

Utrecht, 13 mei 2013

# Modellen en Simulatie

## Rekursies

Gerard Sleijpen



**Universiteit Utrecht**  
*Department of Mathematics*

<http://www.staff.science.uu.nl/~sleij101/>

$N_n$ : aantal individuen eind tijdvak  $n$ .

**Aanname** [Malthus, 1798]:

in ieder tijdvak: fractie  $s$  sterft, fractie  $g$  geboren

**Model.**  $N_{n+1} = N_n + g N_n - s N_n = \kappa N_n$   
met  $\kappa = 1 + g - s$ ,  $\kappa$  is de **groei-coëfficiënt**

**Oplossing.**  $N_n = (1 + g - s)^n N_0 = \kappa^n N_0$ :  
de groei is **exponentiëel**

## Bezwaren tegen het Malthus model

- groeicoëfficiënt kan afhangen van  $N_n$ ,
- groeicoëfficiënt kan afhangen van  $n$ ,
- groeicoëfficiënt kan afhangen van  $N_n, N_{n-1}, \dots$
- groeicoëfficiënt kan beïnvloed worden door andere soorten,
- veranderingen kunnen optreden op elk tijdstip (tijdsvakgedachte niet houdbaar)
- groei kan plaats afhankelijk zijn
-

## Bezwaren tegen het Malthus model

- groeicoëfficiënt kan afhangen van  $N_n$ ,
- groeicoëfficiënt kan afhangen van  $n$ ,
- groeicoëfficiënt kan afhangen van  $N_n, N_{n-1}, \dots$
- groeicoëfficiënt kan beïnvloed worden door andere soorten,
- veranderingen kunnen optreden op elk tijdstip (tijdsvakgedachte niet houdbaar)
- groei kan plaats afhankelijk zijn
-

# Program

- Management voorbeeld (affien)
- Economisch voorbeeld (affien)
- Rupsen-wespen (niet lineair)
- Niet-lineaire modellen, evenwicht, stabiliteit
- Lineairiseren
- Companion vorm
- Complex als 2-d reeel
- Hoefijzer van Smale

# Program

- Management voorbeeld (affien)
- Economisch voorbeeld (affien)
- Rupsen-wespen (niet lineair)
- Niet-lineaire modellen, evenwicht, stabiliteit
- Lineairiseren
- Companion vorm
- Complex als 2-d reeel
- Hoefijzer van Smale

Een opleiding heeft drie jaargangen (klassen).

**Aanname:**

- In iedere klas gaat gemiddeld 70% over.  
In de derde klas slaagt 70% voor het eindexamen.
- Van de zittenblijvers doet 20% de klas en verlaat 10% de opleiding.
- Ieder jaar heeft de opleiding 1000,100,200 instromers in klas 1, 2, 3 respectievelijk.

Hoeveel leerlingen slagen er (op den duur) jaarlijks voor de opleiding?

Een opleiding heeft drie jaargangen (klassen).

**Aanname:**

- In iedere klas gaat gemiddeld 70% over.  
In de derde klas slaagt 70% voor het eindexamen.
- Van de zittenblijvers doet 20% de klas en verlaat 10% de opleiding.
- Ieder jaar heeft de opleiding 1000,100,200 instromers in klas 1, 2, 3 respectievelijk.

**Model.**  $\mathbf{x}_n = (x_n(1), x_2(n), x_3(n))^T,$

met  $x_n(j)$  het aantal leerlingen in klas  $j$  in academisch jaar  $n$ .



Een opleiding heeft drie jaargangen (klassen).

**Aanname:**

- In iedere klas gaat gemiddeld 70% over.  
In de derde klas slaagt 70% voor het eindexamen.
- Van de zittenblijvers doet 20% de klas en verlaat 10% de opleiding.
- Ieder jaar heeft de opleiding 1000,100,200 instromers in klas 1, 2, 3 respectievelijk.

**Model.**  $\mathbf{x}_n = (x_n(1), x_2(n), x_3(n))^T$ ,

met  $x_n(j)$  het aantal leerlingen in klas  $j$  in academisch jaar  $n$ .

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_n + \mathbf{f} \text{ met } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 & 0 \\ 0.7 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0.7 & 0.2 \end{bmatrix} \text{ en } \mathbf{f} = \begin{bmatrix} 1000 \\ 100 \\ 200 \end{bmatrix}$$

# Program

- Management voorbeeld (affien)
- Economisch voorbeeld (affien)
- Rupsen-wespen (niet lineair)
- Niet-lineaire modellen, evenwicht, stabiliteit
- Lineairiseren
- Companion vorm
- Complex als 2-d reeel
- Hoefijzer van Smale

# Economisch model I

In  $n$ -de jaar  $C_n$ : totale consumptie

$I_n$ : totaal aan investeringen

$Y_n = C_n + I_n$ : nationaal inkomen

**Aanname** [Keynes 1936]:

- Consumptie hangt lineair af van het nationaal inkomen van vorig jaar.
- Investeringen veranderen niet.

# Economisch model I

In  $n$ -de jaar  $C_n$ : totale consumptie

$I_n$ : totaal aan investeringen

$Y_n = C_n + I_n$ : nationaal inkomen

**Aanname** [Keynes 1936]:

- Consumptie hangt lineair af van het nationaal inkomen van vorig jaar.
- Investeringen veranderen niet.

**Model:**  $C_n = k Y_{n-1} + C_0$  &  $I_n = I_0$

voor zekere positieve (bekende)  $k$ ,  $C_0$  en  $I_0$ .

# Economisch model I

In  $n$ -de jaar  $C_n$ : totale consumptie

$I_n$ : totaal aan investeringen

$Y_n = C_n + I_n$ : nationaal inkomen

**Aanname** [Keynes 1936]:

- Consumptie hangt lineair af van het nationaal inkomen van vorig jaar.
- Investeringen veranderen niet.

**Model:**  $C_n = k Y_{n-1} + C_0$  &  $I_n = I_0$

voor zekere positieve (bekende)  $k$ ,  $C_0$  en  $I_0$ .

Dan  $Y_n = k Y_{n-1} + C_0 + I_0$ .

# Economisch model I

In  $n$ -de jaar  $C_n$ : totale consumptie

$I_n$ : totaal aan investeringen

$Y_n = C_n + I_n$ : nationaal inkomen

**Aanname** [Keynes 1936]:

- Consumptie hangt lineair af van het nationaal inkomen van vorig jaar.
- Investeringen veranderen niet.

**Model:**  $C_n = k Y_{n-1} + C_0$  &  $I_n = I_0$

voor zekere positieve (bekende)  $k$ ,  $C_0$  en  $I_0$ .

Dan  $Y_n = k Y_{n-1} + C_0 + I_0$ .

$\alpha$  evenwichtspunt  $\Leftrightarrow \alpha = k \alpha + C_0 + I_0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{C_0 + I_0}{1 - k}$ .

# Economisch model I

In  $n$ -de jaar  $C_n$ : totale consumptie

$I_n$ : totaal aan investeringen

$Y_n = C_n + I_n$ : nationaal inkomen

**Aanname** [Keynes 1936]:

- Consumptie hangt lineair af van het nationaal inkomen van vorig jaar.
- Investeringen veranderen niet.

**Model:**  $C_n = k Y_{n-1} + C_0$  &  $I_n = I_0$

voor zekere positieve (bekende)  $k$ ,  $C_0$  en  $I_0$ .

Dan  $Y_n = k Y_{n-1} + C_0 + I_0$ .

$\alpha$  evenwichtspunt  $\Leftrightarrow \alpha = k \alpha + C_0 + I_0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{C_0 + I_0}{1 - k}$ .

Positief evenwicht  $\Leftrightarrow k < 1 \Leftrightarrow$

stabiel evenwicht ( $Y_n = \alpha + \varepsilon_n \Leftrightarrow \varepsilon_n = k \varepsilon_{n-1}$ ).

# Economisch model I

In  $n$ -de jaar  $C_n$ : totale consumptie

$I_n$ : totaal aan investeringen

$Y_n = C_n + I_n$ : nationaal inkomen

**Aanname** [Keynes 1936]:

- Consumptie hangt lineair af van het nationaal inkomen van vorig jaar.
- Investeringen veranderen niet.

**Model:**  $C_n = k Y_{n-1} + C_0$  &  $I_n = I_0$

voor zekere positieve (bekende)  $k$ ,  $C_0$  en  $I_0$ .

