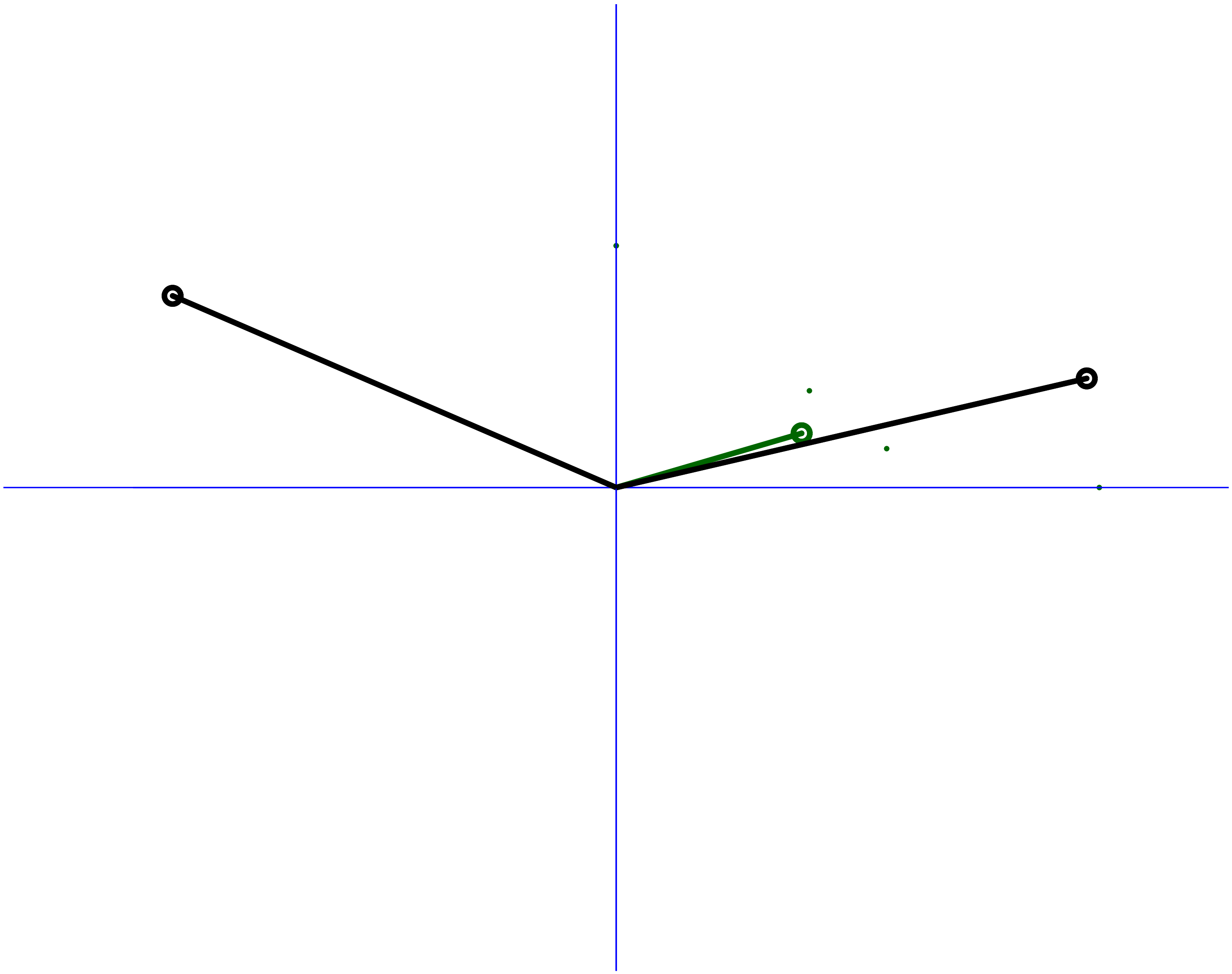


Iteratie in beeld



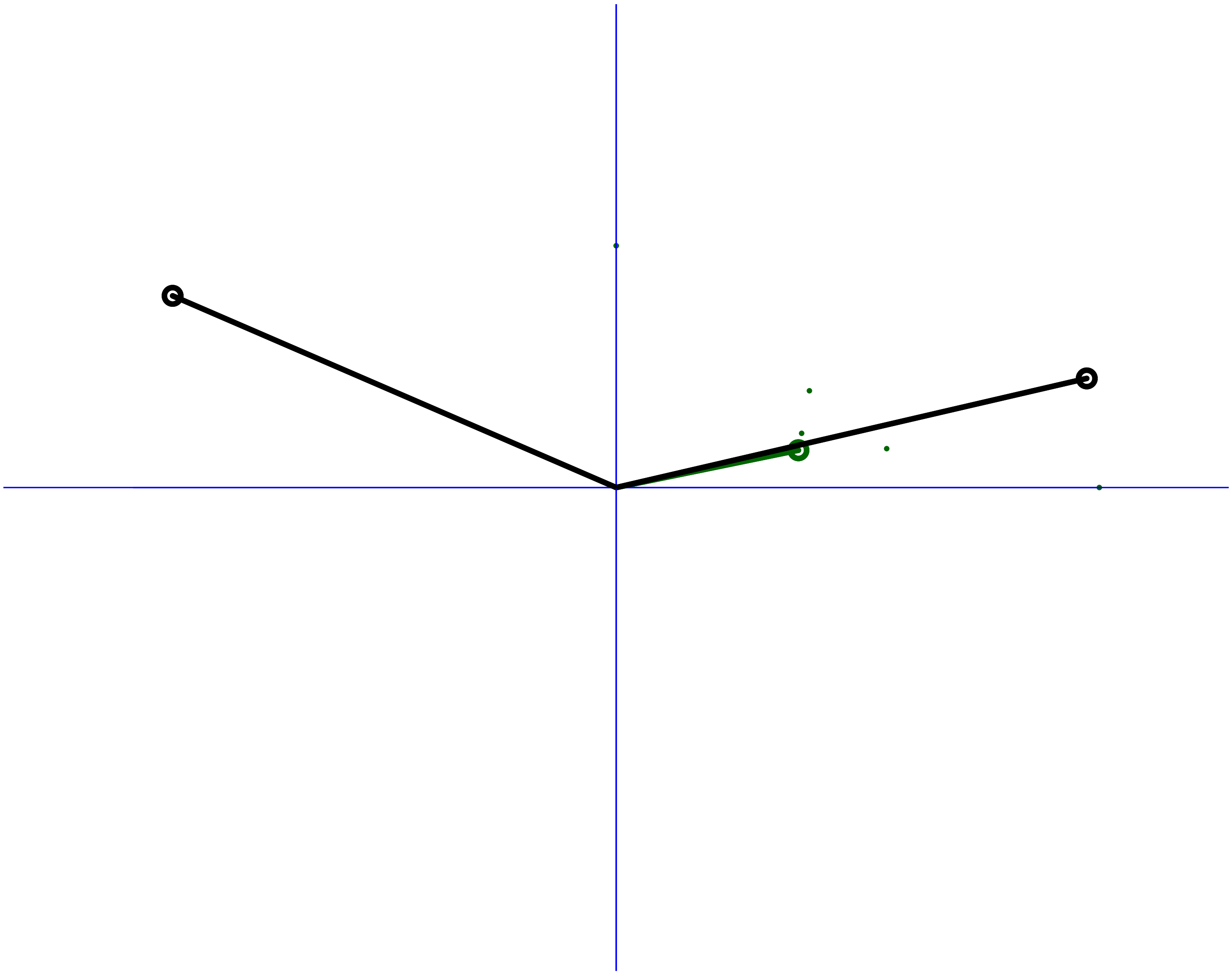
Iteratie in beeld

x_4



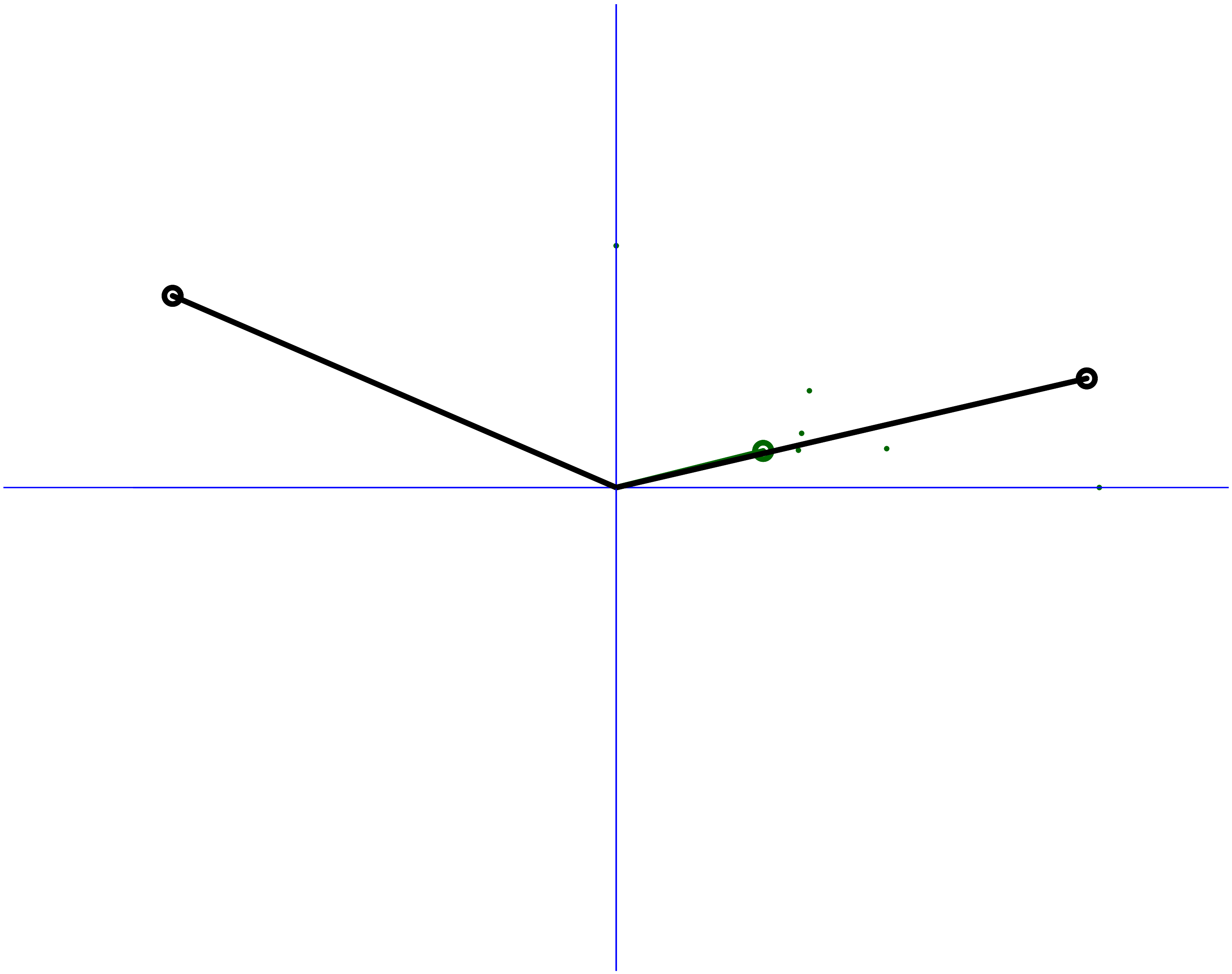
Iteratie in beeld

x_5



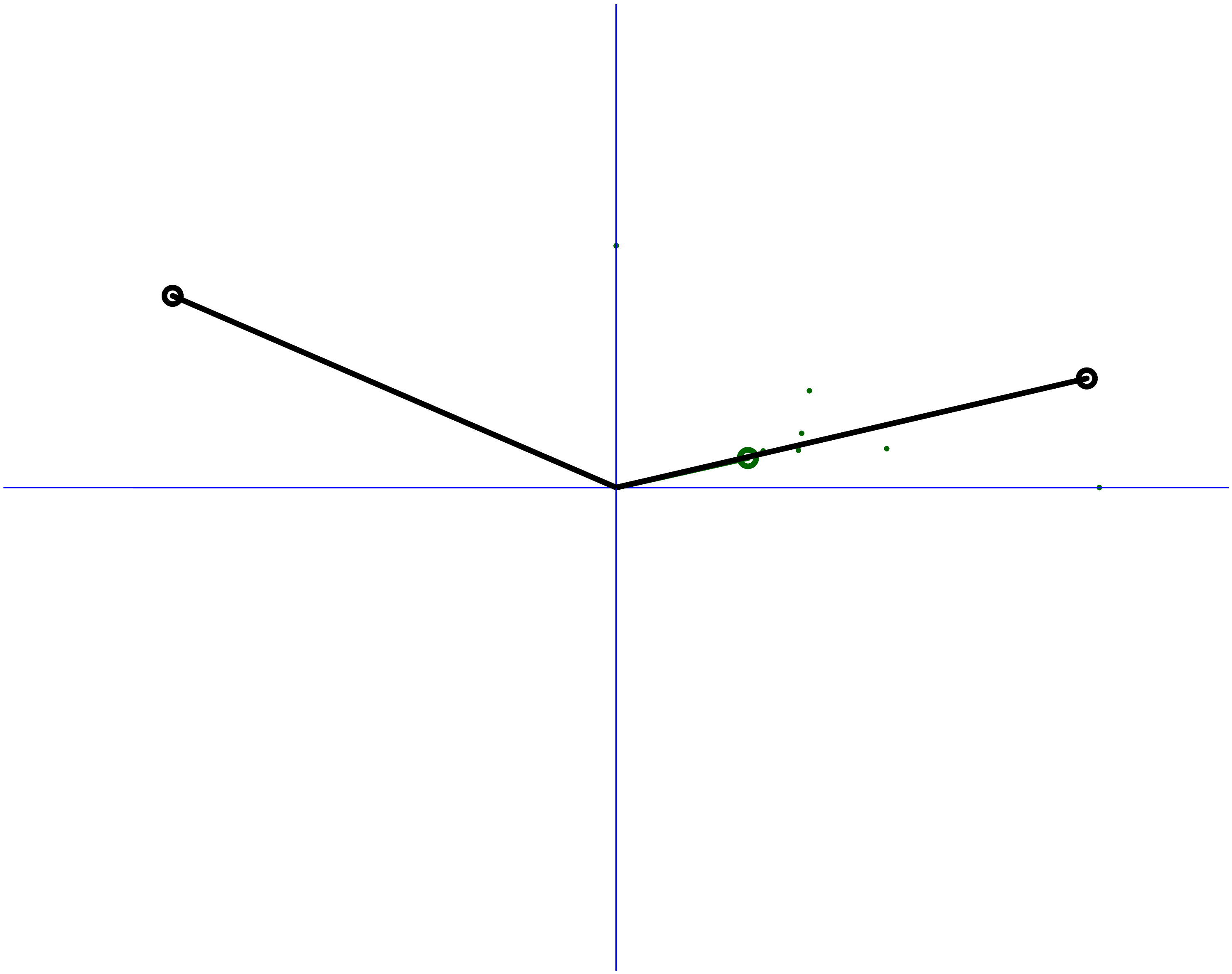
Iteratie in beeld

x_6



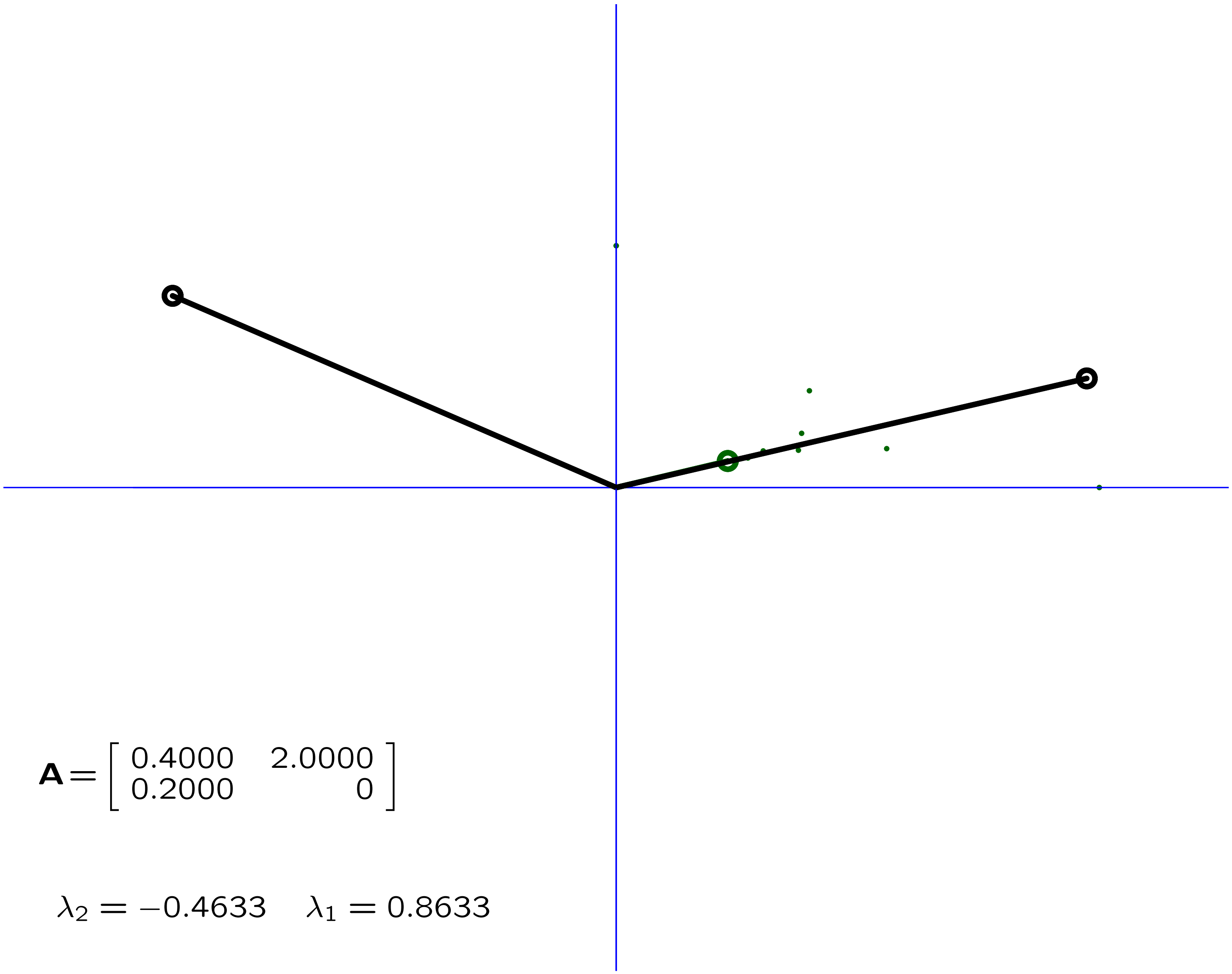
Iteratie in beeld

x_7



Iteratie in beeld

x_8

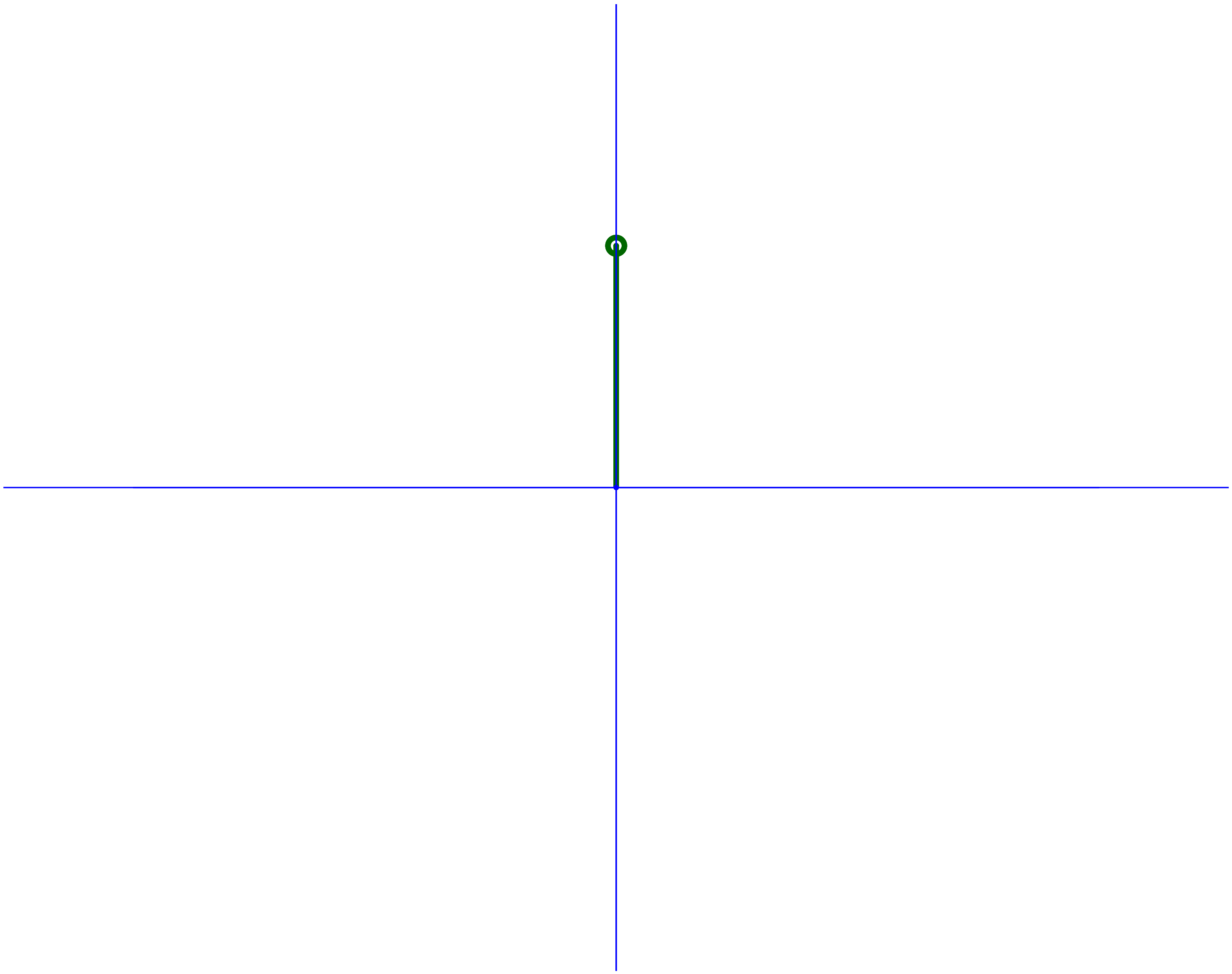


$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.4000 & 2.0000 \\ 0.2000 & 0 \end{bmatrix}$$

$\lambda_2 = -0.4633 \quad \lambda_1 = 0.8633$

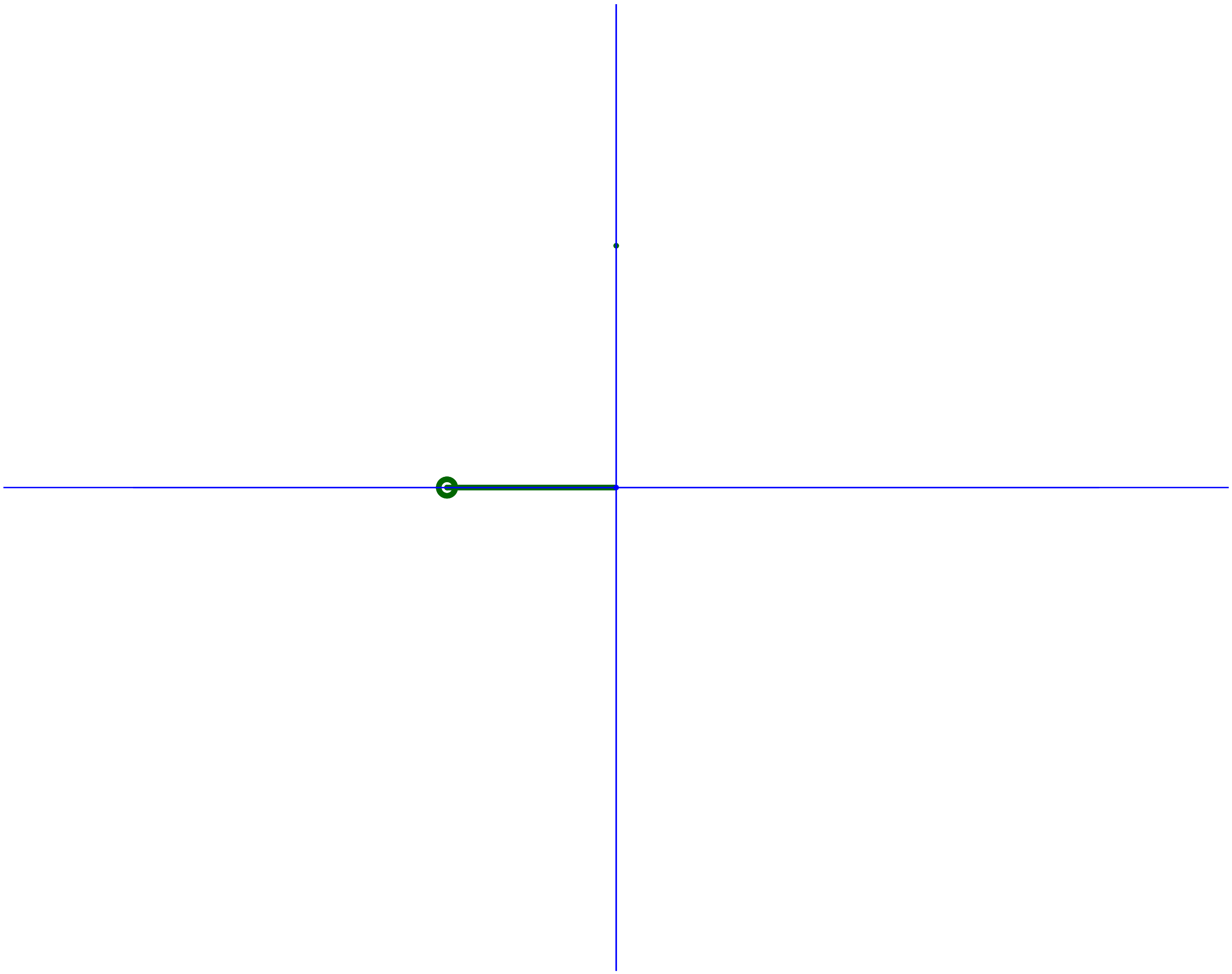
Iteratie in beeld

x_0



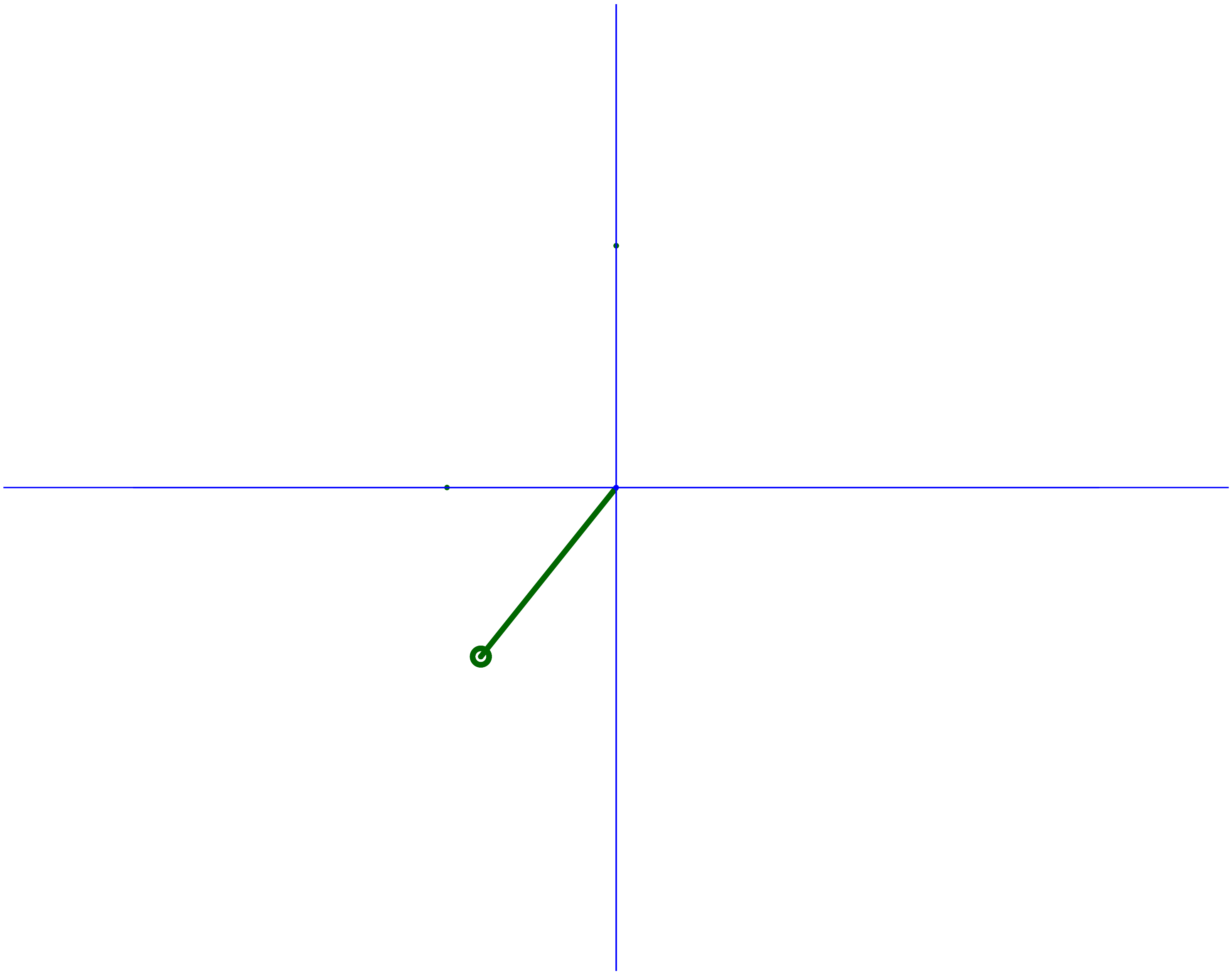
Iteratie in beeld

x_1



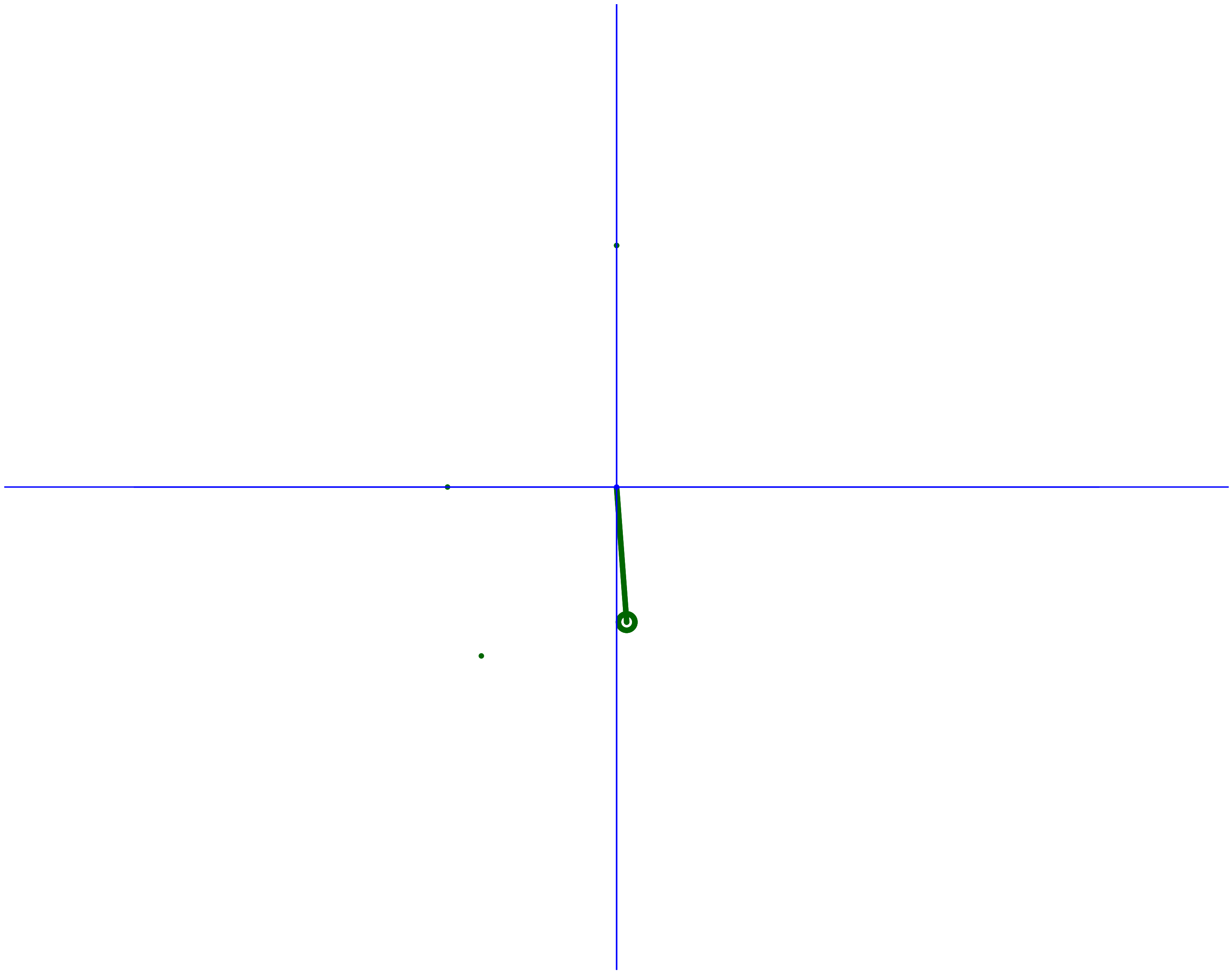
Iteratie in beeld

x_2



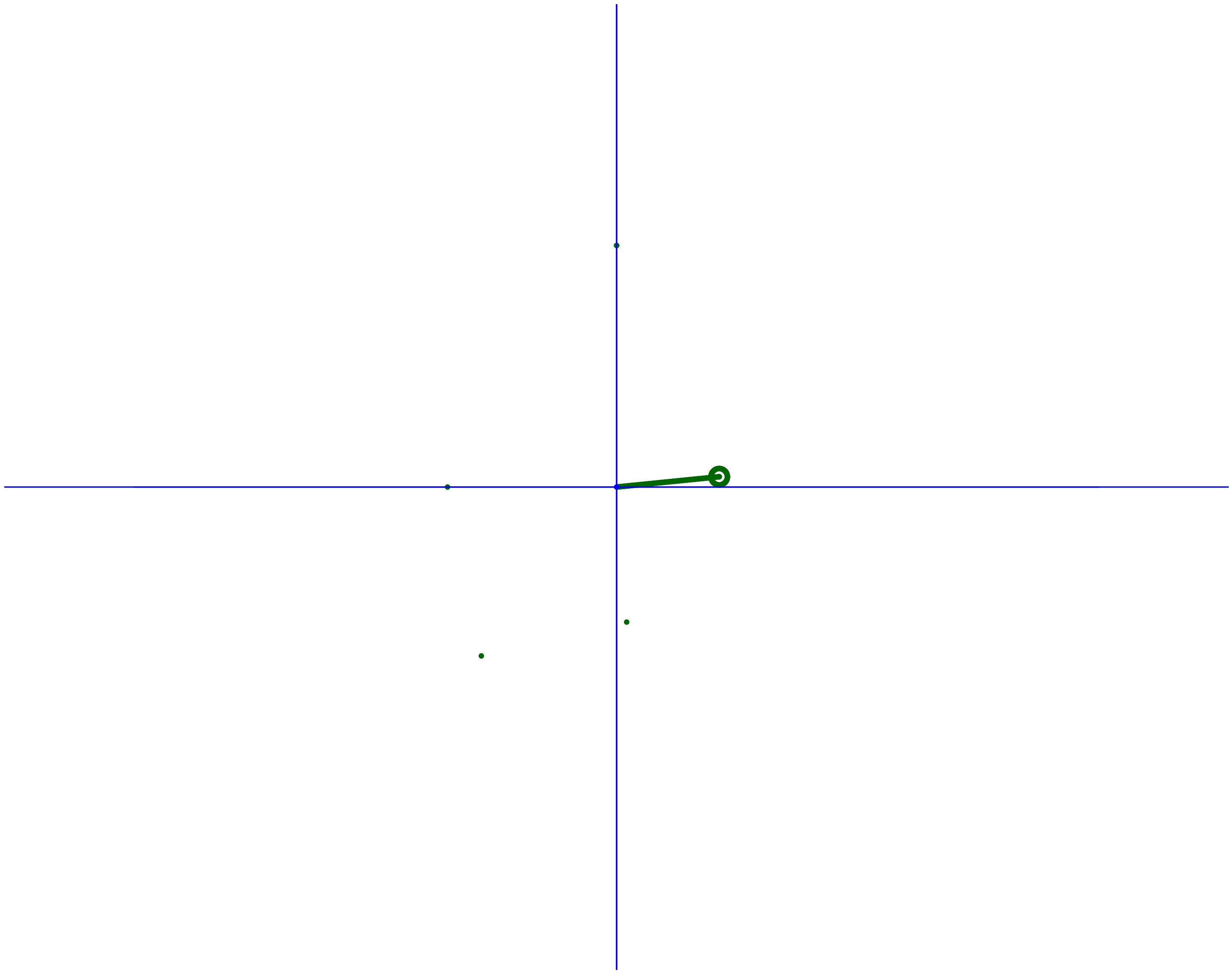
Iteratie in beeld

x_3



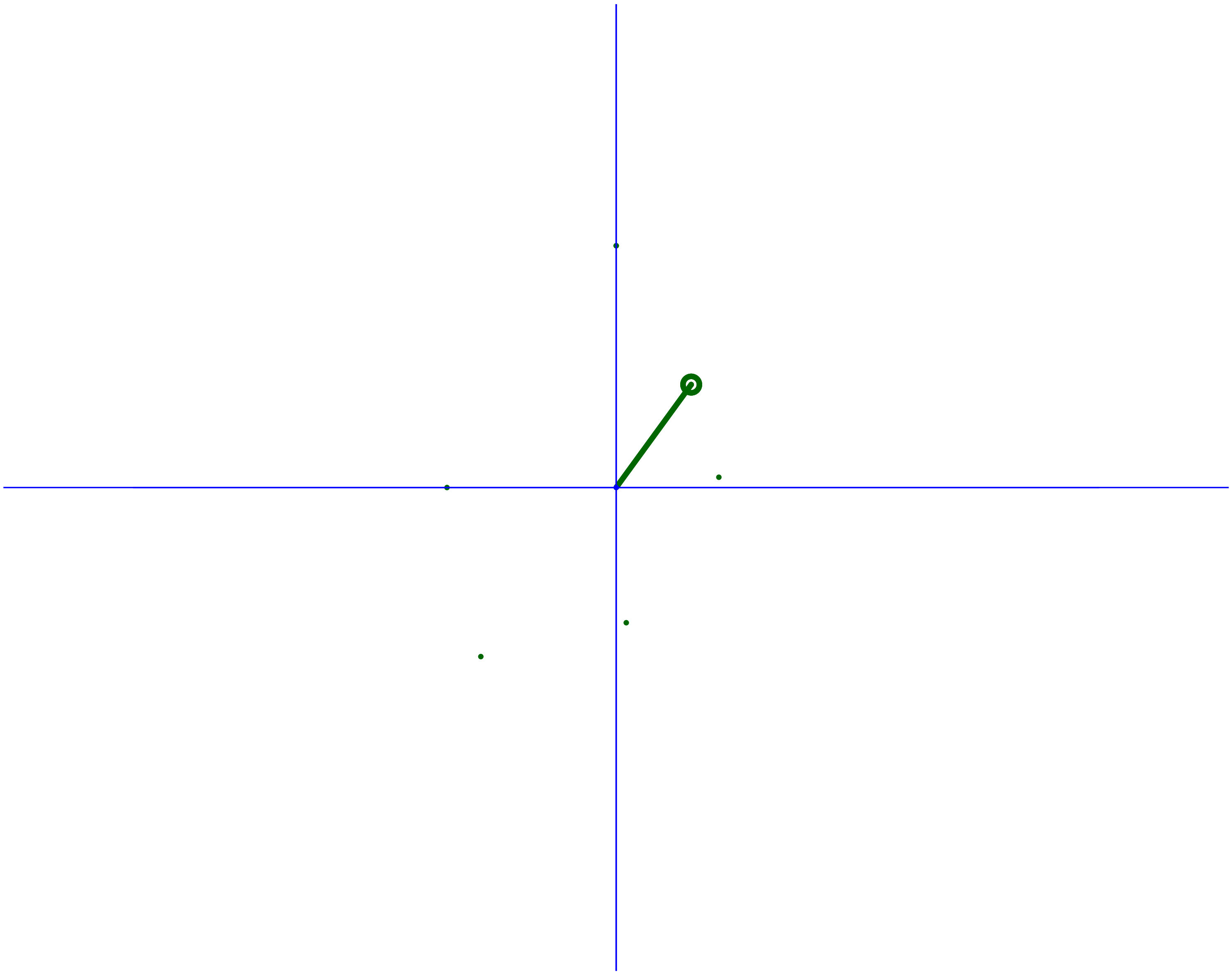
Iteratie in beeld

x_4



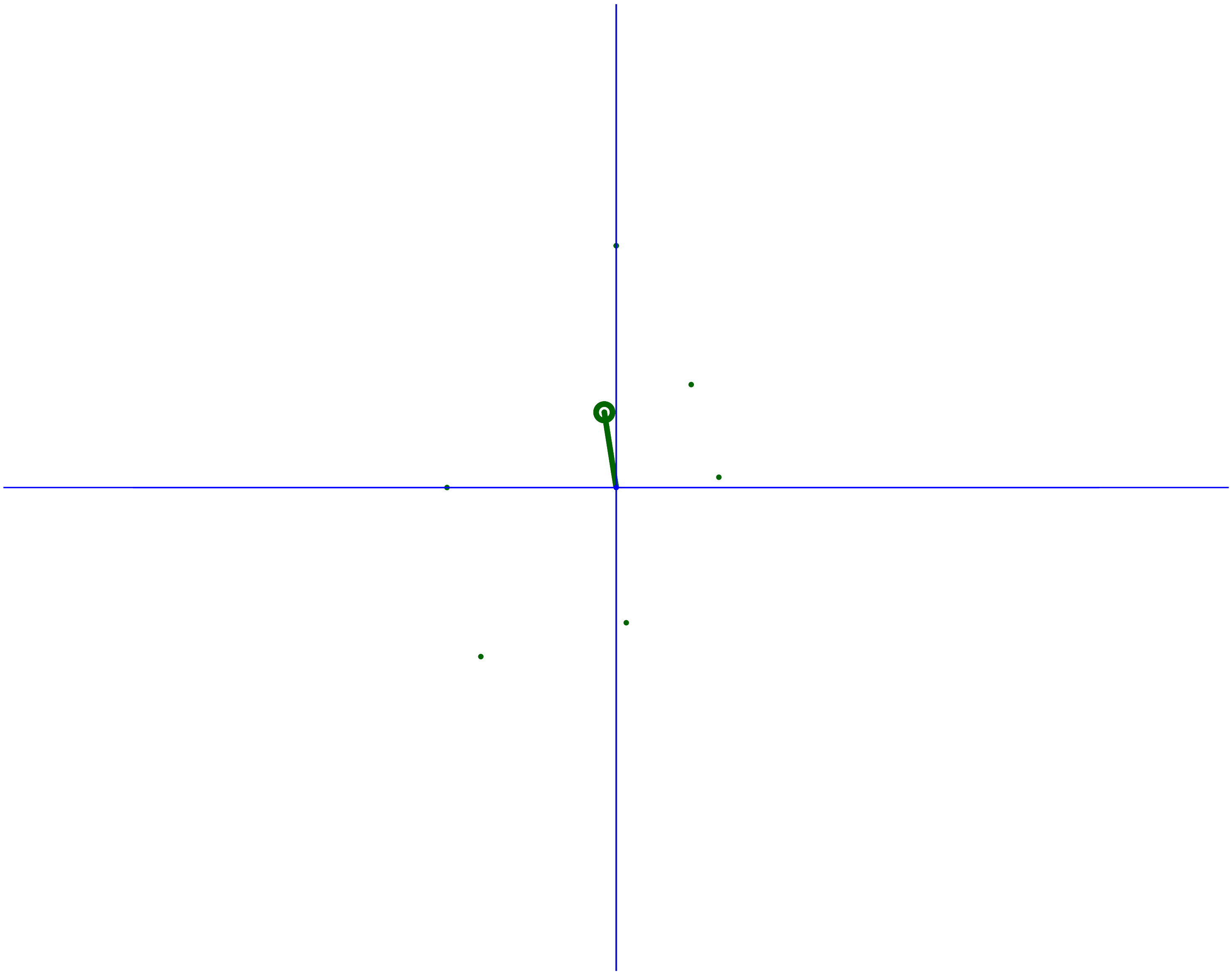
Iteratie in beeld

x_5



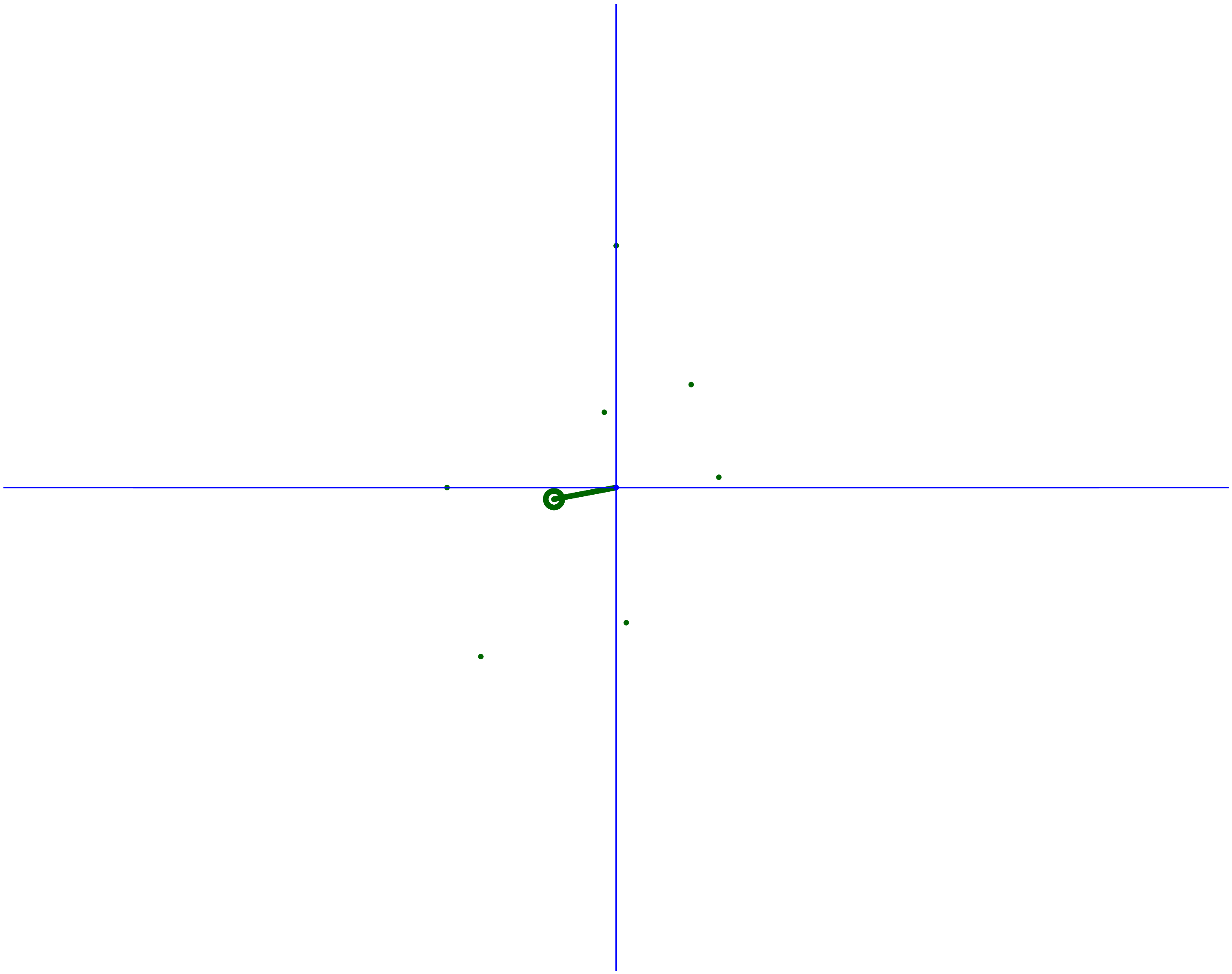
Iteratie in beeld

x_6



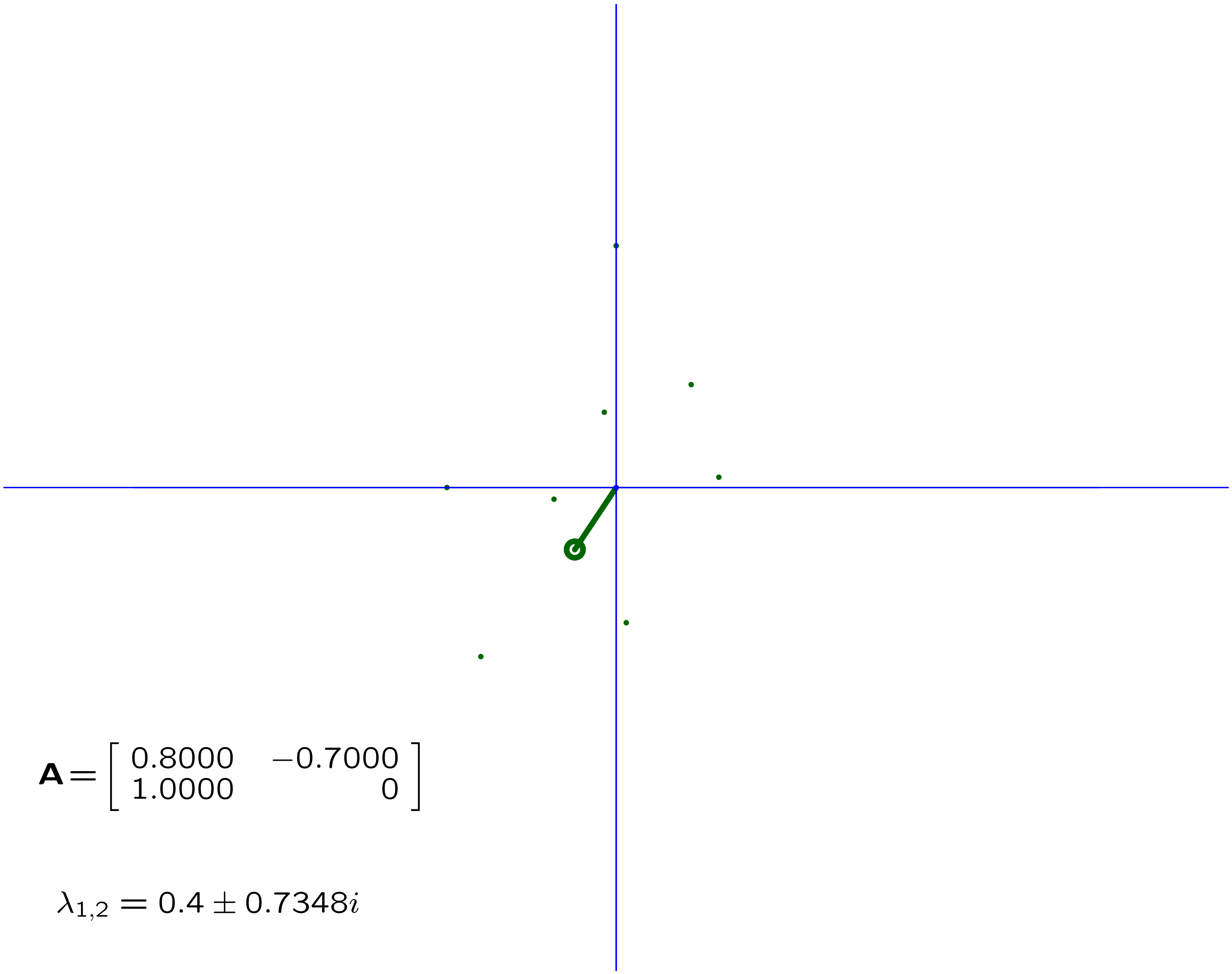
Iteratie in beeld

x_7



Iteratie in beeld

x_8



$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.8000 & -0.7000 \\ 1.0000 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_{1,2} = 0.4 \pm 0.7348i$$

Complexe getallen

$\lambda = a + ib \in \mathbb{C}$ dan is $a = \mathrm{Re}(\lambda)$ en $b = \mathrm{Im}(\lambda)$.

$$a + ib = r\,e^{i\phi}, \quad a = \tfrac{1}{2}(\lambda + \bar{\lambda}), \quad b = \tfrac{1}{2i}(\lambda - \bar{\lambda})$$

voor $\quad r = \sqrt{a^2 + b^2} = |\lambda| \geq 0 \qquad$ en

$\phi \in [0, 2\pi)$ zodat $a = r\cos(\phi)$, $b = r\sin(\phi)$ $\quad (\tan(\phi) = \frac{b}{a})$

$\lambda, \zeta \in \mathbb{C}$. Dan $\quad \overline{\lambda\zeta} = \bar{\lambda}\,\bar{\zeta}, \quad \overline{\lambda + \zeta} = \bar{\lambda} + \bar{\zeta}$

$a, b \in \mathbb{R}, \quad \lambda = r\,e^{i\phi} \in \mathbb{C}$. Dan

$$\mathrm{Re}(\lambda(a + ib)) = r\cos(\phi)\,a - r\sin(\phi)\,b.$$

$\alpha, \beta, a, b \in \mathbb{R}$. Dan

$$\alpha a - \beta b = \mathrm{Re}(\gamma z) \quad \text{voor} \quad \gamma \equiv \alpha + i\beta, \quad z \equiv a + ib$$

Complexe eigenwaarden

Stel $\mathbf{A}$ alleen reële coëfficiënten.

$\mathbf{A}\mathbf{v}_1 = \lambda_1 \mathbf{v}_1$. Dus $\mathbf{A}\bar{\mathbf{v}}_1 = \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{v}}_1 = \overline{\mathbf{A}\mathbf{v}_1} = \overline{\lambda_1 \mathbf{v}_1} = \bar{\lambda}_1 \bar{\mathbf{v}}_1$.

Als $\lambda_1 \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$, dan $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1$ en $\mathbf{v}_2 = \bar{\mathbf{v}}_1$.