Dan  $Y_n = k Y_{n-1} + C_0 + I_0$ .

$\alpha$  evenwichtspunt  $\Leftrightarrow \alpha = k \alpha + C_0 + I_0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{C_0 + I_0}{1 - k}$ .

Positief evenwicht  $\Leftrightarrow k < 1 \Leftrightarrow$

stabiel evenwicht ( $Y_n = \alpha + \varepsilon_n \Leftrightarrow \varepsilon_n = k \varepsilon_{n-1}$ ).

*Schommelingen in de conjunctuur?*



## Economisch model II

**Aanname** [Samuelson & Hicks 1939]:

- Consumptie hangt lineair af van het nationaal inkomen van het vorig jaar
- Investerings hangen lineair af van de **groei** van het nationaal inkomen

## Economisch model II

**Aanname** [Samuelson & Hicks 1939]:

- Consumptie hangt lineair af van het nationaal inkomen van het vorig jaar
- Investerings hangen lineair af van de **groei** van het nationaal inkomen

**Model:**  $C_n = k Y_{n-1} + C_0$  &  $I_n = d (Y_{n-1} - Y_{n-2}) + I_0$   
voor zekere positieve (bekende)  $k$ ,  $C_0$  en  $d$ ,  $I_0$ .

## Economisch model II

**Aanname** [Samuelson & Hicks 1939]:

- Consumptie hangt lineair af van het nationaal inkomen van het vorig jaar
- Investerings hangen lineair af van de **groei** van het nationaal inkomen

**Model:**  $C_n = k Y_{n-1} + C_0$  &  $I_n = d (Y_{n-1} - Y_{n-2}) + I_0$   
voor zekere positieve (bekende)  $k$ ,  $C_0$  en  $d$ ,  $I_0$ .

$$\begin{aligned} \Rightarrow Y_n &= k Y_{n-1} + C_0 + d (Y_{n-1} - Y_{n-2}) + I_0 \\ &= (k + d) Y_{n-1} - d Y_{n-2} + C_0 + I_0. \end{aligned}$$

## Economisch model II

**Aanname** [Samuelson & Hicks 1939]:

- Consumptie hangt lineair af van het nationaal inkomen van het vorig jaar
- Investerings hangen lineair af van de **groei** van het nationaal inkomen

**Model:**  $C_n = k Y_{n-1} + C_0$  &  $I_n = d (Y_{n-1} - Y_{n-2}) + I_0$   
voor zekere positieve (bekende)  $k$ ,  $C_0$  en  $d$ ,  $I_0$ .

$$\begin{aligned} \Rightarrow Y_n &= k Y_{n-1} + C_0 + d (Y_{n-1} - Y_{n-2}) + I_0 \\ &= (k + d) Y_{n-1} - d Y_{n-2} + C_0 + I_0. \end{aligned}$$

$$\alpha \text{ evenwicht} \Leftrightarrow \alpha = (k + d) \alpha - d \alpha + C_0 + I_0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{C_0 + I_0}{1 - k}.$$

## Economisch model II

**Aanname** [Samuelson & Hicks 1939]:

- Consumptie hangt lineair af van het nationaal inkomen van het vorig jaar
- Investerings hangen lineair af van de **groei** van het nationaal inkomen

**Model:**  $C_n = k Y_{n-1} + C_0$  &  $I_n = d (Y_{n-1} - Y_{n-2}) + I_0$   
voor zekere positieve (bekende)  $k$ ,  $C_0$  en  $d$ ,  $I_0$ .

$$\begin{aligned}\Rightarrow Y_n &= k Y_{n-1} + C_0 + d (Y_{n-1} - Y_{n-2}) + I_0 \\ &= (k + d) Y_{n-1} - d Y_{n-2} + C_0 + I_0.\end{aligned}$$

$$\alpha \text{ evenwicht} \Leftrightarrow \alpha = (k + d) \alpha - d \alpha + C_0 + I_0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{C_0 + I_0}{1 - k}.$$

Positief evenwicht  $\Leftrightarrow k < 1$ .

*Stabiel??*  $Y_n \rightarrow \alpha$  als  $Y_0 \approx \alpha$  **en**  $Y_1 \approx \alpha$ ??

## Economisch model; Analyse

Er geldt (**companion vorm**)

$$\begin{bmatrix} Y_n \\ Y_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k + d & -d \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{n-1} \\ Y_{n-2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_0 + I_0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Met  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} k + d & -d \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} C_0 + I_0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{x}_n = \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{bmatrix}$  geldt

$$Y_n = x_1(n-1) \quad (\forall n) \quad \Leftrightarrow \quad Y_n = x_2(n) \quad (\forall n) \quad \Leftrightarrow$$

$$Y_1 = x_1(0) \quad \& \quad \mathbf{x}_n = \mathbf{A} \mathbf{x}_{n-1} + \mathbf{c} \quad \text{alle } n.$$

$$Y_0 = x_2(0)$$

$$\mathbf{x}_n = \mathbf{A} \mathbf{x}_{n-1} + \mathbf{c} \quad \text{alle } n$$

$$\vec{\alpha} \equiv \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} \text{ evenwicht} \quad (\mathbf{x}_0 = \vec{\alpha} \Rightarrow \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_1 = \dots)$$
$$\Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = (C_0 + I_0)/(1 - k).$$

**Stabiel** als  $\mathbf{x}_n \rightarrow \vec{\alpha}$  ( $n \rightarrow \infty$ ) voor  $\mathbf{x}_0 \approx \vec{\alpha}$ .

Als  $\mathbf{x}_n = \vec{\alpha} + \vec{\varepsilon}_n$  dan

$$\vec{\varepsilon}_n = \mathbf{A} \vec{\varepsilon}_{n-1}$$

**Stelling.** *Stabiel*  $\Leftrightarrow \vec{\varepsilon}_n \rightarrow \mathbf{0}$  ( $n \rightarrow \infty$ ) voor  $\vec{\varepsilon}_0 \approx \mathbf{0}$   
 $\Leftrightarrow |\lambda| < 1$  alle eigenwaarden  $\lambda$  van  $\mathbf{A}$ .

$\lambda_1, \lambda_2$  eigenwaarden  $\mathbf{A}$  zodat  $|\lambda_2| \leq |\lambda_1|$ .

*Evenwicht is stabiel*  $\Leftrightarrow |\lambda_1| < 1$ .

Met  $Y_n = \alpha_1 + \varepsilon_n$  is  $\varepsilon_n = \varepsilon_1(n) = \mathbf{e}_1^\top \vec{\varepsilon}_n$ .

$|\lambda_2| < |\lambda_1|$  ( $\lambda_1$  dominant)  $\Rightarrow \varepsilon_n \approx \gamma_1 \lambda_1^n$ :

*Evenwicht herstelt als  $|\lambda_1| < 1$ .*

*(Herstel is monotoon als  $\lambda_2 > 0$ .)*

$\lambda_1 = \bar{\lambda}_2 = \rho e^{i\phi} \notin \mathbb{R}$ . Hier  $\rho \equiv |\lambda_1|$

$\Rightarrow \varepsilon_n = \rho^n (\gamma_1 \cos(n\phi) + \gamma_2 \sin(n\phi))$ :

*Slingerende herstel van het evenwicht als  $|\lambda_1| < 1$ .*



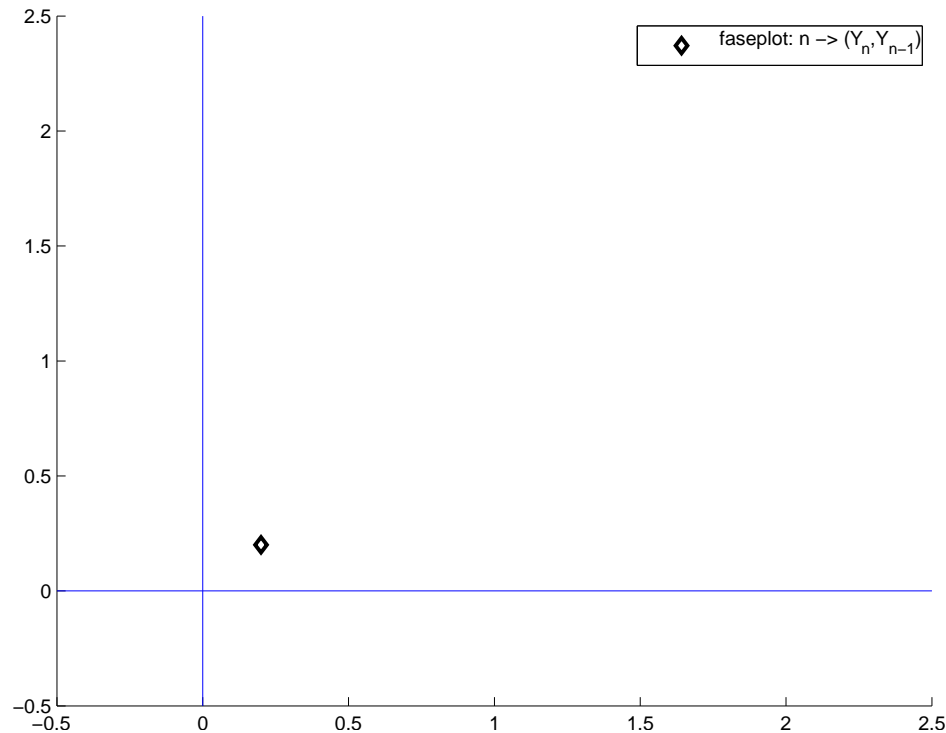
**Voorbeeld.** Karakteristieke vergelijking **A**:

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = \lambda^2 - (k + d)\lambda + d = 0.$$

Reële oplossing  $\Leftrightarrow 4d \leq (k + d)^2 \Leftrightarrow k > 1$ .

Stel reële oplossing. Dan:  $\lambda_1 > 1 \Leftrightarrow k > 1$ .

Stel irreële oplossing. Dan:  $|\lambda_1| < 1 \Leftrightarrow d < 1$ .



$k = 0.1, d = 0.7, C_0 = 8/9, I_0 = 2/9$ .

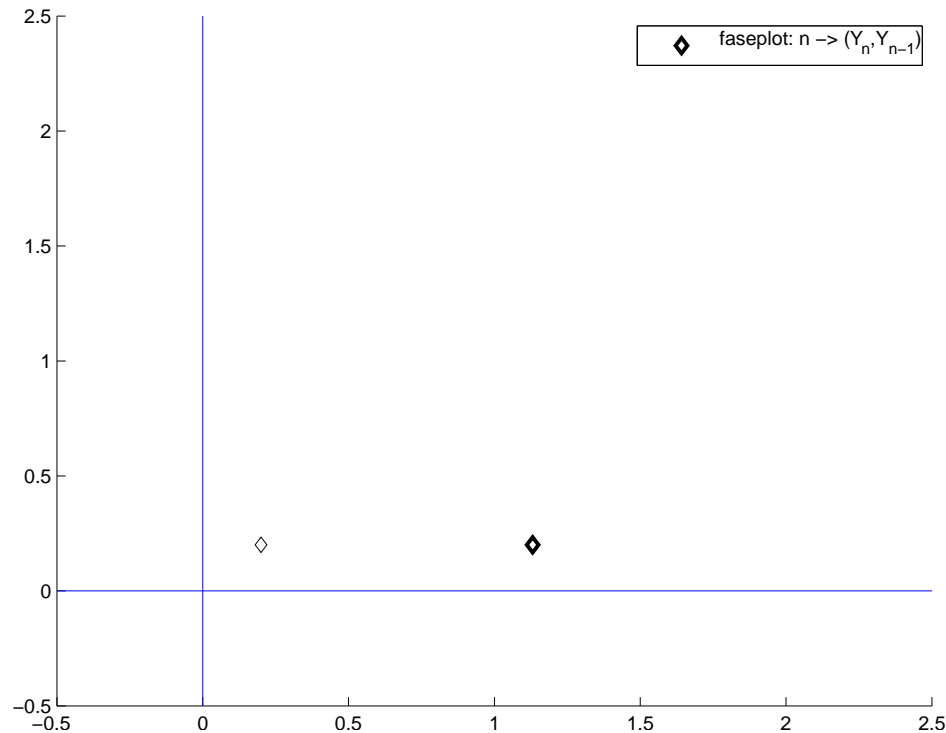
**Voorbeeld.** Karakteristieke vergelijking **A**:

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = \lambda^2 - (k + d)\lambda + d = 0.$$

Reële oplossing  $\Leftrightarrow 4d \leq (k + d)^2 \Leftrightarrow k > 1$ .

Stel reële oplossing. Dan:  $\lambda_1 > 1 \Leftrightarrow k > 1$ .

Stel irreële oplossing. Dan:  $|\lambda_1| < 1 \Leftrightarrow d < 1$ .



$k = 0.1, d = 0.7, C_0 = 8/9, I_0 = 2/9$ .

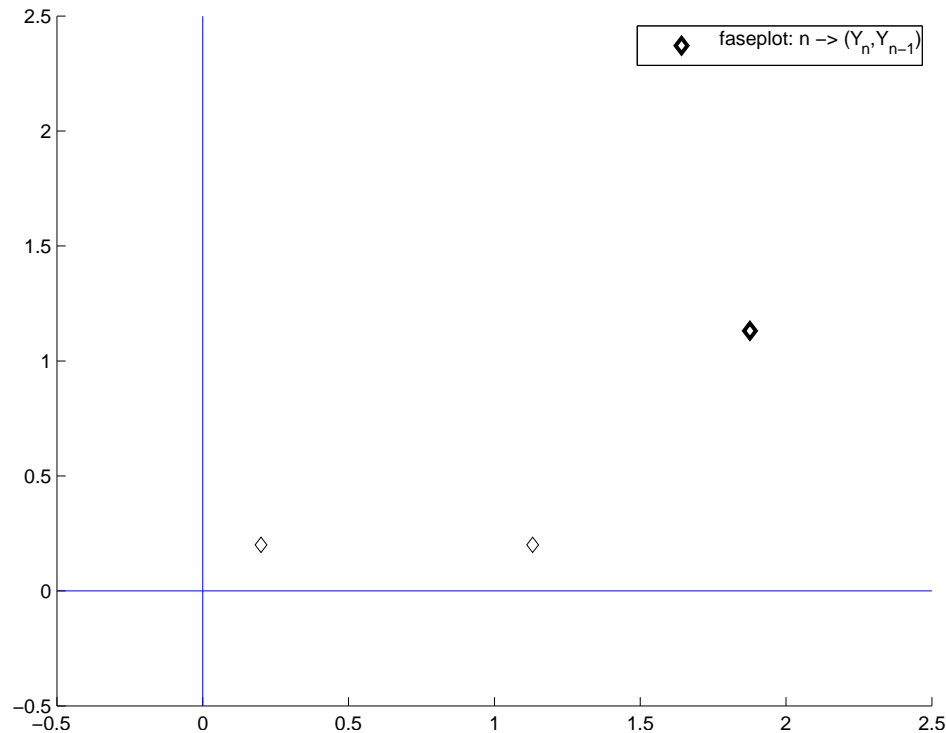
**Voorbeeld.** Karakteristieke vergelijking **A**:

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = \lambda^2 - (k + d)\lambda + d = 0.$$

Reële oplossing  $\Leftrightarrow 4d \leq (k + d)^2 \Leftrightarrow k > 1$ .

Stel reële oplossing. Dan:  $\lambda_1 > 1 \Leftrightarrow k > 1$ .

Stel irreële oplossing. Dan:  $|\lambda_1| < 1 \Leftrightarrow d < 1$ .



$k = 0.1, d = 0.7, C_0 = 8/9, I_0 = 2/9$ .