Schrijf $\mathbf{v}_1 = \mathbf{w}_1 + i\mathbf{w}_2$ met $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ reële vectoren.
Omdat $\mathbf{x}_0$ een reële vector is, zijn er $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ zodat

$$\mathbf{x}_0 = \alpha \mathbf{w}_1 + \beta \mathbf{w}_2 = \mathrm{Re}((\alpha - i\beta)(\mathbf{w}_1 + i\mathbf{w}_2))$$

Schrijf $\gamma \equiv \alpha - i\beta$. Dan

$$\mathbf{x}_0 = \mathrm{Re}(\gamma \mathbf{v}_1) = \frac{1}{2}(\gamma \mathbf{v}_1 + \bar{\gamma}\bar{\mathbf{v}}_1) = \frac{1}{2}(\gamma \mathbf{v}_1 + \bar{\gamma}\mathbf{v}_2)$$

Dus

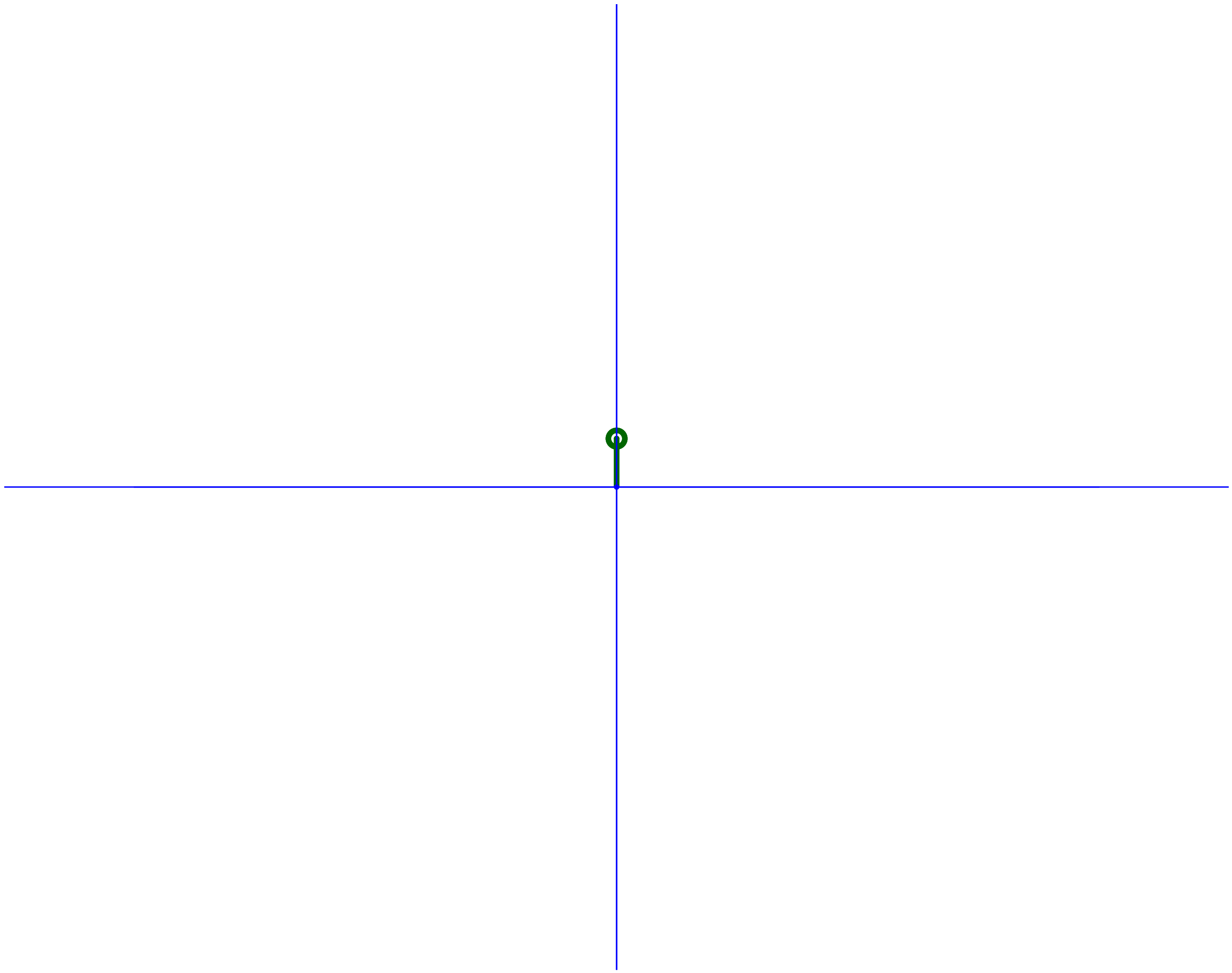
$$\mathbf{x}_n = \mathbf{A}^n \mathbf{x}_0 = \frac{1}{2}(\gamma \lambda_1^n \mathbf{v}_1 + \bar{\gamma}\bar{\lambda}_1^n \mathbf{v}_2)$$

Met $\lambda_1 = |\lambda_1|\, e^{i\phi}$ en $\gamma = |\gamma|\, e^{i\psi}$ is

$$\mathbf{x}_n = |\gamma|\, |\lambda_1|^n \left(\cos(\psi + n\phi)\mathbf{w}_1 - \sin(\psi + n\phi)\mathbf{w}_2\right)$$

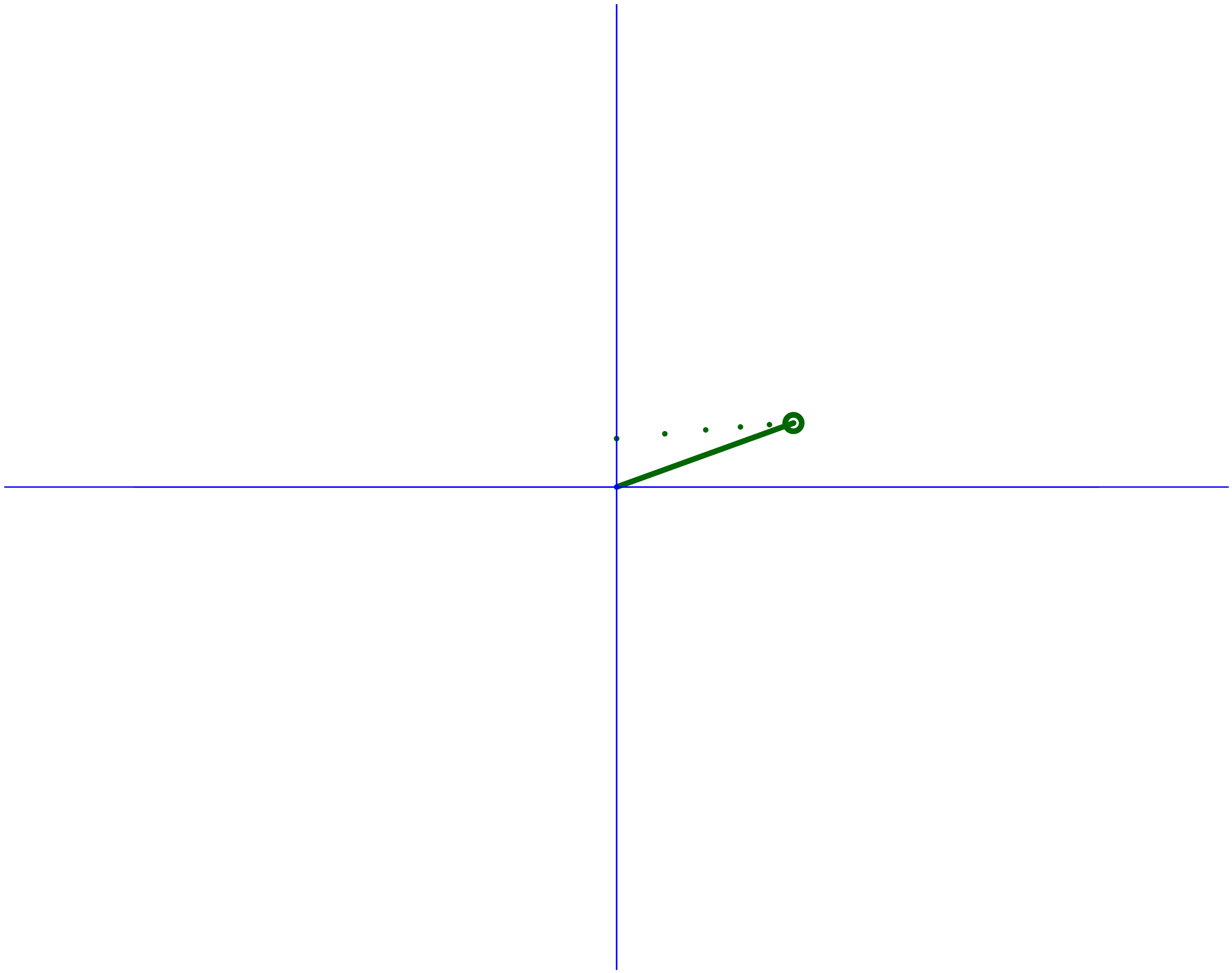
Iteratie in beeld

x_0



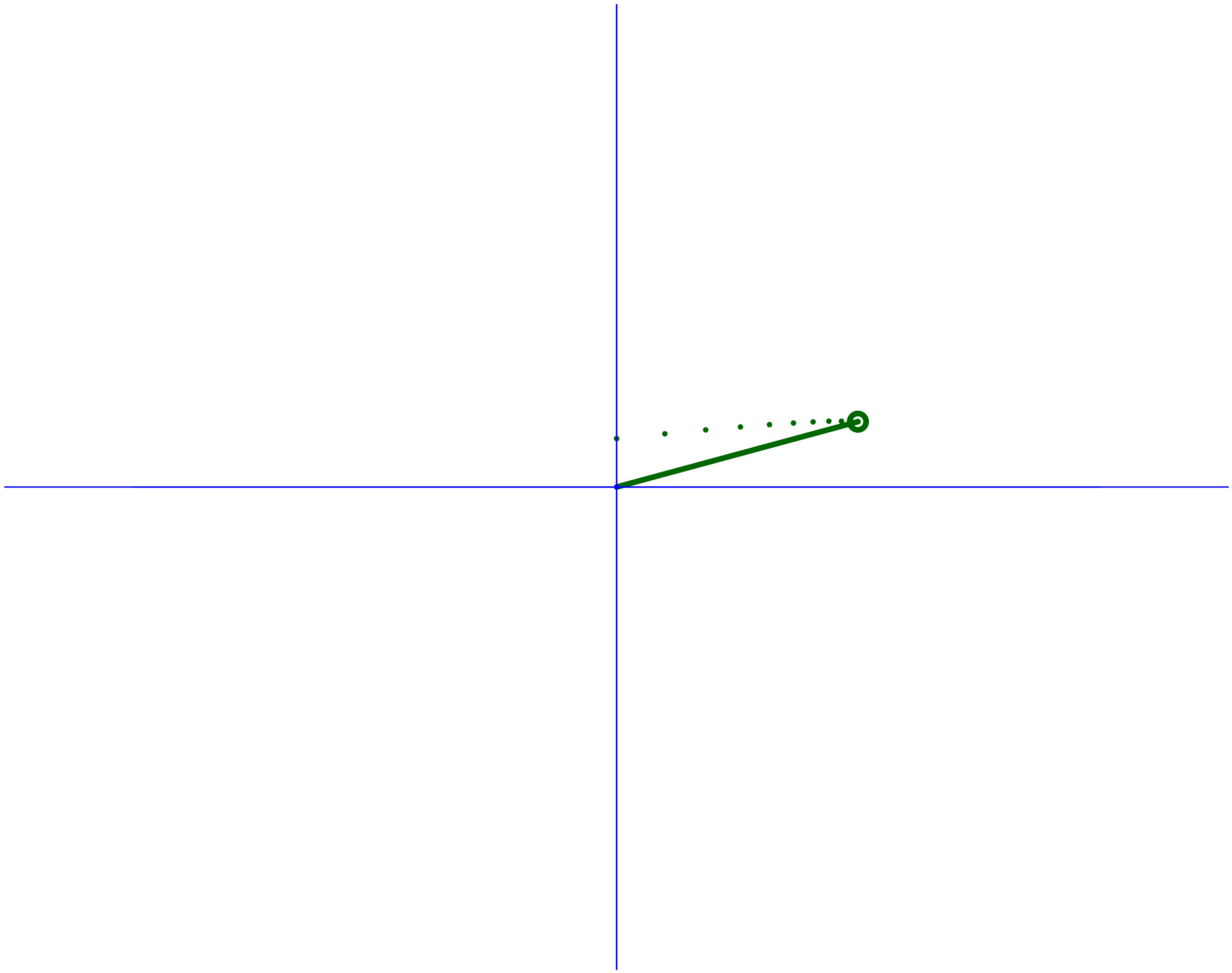
Iteratie in beeld

x_5



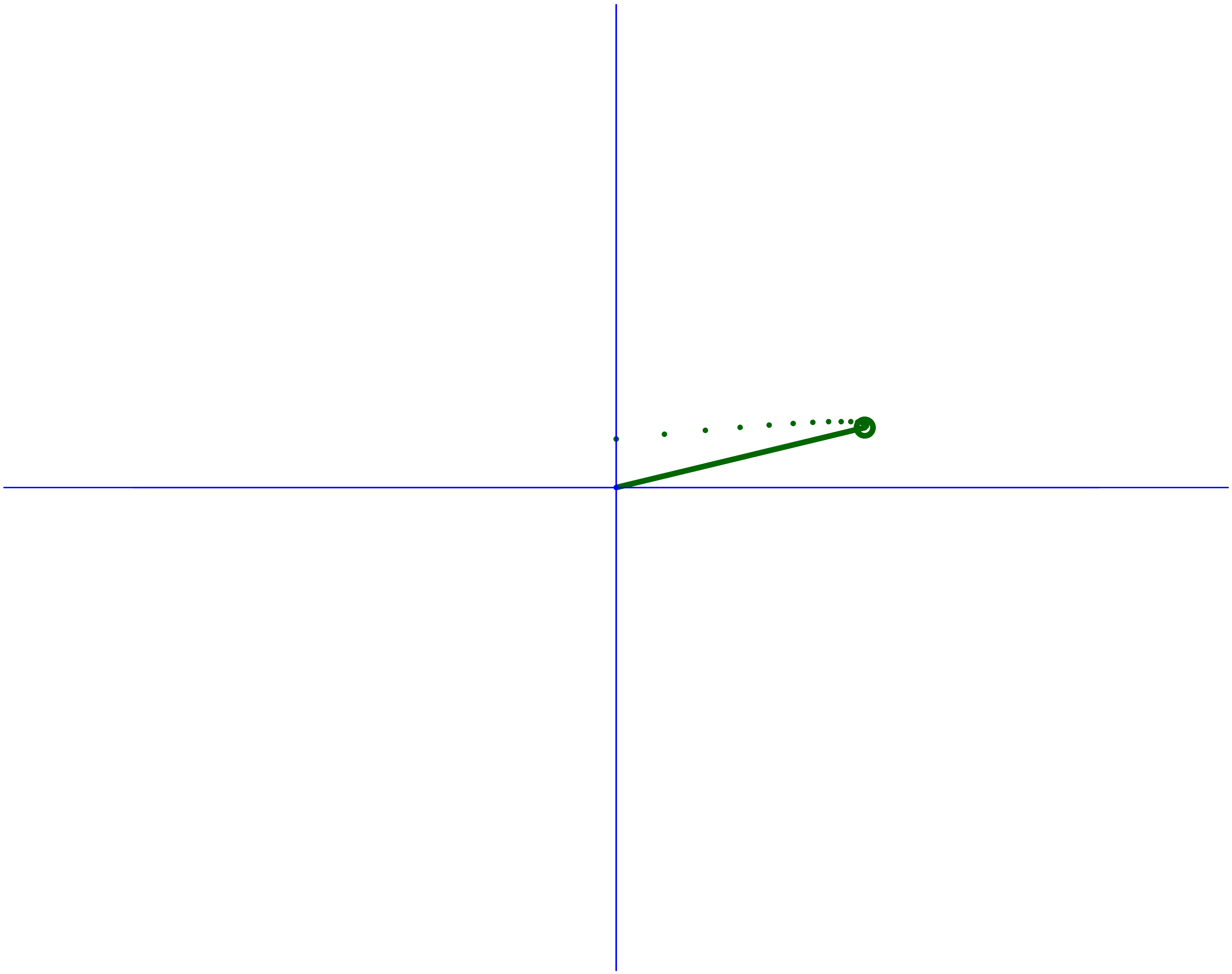
Iteratie in beeld

x_{10}



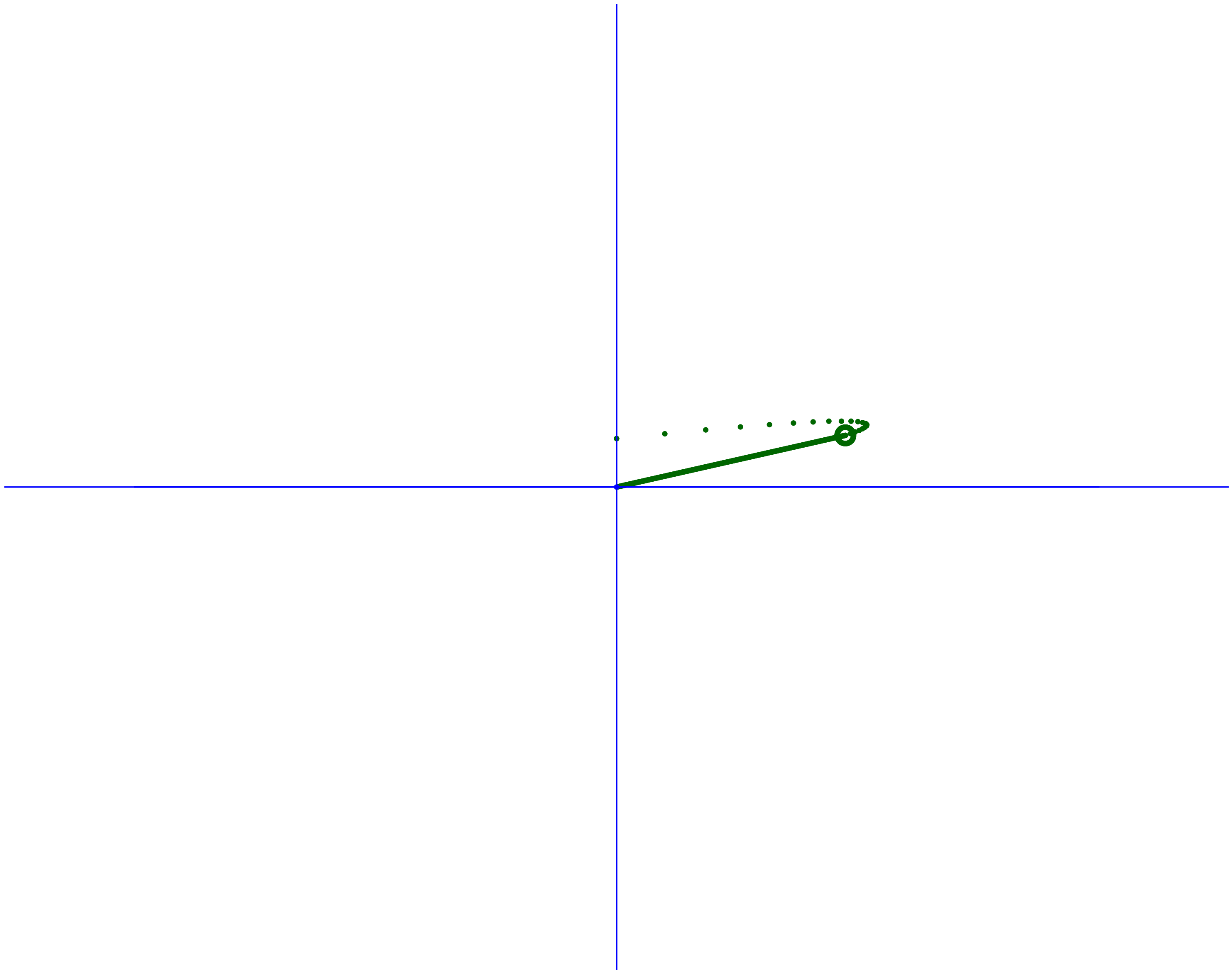
Iteratie in beeld

x_{15}



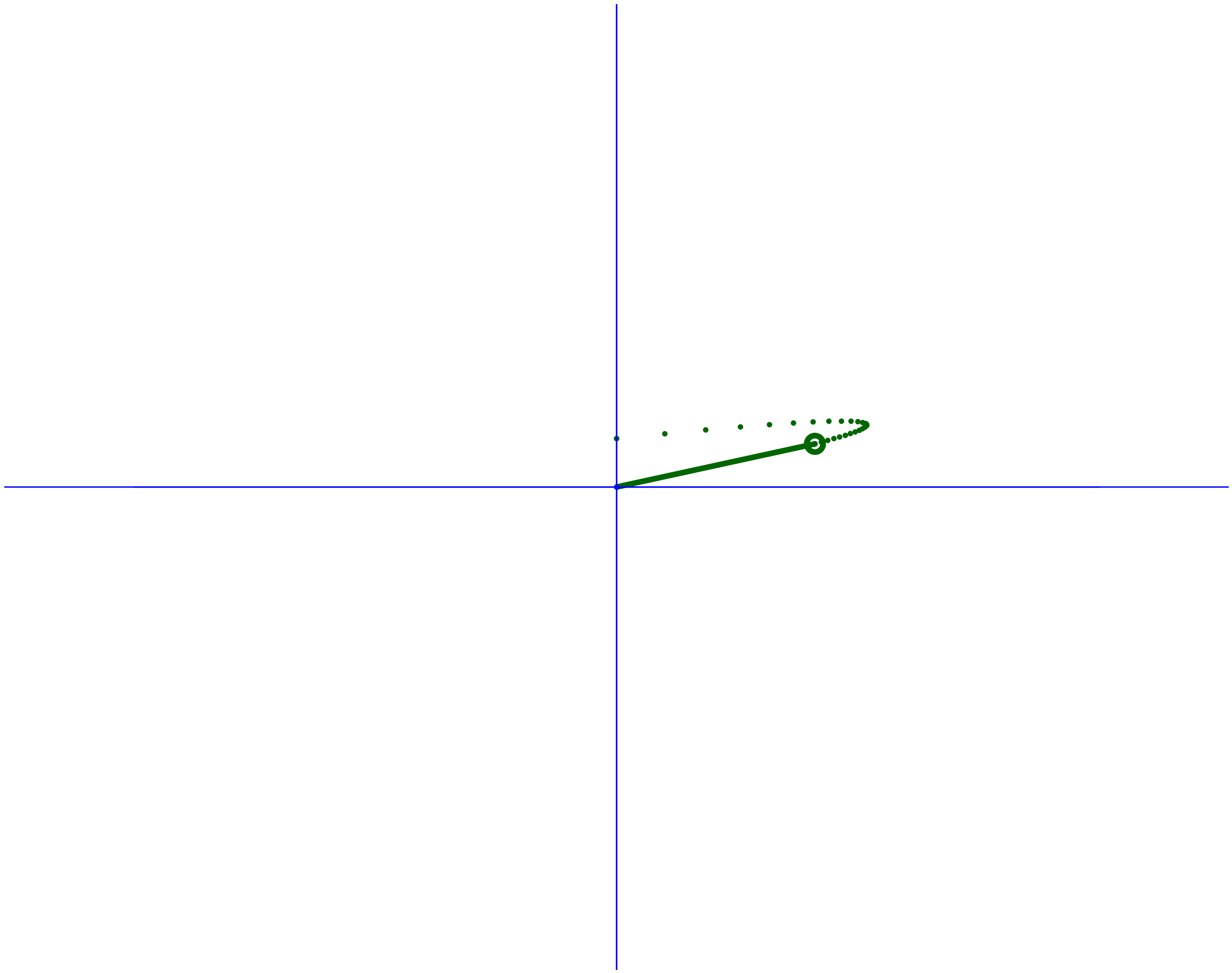
Iteratie in beeld

x_{20}



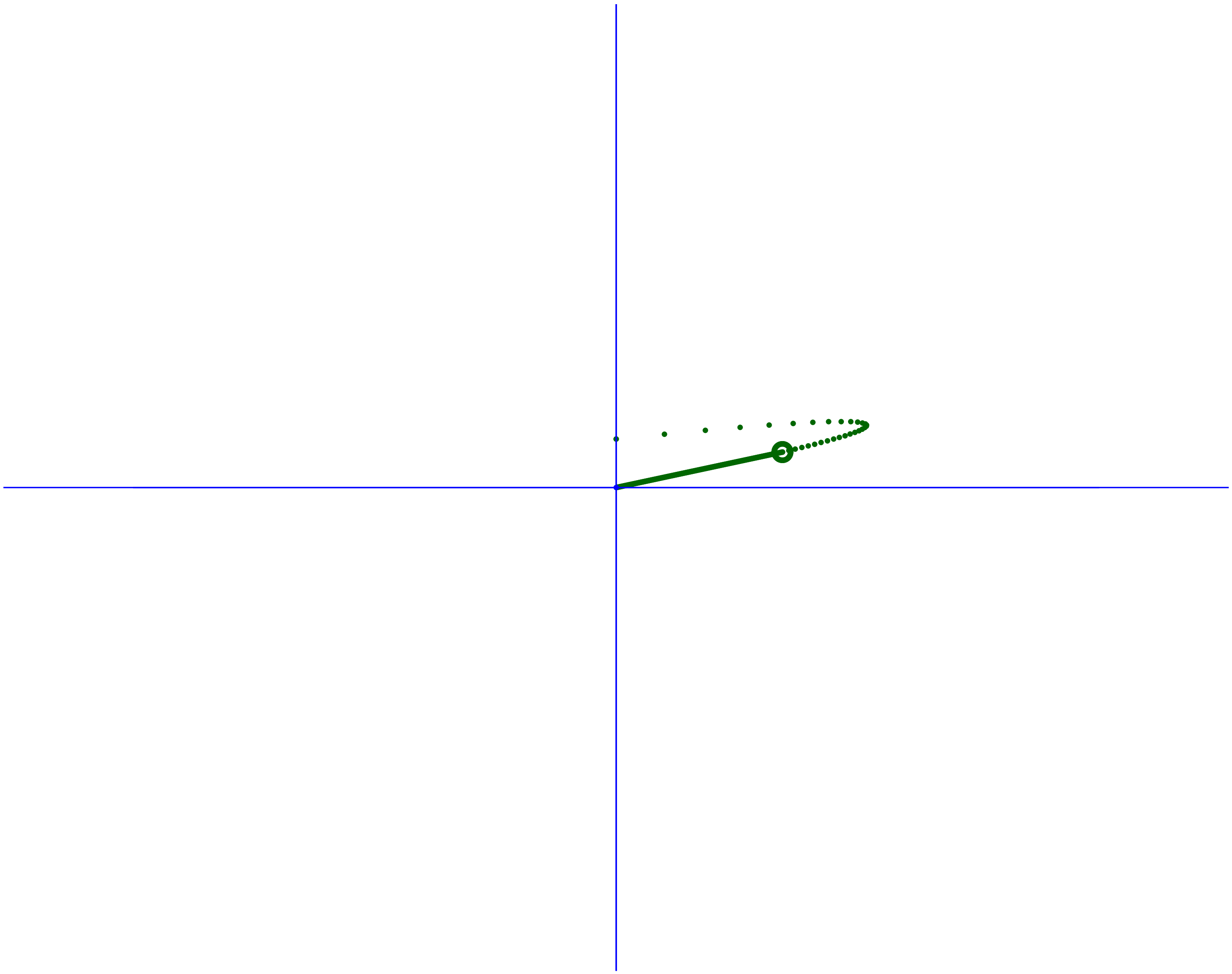
Iteratie in beeld

x_{25}



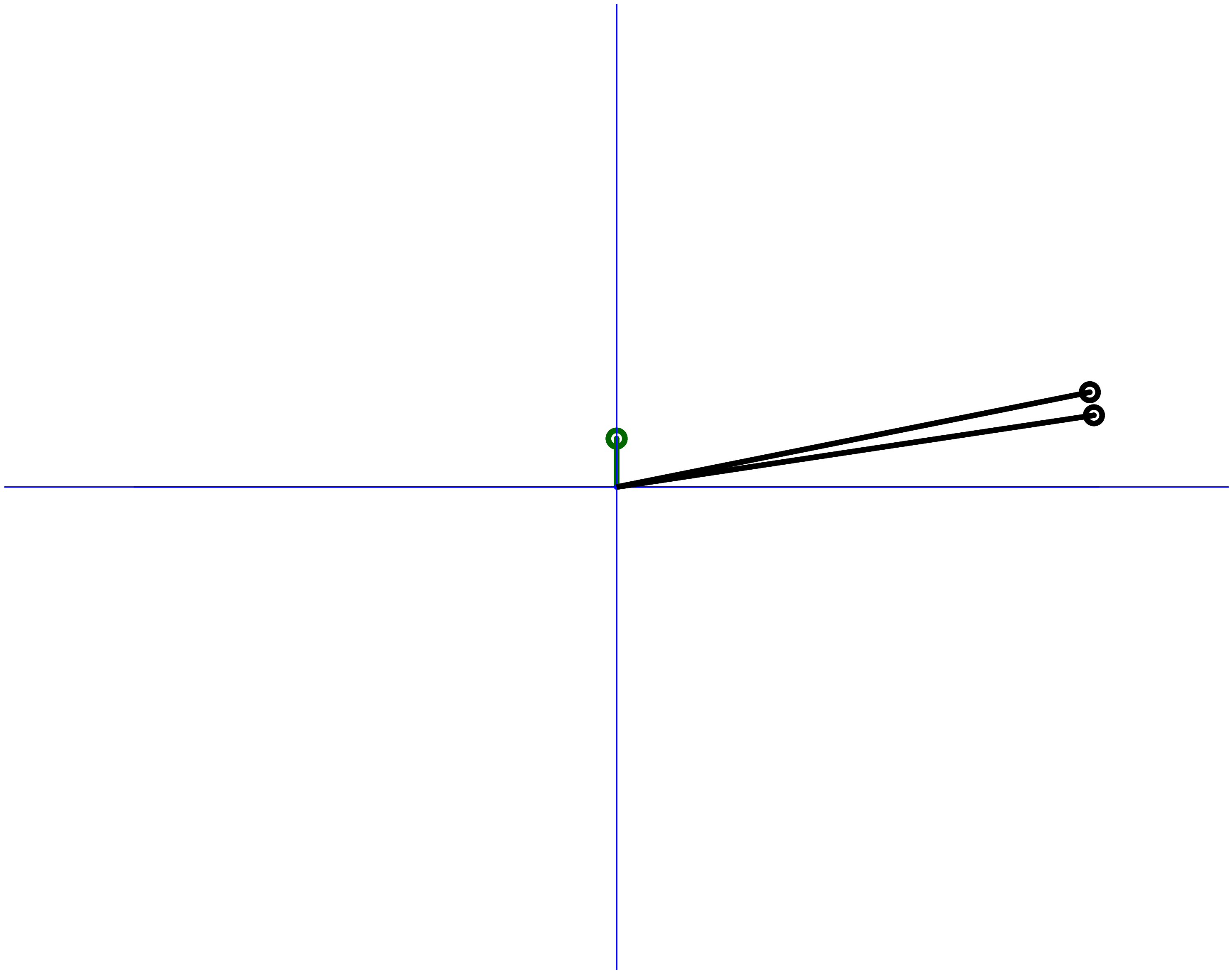
Iteratie in beeld

x_{30}



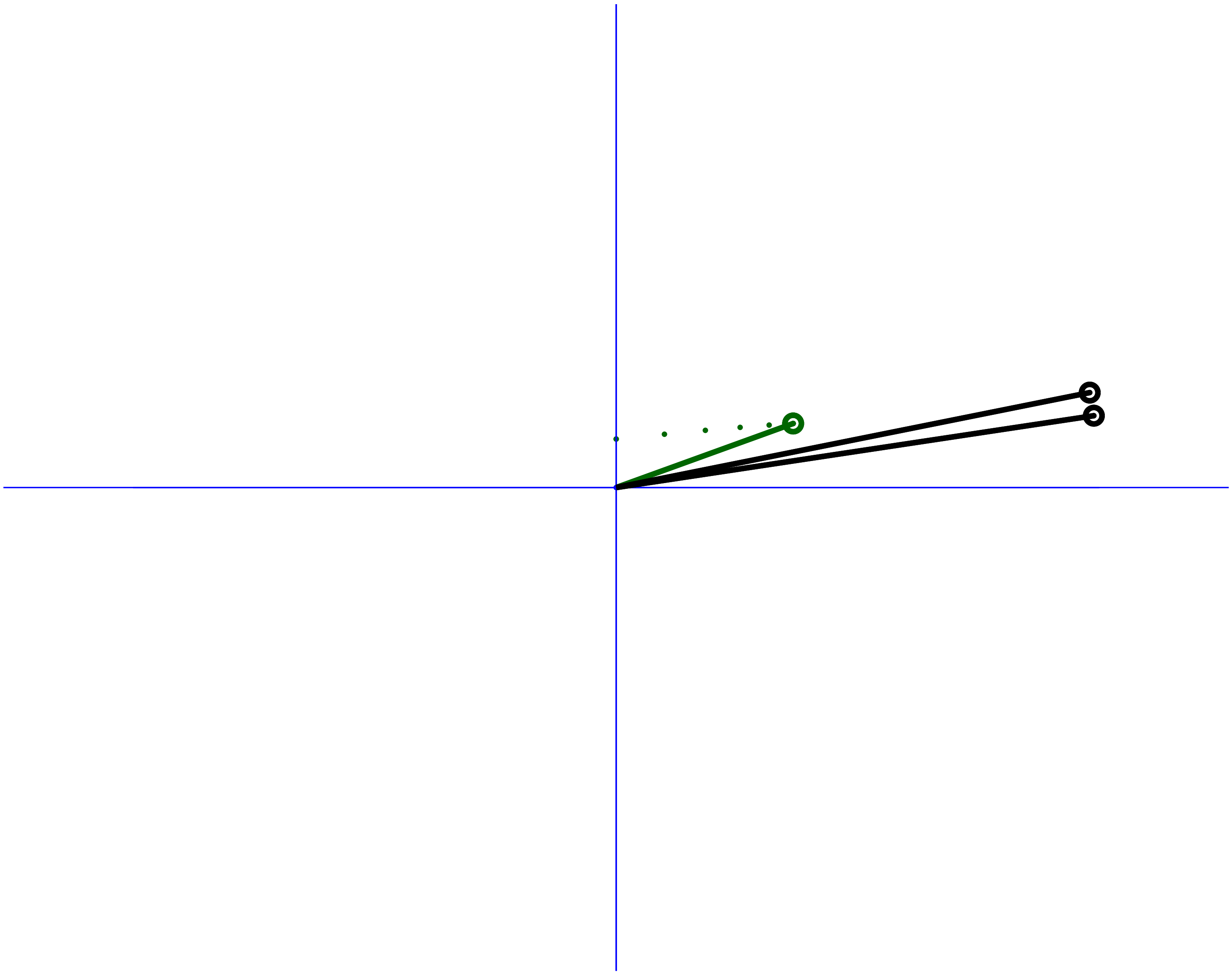
Iteratie in beeld

x_0



Iteratie in beeld

x_5

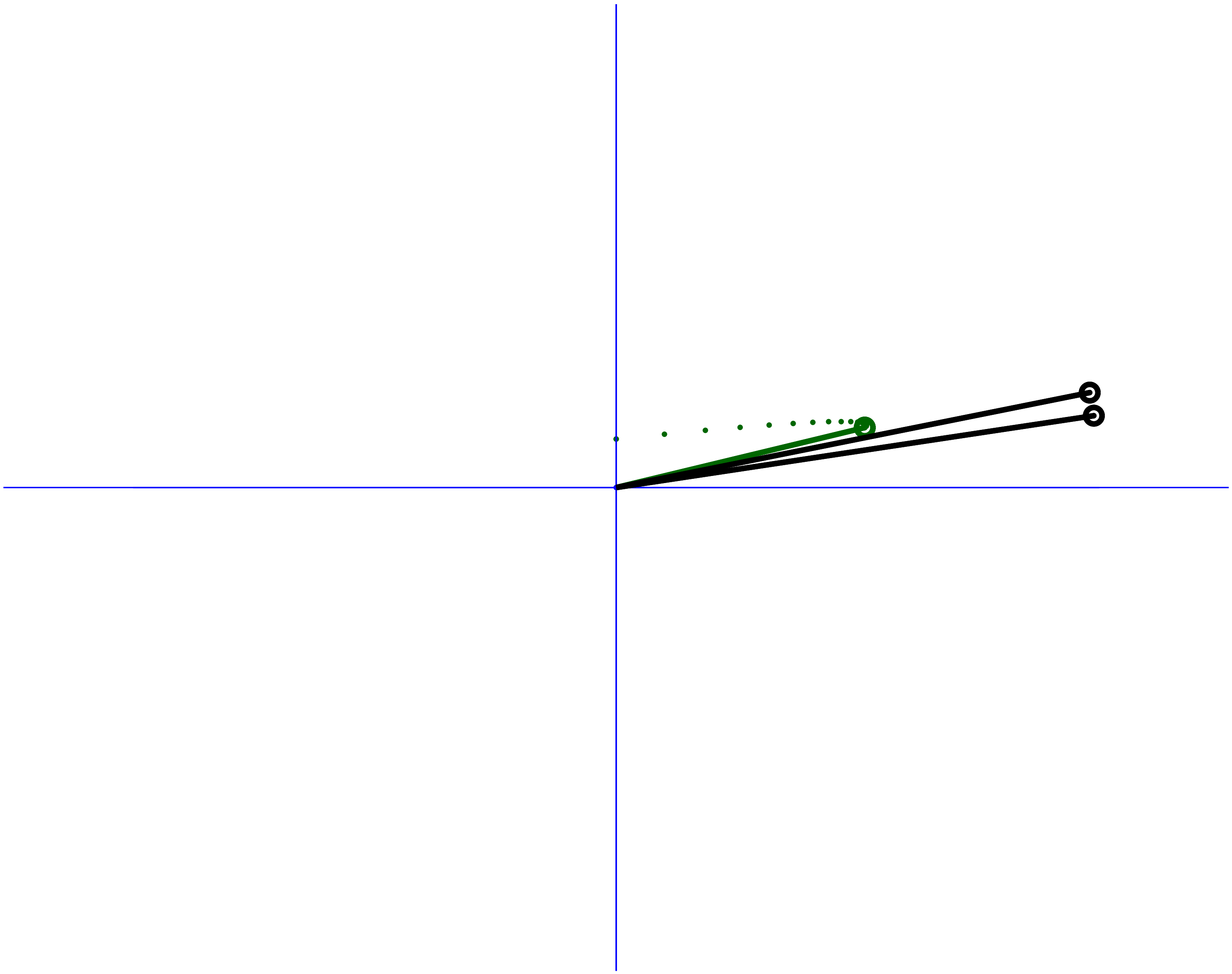


Iteratie in beeld

x_{10}

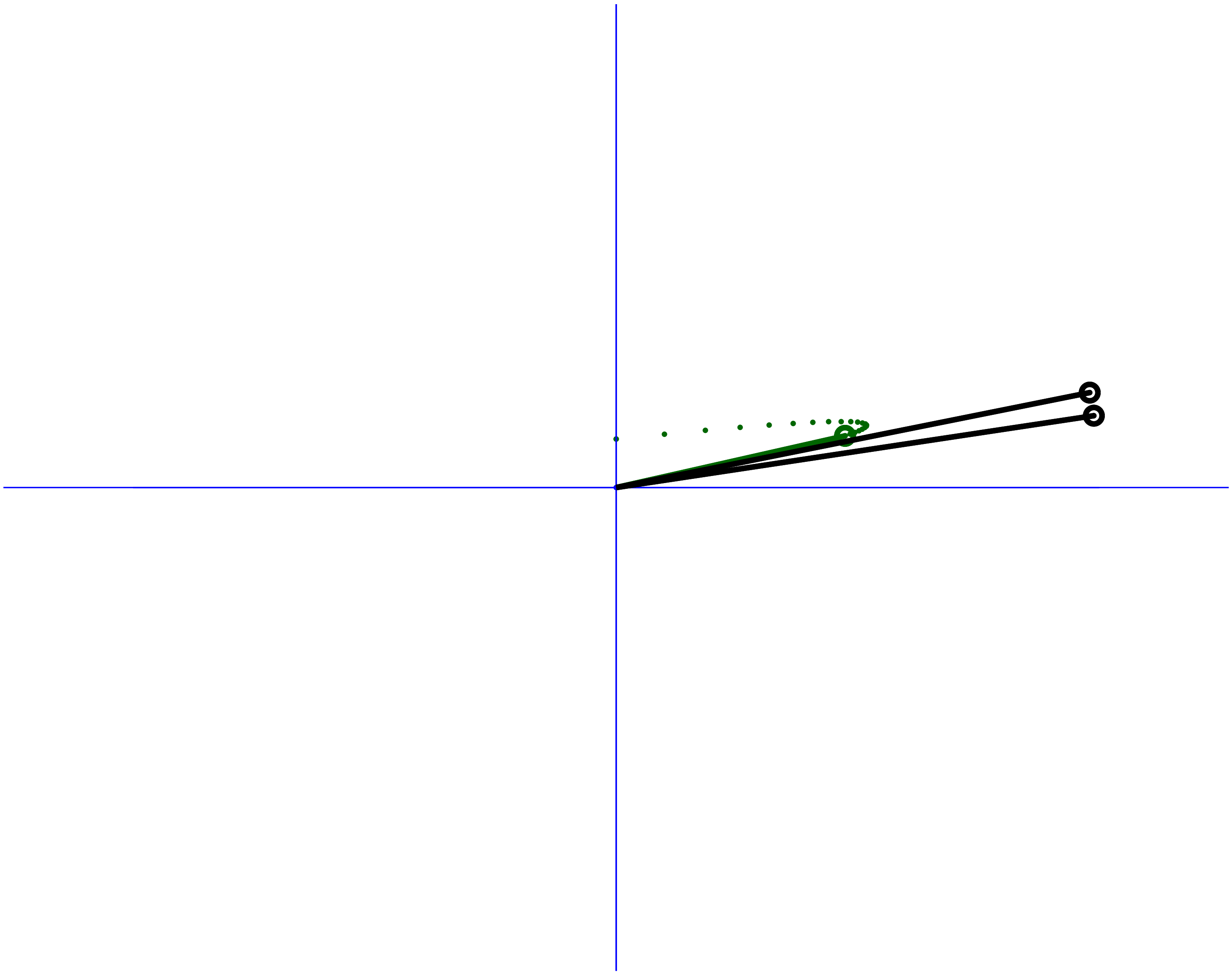
Iteratie in beeld

x_{15}



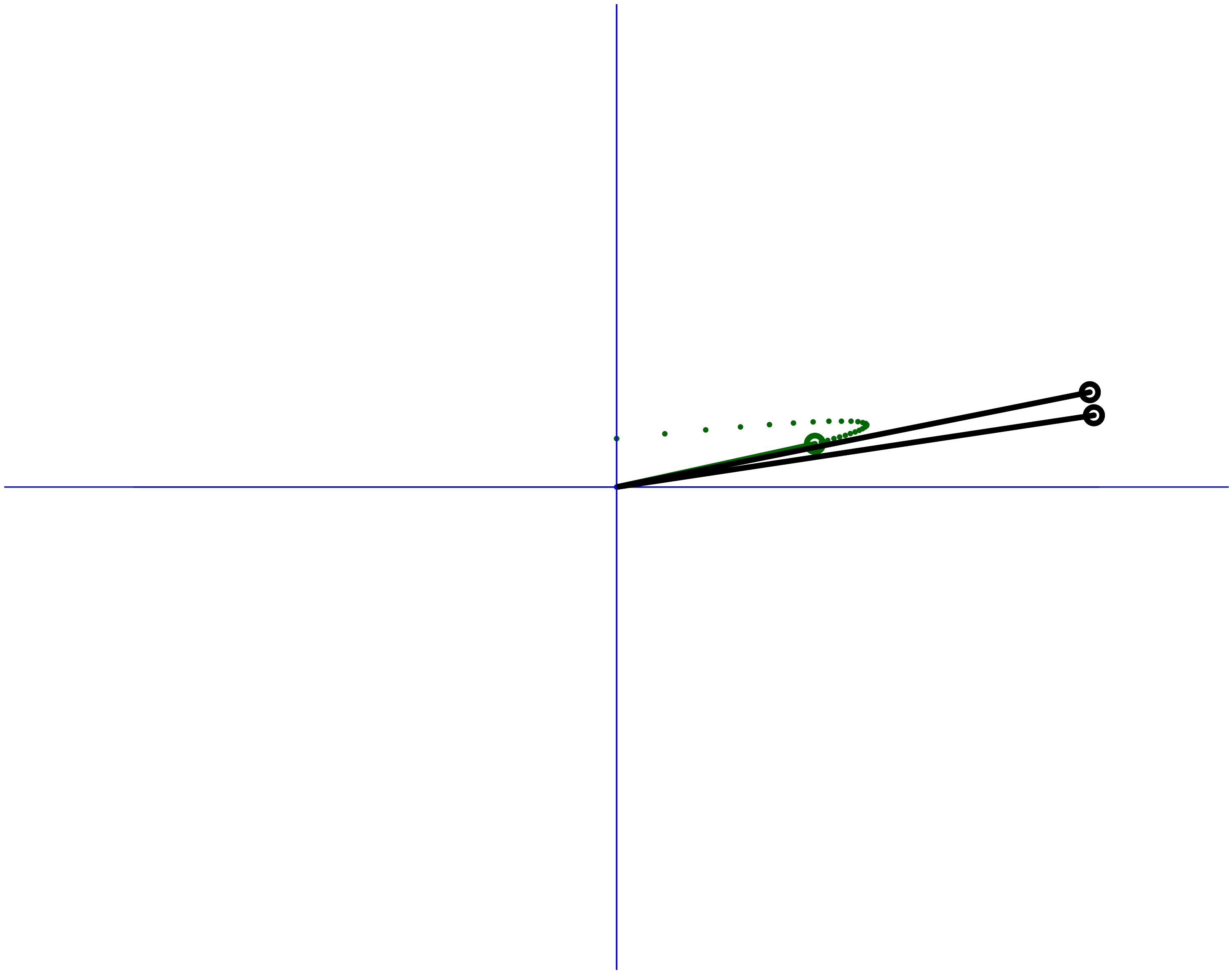
Iteratie in beeld

x_{20}



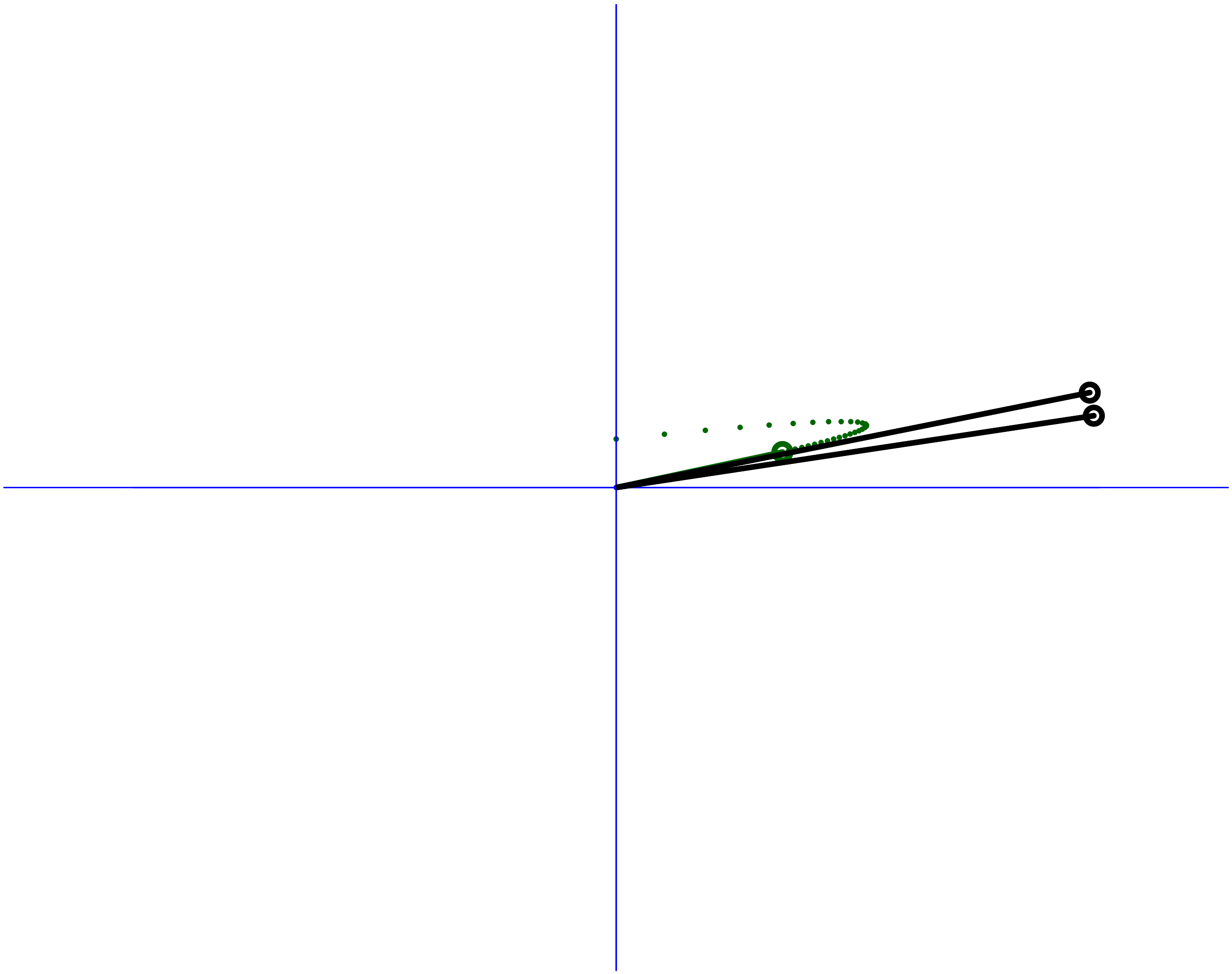
Iteratie in beeld

x_{25}



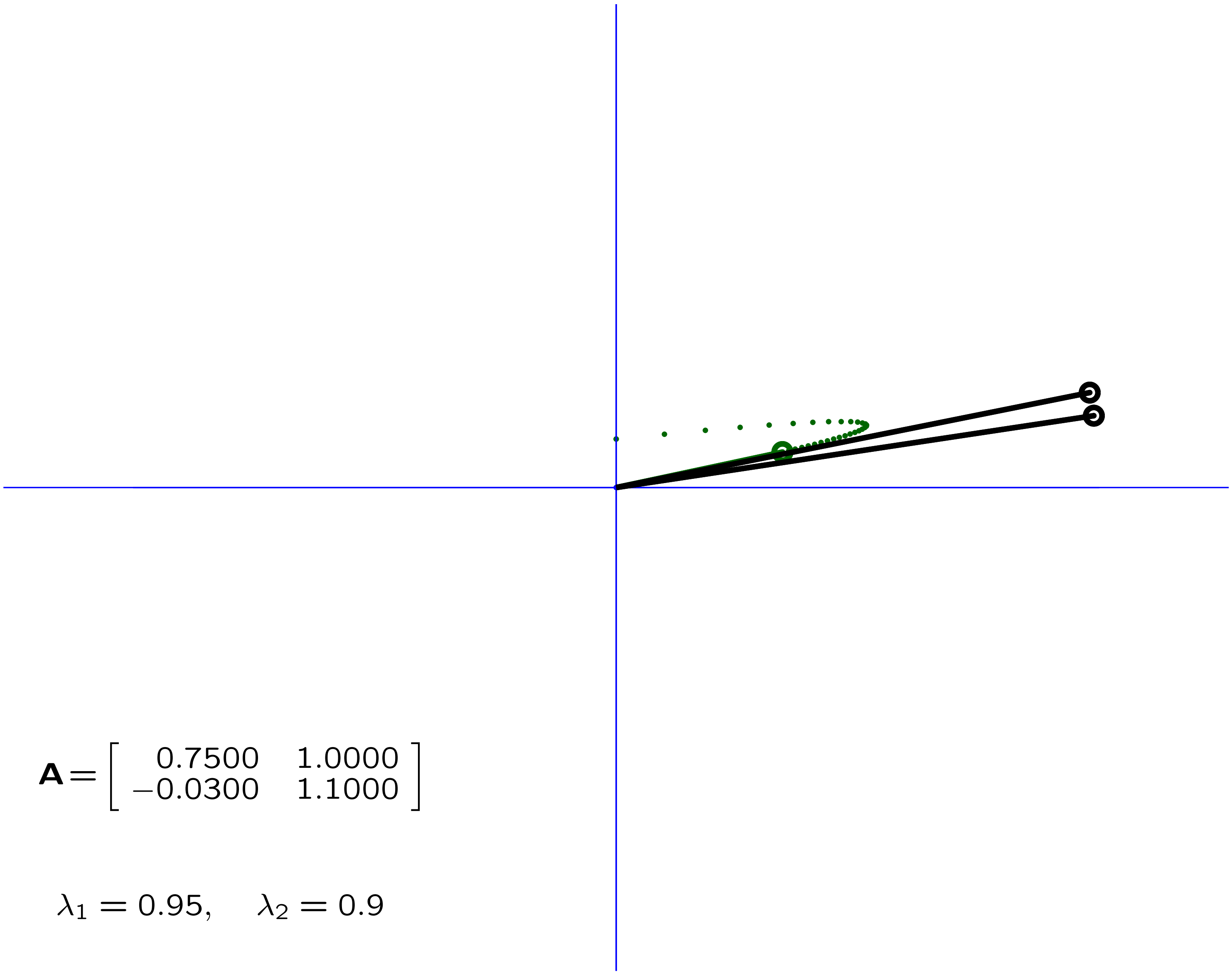
Iteratie in beeld

x_{30}



Iteratie in beeld

x_{30}



$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.7500 & 1.0000 \\ -0.0300 & 1.1000 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 0.95, \quad \lambda_2 = 0.9$$

Program

- Meerdere leeftijdsklassen
- Leslie matrices
- Eigenwaarden en eigenvectoren
- Dominante eigenvector
- Irreducibele, a-periodieke matrices
- Markov ketens
- Google's PageRanking
- Lampen

Leslie matrices

m leeftijdsgroepen (tijdvak bv. 1 jaar)

$N_k(n)$ aantal individuen van leeftijd $k-1$ begin n-de tijdvak

Aanname [Leslie]:

- In elk tijdvak overleeft de fractie s_k van leeftijd $k-1$
- Aantal 0-jarige hangt lineair af
  van de vruchtbaarheid van de diverse leeftijdsgroepen

Leslie matrices

m leeftijdsgroepen (tijdvak bv. 1 jaar)

$N_k(n)$ aantal individuen van leeftijd $k-1$ begin n-de tijdvak

Aanname [Leslie]:

- In elk tijdvak overleeft de fractie s_k van leeftijd $k-1$
- Aantal 0-jarige hangt lineair af
  van de vruchtbaarheid van de diverse leeftijdsgroepen

Model: $N_{k+1}(n+1) = s_k \, N_k(n)$ &

$$N_1(n+1) = g_1 \, N_1(n) + \ldots + g_m \, N_m(n)$$

Leslie matrices

m leeftijdsgroepen (tijdvak bv. 1 jaar)

$N_k(n)$ aantal individuen van leeftijd $k-1$ begin n-de tijdvak

Aanname [Leslie]:

- In elk tijdvak overleeft de fractie s_k van leeftijd $k-1$
- Aantal 0-jarige hangt lineair af
  van de vruchtbaarheid van de diverse leeftijdsgroepen

Model: $N_{k+1}(n+1) = s_k\, N_k(n)$ &

$$N_1(n+1) = g_1\, N_1(n) + \ldots + g_m\, N_m(n)$$

In matrix taal

$$\begin{bmatrix} N_1(n+1) \\ N_2(n+1) \\ N_3(n+1) \\ \vdots \\ N_m(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 & \ldots & g_{m-1} & g_m \\ s_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & s_{m-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1(n) \\ N_2(n) \\ N_3(n) \\ \vdots \\ N_m(n) \end{bmatrix}$$

Leslie matrices

m leeftijdsgroepen (tijdvak bv. 1 jaar)

$N_k(n)$ aantal individuen van leeftijd $k-1$ begin n-de tijdvak

Aanname [Leslie]:

- In elk tijdvak overleeft de fractie s_k van leeftijd $k-1$
- Aantal 0-jarige hangt lineair af
  van de vruchtbaarheid van de diverse leeftijdsgroepen

Model: $N_{k+1}(n+1) = s_k\, N_k(n)$ &

$$N_1(n+1) = g_1\, N_1(n) + \ldots + g_m\, N_m(n)$$

In matrix taal $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{A}\,\mathbf{x}_n$

met $\mathbf{A} \equiv \begin{bmatrix} g_1 & g_2 & \cdots & g_{m-1} & g_m \\ s_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & s_{m-1} & 0 \end{bmatrix}$ en $\mathbf{x}_n \equiv \begin{bmatrix} N_1(n) \\ N_2(n) \\ N_3(n) \\ \vdots \\ N_m(n) \end{bmatrix}$

Leslie matrices

m leeftijdsgroepen (tijdvak bv. 1 jaar)

$N_k(n)$ aantal individuen van leeftijd $k-1$ begin n-de tijdvak

Aanname [Leslie]:

- In elk tijdvak overleeft de fractie s_k van leeftijd $k-1$
- Aantal 0-jarige hangt lineair af
  van de vruchtbaarheid van de diverse leeftijdsgroepen

Model: $N_{k+1}(n+1) = s_k\, N_k(n)$ &

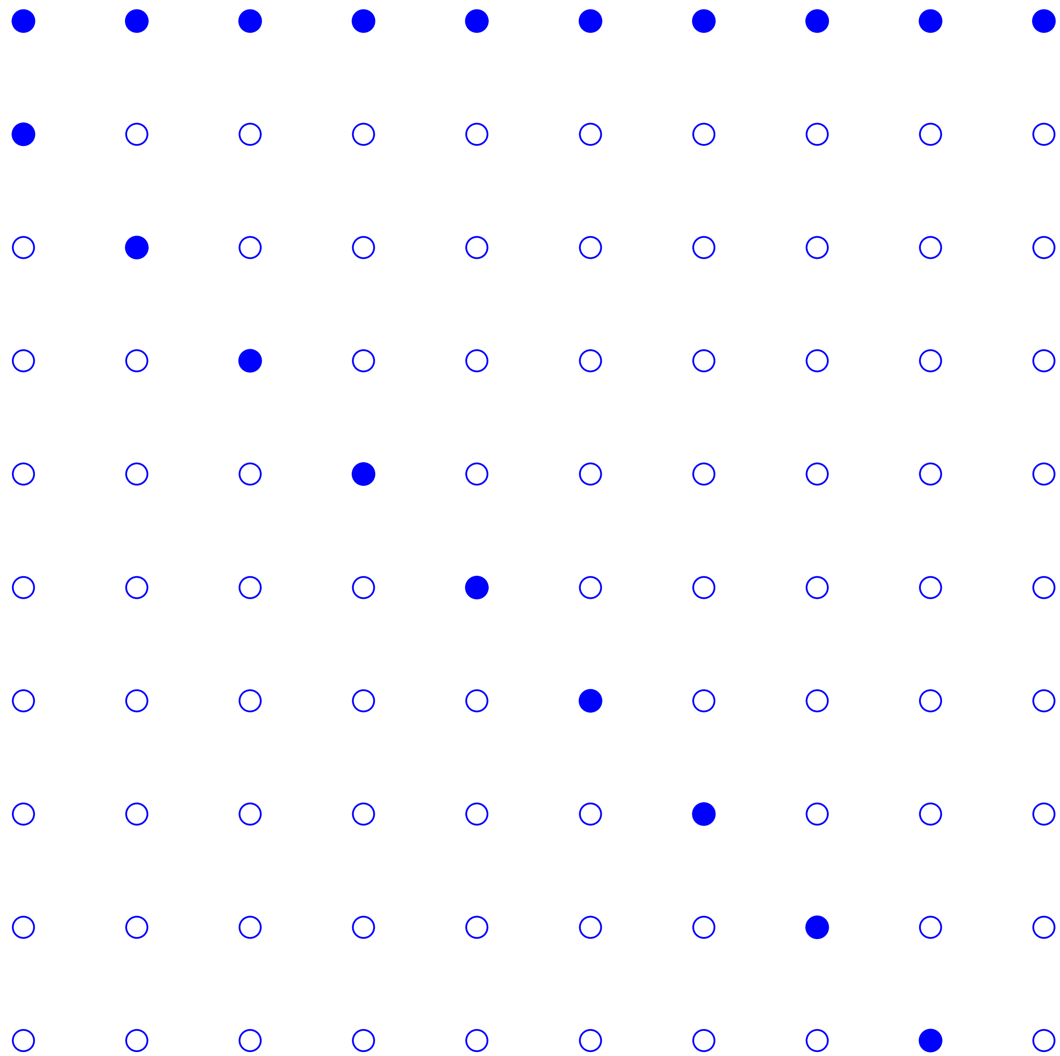
$$N_1(n+1) = g_1\, N_1(n) + \ldots + g_m\, N_m(n)$$

In matrix taal $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{A}\,\mathbf{x}_n$

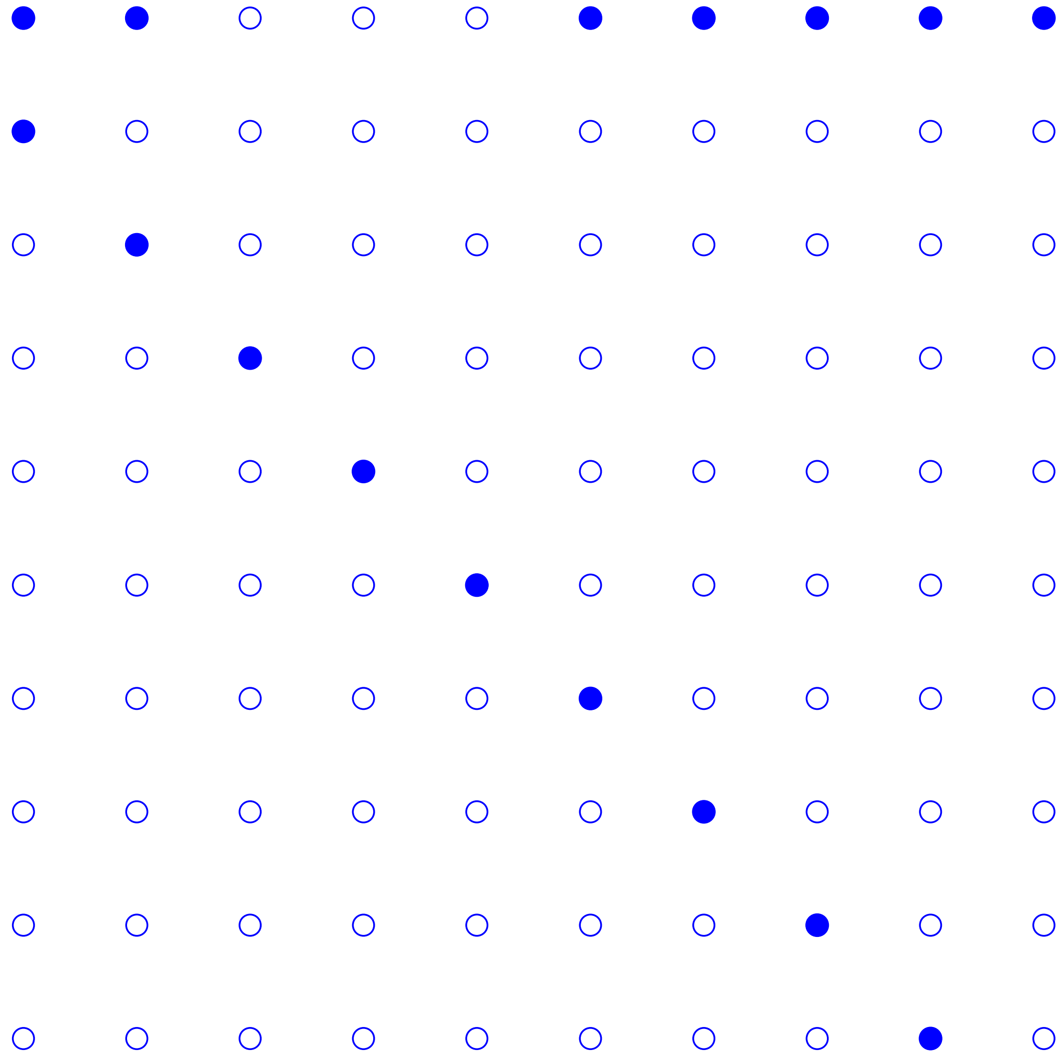
met $\mathbf{A} \equiv \begin{bmatrix} g_1 & g_2 & \cdots & g_{m-1} & g_m \\ s_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & s_{m-1} & 0 \end{bmatrix}$ en $\mathbf{x}_n \equiv \begin{bmatrix} N_1(n) \\ N_2(n) \\ N_3(n) \\ \vdots \\ N_m(n) \end{bmatrix}$

Leslie matrix

Leslie matrix



Leslie matrix



Program

- Meerdere leeftijdsklassen
- Leslie matrices
- Eigenwaarden en eigenvectoren
- Dominante eigenvector
- Irreducibele, a-periodieke matrices
- Markov ketens
- Google's PageRanking
- Lampen

Evenwicht als

voor alle n: $\quad N_j(n+1) = N_j(n) = \alpha_j \quad$ voor $j = 1, \ldots, m$

Evenwicht als

voor alle n: $\quad N_j(n+1) = N_j(n) = \alpha_j \quad$ voor $j = 1, \ldots, m$

$$\vec{\alpha} \equiv \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix} = \mathbf{A}\,\vec{\alpha}$$

Evenwicht als

voor alle n: $\quad N_j(n+1) = N_j(n) = \alpha_j \quad$ voor $j = 1, \ldots, m$

$$\vec{\alpha} \equiv \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix} = \mathbf{A}\,\vec{\alpha} \quad \Leftrightarrow \quad 1 \text{ eigenwaarde } \mathbf{A}$$

Evenwicht als

voor alle n: $\quad N_j(n+1) = N_j(n) = \alpha_j \quad$ voor $j = 1, \ldots, m$

$$\vec{\alpha} \equiv \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix} = \mathbf{A}\,\vec{\alpha} \quad \Leftrightarrow \quad 1 \text{ eigenwaarde } \mathbf{A}$$

Evenwichtige opbouw in leeftijd als voor alle n:

$N_i(n+1)/N_j(n+1) = N_i(n)/N_j(n)$ voor alle $i, j = 1, \ldots, m$.

Evenwicht als

voor alle n: $\quad N_j(n+1) = N_j(n) = \alpha_j \quad$ voor $j = 1, \ldots, m$

$$\vec{\alpha} \equiv \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix} = \mathbf{A}\,\vec{\alpha} \quad \Leftrightarrow \quad 1 \text{ eigenwaarde } \mathbf{A}$$

Evenwichtige opbouw in leeftijd als voor alle n:

$N_i(n+1)/N_j(n+1) = N_i(n)/N_j(n)$ voor alle $i, j = 1, \ldots, m$.

$$\lambda\,\vec{\beta} = \mathbf{A}\,\vec{\beta} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda \text{ eigenwaarde } \mathbf{A}$$

Evenwicht als

voor alle n: $\quad N_j(n+1) = N_j(n) = \alpha_j \quad$ voor $j = 1, \ldots, m$

$$\vec{\alpha} \equiv \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix} = \mathbf{A}\,\vec{\alpha} \quad \Leftrightarrow \quad 1 \text{ eigenwaarde } \mathbf{A}$$

Evenwichtige opbouw in leeftijd als voor alle n:

$N_i(n+1)/N_j(n+1) = N_i(n)/N_j(n)$ voor alle $i, j = 1, \ldots, m$.

$$\lambda\,\vec{\beta} = \mathbf{A}\,\vec{\beta} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda \text{ eigenwaarde } \mathbf{A}$$

Wanneer is evenwicht stabiel?

Wanneer is evenwichtige leeftijdsopbouw stabiel?

Beschouw de **iteratie** in $\mathbb{R}^m$

$$\mathbf{x}_{n+1} \;=\; \mathbf{A}\,\mathbf{x}_n$$

Beschouw de **iteratie** in $\mathbb{R}^m$

$$\mathbf{x}_{n+1} \;=\; \mathbf{A}\,\mathbf{x}_n$$

Dan $\quad \mathbf{x}_n = \mathbf{A}\,\mathbf{x}_{n-1} = \ldots = \mathbf{A}^n\,\mathbf{x}_0$

Eigenwaarden en **eigenvectoren** van **A**:

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_j = \lambda_j\,\mathbf{v}_j \quad (j = 1, \ldots, m).$$

$$\mathbf{x}_0 = \gamma_1\mathbf{v}_1 + \ldots + \gamma_m\mathbf{v}_m \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}_n = \gamma_1\,\lambda_1^n\,\mathbf{v}_1 + \ldots + \gamma_m\,\lambda_m^n\,\mathbf{v}_m$$

Beschouw de **iteratie** in $\mathbb{R}^m$

$$\mathbf{x}_{n+1} \;=\; \mathbf{A}\,\mathbf{x}_n$$

Dan $\qquad \mathbf{x}_n = \mathbf{A}\,\mathbf{x}_{n-1} = \ldots = \mathbf{A}^n\,\mathbf{x}_0$

Eigenwaarden en **eigenvectoren** van **A**:

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_j = \lambda_j\,\mathbf{v}_j \quad (j = 1, \ldots, m).$$

$$\mathbf{x}_0 = \gamma_1\mathbf{v}_1 + \ldots + \gamma_m\mathbf{v}_m \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}_n = \gamma_1\,\lambda_1^n\,\mathbf{v}_1 + \ldots + \gamma_m\,\lambda_m^n\,\mathbf{v}_m$$

$$\mathbf{x}_n = \gamma_1\,\lambda_1^n\left(\mathbf{v}_1 + \frac{\gamma_2}{\gamma_1}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^n\mathbf{v}_2 + \ldots + \frac{\gamma_m}{\gamma_1}\left(\frac{\lambda_m}{\lambda_1}\right)^n\mathbf{v}_m\right)$$

Beschouw de **iteratie** in $\mathbb{R}^m$

$$\mathbf{x}_{n+1} \;=\; \mathbf{A}\,\mathbf{x}_n$$

Dan $\quad \mathbf{x}_n = \mathbf{A}\,\mathbf{x}_{n-1} = \ldots = \mathbf{A}^n\,\mathbf{x}_0$

Eigenwaarden en **eigenvectoren** van $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_j = \lambda_j\,\mathbf{v}_j \quad (j = 1, \ldots, m).$$

$$\mathbf{x}_0 = \gamma_1\mathbf{v}_1 + \ldots + \gamma_m\mathbf{v}_m \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}_n = \gamma_1\,\lambda_1^n\,\mathbf{v}_1 + \ldots + \gamma_m\,\lambda_m^n\,\mathbf{v}_m$$

$$\mathbf{x}_n = \gamma_1\,\lambda_1^n\left(\mathbf{v}_1 + \frac{\gamma_2}{\gamma_1}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^n\mathbf{v}_2 + \ldots + \frac{\gamma_m}{\gamma_1}\left(\frac{\lambda_m}{\lambda_1}\right)^n\mathbf{v}_m\right)$$

Als $|\lambda_j| < |\lambda_1|$ alle $j > 1$ en $\gamma_1 \neq 0$,

dan $\mathbf{x}_n \approx \gamma_1\,\lambda_1^n\,\mathbf{v}_1$ voor grote n.

Program

- Meerdere leeftijdsklassen
- Leslie matrices
- Eigenwaarden en eigenvectoren
- Dominante eigenvector
- Irreducibele, a-periodieke matrices
- Markov ketens
- Google's PageRanking
- Lampen

Als $\quad |\lambda_j| < |\lambda_1|$ alle $j > 1$, dan geldt, voor grote n,

$$\mathbf{x}_n = \gamma_1 \lambda_1^n \left[\mathbf{v}_1 + \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^n \mathbf{v}_2 + \ldots + \frac{\gamma_m}{\gamma_1} \left(\frac{\lambda_m}{\lambda_1} \right)^n \mathbf{v}_m \right] \approx \gamma_1 \lambda_1^n \mathbf{v}_1$$

λ_1 is een **dominante eigenwaarde** als $\quad |\lambda_j| < |\lambda_1| \quad (j > 1)$

$\mathbf{v}_1$ is dan een **dominante eigenvector**

Als $|\lambda_j| < |\lambda_1|$ alle $j > 1$, dan geldt, voor grote n,

$$\mathbf{x}_n = \gamma_1 \lambda_1^n \left[\mathbf{v}_1 + \frac{\gamma_2}{\gamma_1}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^n \mathbf{v}_2 + \ldots + \frac{\gamma_m}{\gamma_1}\left(\frac{\lambda_m}{\lambda_1}\right)^n \mathbf{v}_m\right] \approx \gamma_1 \lambda_1^n \mathbf{v}_1$$

λ_1 is een **dominante eigenwaarde** als $|\lambda_j| < |\lambda_1|$ $(j > 1)$

$\mathbf{v}_1$ is dan een **dominante eigenvector**

Stelling. **0** is een stabiel evenwicht $\Leftrightarrow 1 > |\lambda_i|$, $i = 1, \ldots, m$.

Als $|\lambda_j| < |\lambda_1|$ alle $j > 1$, dan geldt, voor grote n,

$$\mathbf{x}_n = \gamma_1\,\lambda_1^n \left[\mathbf{v}_1 + \frac{\gamma_2}{\gamma_1}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^n \mathbf{v}_2 + \ldots + \frac{\gamma_m}{\gamma_1}\left(\frac{\lambda_m}{\lambda_1}\right)^n \mathbf{v}_m\right] \approx \gamma_1\,\lambda_1^n\,\mathbf{v}_1$$

λ_1 is een **dominante eigenwaarde** als $|\lambda_j| < |\lambda_1| \quad (j > 1)$

$\mathbf{v}_1$ is dan een **dominante eigenvector**

Stelling. $\mathbf{0}$ is een stabiel evenwicht $\Leftrightarrow 1 > |\lambda_i|$, $i = 1, \ldots, m$.

Stelling. $\gamma\,\mathbf{v}_1$ is een stabiel evenwicht $\Leftrightarrow \lambda_1 = 1 > |\lambda_j| \quad (j > 1)$.

Er is een stabiel evenwicht als 1 dominante eigenwaarde $\mathbf{A}$.

Als $\quad |\lambda_j| < |\lambda_1|$ alle $j > 1$, dan geldt, voor grote n,

$$\mathbf{x}_n = \gamma_1\,\lambda_1^n \left[\mathbf{v}_1 + \frac{\gamma_2}{\gamma_1}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^n \mathbf{v}_2 + \ldots + \frac{\gamma_m}{\gamma_1}\left(\frac{\lambda_m}{\lambda_1}\right)^n \mathbf{v}_m\right] \approx \gamma_1\,\lambda_1^n\,\mathbf{v}_1$$

λ_1 is een **dominante eigenwaarde** als $\quad |\lambda_j| < |\lambda_1| \;\; (j > 1)$

$\mathbf{v}_1$ is dan een **dominante eigenvector**

Stelling. $\mathbf{0}$ is een stabiel evenwicht $\;\Leftrightarrow 1 > |\lambda_i|,\ i = 1, \ldots, m$.

Stelling. $\gamma\,\mathbf{v}_1$ is een stabiel evenwicht $\;\Leftrightarrow \lambda_1 = 1 > |\lambda_j| \;\; (j > 1)$.

Er is een stabiel evenwicht als 1 dominante eigenwaarde $\mathbf{A}$.

Stelling. $\gamma\,\mathbf{v}_1$ is een stabiele opbouw $\;\Leftrightarrow \lambda_1$ dominant.

Er is een stabiele leeftijdsopbouw als

$\mathbf{A}$ een dominante eigenwaarde heeft.

Wat gebeurt er als λ_1 *niet dominant, als* $|\lambda_1| = |\lambda_2|$*?*

Wat gebeurt er als λ_1 niet dominant, als $|\lambda_1| = |\lambda_2|$*?*

Voorbeelden.

- $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\quad \begin{array}{l} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 1 \end{array}$, $\quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ evenwicht.

Wat gebeurt er als λ_1 niet dominant, als $|\lambda_1| = |\lambda_2|$*?*

Voorbeelden.

- $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{matrix} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 1 \end{matrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ evenwicht.

  met $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 + \varepsilon \\ 1 \end{bmatrix}$ is $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 + \varepsilon \\ 1 \end{bmatrix}$.

Wat gebeurt er als λ_1 niet dominant, als $\quad |\lambda_1| = |\lambda_2|$*?*

Voorbeelden.

- $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{array}{l} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 1 \end{array}, \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ evenwicht.

  met $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1+\varepsilon \\ 1 \end{bmatrix}$ is $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1+\varepsilon \\ 1 \end{bmatrix}$.

- $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{array}{l} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -1 \end{array}, \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ evenwicht.

Wat gebeurt er als λ_1 niet dominant, als $\quad |\lambda_1| = |\lambda_2|$*?*

Voorbeelden.

- $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{matrix} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 1 \end{matrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ evenwicht.

  met $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1+\varepsilon \\ 1 \end{bmatrix}$ is $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1+\varepsilon \\ 1 \end{bmatrix}$.

- $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{matrix} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -1 \end{matrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ evenwicht.

  $$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1+\varepsilon \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1+\varepsilon \end{bmatrix}, \ \mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_0, \ \ldots$$

Wat gebeurt er als λ_1 niet dominant, als $\quad |\lambda_1| = |\lambda_2|$*?*

Voorbeelden.

- $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{matrix} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 1 \end{matrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ evenwicht.

  met $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1+\varepsilon \\ 1 \end{bmatrix}$ is $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1+\varepsilon \\ 1 \end{bmatrix}$.

- $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{matrix} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -1 \end{matrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ evenwicht.

  $$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1+\varepsilon \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1+\varepsilon \end{bmatrix}, \ \mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_0, \ \ldots$$

- $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{matrix} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 1 \end{matrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ evenwicht.

Wat gebeurt er als λ_1 niet dominant, als $|\lambda_1| = |\lambda_2|$*?*

Voorbeelden.

- $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\qquad \begin{matrix} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 1 \end{matrix}$, $\qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ evenwicht.

  met $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1+\varepsilon \\ 1 \end{bmatrix}$ is $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1+\varepsilon \\ 1 \end{bmatrix}$.

- $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\qquad \begin{matrix} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -1 \end{matrix}$, $\qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ evenwicht.

  $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1+\varepsilon \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1+\varepsilon \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_0$, $\ldots$

- $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\qquad \begin{matrix} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 1 \end{matrix}$, $\qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ evenwicht.

  $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ \varepsilon \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}_n = \begin{bmatrix} 1+n\varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix}$

Wat gebeurt er als λ_1 niet dominant, als $\quad |\lambda_1| = |\lambda_2|$*?*

Voorbeelden.

- $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{matrix} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 1 \end{matrix}\ , \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ evenwicht.

  met $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1+\varepsilon \\ 1 \end{bmatrix}$ is $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1+\varepsilon \\ 1 \end{bmatrix}$.

- $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{matrix} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -1 \end{matrix}\ , \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ evenwicht.

  $$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1+\varepsilon \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1+\varepsilon \end{bmatrix}, \ \mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_0, \ \ldots$$

- $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}, \qquad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$

  $$\mathbf{A}^n = \begin{bmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{bmatrix}$$

Wat als de eigenvectoren geen basis vormen?

Wat als de eigenvectoren geen basis vormen?

- $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}, \qquad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \quad \Rightarrow \mathbf{A}^n = \begin{bmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{bmatrix}$

Wat als de eigenvectoren geen basis vormen?

- $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}, \qquad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \quad \Rightarrow \mathbf{A}^n = \begin{bmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{bmatrix}$

- $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \qquad \lambda_2 = \lambda_3 \quad \Rightarrow \mathbf{A}^n = \begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & n\lambda_2^{n-1} \\ 0 & 0 & \lambda_2^n \end{bmatrix}$

Wat als de eigenvectoren geen basis vormen?

- $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}, \qquad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \quad \Rightarrow \mathbf{A}^n = \begin{bmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{bmatrix}$

- $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \qquad \lambda_2 = \lambda_3 \quad \Rightarrow \mathbf{A}^n = \begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & n\lambda_2^{n-1} \\ 0 & 0 & \lambda_2^n \end{bmatrix}$

Schrijf $\mathbf{x}_0 = \gamma_1 \mathbf{e}_1 + \gamma_2 \mathbf{e}_2 + \gamma_3 \mathbf{e}_3$. Stel $\gamma_1 \neq 0$.

Stel $|\lambda_1| > |\lambda_2|$. Merk op $\mathbf{v}_1 = \mathbf{e}_1$. Dan geldt, voor grote n,

$$\mathbf{x}_n = \gamma_1 \lambda_1^n \left[\mathbf{e}_1 + \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^n \mathbf{e}_2 + \frac{n}{\lambda_1} \frac{\gamma_3}{\gamma_1} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^{n-1} \mathbf{e}_2 + \frac{\gamma_3}{\gamma_1} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^n \mathbf{e}_3 \right] \approx \gamma_1 \lambda_1^n \mathbf{v}_1.$$

Wat als de eigenvectoren geen basis vormen?

- $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}, \qquad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \quad \Rightarrow \mathbf{A}^n = \begin{bmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{bmatrix}$

- $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \qquad \lambda_2 = \lambda_3 \quad \Rightarrow \mathbf{A}^n = \begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & n\lambda_2^{n-1} \\ 0 & 0 & \lambda_2^n \end{bmatrix}$

Schrijf $\mathbf{x}_0 = \gamma_1\,\mathbf{e}_1 + \gamma_2\,\mathbf{e}_2 + \gamma_3\,\mathbf{e}_3$. Stel $\gamma_1 \neq 0$.

Stel $|\lambda_1| > |\lambda_2|$. Merk op $\mathbf{v}_1 = \mathbf{e}_1$. Dan geldt, voor grote n,

$$\mathbf{x}_n = \gamma_1\,\lambda_1^n \left[\mathbf{e}_1 + \frac{\gamma_2}{\gamma_1}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^n \mathbf{e}_2 + \frac{n}{\lambda_1}\frac{\gamma_3}{\gamma_1}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{n-1}\mathbf{e}_2 + \frac{\gamma_3}{\gamma_1}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^n \mathbf{e}_3\right] \approx \gamma_1\,\lambda_1^n\,\mathbf{v}_1.$$

Stelling. Als λ_1 dominante eigenwaarde met eigenvector $\mathbf{v}_1$.

Dan geldt, voor iedere $\mathbf{x}_0$, met een $\neq 0$ component $\mathbf{v}_1$,

en voor grote n, $\qquad \mathbf{x}_n = \mathbf{A}^n\,\mathbf{x}_0 \approx \gamma_1\,\lambda_1^n\,\mathbf{v}_1$.

Relevantie

Stel λ_1 dominant. *Biologisch relevant?*

Alleen als $\lambda_1 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 > 0$
en alle coëfficiënten van eigenvector niet negatief.

Relevantie

Stel λ_1 dominant. *Biologisch relevant?*

Alleen als $\lambda_1 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 > 0$
en alle coëfficiënten van eigenvector niet negatief.

Stel $|\lambda_1| = |\lambda_2|$. *Biologisch relevant?*

Relevantie

Stel λ_1 dominant. *Biologisch relevant?*

Alleen als $\lambda_1 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 > 0$
en alle coëfficiënten van eigenvector niet negatief.

Stel $|\lambda_1| = |\lambda_2|$. *Biologisch relevant?*

Voorbeeld. $m = 3$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{array}{l} \lambda \text{ eigenwaarde} \Rightarrow \lambda^3 = 1, \\ \text{dus } |\lambda_1| = |\lambda_2| = |\lambda_3|. \end{array}$$

Met $x_0 = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix}$ is $x_1 = \begin{bmatrix} 36 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$, $x_2 = \begin{bmatrix} 12 \\ 18 \\ 1 \end{bmatrix}$, $x_3 = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix}, \ldots$

Machtsmethode

Stel $\mathbf{A}$ is een $m \times m$ matrix
met een dominante eigenwaarde λ_1 en eigenvector $\mathbf{v}_1$.