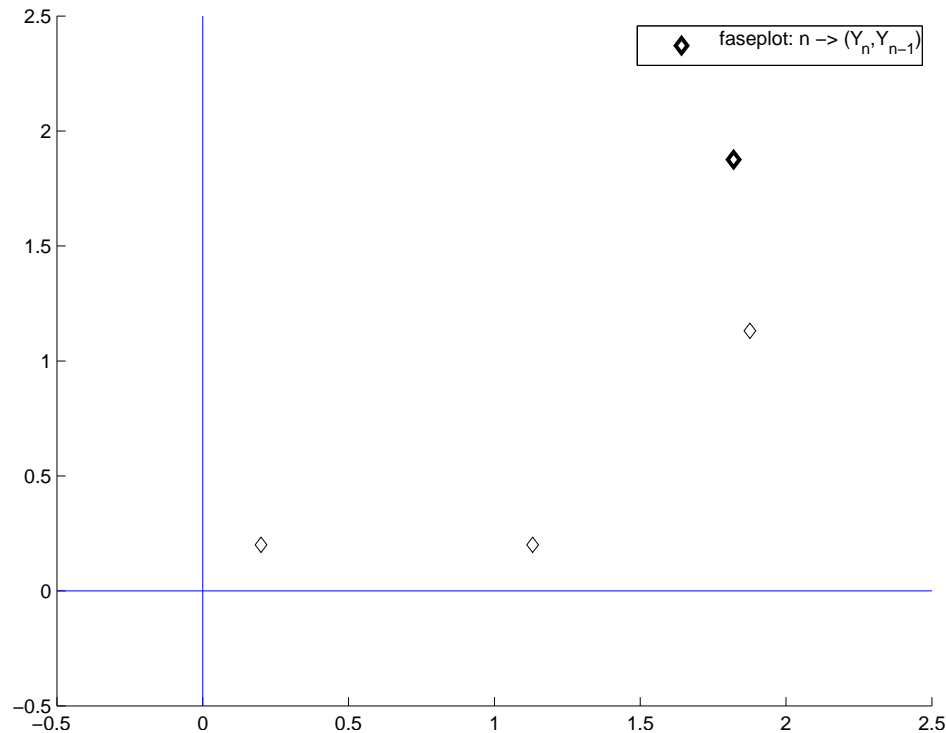
**Voorbeeld.** Karakteristieke vergelijking **A**:

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = \lambda^2 - (k + d)\lambda + d = 0.$$

Reële oplossing  $\Leftrightarrow 4d \leq (k + d)^2 \Leftrightarrow k > 1$ .

Stel reële oplossing. Dan:  $\lambda_1 > 1 \Leftrightarrow k > 1$ .

Stel irreële oplossing. Dan:  $|\lambda_1| < 1 \Leftrightarrow d < 1$ .



$$k = 0.1, d = 0.7, C_0 = 8/9, I_0 = 2/9.$$

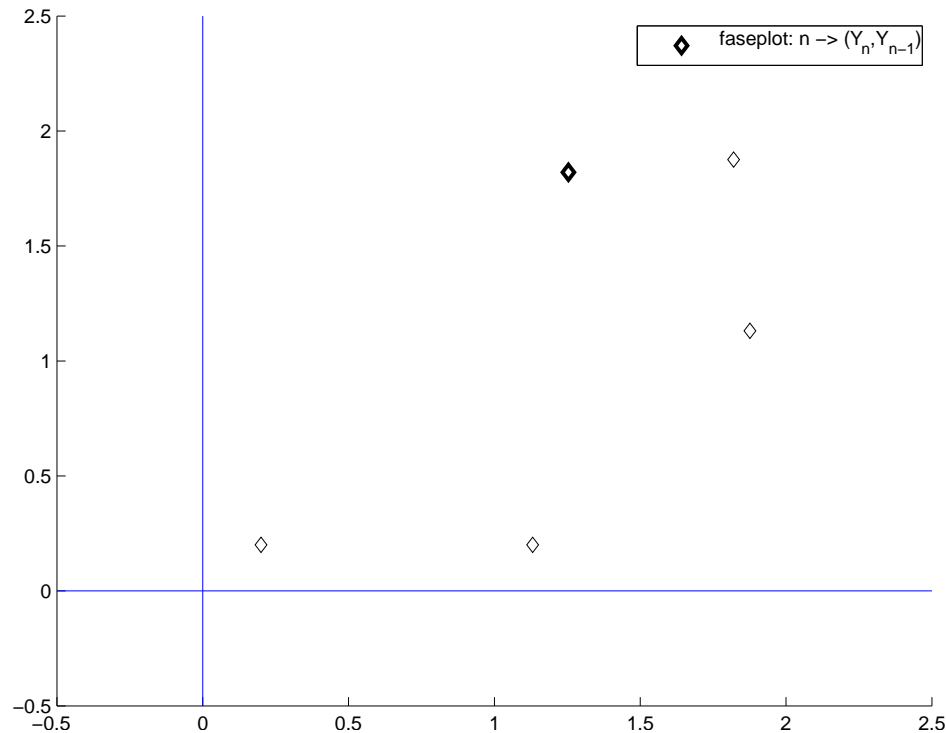
**Voorbeeld.** Karakteristieke vergelijking **A**:

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = \lambda^2 - (k + d)\lambda + d = 0.$$

Reële oplossing  $\Leftrightarrow 4d \leq (k + d)^2 \Leftrightarrow k > 1$ .

Stel reële oplossing. Dan:  $\lambda_1 > 1 \Leftrightarrow k > 1$ .

Stel irreële oplossing. Dan:  $|\lambda_1| < 1 \Leftrightarrow d < 1$ .



$k = 0.1, d = 0.7, C_0 = 8/9, I_0 = 2/9$ .

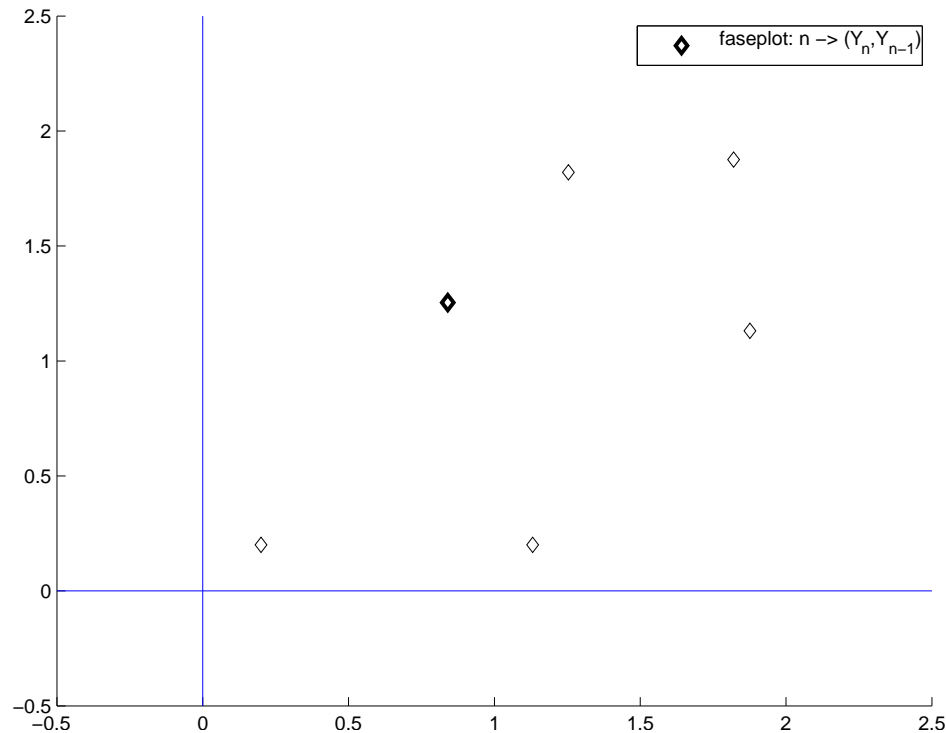
**Voorbeeld.** Karakteristieke vergelijking **A**:

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = \lambda^2 - (k + d)\lambda + d = 0.$$

Reële oplossing  $\Leftrightarrow 4d \leq (k + d)^2 \Leftrightarrow k > 1$ .

Stel reële oplossing. Dan:  $\lambda_1 > 1 \Leftrightarrow k > 1$ .