Stelling. Voor iedere $\mathbf{x}_0$, met een $\neq 0$ component $\mathbf{v}_1$,

geldt, voor grote n, $\qquad \mathbf{x}_n = \mathbf{A}^n \mathbf{x}_0 \approx \gamma_1 \lambda_1^n \mathbf{v}_1.$

Machtsmethode

Stel $\mathbf{A}$ is een $m \times m$ matrix
met een dominante eigenwaarde λ_1 en eigenvector $\mathbf{v}_1$.

Stelling. Voor iedere $\mathbf{x}_0$, met een $\neq 0$ component $\mathbf{v}_1$,

geldt, voor grote n, $\qquad \mathbf{x}_n = \mathbf{A}^n \mathbf{x}_0 \approx \gamma_1 \lambda_1^n \mathbf{v}_1.$

Notatie. $\mathbf{e}_j$ is de j-de standaard basis vector.
$\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_m)^\top \quad \Rightarrow \quad \mathbf{e}_j^\top \mathbf{y} = y_j.$

Machtsmethode

Stel $\mathbf{A}$ is een $m \times m$ matrix
met een dominante eigenwaarde λ_1 en eigenvector $\mathbf{v}_1$.

Stelling. Voor iedere $\mathbf{x}_0$, met een $\neq 0$ component $\mathbf{v}_1$,
geldt, voor grote n, $\quad \mathbf{x}_n = \mathbf{A}^n \mathbf{x}_0 \approx \gamma_1 \lambda_1^n \mathbf{v}_1$.

Gevolg. Met $\quad \mu_n \equiv \dfrac{\mathbf{e}_1^\top \mathbf{x}_n}{\mathbf{e}_1^\top \mathbf{x}_{n-1}}$ geldt $\quad \lim_{n\to\infty} \mu_n = \lambda_1$

voorop gesteld dat $\quad \mathbf{e}_1^\top \mathbf{v}_1 \neq 0$.

Machtsmethode

Stel $\mathbf{A}$ is een $m \times m$ matrix
met een dominante eigenwaarde λ_1 en eigenvector $\mathbf{v}_1$.

Stelling. Voor iedere $\mathbf{x}_0$, met een $\neq 0$ component $\mathbf{v}_1$,

geldt, voor grote n, $\qquad \mathbf{x}_n = \mathbf{A}^n \mathbf{x}_0 \approx \gamma_1 \lambda_1^n \mathbf{v}_1.$

Gevolg. Met $\quad \mu_n \equiv \dfrac{\mathbf{e}_1^\top \mathbf{x}_n}{\mathbf{e}_1^\top \mathbf{x}_{n-1}} \quad$ geldt $\quad \lim_{n\to\infty} \mu_n = \lambda_1$

Machtsmethode.

$$\widetilde{\mathbf{x}}_n \equiv \mathbf{A}\,\mathbf{x}_{n-1}, \qquad \mu_n \equiv \mathbf{e}_1^\top \widetilde{\mathbf{x}}_n, \qquad \mathbf{x}_n \equiv \widetilde{\mathbf{x}}_n/\mu_n.$$

Gevolg. Als $\mathbf{v}_1$ zo geschaald is dat $\mathbf{e}_1^\top \mathbf{v}_1 = 1$, dan

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{v}_1 \quad \& \quad \lim_{n\to\infty} \mu_n = \lambda_1.$$

Program

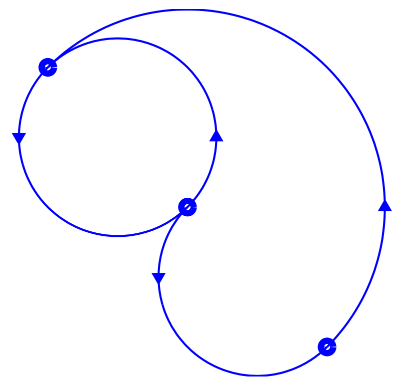
- Meerdere leeftijdsklassen
- Leslie matrices
- Eigenwaarden en eigenvectoren
- Dominante eigenvector
- Irreducibele, a-periodieke matrices
- Markov ketens
- Google's PageRanking
- Lampen

Matrices en grafen

matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 6 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

graaf



Matrix (graaf) is **irreducibel** als
je in de graaf van ieder punt naar ieder ander punt kunt lopen (via de lijnen in de aangegeven richting),
anders is de matrix (graaf) **reducibel**.

Periode matrix (graaf) = ggd(aantal lijnen rondwandeling)

waarbij de grootste gemene deler (ggd) genomen wordt over alle rondwandelingen.

Matrix is **a-periodiek** als periode = 1.

Dominantie

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{A}\,\mathbf{x}_n$$

Zij $\mathbf{A} = (A_{ij})$ een $m \times m$ matrix.

$\mathbf{A}\,\mathbf{v}_j = \lambda_j \mathbf{v}_j$

orden de eigenwaarden λ_j met eigenvectoren $\mathbf{v}_j$ zo dat

$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \ldots \geq |\lambda_m|, \quad |\lambda_j| = |\lambda_{j+1}| \Rightarrow \mathrm{Re}(\lambda_j) \geq \mathrm{Re}(\lambda_{j+1})$

Dominantie

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{A}\,\mathbf{x}_n$$

Zij $\mathbf{A} = (A_{ij})$ een $m \times m$ matrix.

$\mathbf{A}\,\mathbf{v}_j = \lambda_j \mathbf{v}_j$

orden de eigenwaarden λ_j met eigenvectoren $\mathbf{v}_j$ zo dat

$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \ldots \geq |\lambda_m|, \quad |\lambda_j| = |\lambda_{j+1}| \Rightarrow \mathrm{Re}(\lambda_j) \geq \mathrm{Re}(\lambda_{j+1})$

Dominantie

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{A}\,\mathbf{x}_n$$

Zij $\mathbf{A} = (A_{ij})$ een $m \times m$ matrix.

$\mathbf{A}\,\mathbf{v}_j = \lambda_j \mathbf{v}_j$

orden de eigenwaarden λ_j met eigenvectoren $\mathbf{v}_j$ zo dat

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \ldots \geq |\lambda_m|, \quad |\lambda_j| = |\lambda_{j+1}| \Rightarrow \mathrm{Re}(\lambda_j) \geq \mathrm{Re}(\lambda_{j+1})$$

Stelling [Perron & Frobenius].

Stel $A_{ij} \geq 0$ alle $i, j = 1, \ldots, m$. Dan geldt

- $\lambda_1 \geq 0$.
- Er is een eigenvector $\mathbf{v}_1$ bij λ_1 met alle coëfficiënten ≥ 0.
- Als bovendien $\mathbf{A}$ irreducibel en a-periodiek $\Rightarrow$ λ_1 dominant.

Voorbeeld

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 6 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}.$$

Voorbeeld
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 6 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}.$$

$\mathbf{A}$ is irreducible. $\text{ggd}(2,3) = 1$, dus a-periodiek.

Dus, $\mathbf{A}$ heeft een dominante eigenwaarde.
Noem deze λ. Dan $\lambda > 0$,

$$\lambda^3 - \frac{1}{2}\lambda - 1 = 0, \quad \lambda > 1 \text{ en } \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \lambda^2 \\ \frac{1}{2}\lambda \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

is de bijbehorende eigenvector. $\mathbf{v}$ is dominant.

Voorbeeld $$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 6 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}.$$

$\mathbf{A}$ is irreducible. $\text{ggd}(2,3) = 1$, dus a-periodiek.

Dus, $\mathbf{A}$ heeft een dominante eigenwaarde.
Noem deze λ. Dan $\lambda > 0$,

$$\lambda^3 - \frac{1}{2}\lambda - 1 = 0, \quad \lambda > 1 \text{ en } \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \lambda^2 \\ \frac{1}{2}\lambda \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

is de bijbehorende eigenvector. $\mathbf{v}$ is dominant.

Interpretatie: Geen evenwicht (behalve de triviale). De bevolking groeit exponentieel en op den duur volgens een stabiele evenwichtige leeftijdsopbouw:

$$\mathbf{x}_n \approx \gamma\, \lambda^n \mathbf{v} \text{ voor grote } n.$$

Voor iedere $\gamma > 0$ is $\gamma\,\mathbf{v}$ 'n stabiele leeftijdsopbouw.

Leslie matrices

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 & \cdots & g_{m-1} & g_m \\ s_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & s_{m-1} & 0 \end{bmatrix}.$$

Zij $h_1 = 1$, $h_2 = s_1 h_1$, $h_3 = s_2 h_2$, $\ldots$.

Stelling. $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) =$

$$\lambda^m - g_1 h_1 \lambda^{m-1} - g_2 h_2 \lambda^{m-2} - \ldots - g_m h_m.$$

$$\mathbf{v}_i = (h_1 \lambda_i^{m-1}, h_2 \lambda_i^{m-2}, h_3 \lambda_i^{m-3}, \ldots, h_m)^\mathsf{T}.$$

$s_i \geq 0$, $g_i \geq 0$ alle i & $\mathrm{ggd}(\{i | h_i g_i \neq 0\}) = 1$

$\Rightarrow$ λ_1 dominant en $\lambda_1 > 0$.

Voorbeeld.

Beschouw voor $s > 0$, de Leslie matrix $\quad \mathbf{A} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 1 & 6 \\ \frac{1}{2}s & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$.

- *Voor welke s is er evenwicht?*
- *Is het evenwicht stabiel?*
- *Bereken de evenwicht(en).*

Voorbeeld.

Beschouw voor $s > 0$, de Leslie matrix $\quad \mathbf{A} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 1 & 6 \\ \frac{1}{2}s & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}.$

- *Voor welke s is er evenwicht?*
- *Is het evenwicht stabiel?*
- *Bereken de evenwicht(en).*

$h_1 = 1$, $h_2 = \frac{1}{2}s$, $h_3 = \frac{1}{6}s$ & $\text{ggd}(\{i | h_i g_i \neq 0\}) = \text{ggd}(2, 3) = 1$.

Voorbeeld.

Beschouw voor $s > 0$, de Leslie matrix $\quad \mathbf{A} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 1 & 6 \\ \frac{1}{2}s & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$.

- *Voor welke s is er evenwicht?*
- *Is het evenwicht stabiel?*
- *Bereken de evenwicht(en).*

$h_1 = 1$, $h_2 = \frac{1}{2}s$, $h_3 = \frac{1}{6}s$ & $\text{ggd}(\{i | h_i g_i \neq 0\}) = \text{ggd}(2,3) = 1$.
Dus, $\mathbf{A}$ heeft een dominante eigenwaarde > 0.
Als λ eigenwaarde $\mathbf{A}$ met eigenvector $\mathbf{v}$ dan

$$\lambda^3 - \frac{1}{2}s\lambda - s = 0 \quad \text{en} \quad \mathbf{v} = (\lambda^2, \frac{1}{2}s\lambda, \frac{1}{6}s)^{\mathsf{T}}.$$

Voorbeeld.

Beschouw voor $s > 0$, de Leslie matrix $\quad \mathbf{A} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 1 & 6 \\ \frac{1}{2}s & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$.

- *Voor welke s is er evenwicht?*
- *Is het evenwicht stabiel?*
- *Bereken de evenwicht(en).*

$h_1 = 1$, $h_2 = \frac{1}{2}s$, $h_3 = \frac{1}{6}s$ & $\text{ggd}(\{i | h_i g_i \neq 0\}) = \text{ggd}(2, 3) = 1$.
Dus, **A** heeft een dominante eigenwaarde > 0.
Als λ eigenwaarde **A** met eigenvector **v** dan

$$\lambda^3 - \frac{1}{2}s\lambda - s = 0 \quad \text{en} \quad \mathbf{v} = (\lambda^2, \frac{1}{2}s\lambda, \frac{1}{6}s)^{\mathsf{T}}.$$

1 is eigenwaarde $\Leftrightarrow$ er is evenwicht $\Leftrightarrow$ $s = 2/3$.

Voor $s = 2/3$ is $\lambda = 1$ de enige oplossing > 0.

Dus, voor $s = 2/3$, is 1 dominant,
is $\gamma\,(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9})^{\mathsf{T}}$ 'n evenwicht (iedere $\gamma > 0$),
het evenwicht is zwak stabiel, de leeftijdsopbouw is **stabiel**.

Over het bewijs van Perron & Frobenius

Zij $\mathbf{A} = (A_{ij})$ een $m \times m$ matrix.

$\mathbf{A}\,\mathbf{v}_j = \lambda_j\,\mathbf{v}_j$, λ_j eigenwaarde, $\mathbf{v}_j$ eigenvector zodat

$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \ldots \geq |\lambda_m|, \quad |\lambda_j| = |\lambda_{j+1}| \Rightarrow \text{Re}(\lambda_j) \geq \text{Re}(\lambda_{j+1})$

Stelling. Stel $\mathbf{A} \geq \mathbf{0}$, d.w.z., $A_{ij} \geq 0$ alle $i, j = 1, \ldots, m$

Over het bewijs van Perron & Frobenius

Zij $\mathbf{A} = (A_{ij})$ een $m \times m$ matrix.

$\mathbf{A}\,\mathbf{v}_j = \lambda_j\,\mathbf{v}_j$, $\quad \lambda_j$ eigenwaarde, $\mathbf{v}_j$ eigenvector zodat

$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \ldots \geq |\lambda_m|, \quad |\lambda_j| = |\lambda_{j+1}| \Rightarrow \mathrm{Re}(\lambda_j) \geq \mathrm{Re}(\lambda_{j+1})$

Stelling. Stel $\mathbf{A} \geq \mathbf{0}$. Dan geldt

- $\lambda_1 \geq 0$.
- Er is een eigenvector $\mathbf{v}_1$ bij λ_1 met alle coëfficiënten ≥ 0.

Over het bewijs van Perron & Frobenius

Zij $\mathbf{A} = (A_{ij})$ een $m \times m$ matrix.

$\mathbf{A}\,\mathbf{v}_j = \lambda_j\,\mathbf{v}_j$, $\quad \lambda_j$ eigenwaarde, $\mathbf{v}_j$ eigenvector zodat

$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \ldots \geq |\lambda_m|, \quad |\lambda_j| = |\lambda_{j+1}| \Rightarrow \mathrm{Re}(\lambda_j) \geq \mathrm{Re}(\lambda_{j+1})$

Stelling. Stel $\mathbf{A} \geq \mathbf{0}$. Dan geldt

- $\lambda_1 \geq 0$.
- Er is een eigenvector $\mathbf{v}_1$ bij λ_1 met alle coëfficiënten ≥ 0.

Voorbeeld. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

$\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, maar ook $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Over het bewijs van Perron & Frobenius

Zij $\mathbf{A} = (A_{ij})$ een $m \times m$ matrix.

$\mathbf{A}\,\mathbf{v}_j = \lambda_j\,\mathbf{v}_j$, $\quad \lambda_j$ eigenwaarde, $\mathbf{v}_j$ eigenvector zodat

$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \ldots \geq |\lambda_m|$, $\quad |\lambda_j| = |\lambda_{j+1}| \Rightarrow \mathrm{Re}(\lambda_j) \geq \mathrm{Re}(\lambda_{j+1})$

Stelling. Stel $\mathbf{A} \geq \mathbf{0}$. Dan geldt

- $\lambda_1 \geq 0$.
- Er is een eigenvector $\mathbf{v}_1$ bij λ_1 met alle coëfficiënten ≥ 0.
- Als bovendien $\mathbf{A}$ irreducibel en a-periodiek $\Rightarrow$ λ_1 dominant.

Over het bewijs van Perron & Frobenius

Zij $\mathbf{A} = (A_{ij})$ een $m \times m$ matrix.

$\mathbf{A}\,\mathbf{v}_j = \lambda_j\,\mathbf{v}_j, \quad \lambda_j$ eigenwaarde, $\mathbf{v}_j$ eigenvector zodat

$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \ldots \geq |\lambda_m|, \quad |\lambda_j| = |\lambda_{j+1}| \Rightarrow \mathrm{Re}(\lambda_j) \geq \mathrm{Re}(\lambda_{j+1})$

Stelling. Stel $\mathbf{A} \geq \mathbf{0}$. Dan geldt

- $\lambda_1 \geq 0$.
- Er is een eigenvector $\mathbf{v}_1$ bij λ_1 met alle coëfficiënten ≥ 0.
- Als bovendien $\mathbf{A}$ irreducibel en a-periodiek $\Rightarrow \lambda_1$ dominant.

Opmerkingen. $\mathbf{A} \geq \mathbf{0}$.

- Als λ_1 dominant is, dan is $\mathbf{v}_1$ uniek op schaling na.

($\mathbf{A}\mathbf{v}_1 = \lambda_1\mathbf{v}_1$ en $\mathbf{A}\tilde{\mathbf{v}}_1 = \lambda_1\tilde{\mathbf{v}}_1$. Dan $\mathbf{v}_1 = \gamma\tilde{\mathbf{v}}_1$ zekere $\gamma \in \mathbb{C}$)

Over het bewijs van Perron & Frobenius

Zij $\mathbf{A} = (A_{ij})$ een $m \times m$ matrix.

$\mathbf{A}\,\mathbf{v}_j = \lambda_j\,\mathbf{v}_j$, $\quad \lambda_j$ eigenwaarde, $\mathbf{v}_j$ eigenvector zodat

$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \ldots \geq |\lambda_m|, \quad |\lambda_j| = |\lambda_{j+1}| \Rightarrow \mathrm{Re}(\lambda_j) \geq \mathrm{Re}(\lambda_{j+1})$

Stelling. Stel $\mathbf{A} \geq \mathbf{0}$. Dan geldt

- $\lambda_1 \geq 0$.
- Er is een eigenvector $\mathbf{v}_1$ bij λ_1 met alle coëfficiënten ≥ 0.
- Als bovendien $\mathbf{A}$ irreducibel en a-periodiek $\Rightarrow \lambda_1$ dominant.

Opmerkingen. $\mathbf{A} \geq \mathbf{0}$.

- Als λ_1 dominant is, dan is $\mathbf{v}_1$ uniek op schaling na.
- $\mathbf{A}$ irreducibel en a-periodiek $\Rightarrow$ alle coëff. $\mathbf{v}_1 > 0$.

Over het bewijs van Perron & Frobenius

Zij $\mathbf{A} = (A_{ij})$ een $m \times m$ matrix.

$\mathbf{A}\,\mathbf{v}_j = \lambda_j\,\mathbf{v}_j$, $\quad \lambda_j$ eigenwaarde, $\mathbf{v}_j$ eigenvector zodat

$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \ldots \geq |\lambda_m|, \quad |\lambda_j| = |\lambda_{j+1}| \Rightarrow \mathrm{Re}(\lambda_j) \geq \mathrm{Re}(\lambda_{j+1})$

Stelling. Stel $\mathbf{A} \geq \mathbf{0}$. Dan geldt

- $\lambda_1 \geq 0$.
- Er is een eigenvector $\mathbf{v}_1$ bij λ_1 met alle coëfficiënten ≥ 0.
- Als bovendien $\mathbf{A}$ irreducibel en a-periodiek $\Rightarrow \lambda_1$ dominant.

Voor bewijsargumenten, zie volgende transparanten.

Over het bewijs van Perron & Frobenius

Zij $\mathbf{A} = (A_{ij})$ een $m \times m$ matrix.

$\mathbf{A}\,\mathbf{v}_j = \lambda_j\,\mathbf{v}_j$, $\quad \lambda_j$ eigenwaarde, $\mathbf{v}_j$ eigenvector zodat

$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \ldots \geq |\lambda_m|, \quad |\lambda_j| = |\lambda_{j+1}| \Rightarrow \mathrm{Re}(\lambda_j) \geq \mathrm{Re}(\lambda_{j+1})$

Stelling. Stel $\mathbf{A} \geq \mathbf{0}$.

$\mathbf{A}$ irreducibel en a-periodiek $\Rightarrow \lambda_1$ dominant.

Voor bewijs, zie 'n geschikt vervolg college

Zij $\mathbf{A} = (A_{ij})$ een $m \times m$ matrix, $m > 1$.

Stelling. Stel λ_1 is dominant.

Voor iedere $\mathbf{x}_0$, met een $\mathbf{v}_1$ component $\neq 0$,

geldt, voor grote n, $\qquad \mathbf{x}_n = \mathbf{A}^n \mathbf{x}_0 \approx \gamma_1 \lambda_1^n \mathbf{v}_1$.

Zij $\mathbf{A} = (A_{ij})$ een $m \times m$ matrix, $m > 1$.

Stelling. Stel λ_1 is dominant.

Voor iedere $\mathbf{x}_0$, met een $\mathbf{v}_1$ component $\neq 0$,

geldt, voor grote n, $\qquad \mathbf{x}_n = \mathbf{A}^n \mathbf{x}_0 \approx \gamma_1 \lambda_1^n \mathbf{v}_1$.

Stel ook nog $\mathbf{A} \geq \mathbf{0}$.

Stel, $\mathbf{e}_j^\top \mathbf{x}_0 \geq 0$ voor alle j. $\quad \Rightarrow$

- $\mathbf{e}_j^\top \mathbf{x}_n \geq 0$ voor alle j, alle n.

- $0 \leq \mu_n = \dfrac{\mathbf{e}_1^\top \mathbf{x}_n}{\mathbf{e}_1^\top \mathbf{x}_{n-1}} \approx \lambda_1 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 \geq 0$

- $0 \leq \mathbf{e}_j^\top \mathbf{x}_n \approx \lambda_1^n \mathbf{e}_j^\top (\gamma_1 \mathbf{v}_1) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{e}_j^\top (\gamma_1 \mathbf{v}_1) \geq 0$ voor alle j.

Zij $\mathbf{A} = (A_{ij})$ een $m \times m$ matrix, $m > 1$.

Stelling. Stel λ_1 is dominant.

Voor iedere $\mathbf{x}_0$, met een $\mathbf{v}_1$ component $\neq 0$,

geldt, voor grote n, $\quad \mathbf{x}_n = \mathbf{A}^n\,\mathbf{x}_0 \approx \gamma_1\,\lambda_1^n\,\mathbf{v}_1$.

Stelling. Stel $\mathbf{A} \geq \mathbf{0}$ en λ_1 dominant. Dan $\lambda_1 > 0$ en,

voor 'n scalair γ_1, zijn alle coëff. $\gamma_1\,\mathbf{v}_1 \geq 0$.

Zij $\mathbf{A} = (A_{ij})$ een $m \times m$ matrix, $m > 1$.

Stelling. Stel λ_1 is dominant.

Voor iedere $\mathbf{x}_0$, met een $\mathbf{v}_1$ component $\neq 0$,

geldt, voor grote n, $\qquad \mathbf{x}_n = \mathbf{A}^n \mathbf{x}_0 \approx \gamma_1 \lambda_1^n \mathbf{v}_1$.

Stelling. Stel $\mathbf{A} \geq \mathbf{0}$ en λ_1 dominant. Dan $\lambda_1 > 0$ en,

voor 'n scalair γ_1, zijn alle coëff. $\gamma_1 \mathbf{v}_1 \geq 0$.

Gevolg. Stel $\mathbf{A} \geq \mathbf{0}$. Dan $\lambda_1 \geq 0$ en

er is een bijbehorende eigenvector met alle coëff. ≥ 0.

Zij $\mathbf{A} = (A_{ij})$ een $m \times m$ matrix, $m > 1$.

Stelling. Stel λ_1 is dominant.

Voor iedere $\mathbf{x}_0$, met een $\mathbf{v}_1$ component $\neq 0$,

geldt, voor grote n, $\mathbf{x}_n = \mathbf{A}^n \mathbf{x}_0 \approx \gamma_1 \lambda_1^n \mathbf{v}_1$.

Stelling. Stel $\mathbf{A} \geq \mathbf{0}$ en λ_1 dominant. Dan $\lambda_1 > 0$ en,

voor 'n scalair γ_1, zijn alle coëff. $\gamma_1 \mathbf{v}_1 \geq 0$.

Gevolg. Stel $\mathbf{A} \geq \mathbf{0}$. Dan $\lambda_1 \geq 0$ en

er is een bijbehorende eigenvector met alle coëff. ≥ 0.

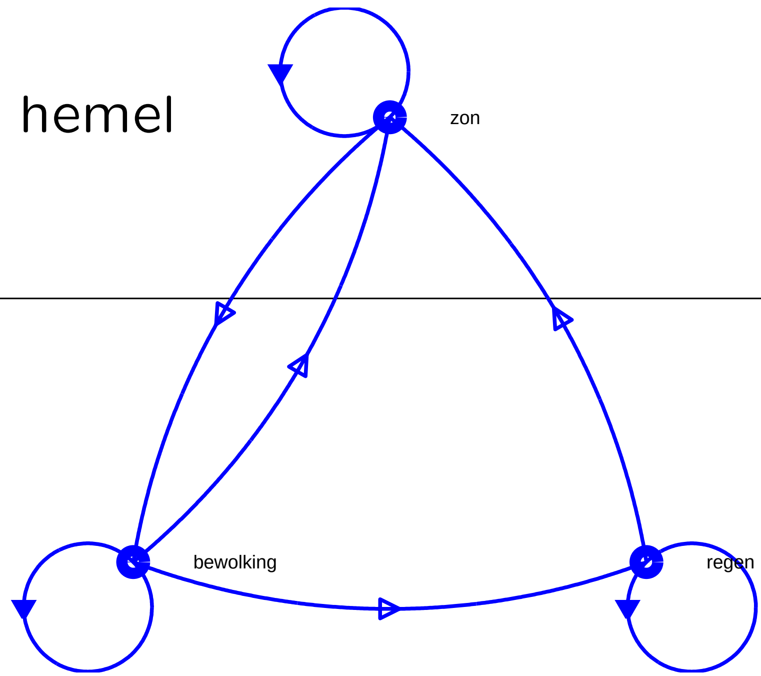
Bewijsschets. Zij, voor $\varepsilon > 0$, $\mathbf{A}_\varepsilon$ de matrix die ontstaat door bij alle coëfficiënten van $\mathbf{A}$ ε op te tellen. $\mathbf{A}_\varepsilon$ is irreducibel en a-periodiek. Dus er is een dominante eigenwaarde en die is ≥ 0 en een bijbehorende eigenvector met alleen coëfficiënten ≥ 0. Laat nu ε naar 0 gaan.

Program

- Meerdere leeftijdsklassen
- Leslie matrices
- Eigenwaarden en eigenvectoren
- Dominante eigenvector
- Irreducibele, a-periodieke matrices
- Markov ketens
- Google's PageRanking
- Lampen

Op dag n

p_n kans op zon
q_n kans op bewolkte hemel
r_n kans op regen



Aanname:
“kans op”,
van dag tot dag

Model:

$$\mathbf{p}_{n+1} = \begin{bmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \\ r_{n+1} \end{bmatrix} = \mathbf{P}\,\mathbf{p}_n \quad \text{met} \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Markov ketens

m verschillende toestanden. In toestand j is,
in volgend tijdvak, de kans op toestand i gelijk aan p_{ij}.

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1m} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{m1} & p_{m2} & \cdots & p_{mm} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{p}_n = \begin{bmatrix} p_1(n) \\ p_2(n) \\ \vdots \\ p_m(n) \end{bmatrix}$$

$\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \ldots$ is 'n discrete **Markov keten** als

$$\mathbf{p}_{n+1} = \mathbf{P}\,\mathbf{p}_n \quad \text{alle } n$$

met $\mathbf{P}$ **kansmatrix** & $\mathbf{p}_0$ **toestandsvector**
(d.w.z. kolomsom(men) =1 & alle coëffiënten ≥ 0).

Stelling. $\mathbf{p}_n$ toestandsvector voor alle n.

$\mathbf{P}$ heeft eigenwaarde 1 & $|\lambda| \leq 1$ alle eigenwaarden λ van $\mathbf{P}$.