Stel irreële oplossing. Dan:  $|\lambda_1| < 1 \Leftrightarrow d < 1$ .



$$k = 0.1, d = 0.7, C_0 = 8/9, I_0 = 2/9.$$

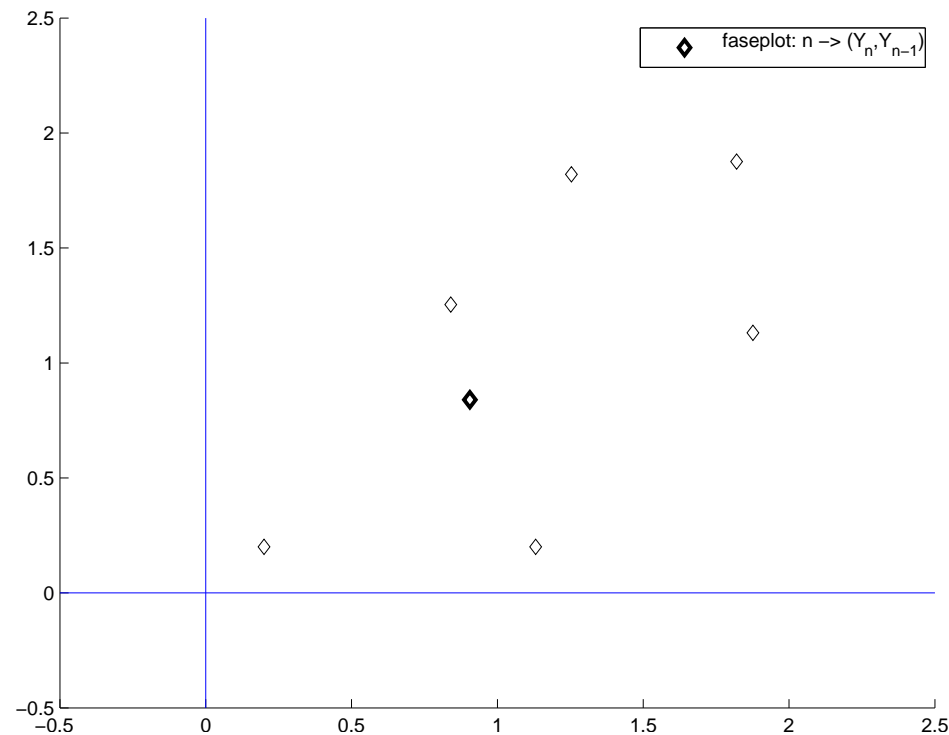
**Voorbeeld.** Karakteristieke vergelijking **A**:

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = \lambda^2 - (k + d)\lambda + d = 0.$$

Reële oplossing  $\Leftrightarrow 4d \leq (k + d)^2 \Leftrightarrow k > 1$ .

Stel reële oplossing. Dan:  $\lambda_1 > 1 \Leftrightarrow k > 1$ .

Stel irreële oplossing. Dan:  $|\lambda_1| < 1 \Leftrightarrow d < 1$ .



$k = 0.1, d = 0.7, C_0 = 8/9, I_0 = 2/9$ .

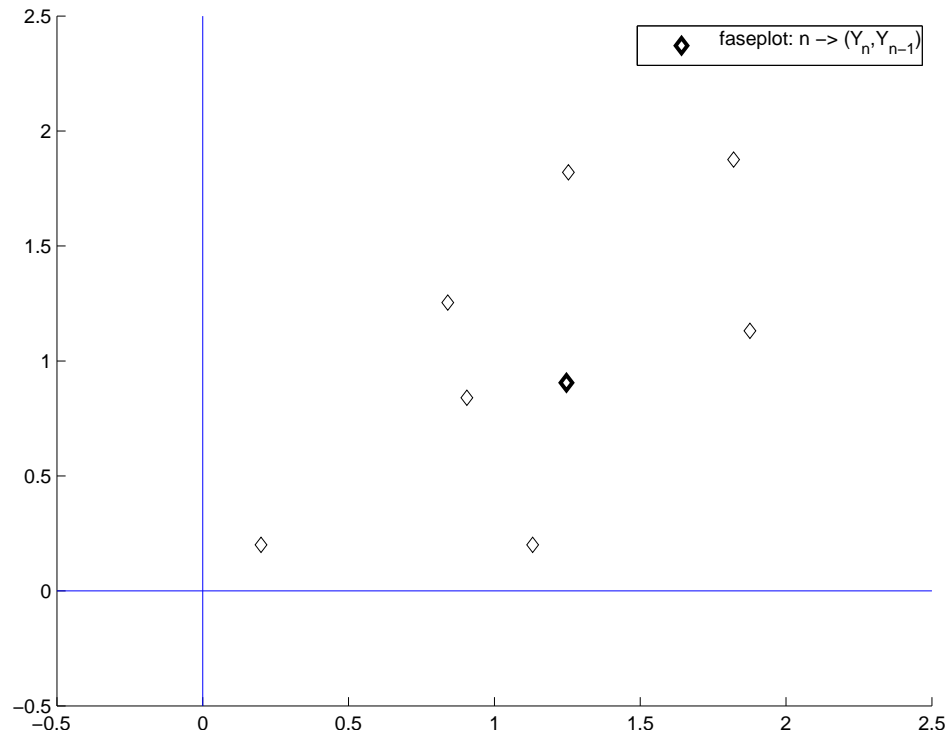
**Voorbeeld.** Karakteristieke vergelijking **A**:

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = \lambda^2 - (k + d)\lambda + d = 0.$$

Reële oplossing  $\Leftrightarrow 4d \leq (k + d)^2 \Leftrightarrow k > 1$ .

Stel reële oplossing. Dan:  $\lambda_1 > 1 \Leftrightarrow k > 1$ .

Stel irreële oplossing. Dan:  $|\lambda_1| < 1 \Leftrightarrow d < 1$ .



$k = 0.1, d = 0.7, C_0 = 8/9, I_0 = 2/9$ .



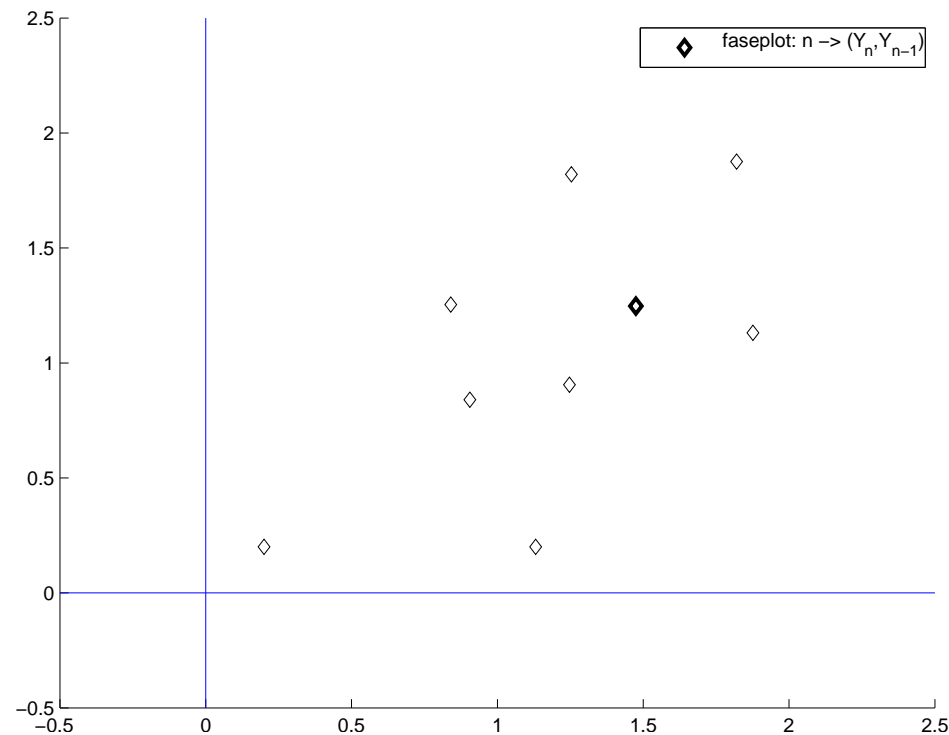
**Voorbeeld.** Karakteristieke vergelijking **A**:

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = \lambda^2 - (k + d)\lambda + d = 0.$$

Reële oplossing  $\Leftrightarrow 4d \leq (k + d)^2 \Leftrightarrow k > 1$ .

Stel reële oplossing. Dan:  $\lambda_1 > 1 \Leftrightarrow k > 1$ .

Stel irreële oplossing. Dan:  $|\lambda_1| < 1 \Leftrightarrow d < 1$ .



$k = 0.1, d = 0.7, C_0 = 8/9, I_0 = 2/9$ .

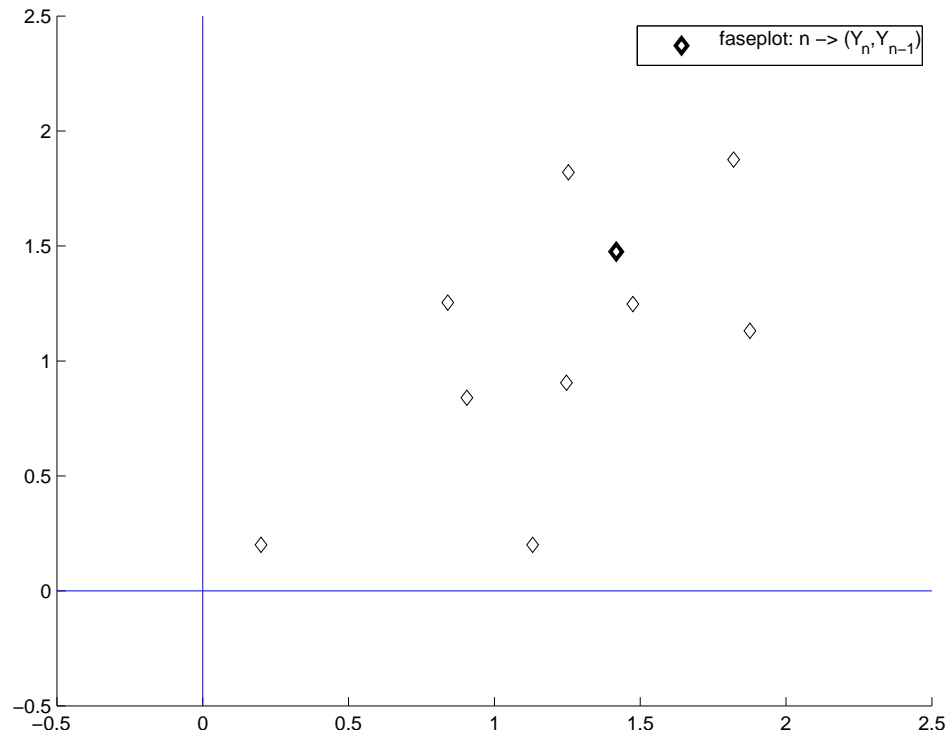
**Voorbeeld.** Karakteristieke vergelijking **A**:

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = \lambda^2 - (k + d)\lambda + d = 0.$$

Reële oplossing  $\Leftrightarrow 4d \leq (k + d)^2 \Leftrightarrow k > 1$ .

Stel reële oplossing. Dan:  $\lambda_1 > 1 \Leftrightarrow k > 1$ .

Stel irreële oplossing. Dan:  $|\lambda_1| < 1 \Leftrightarrow d < 1$ .



$k = 0.1, d = 0.7, C_0 = 8/9, I_0 = 2/9$ .

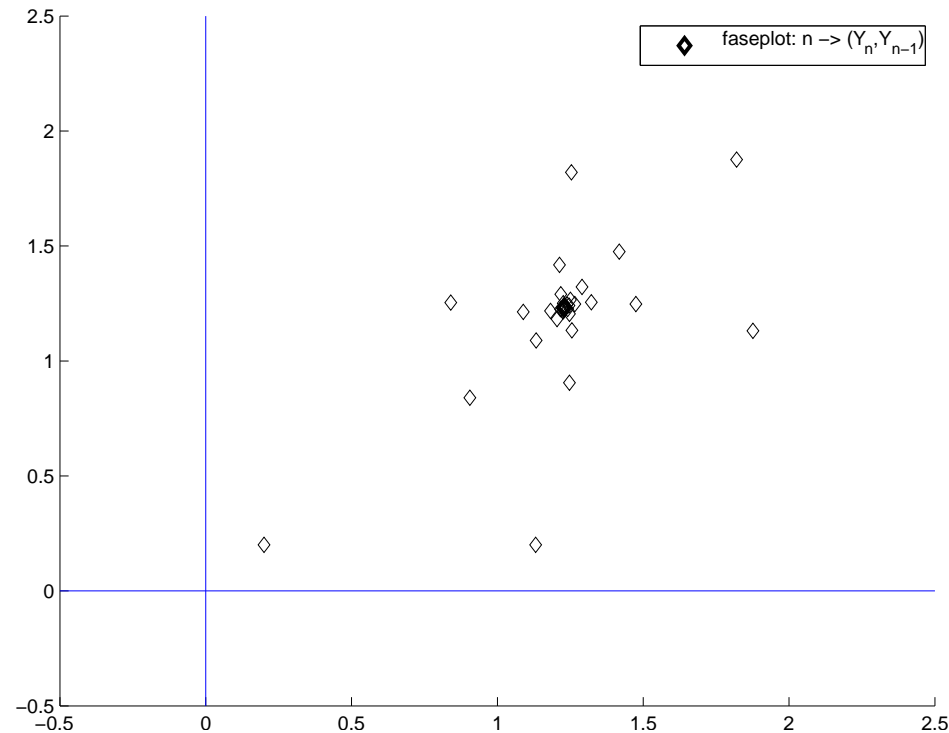
**Voorbeeld.** Karakteristieke vergelijking **A**:

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = \lambda^2 - (k + d)\lambda + d = 0.$$

Reële oplossing  $\Leftrightarrow 4d \leq (k + d)^2 \Leftrightarrow k > 1$ .

Stel reële oplossing. Dan:  $\lambda_1 > 1 \Leftrightarrow k > 1$ .

Stel irreële oplossing. Dan:  $|\lambda_1| < 1 \Leftrightarrow d < 1$ .



$k = 0.1, d = 0.7, C_0 = 8/9, I_0 = 2/9$ .

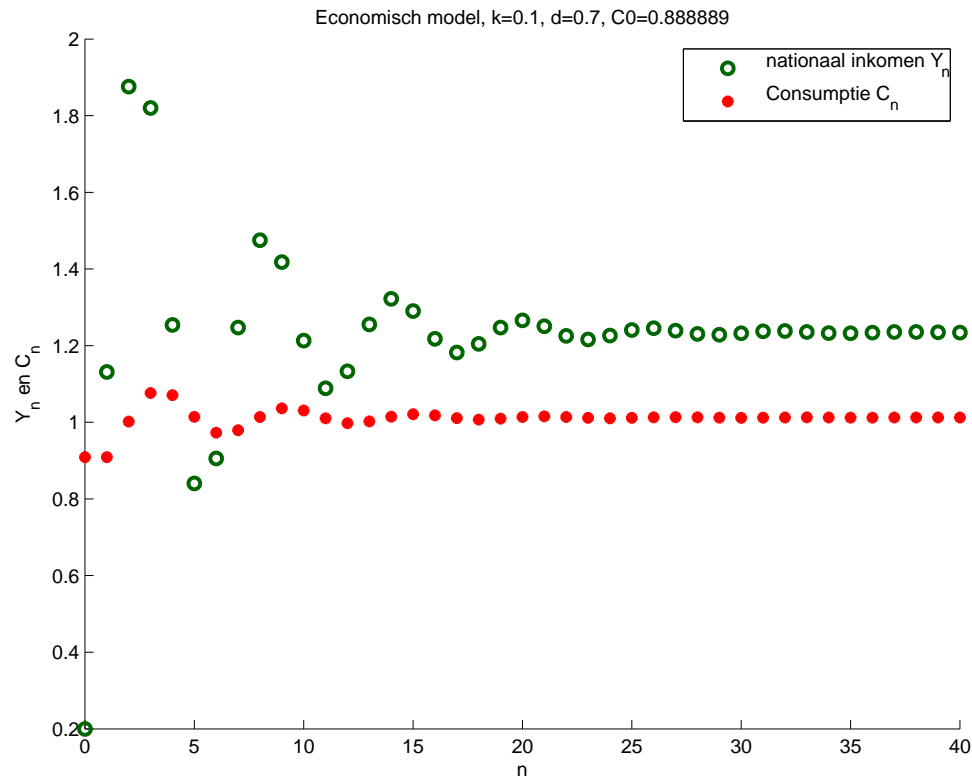
**Voorbeeld.** Karakteristieke vergelijking **A**:

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = \lambda^2 - (k + d)\lambda + d = 0.$$

Reële oplossing  $\Leftrightarrow 4d \leq (k + d)^2 \Leftrightarrow k > 1$ .

Stel reële oplossing. Dan:  $\lambda_1 > 1 \Leftrightarrow k > 1$ .

Stel irreële oplossing. Dan:  $|\lambda_1| < 1 \Leftrightarrow d < 1$ .



$k = 0.1$ ,  $d = 0.7$ ,  $C_0 = 8/9$ ,  $I_0 = 2/9$ .

# Program

- Management voorbeeld (affien)
- Economisch voorbeeld (affien)
- Rupsen-wespen (niet lineair)
- Niet-lineaire modellen, evenwicht, stabiliteit
- Lineairiseren
- Companion vorm
- Complex als 2-d reeel
- Hoefijzer van Smale

## Sluipwespen & Rupsen

In jaar  $n$ :  $r_n$  het aantal rupsen,  
 $w_n$  het aantal sluipwespen.