$\mathbf{P}$ irreducibel & a-periodiek $\Rightarrow$ 1 dominant $\Rightarrow$
$\exists$ 1 stabiele **stationaire toestandsvector**.

Op dag n

$$
\begin{array}{l} p_n \text{ kans op zon,} \\ q_n \text{ kans op bewolkte hemel,} \\ r_n \text{ kans op regen} \end{array}
\qquad \& \qquad
\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.
$$

Stel zon op dag 0 $\Rightarrow$

kans op regen op dag 5 is gelijk aan de (3,1) coëfficiënt van $\mathbf{P}^5$.

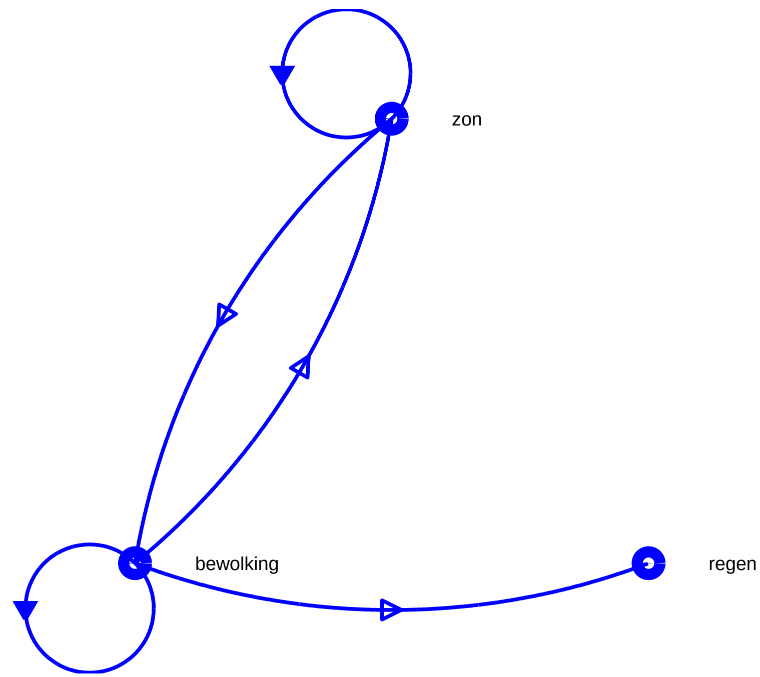
Op dag n

p_n kans op zon,
q_n kans op bewolkte hemel,
r_n kans op regen

&

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Kans voor het eerst regen op dag 5?



$$\widetilde{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Zon op dag 0 $\Rightarrow$
kans op <u>eerste</u> regen op dag 5
is de (3,1) coëfficiënt van $\widetilde{\mathbf{P}}^5$.

Hoelang duurt het gemiddeld voordat het regent?

Hoelang duurt het gemiddeld voordat het regent?

$$\sum n \times \text{ kans eerste regen op dag } n$$

$$= (3,1) \text{ coëfficiënt van } \sum_{n=1}^{\infty} n\, \widetilde{\mathbf{P}}^{n}.$$

Hoelang duurt het gemiddeld voordat het regent?

$$\sum n \times \text{ kans eerste regen op dag } n$$

$$= (3,1) \text{ coëfficiënt van } \sum_{n=1}^{\infty} n\, \widetilde{\mathbf{P}}^{n}.$$

Stelling. Als voor alle eigenwaarden λ van $\mathbf{A}$ geldt

$$|\lambda| < 1,$$

dan
$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{A}^{n} = \mathbf{A}\,(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}.$$

Hoelang duurt het gemiddeld voordat het regent?

$$\sum n \times \text{ kans eerste regen op dag } n$$

$$= (3,1) \text{ coëfficiënt van } \sum_{n=1}^{\infty} n\, \widetilde{\mathbf{P}}^{n}.$$

Stelling. Als voor alle eigenwaarden λ van $\mathbf{A}$ geldt

$$|\lambda| < 1,$$

dan
$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{A}^n = \mathbf{A}\,(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\,\mathbf{A}^n = \mathbf{A}\,(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-2}.$$

Stelling. $\mathbf{P}$ kansmatrix.

$\mathbf{p}_0$ toestandsvector $\quad \Rightarrow \quad \mathbf{p}_n = \mathbf{P}^n \mathbf{p}_0$ toestandsvector.

Bewijs. $\mathbf{e}_j$ is de j-de standaard basisvector, $\mathbf{1} \equiv (1, \ldots, 1)^\top$

Stelling. $\mathbf{P}$ kansmatrix.

$\mathbf{p}_0$ toestandsvector $\quad\Rightarrow\quad$ $\mathbf{p}_n = \mathbf{P}^n\mathbf{p}_0$ toestandsvector.

Bewijs. $\mathbf{e}_j$ is de j-de standaard basisvector, $\mathbf{1} \equiv (1, \ldots, 1)^\top$

$\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_m)^\top$ **toestandsvector**, dat wil zeggen,

$$p_j \geq 0 \quad \text{alle} \quad j = 1, \ldots, m \qquad \text{en} \qquad \sum_{j=1}^m p_j = 1.$$

$$p_j = \mathbf{e}_j^\top \mathbf{p}, \qquad\qquad 1 = \sum_{j=1}^m p_j = \mathbf{1}^\top \mathbf{p}.$$

Stelling. $\mathbf{P}$ kansmatrix.

$\mathbf{p}_0$ toestandsvector $\quad\Rightarrow\quad$ $\mathbf{p}_n = \mathbf{P}^n\mathbf{p}_0$ toestandsvector.

Bewijs. $\mathbf{e}_j$ is de j-de standaard basisvector, $\mathbf{1} \equiv (1, \ldots, 1)^\top$

$\mathbf{p}$ **toestandsvector** $\quad\Leftrightarrow\quad$ $\mathbf{e}_j^\top\mathbf{p} \geq 0 \quad \& \quad 1 = \mathbf{1}^\top\mathbf{p}$.

Stelling. $\mathbf{P}$ kansmatrix.

$\mathbf{p}_0$ toestandsvector $\quad\Rightarrow\quad$ $\mathbf{p}_n = \mathbf{P}^n\mathbf{p}_0$ toestandsvector.

Bewijs. $\mathbf{e}_j$ is de j-de standaard basisvector, $\mathbf{1} \equiv (1, \ldots, 1)^\top$

$\mathbf{p}$ **toestandsvector** $\quad\Leftrightarrow\quad$ $\mathbf{e}_j^\top\mathbf{p} \geq 0 \quad \& \quad 1 = \mathbf{1}^\top\mathbf{p}$.

$\mathbf{P} = (p_{ij})$ **kansmatrix**, dat wil zeggen,

$$p_{ij} \geq 0 \text{ alle } i, j \quad \text{en} \quad \sum_{i=1}^m p_{ij} = 1 \text{ alle } j.$$

$1 = \sum_{i=1}^m p_{ij} = \mathbf{1}^\top\mathbf{P}e_j$ alle $j \quad\Leftrightarrow\quad \mathbf{1}^\top\mathbf{P} = \mathbf{1}^\top$.

Stelling. $\mathbf{P}$ kansmatrix.

$\mathbf{p}_0$ toestandsvector $\quad\Rightarrow\quad$ $\mathbf{p}_n = \mathbf{P}^n\mathbf{p}_0$ toestandsvector.

Bewijs. $\mathbf{e}_j$ is de j-de standaard basisvector, $\mathbf{1} \equiv (1, \ldots, 1)^\top$

$\mathbf{p}$ **toestandsvector** $\quad\Leftrightarrow\quad$ $\mathbf{e}_j^\top\mathbf{p} \geq 0 \quad \& \quad 1 = \mathbf{1}^\top\mathbf{p}$.

$\mathbf{P}$ **kansmatrix** $\quad\Leftrightarrow\quad$ $\mathbf{P} \geq \mathbf{0} \quad \& \quad \mathbf{1}^\top\mathbf{P} = \mathbf{1}^\top$.

Stelling. $\mathbf{P}$ kansmatrix.

$\mathbf{p}_0$ toestandsvector $\quad \Rightarrow \quad \mathbf{p}_n = \mathbf{P}^n \mathbf{p}_0$ toestandsvector.

Bewijs. $\mathbf{e}_j$ is de j-de standaard basisvector, $\mathbf{1} \equiv (1, \ldots, 1)^\top$

$\mathbf{p}$ **toestandsvector** $\quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{e}_j^\top \mathbf{p} \geq 0 \quad \& \quad 1 = \mathbf{1}^\top \mathbf{p}$.

$\mathbf{P}$ **kansmatrix** $\quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{P} \geq \mathbf{0} \quad \& \quad \mathbf{1}^\top \mathbf{P} = \mathbf{1}^\top$.

$\mathbf{e}_j^\top \mathbf{p}_n = \mathbf{e}_j^\top \mathbf{P}^n \mathbf{p}_0 \geq 0$:

som van producten van getallen ≥ 0 is ≥ 0.

$\mathbf{1}^\top \mathbf{p}_n = \mathbf{1}^\top \mathbf{P}^n \mathbf{p}_0 = \mathbf{1}^\top \mathbf{P}^{n-1} \mathbf{p}_0 = \ldots = \mathbf{1}^\top \mathbf{p}_0 = 1$.

Stelling. $\mathbf{P}$ kansmatrix.

$\mathbf{P}$ heeft eigenwaarde 1 & $|\lambda| \leq 1$ alle eigenwaarden λ van $\mathbf{P}$.

Bewijs. $\mathbf{e}_j$ is de j-de standaard basisvector, $\mathbf{1} \equiv (1, \ldots, 1)^{\mathsf{T}}$

Stelling. $\mathbf{P}$ kansmatrix.

$\mathbf{P}$ heeft eigenwaarde 1 & $|\lambda| \leq 1$ alle eigenwaarden λ van $\mathbf{P}$.

Bewijs. $\mathbf{e}_j$ is de j-de standaard basisvector, $\mathbf{1} \equiv (1, \ldots, 1)^\top$

$\mathbf{1}^\top \mathbf{P} = \mathbf{1}^\top \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P}^\top \mathbf{1} = \mathbf{1}$.

Dus 1 is een eigenwaarde van $\mathbf{P}^\top$.

$\Rightarrow \quad 0 = \det(\mathbf{P}^\top - \mathbf{I}) = \det((\mathbf{P} - \mathbf{I})^\top) = \det(\mathbf{P} - \mathbf{I})$.

Dus 1 is een eigenwaarde van $\mathbf{P}$.

Stelling. $\mathbf{P}$ kansmatrix.

$\mathbf{P}$ heeft eigenwaarde 1 & $|\lambda| \leq 1$ alle eigenwaarden λ van $\mathbf{P}$.

Bewijs. $\mathbf{e}_j$ is de j-de standaard basisvector, $\mathbf{1} \equiv (1, \ldots, 1)^\top$

$\mathbf{1}^\top \mathbf{P} = \mathbf{1}^\top \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P}^\top \mathbf{1} = \mathbf{1}$.

Dus 1 is een eigenwaarde van $\mathbf{P}^\top$.

$\Rightarrow \quad 0 = \det(\mathbf{P}^\top - \mathbf{I}) = \det((\mathbf{P} - \mathbf{I})^\top) = \det(\mathbf{P} - \mathbf{I})$.

Dus 1 is een eigenwaarde van $\mathbf{P}$.

Evenzo, als λ is een eigenwaarde van $\mathbf{A}^\top$.

$\Rightarrow \quad 0 = \det(\mathbf{A}^\top - \lambda\mathbf{I}) = \det((\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^\top) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$.

Dus λ is een eigenwaarde van $\mathbf{A}$.

Stelling. λ eigenwaarde $\mathbf{A} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda$ eigenwaarde $\mathbf{A}^{\mathsf{T}}$

Intermezzo

$$\mathbf{x}_0 = \gamma_1 \mathbf{v}_1 + \ldots + \gamma_m \mathbf{v}_m, \qquad \text{met } \mathbf{A}\,\mathbf{v}_j = \lambda_j \mathbf{v}_j$$

Zij $\mathbf{w}_1$ zo dat $\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{w}_1 = \lambda_1 \mathbf{w}_1$, of, equivalent, $\mathbf{w}_1^{\mathsf{T}}\,\mathbf{A} = \lambda_1 \mathbf{w}_1^{\mathsf{T}}$:
$\mathbf{w}_1$ is een **links** eigenvector bij de eigenwaarde λ_1.

Stelling. Als λ_1 dominant, dan $\gamma_1 = \mathbf{w}_1^{\mathsf{T}}\mathbf{x}_0 / \mathbf{w}_1^{\mathsf{T}}\mathbf{v}_1$.

Als $\mathbf{v}_1$ en $\mathbf{w}_1$ bekend zijn, dan kan γ_1 berekend worden.

Stelling. λ eigenwaarde $\mathbf{A} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda$ eigenwaarde $\mathbf{A}^{\mathsf{T}}$

Intermezzo

$$\mathbf{x}_0 = \gamma_1 \mathbf{v}_1 + \ldots + \gamma_m \mathbf{v}_m, \qquad \text{met } \mathbf{A}\,\mathbf{v}_j = \lambda_j \mathbf{v}_j$$

Zij $\mathbf{w}_1$ zo dat $\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{w}_1 = \lambda_1 \mathbf{w}_1$, of, equivalent, $\mathbf{w}_1^{\mathsf{T}}\,\mathbf{A} = \lambda_1 \mathbf{w}_1^{\mathsf{T}}$:
$\mathbf{w}_1$ is een **links** eigenvector bij de eigenwaarde λ_1.

Stelling. Als λ_1 dominant, dan $\gamma_1 = \mathbf{w}_1^{\mathsf{T}}\mathbf{x}_0 / \mathbf{w}_1^{\mathsf{T}}\mathbf{v}_1$.

Bewijs. $\quad \lambda_1\, \mathbf{w}_1^{\mathsf{T}}\mathbf{v}_j = \mathbf{w}_1^{\mathsf{T}}\mathbf{A}\mathbf{v}_j = \lambda_j\, \mathbf{w}_1^{\mathsf{T}}\mathbf{v}_j$.

Dus, óf $\lambda_1 = \lambda_j$, óf $\mathbf{w}_1^{\mathsf{T}}\mathbf{v}_j = 0$.

Stelling. λ eigenwaarde $\mathbf{A} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda$ eigenwaarde $\mathbf{A}^\mathsf{T}$

Intermezzo

$$\mathbf{x}_0 = \gamma_1 \mathbf{v}_1 + \ldots + \gamma_m \mathbf{v}_m, \qquad \text{met } \mathbf{A}\,\mathbf{v}_j = \lambda_j \mathbf{v}_j$$

Zij $\mathbf{w}_1$ zo dat $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{w}_1 = \lambda_1 \mathbf{w}_1$, of, equivalent, $\mathbf{w}_1^\mathsf{T}\,\mathbf{A} = \lambda_1 \mathbf{w}_1^\mathsf{T}$:
$\mathbf{w}_1$ is een **links** eigenvector bij de eigenwaarde λ_1.

Stelling. Als λ_1 dominant, dan $\gamma_1 = \mathbf{w}_1^\mathsf{T}\mathbf{x}_0 / \mathbf{w}_1^\mathsf{T}\mathbf{v}_1$.

Bewijs. $\quad \lambda_1\, \mathbf{w}_1^\mathsf{T}\mathbf{v}_j = \mathbf{w}_1^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{v}_j = \lambda_j\, \mathbf{w}_1^\mathsf{T}\mathbf{v}_j$.

Dus, óf $\lambda_1 = \lambda_j$, óf $\mathbf{w}_1^\mathsf{T}\mathbf{v}_j = 0$.

Als λ_1 dominant, dan $\lambda_1 \neq \lambda_j \quad (j > 1)$:

$$\mathbf{w}_1^\mathsf{T}\mathbf{x}_0 = \gamma_1 \mathbf{w}_1^\mathsf{T}\mathbf{v}_1 + \ldots + \gamma_m \mathbf{w}_1^\mathsf{T}\mathbf{v}_m = \gamma_1 \mathbf{w}_1^\mathsf{T}\mathbf{v}_1.$$

Stelling. $\mathbf{P}$ kansmatrix.

$\mathbf{P}$ heeft eigenwaarde 1 & $|\lambda| \leq 1$ alle eigenwaarden λ van $\mathbf{P}$.

Bewijs. $\mathbf{e}_j$ is de j-de standaard basisvector, $\mathbf{1} \equiv (1, \ldots, 1)^\top$

$\mathbf{1}^\top \mathbf{P} = \mathbf{1}^\top \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P}^\top \mathbf{1} = \mathbf{1}$.

Dus 1 is een eigenwaarde van $\mathbf{P}^\top$.

$\Rightarrow \quad 0 = \det(\mathbf{P}^\top - \mathbf{I}) = \det((\mathbf{P} - \mathbf{I})^\top) = \det(\mathbf{P} - \mathbf{I})$.

Dus 1 is een eigenwaarde van $\mathbf{P}$.

Stelling. $\mathbf{P}$ kansmatrix.

$\mathbf{P}$ heeft eigenwaarde 1 & $|\lambda| \leq 1$ alle eigenwaarden λ van $\mathbf{P}$.

Bewijs. $\mathbf{e}_j$ is de j-de standaard basisvector, $\mathbf{1} \equiv (1, \ldots, 1)^\top$

$\mathbf{1}^\top \mathbf{P} = \mathbf{1}^\top \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P}^\top \mathbf{1} = \mathbf{1}$.

Dus 1 is een eigenwaarde van $\mathbf{P}^\top$.

$\Rightarrow \quad 0 = \det(\mathbf{P}^\top - \mathbf{I}) = \det((\mathbf{P} - \mathbf{I})^\top) = \det(\mathbf{P} - \mathbf{I})$.

Dus 1 is een eigenwaarde van $\mathbf{P}$.

Alternatief bewijs. $\mathbf{P} \geq \mathbf{0}$.

Dus (Perron-Frobenius) is er een
eigenwaarde, zeg λ_1, met $\lambda_1 > 0$, $\lambda_1 \geq |\lambda_j|$ alle j, en
bijbehorende eigenvector $\mathbf{v}_1$ met alle coördinaten ≥ 0.

$\mathbf{1}^\top \mathbf{v}_1 = \mathbf{1}^\top \mathbf{P} \mathbf{v}_1 = \lambda_1 \mathbf{1}^\top \mathbf{v}_1$. Omdat $\mathbf{1}^\top \mathbf{v}_1 > 0$ volgt $\lambda_1 = 1$.

Stelling. $\mathbf{P}$ kansmatrix.

$\mathbf{P}$ heeft eigenwaarde 1 & $|\lambda| \leq 1$ alle eigenwaarden λ van $\mathbf{P}$.

Bewijs. $\mathbf{e}_j$ is de j-de standaard basisvector, $\mathbf{1} \equiv (1, \ldots, 1)^\mathsf{T}$

Stel $\quad \mathbf{P}\,\mathbf{v} = \lambda\,\mathbf{v}$.

Dan $\quad |\lambda|\,|\mathbf{v}| = |\lambda\,\mathbf{v}| = |\mathbf{P}\,\mathbf{v}| \leq \mathbf{P}\,|\mathbf{v}|$,

hierbij is $|\mathbf{v}|$ coördinaatsgewijs absolute waarde nemen

en geldt $\leq$ coördinaatsgewijs.

Dus $\quad |\lambda|\,\mathbf{1}^\mathsf{T}|\mathbf{v}| = \mathbf{1}^\mathsf{T}(|\lambda|\,|\mathbf{v}|) \leq \mathbf{1}^\mathsf{T}\mathbf{P}\,|\mathbf{v}| = \mathbf{1}^\mathsf{T}|\mathbf{v}|$

$\Rightarrow \quad |\lambda| \leq 1$.

Stelling. $\mathbf{P}$ kansmatrix.

$\mathbf{P}$ heeft eigenwaarde 1 & $|\lambda| \leq 1$ alle eigenwaarden λ van $\mathbf{P}$.

Bewijs. $\mathbf{e}_j$ is de j-de standaard basisvector, $\mathbf{1} \equiv (1, \ldots, 1)^\mathsf{T}$

Stel $\quad \mathbf{P}\,\mathbf{v} = \lambda\,\mathbf{v}$.

Dan $\quad |\lambda|\,|\mathbf{v}| = |\lambda\,\mathbf{v}| = |\mathbf{P}\,\mathbf{v}| \leq \mathbf{P}\,|\mathbf{v}|$,

hierbij is $|\mathbf{v}|$ coördinaatsgewijs absolute waarde nemen

en geldt $\leq$ coördinaatsgewijs.

Dus $\quad |\lambda|\,\mathbf{1}^\mathsf{T}|\mathbf{v}| = \mathbf{1}^\mathsf{T}(|\lambda|\,|\mathbf{v}|) \leq \mathbf{1}^\mathsf{T}\mathbf{P}\,|\mathbf{v}| = \mathbf{1}^\mathsf{T}|\mathbf{v}|$

$\Rightarrow \quad |\lambda| \leq 1.$

Opmerking. Als $\mathbf{1}^\mathsf{T}\,|\mathbf{A}| \leq \mathbf{1}^\mathsf{T}$,

dan $|\lambda_j| \leq 1$ alle eigenwaarden λ_j van $\mathbf{A}$.

Stelling. $\mathbf{P}$ kansmatrix.

$\mathbf{P}$ heeft eigenwaarde 1 & $|\lambda| \leq 1$ alle eigenwaarden λ van $\mathbf{P}$.

Bewijs. $\mathbf{e}_j$ is de j-de standaard basisvector, $\mathbf{1} \equiv (1, \ldots, 1)^\mathsf{T}$

Stel $\quad \mathbf{P}\,\mathbf{v} = \lambda\,\mathbf{v}$.

Dan $\quad |\lambda|\,|\mathbf{v}| = |\lambda\,\mathbf{v}| = |\mathbf{P}\,\mathbf{v}| \leq \mathbf{P}\,|\mathbf{v}|$,

hierbij is $|\mathbf{v}|$ coördinaatsgewijs absolute waarde nemen

en geldt $\leq$ coördinaatsgewijs.

Dus $\quad |\lambda|\,\mathbf{1}^\mathsf{T}|\mathbf{v}| = \mathbf{1}^\mathsf{T}(|\lambda|\,|\mathbf{v}|) \leq \mathbf{1}^\mathsf{T}\mathbf{P}\,|\mathbf{v}| = \mathbf{1}^\mathsf{T}|\mathbf{v}|$

$\Rightarrow \quad |\lambda| \leq 1$.

Opmerking. Als $\mathbf{1}^\mathsf{T}\,|\mathbf{A}| < \mathbf{1}^\mathsf{T}$,

dan $|\lambda_j| < 1$ alle eigenwaarden λ_j van $\mathbf{A}$.

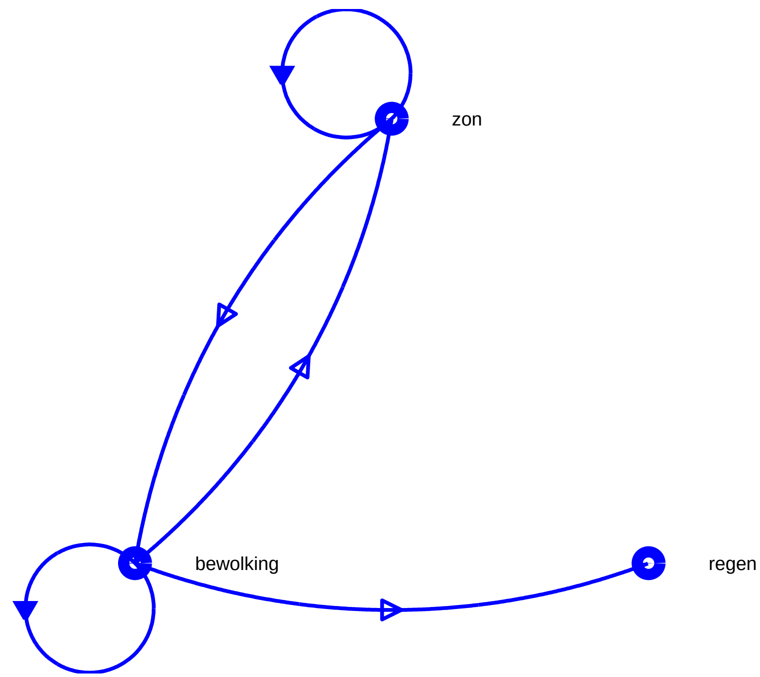
Op dag n

p_n kans op zon,
q_n kans op bewolkte hemel,
r_n kans op regen

&

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Kans voor het eerst regen op dag 5?



$$\tilde{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Zon op dag 0 $\Rightarrow$
kans op <u>eerste</u> regen op dag 5
is de (3,1) coëfficiënt van $\tilde{\mathbf{P}}^5$.

Hoelang duurt het gemiddeld voordat het regent?

$$\sum n \times \text{ kans eerste regen op dag } n$$

$$= (3,1) \text{ coëfficiënt van } \sum_{n=1}^{\infty} n\, \widetilde{\mathbf{P}}^{n}.$$

Stelling. Als voor alle eigenwaarden λ van $\mathbf{A}$ geldt

$$|\lambda| < 1,$$

dan
$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{A}^{n} = \mathbf{A}\,(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\, \mathbf{A}^{n} = \mathbf{A}\,(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-2}.$$

Is $|\lambda_j| < 1$ voor iedere eigenwaarde λ_j van $\widetilde{\mathbf{P}} = (P_{ij})$?

Schrijf $\quad (q_1, q_2, q_3) \equiv \mathbf{1}^\top \widetilde{\mathbf{P}}$.

Bekijk een eigenwaarde λ met eigenvector $\mathbf{v}$: $\widetilde{\mathbf{P}}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$.
Omdat $q_j \leq 1$ alle j volgt dat $|\lambda| \leq 1$

Is $|\lambda_j| < 1$ voor iedere eigenwaarde λ_j van $\widetilde{\mathbf{P}} = (P_{ij})$?

Schrijf $\quad (q_1, q_2, q_3) \equiv \mathbf{1}^\top \widetilde{\mathbf{P}}$.

Bekijk een eigenwaarde λ met eigenvector $\mathbf{v}$: $\widetilde{\mathbf{P}}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$.
Omdat $q_j \leq 1$ alle j volgt dat $|\lambda| \leq 1$:

$$|\lambda|\, \mathbf{1}^\top\, |\mathbf{v}| = \mathbf{1}^\top |\lambda\, \mathbf{v}| = \mathbf{1}^\top\, |\widetilde{\mathbf{P}}\mathbf{v}| \leq \mathbf{1}^\top\, \widetilde{\mathbf{P}}|\mathbf{v}| \leq \mathbf{1}^\top\, |\mathbf{v}|$$

Is $|\lambda_j| < 1$ voor iedere eigenwaarde λ_j van $\widetilde{\mathbf{P}} = (P_{ij})$?

Schrijf $\quad (q_1, q_2, q_3) \equiv \mathbf{1}^\mathsf{T}\widetilde{\mathbf{P}}$.

Bekijk een eigenwaarde λ met eigenvector $\mathbf{v}$: $\widetilde{\mathbf{P}}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$.
Omdat $q_j \leq 1$ alle j volgt dat $|\lambda| \leq 1$:

$$|\lambda|\,\mathbf{1}^\mathsf{T}\,|\mathbf{v}| = \mathbf{1}^\mathsf{T}|\lambda\,\mathbf{v}| = \mathbf{1}^\mathsf{T}\,|\widetilde{\mathbf{P}}\mathbf{v}| \leq \mathbf{1}^\mathsf{T}\,\widetilde{\mathbf{P}}|\mathbf{v}| \leq \mathbf{1}^\mathsf{T}\,|\mathbf{v}|$$

Is $|\lambda_j| < 1$ voor iedere eigenwaarde λ_j van $\tilde{\mathbf{P}} = (P_{ij})$?

Schrijf $\quad (q_1, q_2, q_3) \equiv \mathbf{1}^\top \tilde{\mathbf{P}}$.