### Aanname:

- groeicoëfficiënt rupsen neemt lineair af bij groeiend aantal rupsen en wespen,
- groeicoëfficiënt wespen neemt lineair toe bij groeiend aantal rupsen.

**Model:** 
$$\begin{cases} r_{n+1} = (a - r_n/R - w_n/W) r_n, \\ w_{n+1} = \gamma r_n w_n, \end{cases}$$

voor zekere positieve constanten  $a$ ,  $\gamma$ ,  $R$  en  $W$ .

## Sluipwespen & Rupsen

In jaar  $n$ :  $r_n$  het aantal rupsen,  
 $w_n$  het aantal sluipwespen.

### Aanname:

- groeicoëfficiënt rupsen neemt lineair af bij groeiend aantal rupsen en wespen,
- groeicoëfficiënt wespen neemt lineair toe bij groeiend aantal rupsen.

**Model:** 
$$\begin{cases} r_{n+1} = (a - r_n/R - w_n/W) r_n, \\ w_{n+1} = \gamma r_n w_n, \end{cases}$$

voor zekere positieve constanten  $a$ ,  $\gamma$ ,  $R$  en  $W$ .

Schaal:  $x_n \equiv r_n/R$ ,  $y_n \equiv w_n/W$  levert

$$\begin{cases} x_{n+1} = (a - x_n - y_n) x_n, \\ y_{n+1} = b x_n y_n. \end{cases}$$

*Is er evenwicht? Is dat stabiel?*

*Hoe ontwikkelt de oplossing zich?*

# Program

- Management voorbeeld (affien)
- Economisch voorbeeld (affien)
- Rupsen-wespen (niet lineair)
- Niet-lineaire modellen, evenwicht, stabiliteit
- Lineairiseren
- Companion vorm
- Complex als 2-d reeel
- Hoefijzer van Smale



## Niet-lineaire modellen

$$\begin{cases} x_{n+1} = f(x_n, y_n) \\ y_{n+1} = g(x_n, y_n) \end{cases}$$

of

$$\mathbf{x}_{n+1} \equiv \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n) \equiv \begin{bmatrix} f(x_n, y_n) \\ g(x_n, y_n) \end{bmatrix}.$$

## Niet-lineaire modellen

$$\begin{cases} x_{n+1} = f(x_n, y_n) \\ y_{n+1} = g(x_n, y_n) \end{cases}$$

of  $\mathbf{x}_{n+1} \equiv \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n) \equiv \begin{bmatrix} f(x_n, y_n) \\ g(x_n, y_n) \end{bmatrix}.$

**Evenwicht** als  $\begin{cases} x_n = x_{n-1} = \dots = x_0 = \alpha, \\ y_n = y_{n-1} = \dots = y_0 = \beta. \end{cases}$

$(\alpha, \beta)$  evenwicht  $\Leftrightarrow \alpha = f(\alpha, \beta) \quad \& \quad \beta = g(\alpha, \beta).$

## Niet-lineaire modellen

$$\begin{cases} x_{n+1} = f(x_n, y_n) \\ y_{n+1} = g(x_n, y_n) \end{cases}$$

of  $\mathbf{x}_{n+1} \equiv \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n) \equiv \begin{bmatrix} f(x_n, y_n) \\ g(x_n, y_n) \end{bmatrix}.$

**Evenwicht** als  $\begin{cases} x_n = x_{n-1} = \dots = x_0 = \alpha, \\ y_n = y_{n-1} = \dots = y_0 = \beta. \end{cases}$

$(\alpha, \beta)$  evenwicht  $\Leftrightarrow \alpha = f(\alpha, \beta) \quad \& \quad \beta = g(\alpha, \beta).$

Evenwicht  $(\alpha, \beta)$  is **stabiel** als

$$x_n \rightarrow \alpha \quad \& \quad y_n \rightarrow \beta \quad (n \rightarrow \infty)$$

$$\text{voor alle } x_0 \approx \alpha \quad \& \quad y_0 \approx \beta$$

en

$$x_0 \approx \alpha \quad \& \quad y_0 \approx \beta \quad \Rightarrow \quad x_n \approx \alpha \quad \& \quad y_n \approx \beta \quad \text{alle } n.$$

**Voorbeeld I.** 
$$\begin{cases} x_{n+1} = (a - x_n - y_n) x_n, \\ y_{n+1} = b x_n y_n. \end{cases}$$

$$f(x, y) = (a - x - y) x \quad \& \quad g(x, y) = b x y.$$

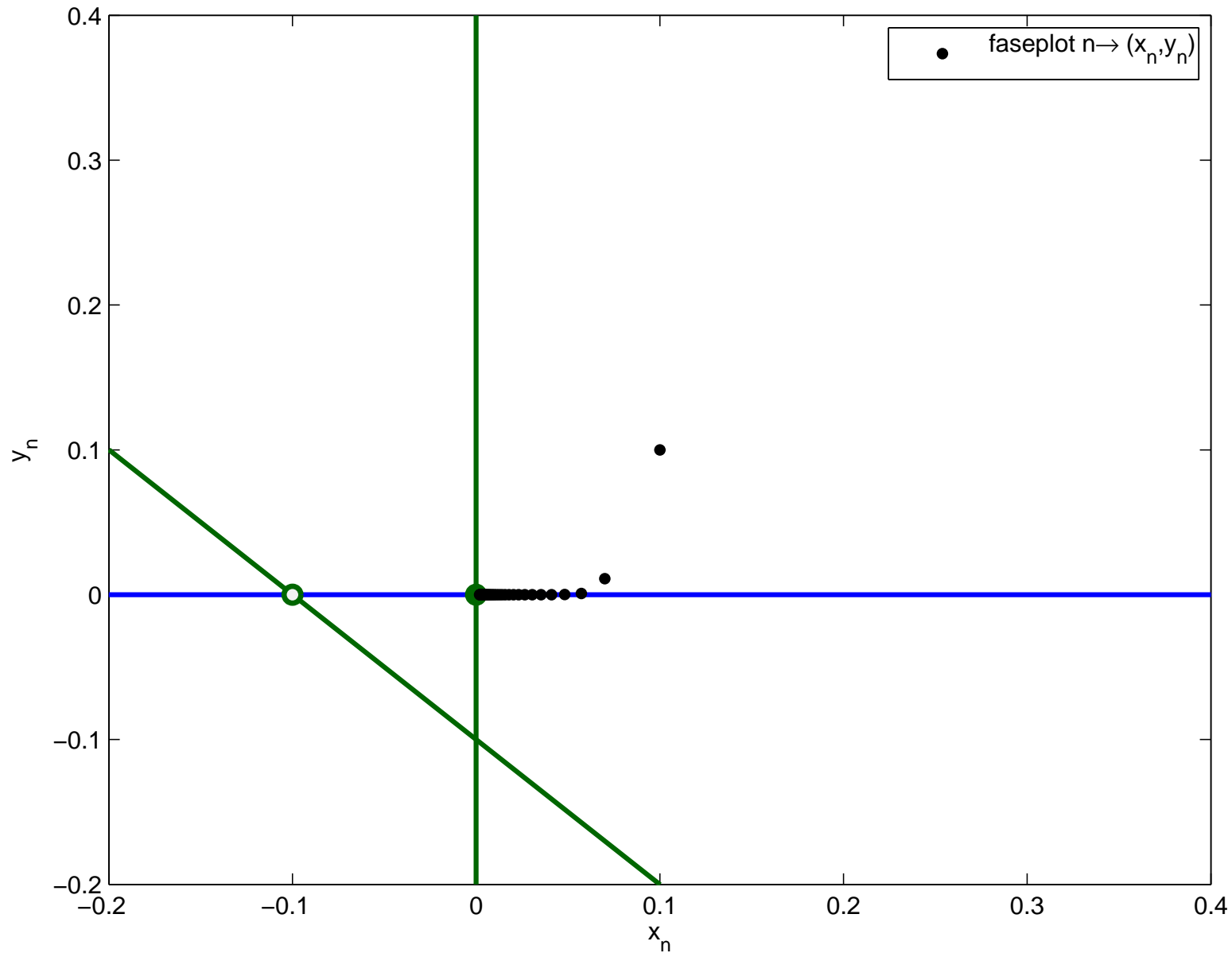
**Voorbeeld I.** 
$$\begin{cases} x_{n+1} = (a - x_n - y_n) x_n, \\ y_{n+1} = b x_n y_n. \end{cases}$$