Bekijk een eigenwaarde λ met eigenvector $\mathbf{v}$: $\tilde{\mathbf{P}}\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$.
Omdat $q_j \leq 1$ alle j volgt dat $|\lambda| \leq 1$

Stel $\tilde{\mathbf{P}}\mathbf{v} = \mathbf{v} = (v_j)$ met $v_j \geq 0$ alle j.

$$\mathbf{1}^\top \mathbf{v} = \mathbf{1}^\top \tilde{\mathbf{P}} \mathbf{v} \leq \mathbf{1}^\top \mathbf{v}.$$

Omdat $q_3 < 1$ kan dit alleen maar als $v_3 = 0$.

Is $|\lambda_j| < 1$ voor iedere eigenwaarde λ_j van $\tilde{\mathbf{P}} = (P_{ij})$?

Schrijf $\quad (q_1, q_2, q_3) \equiv \mathbf{1}^\top \tilde{\mathbf{P}}$.

Bekijk een eigenwaarde λ met eigenvector $\mathbf{v}$: $\tilde{\mathbf{P}}\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$.
Omdat $q_j \leq 1$ alle j volgt dat $|\lambda| \leq 1$

Stel $\tilde{\mathbf{P}}\mathbf{v} = \mathbf{v} = (v_j)$ met $v_j \geq 0$ alle j.

$$\mathbf{1}^\top \mathbf{v} = \mathbf{1}^\top \tilde{\mathbf{P}} \mathbf{v} \leq \mathbf{1}^\top \mathbf{v}.$$

Omdat $q_3 < 1$ kan dit alleen maar als $v_3 = 0$.

Omdat er in de graaf van $\tilde{\mathbf{P}}$ een pad is (bewandelen in de aangegeven richting!) van punt j naar punt 3 is $v_j = 0$.

Is $|\lambda_j| < 1$ voor iedere eigenwaarde λ_j van $\tilde{\mathbf{P}} = (P_{ij})$?

Schrijf $\quad (q_1, q_2, q_3) \equiv \mathbf{1}^\top \tilde{\mathbf{P}}$.

Bekijk een eigenwaarde λ met eigenvector $\mathbf{v}$: $\tilde{\mathbf{P}}\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$.
Omdat $q_j \leq 1$ alle j volgt dat $|\lambda| \leq 1$

Stel $\tilde{\mathbf{P}}\mathbf{v} = \mathbf{v} = (v_j)$ met $v_j \geq 0$ alle j.

$$\mathbf{1}^\top \mathbf{v} = \mathbf{1}^\top \tilde{\mathbf{P}}\mathbf{v} \leq \mathbf{1}^\top \mathbf{v}.$$

Omdat $q_3 < 1$ kan dit alleen maar als $v_3 = 0$.

Omdat er in de graaf van $\tilde{\mathbf{P}}$ een pad is (bewandelen in de aangegeven richting!) van punt j naar punt 3 is $v_j = 0$.

Voorbeeld. Pad $e_1 \rightsquigarrow e_2 \rightsquigarrow e_3$

Als $v_1 > 0$ dan $v_2 = P_{21}v_1 + \ldots > 0$, want op $\ldots$ alles ≥ 0.

Dus $v_3 = \ldots + P_{32}v_2 + \ldots > 0$. Echter $v_3 = 0$.

Is $|\lambda_j| < 1$ voor iedere eigenwaarde λ_j van $\tilde{\mathbf{P}} = (P_{ij})$?

Schrijf $\quad (q_1, q_2, q_3) \equiv \mathbf{1}^\top \tilde{\mathbf{P}}$.

Bekijk een eigenwaarde λ met eigenvector $\mathbf{v}$: $\tilde{\mathbf{P}}\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$.
Omdat $q_j \leq 1$ alle j volgt dat $|\lambda| \leq 1$

Stel $\tilde{\mathbf{P}}\mathbf{v} = \mathbf{v} = (v_j)$ met $v_j \geq 0$ alle j.

$$\mathbf{1}^\top \mathbf{v} = \mathbf{1}^\top \tilde{\mathbf{P}} \mathbf{v} \leq \mathbf{1}^\top \mathbf{v}.$$

Omdat $q_3 < 1$ kan dit alleen maar als $v_3 = 0$.

Omdat er in de graaf van $\tilde{\mathbf{P}}$
van ieder punt j een pad is naar punt 3
is $\mathbf{v} = 0$: blijkbaar is er geen eigenwaarde $\lambda = 1$.

Is $|\lambda_j| < 1$ voor iedere eigenwaarde λ_j van $\tilde{\mathbf{P}} = (P_{ij})$?

Schrijf $(q_1, q_2, q_3) \equiv \mathbf{1}^\top \tilde{\mathbf{P}}$.

Bekijk een eigenwaarde λ met eigenvector $\mathbf{v}$: $\tilde{\mathbf{P}}\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$.
Omdat $q_j \leq 1$ alle j volgt dat $|\lambda| \leq 1$

Stel $\tilde{\mathbf{P}}\mathbf{v} = \mathbf{v} = (v_j)$ met $v_j \geq 0$ alle j.

$$\mathbf{1}^\top \mathbf{v} = \mathbf{1}^\top \tilde{\mathbf{P}} \mathbf{v} \leq \mathbf{1}^\top \mathbf{v}.$$

Omdat $q_3 < 1$ kan dit alleen maar als $v_3 = 0$.

Omdat er in de graaf van $\tilde{\mathbf{P}}$
van ieder punt j een pad is naar punt 3
is $\mathbf{v} = 0$: blijkbaar is er geen eigenwaarde $\lambda = 1$.

Omdat $P_{ij} \geq 0$ is er een eigenwaarde λ_1 zodat
$\lambda_1 \geq |\lambda_j|$ alle j. Dus $1 > \lambda_1 \geq |\lambda_j|$.

Is $|\lambda_j| < 1$ voor iedere eigenwaarde λ_j van $\tilde{\mathbf{P}} = (P_{ij})$?

Schrijf $\quad (q_1, q_2, q_3) \equiv \mathbf{1}^\top \tilde{\mathbf{P}}$.

Bekijk een eigenwaarde λ met eigenvector $\mathbf{v}$: $\tilde{\mathbf{P}}\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$.
Omdat $q_j \leq 1$ alle j volgt dat $|\lambda| \leq 1$

Stel $\tilde{\mathbf{P}}\mathbf{v} = \mathbf{v} = (v_j)$ met $v_j \geq 0$ alle j.

$$\mathbf{1}^\top \mathbf{v} = \mathbf{1}^\top \tilde{\mathbf{P}} \mathbf{v} \leq \mathbf{1}^\top \mathbf{v}.$$

Omdat $q_3 < 1$ kan dit alleen maar als $v_3 = 0$.

Conclusie. Omdat er in de graaf van $\tilde{\mathbf{P}}$
van ieder punt j een pad is naar punt 3 is

$$|\lambda_j| < 1 \qquad \text{alle eigenwaarden } \lambda_j \text{ van } \tilde{\mathbf{P}}.$$

Zij $\widetilde{\mathbf{P}} = (P_{ij})$ een $m \times m$ matrix.

$\widetilde{\mathbf{P}}\,\mathbf{v}_j = \lambda_j \mathbf{v}_j$: $\quad$ λ_j eigenwaarde, $\mathbf{v}_j$ eigenvector zodat

$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \ldots \geq |\lambda_m|$, $\quad$ $|\lambda_j| = |\lambda_{j+1}| \Rightarrow \mathrm{Re}(\lambda_j) \geq \mathrm{Re}(\lambda_{j+1})$

Schrijf $(q_1, \ldots, q_m) \equiv \mathbf{1}^\top \widetilde{\mathbf{P}}$. Merk op $q_j \geq 0$ alle j.
q_j is de som van de coëfficiënten van de j-de kolom van $\widetilde{\mathbf{P}}$.

Stelling. Stel $\mathbf{P} \geq \mathbf{0}$. Dan

$$\lambda_1 \geq 0.$$

Stel bovendien $q_j \leq 1$ alle $j \in \{1, \ldots, m\}$. Dan

$$\lambda_1 \in [0, 1].$$

Als $q_{j_0} < 1$ voor een zekere $j_0 \in \{1, \ldots, m\}$ en als er in de graaf van $\widetilde{\mathbf{P}}$ van ieder punt $j \in \{1, \ldots, m\}$ een pad is naar het punt j_0, dan

$$\lambda_1 \in [0, 1).$$

Program

- Meerdere leeftijdsklassen
- Leslie matrices
- Eigenwaarden en eigenvectoren
- Dominante eigenvector
- Irreducibele, a-periodieke matrices
- Markov ketens
- Google's PageRanking
- Lampen

Google's pageranking

Google's pageranking

- Google $= 10^{100}$, 1932, Milton Sirotto.

Google's pageranking

- Google $= 10^{100}$, 1932, Milton Sirotto.

Aantal elementaire deeltjes in het heelal wordt geschat op 10^{80}.

Google's pageranking

- Google $= 10^{100}$,   1932,   Milton Sirotto.

Aantal verschillende volgorden waarop 80 studenten in een collegezaal met 80 stoelen kunnen zitten is

$$80! \geq \text{Google}.$$

Google's pageranking

- Google $= 10^{100}$, 1932, Milton Sirotto.

  Googleplex $= 10^{\text{Google}}$,

Google's pageranking

- Google $= 10^{100}$, 1932, Milton Sirotto.

  Googleplex $= 10^{\text{Google}}$,

- Geboorte WWW: 1989.
- Geboorte Google:

  Larry Page & Sergey Brin (John Kleinberg) 1998

Google. Iedere internetpagina I_k heeft een zeker belang (PageRank) p_k.

Het belang p_k wordt bepaald door de naar I_k linkende pagina's.

Bij iedere internet search met Google ordent Google de hits volgens dalende PageRank

Hoe bepaalt Google de PageRanks?

— *principes*
— *berekenmethode*

Google. Iedere internetpagina I_k heeft een zeker belang (PageRank) p_k.

Aanname [Page&Brin 1998]:

- Het belang van iedere pagina I_k is het totaal van de belangen die iedere pagina, die naar I_k linkt, aan I_k toe kent.
- Als I_k naar ℓ andere verschillende pagina's linkt, dan kent I_k aan ieder van deze pagina's $1/\ell$-de deel van zijn belang toe.

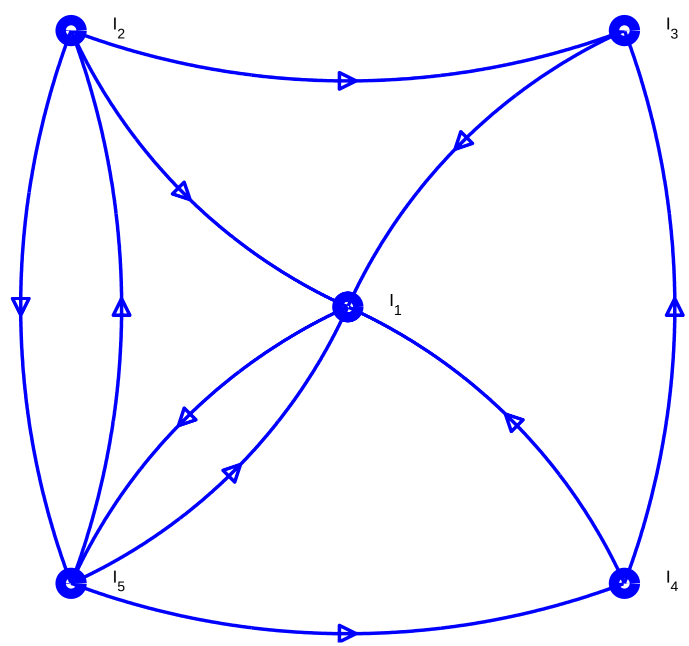
Google. Iedere internetpagina I_k heeft een zeker belang (PageRank) p_k.

Aanname [Page&Brin 1998]:

- Het belang van iedere pagina I_k is het totaal van de belangen die iedere pagina, die naar I_k linkt, aan I_k toe kent.
- Als I_k naar ℓ andere verschillende pagina's linkt, dan kent I_k aan ieder van deze pagina's $1/\ell$-de deel van zijn belang toe.

Model. $\mathbf{p} \equiv (p_1, \ldots, p_m)^\mathsf{T}$.

Schaal p_k zodat $\mathbf{1}^\mathsf{T}\mathbf{p} = \sum p_k = 1$.



Google. Iedere internetpagina I_k heeft een zeker belang (PageRank) p_k.

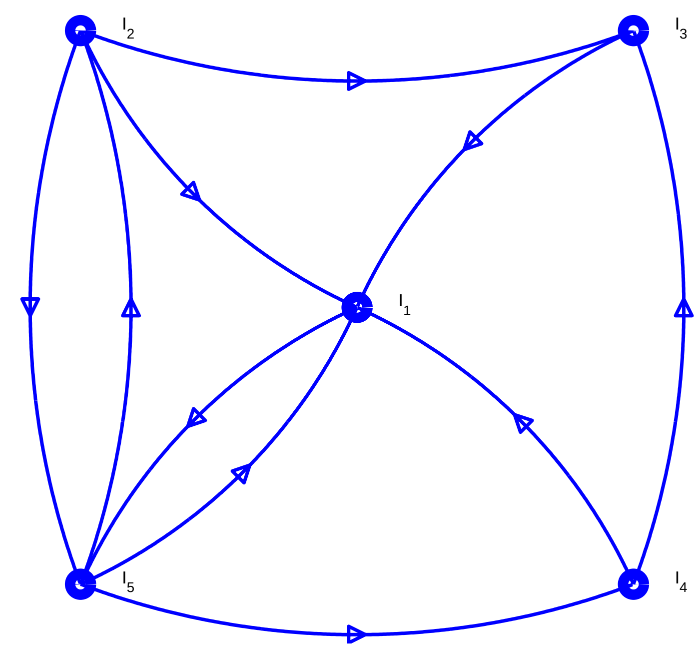
> **Aanname** [Page&Brin 1998]:
> - Het belang van iedere pagina I_k is het totaal van de belangen die iedere pagina, die naar I_k linkt, aan I_k toe kent.
> - Als I_k naar ℓ andere verschillende pagina's linkt, dan kent I_k aan ieder van deze pagina's $1/\ell$-de deel van zijn belang toe.

Model. $\mathbf{p} \equiv (p_1, \ldots, p_m)^\mathsf{T}$.

Schaal p_k zodat $\mathbf{1}^\mathsf{T}\mathbf{p} = \sum p_k = 1$.

Met $$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 1 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 \\ 1 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

is $$\mathbf{p} = \mathbf{P}\mathbf{p}.$$



Model. $\mathbf{p} \equiv (p_1, \ldots, p_m)^\mathsf{T}$.

Stelling. Als het www irreducibel is en a-periodiek dan convergeert de machtsmethode startend met $\mathbf{p}_0 = \frac{1}{m}\mathbf{1}$.

Model. $\mathbf{p} \equiv (p_1, \ldots, p_m)^\top$.

Stelling. Als het www irreducibel is en a-periodiek dan convergeert de machtsmethode startend met $\mathbf{p}_0 = \frac{1}{m}\mathbf{1}$.

Bewijs. $\mathbf{P}$ is een kansmatrix, 1 is de dominante eigenwaarde, $\mathbf{p}$ is de bijbehorende dominante kans eigenvector.

Commentaar. *De machtsmethode is een primitieve methode, maar is voor dit soort problemen met gigantische matrices nog steeds de efficiëntste.*

Reden: alleen matrix-vector vermenigvuldigingen nodig.

Opmerking. *De nullen in* $\mathbf{P}$ *worden niet opgeslagen, alleen de waarde van de nullen en de locatie ervan:*

vb $i, j, P_{i,j}$

$5, 1, 1$

$2, 1, 1/3$

$\vdots$

Model. $\mathbf{p} \equiv (p_1, \ldots, p_m)^\mathsf{T}$.

Stelling. Als het www irreducibel is en a-periodiek dan convergeert de machtsmethode startend met $\mathbf{p}_0 = \frac{1}{m}\mathbf{1}$.

Problemen.

Reducibel — dangling nodes
(wel links ernaar toe, geen links ervan af).
— onsamenhangend
(geen links van een deel naar een ander deel en visa versa).

Periodiek — machtsmethode convergeert niet.

Model. $\quad \mathbf{p} \equiv (p_1, \ldots, p_m)^{\mathsf{T}}$.

Stelling. Als het www irreducibel is en a-periodiek dan convergeert de machtsmethode startend met $\mathbf{p}_0 = \frac{1}{m}\mathbf{1}$.

Problemen.

Reducibel — dangling nodes
(wel links ernaar toe, geen links ervan af).
— onsamenhangend
(geen links van een deel naar een ander deel en visa versa).

Periodiek — machtsmethode convergeert niet.

Oplossing Google.

Dangling nodes linken in feite naar <u>alle</u> internetpagina's:

Als I_k geen link heeft, dan $p_{ik} \equiv \frac{1}{m}$ voor alle i (ook $i = k$).

Model. $\mathbf{p} \equiv (p_1, \ldots, p_m)^\top$.

Stelling. Als het www irreducibel is en a-periodiek dan convergeert de machtsmethode startend met $\mathbf{p}_0 = \frac{1}{m}\mathbf{1}$.

Problemen.

Reducibel — dangling nodes
(wel links ernaar toe, geen links ervan af).
— onsamenhangend
(geen links van een deel naar een ander deel en visa versa).

Periodiek — machtsmethode convergeert niet.

Oplossing Google.

Dangling nodes linken in feite naar <u>alle</u> internetpagina's:

Als I_k geen link heeft, dan $p_{ik} \equiv \frac{1}{m}$ voor alle i (ook $i = k$).

Pagina's worden ook bereikt via de navigatiebalk van de browser:

Teleportatie. Met $\mathbf{T} \equiv \frac{1}{m}\mathbf{1}\mathbf{1}^\top$, beschouw $(1-\alpha)\mathbf{P} + \alpha\,\mathbf{T}$.

$(1-\alpha)\mathbf{P} + \alpha\mathbf{T}$ is een a-periodiek, irreducibele kansmatrix.

Stelling. De machtsmethode, met $\mathbf{p}_0 = \frac{1}{m}\mathbf{1}^\top$, convergeert. Per iteratiestap reduceert de fout (op den duur) met een factor $1-\alpha$.

Google. $\alpha = 0.15????$

$(1-\alpha)\mathbf{P} + \alpha\mathbf{T}$ is een a-periodiek, irreducibele kansmatrix.

Stelling. De machtsmethode, met $\mathbf{p}_0 = \frac{1}{m}\mathbf{1}^\top$, convergeert. Per iteratiestap reduceert de fout (op den duur) met een factor $1-\alpha$.

Bewijs. De eigenwaarde $\lambda_1 = 1$ is dominant.
Wat kunnen we zeggen over de andere eigenwaarden?

Stel $\quad [(1-\alpha)\mathbf{P} + \alpha\mathbf{T}]\mathbf{v} = \lambda\,\mathbf{v}$ met $|\lambda| < 1$.

$\Rightarrow \quad \mathbf{1}^\top\mathbf{v} = 0.$

$\Rightarrow [(1-\alpha)\mathbf{P} + \alpha\mathbf{T}]\mathbf{v} = (1-\alpha)\mathbf{P}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}.$

Dus $\quad \mathbf{v}$ eigenvector $\mathbf{P}$ en

$\lambda = (1-\alpha) \times$ eigenwaarde $\mathbf{P}$

$\Rightarrow |\lambda| \leq 1-\alpha$

Program

- Meerdere leeftijdsklassen
- Leslie matrices
- Eigenwaarden en eigenvectoren
- Dominante eigenvector
- Irreducibele, a-periodieke matrices
- Markov ketens
- Google's PageRanking
- Lampen

- m lampen kunnen ieder met een eigen schakelaar aan of uit gezet worden.
- Telkens wordt om de minuut random een schakelaar gekozen en de schakelaar wordt random (50% kans) omgezet.
- In het begin zijn alle lampen uit.

Hoeveel lampen branden er gemiddeld?
Hoelang duurt het gemiddeld voordat alle lampen branden?

- m lampen kunnen ieder met een eigen schakelaar aan of uit gezet worden.
- Telkens wordt om de minuut random een schakelaar gekozen en de schakelaar wordt random (50% kans) omgezet.
- In het begin zijn alle lampen uit.

Hoeveel lampen branden er gemiddeld?
Hoelang duurt het gemiddeld voordat alle lampen branden?

Gerelateerde vragen:

Zijn er vlovrije honden? *Opgave 2.6.9.*

Gaat de geest weer in de fles? *Voorbeeld 2, §2.5*

- m lampen kunnen ieder met een eigen schakelaar aan of uit gezet worden.
- Telkens wordt om de minuut random een schakelaar gekozen en de schakelaar wordt random (50% kans) omgezet.
- In het begin zijn alle lampen uit.

Hoeveel lampen branden er gemiddeld?
Hoelang duurt het gemiddeld voordat alle lampen branden?

Gerelateerde vragen:

Zijn er vlovrije honden?	*Opgave 2.6.9.*
Gaat de geest weer in de fles?	*Voorbeeld 2, §2.5*

- m lampen kunnen ieder met een eigen schakelaar aan of uit gezet worden.
- Telkens wordt om de minuut random een schakelaar gekozen en de schakelaar wordt random (50% kans) omgezet.
- In het begin zijn alle lampen uit.

- m lampen kunnen ieder met een eigen schakelaar aan of uit gezet worden.
- Telkens wordt om de minuut random een schakelaar gekozen en de schakelaar wordt random (50% kans) omgezet.
- In het begin zijn alle lampen uit.

Model. $\mathbf{p}_n = (p_0(n), p_1(n), \ldots, p_m(n))^\mathsf{T}$:

$p_j(n)$ is de kans dat er in de n-de minuut precies j lampen branden.

Let op. De vector heeft lengte $m + 1$.
We hebben de coördinaten vanaf 0 (0 lampen aan) genummerd.

- m lampen kunnen ieder met een eigen schakelaar aan of uit gezet worden.
- Telkens wordt om de minuut random een schakelaar gekozen en de schakelaar wordt random (50% kans) omgezet.
- In het begin zijn alle lampen uit.

Model. $\mathbf{p}_n = (p_0(n), p_1(n), \ldots, p_m(n))^{\mathsf{T}}$:

$p_j(n)$ is de kans dat er in de n-de minuut precies j lampen branden.

$$\mathbf{p}_{n+1} = \mathbf{P}\mathbf{p}_n, \text{ met, voor } m = 4, \qquad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{2}{8} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{8} & \frac{1}{2} & \frac{3}{8} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{8} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

- m lampen kunnen ieder met een eigen schakelaar aan of uit gezet worden.
- Telkens wordt om de minuut random een schakelaar gekozen en de schakelaar wordt random (50% kans) omgezet.
- In het begin zijn alle lampen uit.

Model. $\mathbf{p}_n = (p_0(n), p_1(n), \ldots, p_m(n))^\mathsf{T}$:

$p_j(n)$ is de kans dat er in de n-de minuut precies j lampen branden.

$$\mathbf{p}_{n+1} = \mathbf{P}\mathbf{p}_n, \quad \text{met, voor } m = 4, \qquad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{2}{8} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{8} & \frac{1}{2} & \frac{3}{8} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{8} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\text{algemeen,} \qquad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2m} & 0 & 0 & \ldots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{2}{2m} & 0 & \ldots \\ 0 & \frac{m-1}{2m} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2m} & \\ 0 & 0 & \frac{m-2}{2m} & \frac{1}{2} & \ddots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{p}_{n+1} = \mathbf{P}\mathbf{p}_n, \text{ met, voor } m = 4, \qquad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{2}{8} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{8} & \frac{1}{2} & \frac{3}{8} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{8} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$\mathbf{P}$ is een irreducibel en a-periodieke kansmatrix

$\Rightarrow$ 1 is de dominante eigenwaarde.

Bijbehorende eigenvector?

$$\mathbf{p}_{n+1} = \mathbf{P}\mathbf{p}_n, \text{ met, voor } m = 4, \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{2}{8} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{8} & \frac{1}{2} & \frac{3}{8} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{8} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$\mathbf{P}$ is een irreducibel en a-periodieke kansmatrix
$\Rightarrow$ 1 is de dominante eigenwaarde.

$$\mathbf{P} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{I} + \mathbf{Q}), \text{ met } \mathbf{Q} \equiv \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{4} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{Q}$ is een kansmatrix en als $\mathbf{Q}\widetilde{\mathbf{v}} = \widetilde{\mathbf{v}}$, dan $\mathbf{P}\widetilde{\mathbf{v}} = \widetilde{\mathbf{v}}$.

Als $\widetilde{\mathbf{v}} = (1, v_1, v_2, \ldots)^{\mathsf{T}}$, dan $\frac{1}{4}v_1 = 1$, $1 + \frac{2}{4}v_2 = v_1$, etc.

$$\mathbf{p}_{n+1} = \mathbf{P}\mathbf{p}_n, \quad \text{met, voor } m = 4, \qquad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{2}{8} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{8} & \frac{1}{2} & \frac{3}{8} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{8} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$\mathbf{P}$ is een irreducibel en a-periodieke kansmatrix
$\Rightarrow$ 1 is de dominante eigenwaarde.

met $\quad v_j = \binom{m}{j} \equiv \dfrac{m!}{j!\,(m-j)!} \quad$ is

$\tilde{\mathbf{v}} \equiv (v_0, v_1, \ldots)^{\mathsf{T}}$ een dominante eigenvector van $\mathbf{P}$.

$$\mathbf{p}_{n+1} = \mathbf{P}\mathbf{p}_n, \quad \text{met, voor } m = 4, \qquad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{2}{8} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{8} & \frac{1}{2} & \frac{3}{8} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{8} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$\mathbf{P}$ is een irreducibel en a-periodieke kansmatrix
$\Rightarrow$ 1 is de dominante eigenwaarde.

met $\quad v_j = \binom{m}{j} \equiv \dfrac{m!}{j!\,(m-j)!} \quad$ is

$\widetilde{\mathbf{v}} \equiv (v_0, v_1, \ldots)^{\mathsf{T}}$ een dominante eigenvector van $\mathbf{P}$.

Biniomiaal ontwikkeling. $(a+b)^m = \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} a^j\, b^{m-j}$.

in het bijzonder $2^m = (1+1)^m = \sum v_j$.

$\mathbf{p}_{n+1} = \mathbf{P}\mathbf{p}_n$, met, voor $m = 4$, $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{2}{8} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{8} & \frac{1}{2} & \frac{3}{8} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{8} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

$\mathbf{P}$ is een irreducibel en a-periodieke kansmatrix

$\Rightarrow$ 1 is de dominante eigenwaarde.

met $\quad v_j = \binom{m}{j} \equiv \dfrac{m!}{j!\,(m-j)!}$ $\quad$ is

$\tilde{\mathbf{v}} \equiv (v_0, v_1, \ldots)^{\mathsf{T}}$ een dominante eigenvector van $\mathbf{P}$.

De rij van toestandsvectoren $\mathbf{p}_n$ convergeert naar

de dominante toestands eigenvector $\mathbf{v}_1 \equiv 2^{-m}\tilde{\mathbf{v}}$.

$$\mathbf{p}_{n+1} = \mathbf{P}\mathbf{p}_n, \quad \text{met, voor } m = 4, \qquad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{2}{8} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{8} & \frac{1}{2} & \frac{3}{8} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{8} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

P is een irreducibel en a-periodieke kansmatrix
$\Rightarrow$ 1 is de dominante eigenwaarde.

met $\quad v_j = \binom{m}{j} \equiv \dfrac{m!}{j!\,(m-j)!} \quad$ is

$\tilde{\mathbf{v}} \equiv (v_0, v_1, \ldots)^{\mathsf{T}}$ een dominante eigenvector van **P**.

De rij van toestandsvectoren $\mathbf{p}_n$ convergeert naar

de dominante toestands eigenvector $\mathbf{v}_1 \equiv 2^{-m}\tilde{\mathbf{v}}$.

De kans op alle lampen aan: $2^{-m} v_m = 2^{-m}$.
met $m = 100$ *is* $2^{100} = (2^{10})^{10} \approx (10^3)^{10} = 10^{30}$.