$$f(x, y) = (a - x - y) x \quad \& \quad g(x, y) = b x y.$$

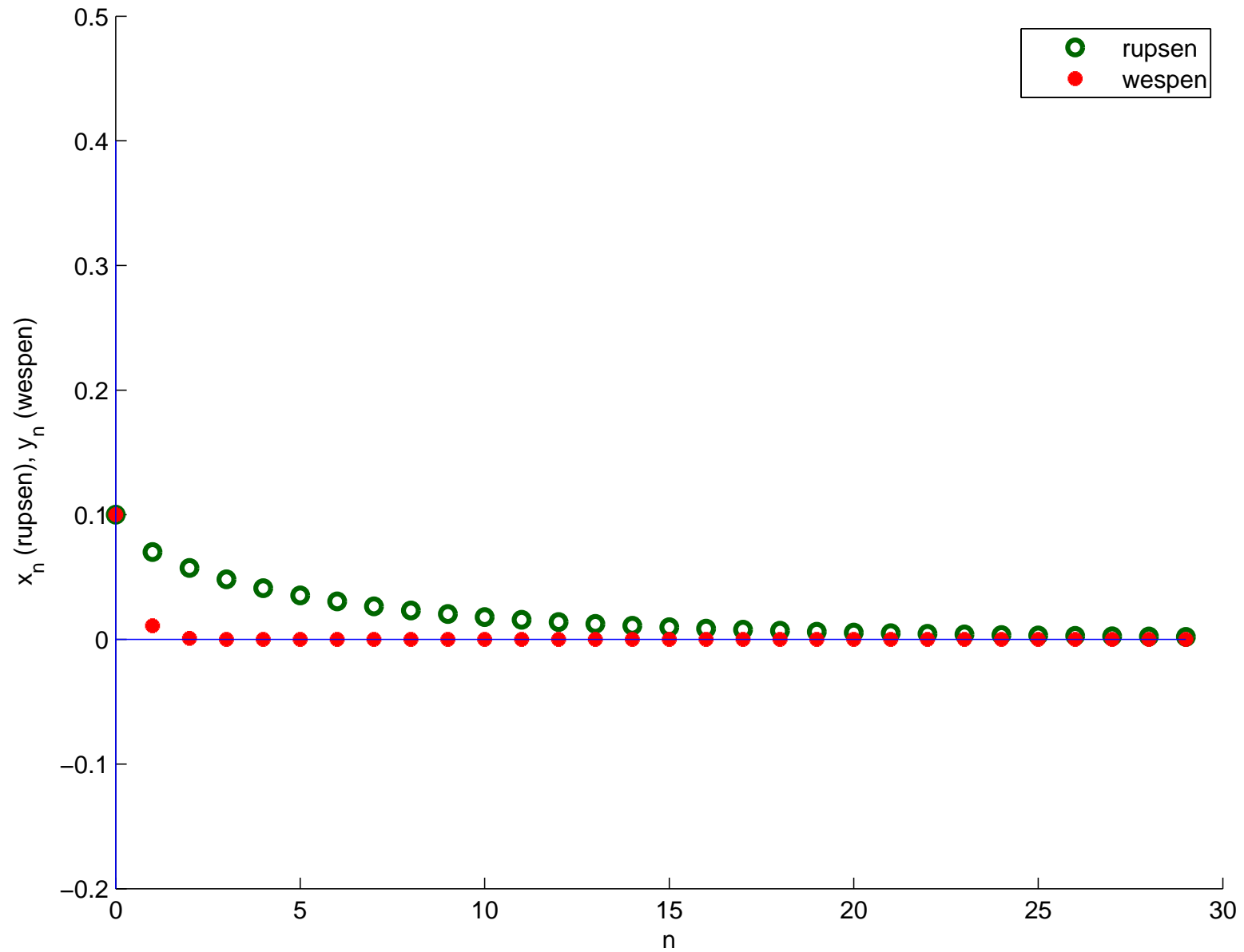
Drie evenwichtsooplossingen  $(\alpha, \beta)$ :

- (1)  $\alpha = \beta = 0$ ;
- (2)  $\alpha = a - 1$  &  $\beta = 0$ ;
- (3)  $\alpha = 1/b$  &  $\beta = a - 1 - 1/b$ .

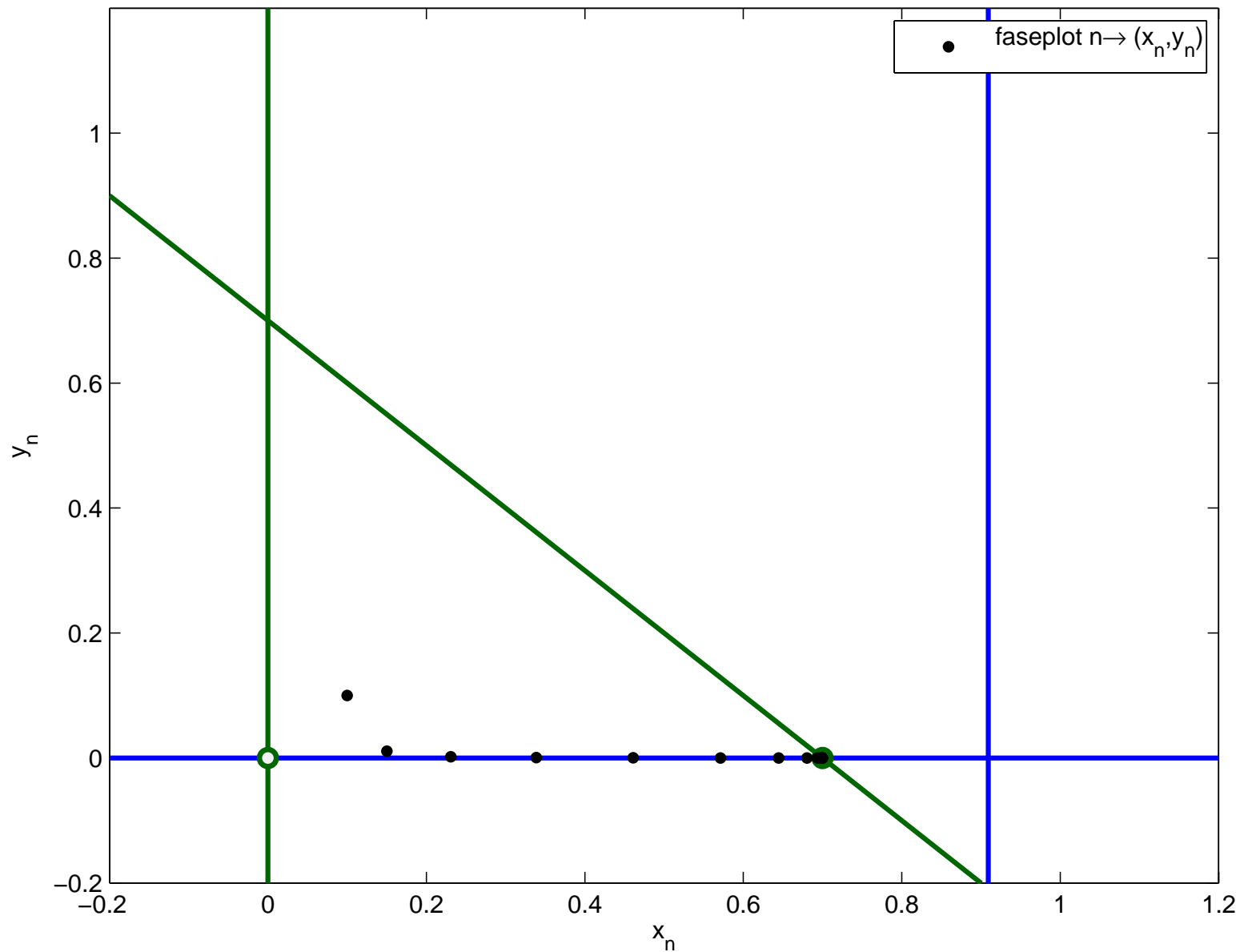
$x_{n+1}=f(x_n, y_n)$ ,  $y_{n+1}=g(x_n, y_n)$  met  $f(x,y)=(0.9-x-y).\text{*}x$ ,  $g(x,y)=1.1.\text{*}x.\text{*}y$



$$x_{n+1}=f(x_n, y_n), y_{n+1}=g(x_n, y_n) \text{ met } f(x,y)=(0.9-x-y).\text{*}x, g(x,y)=1.1.\text{*}x.\text{*}y$$

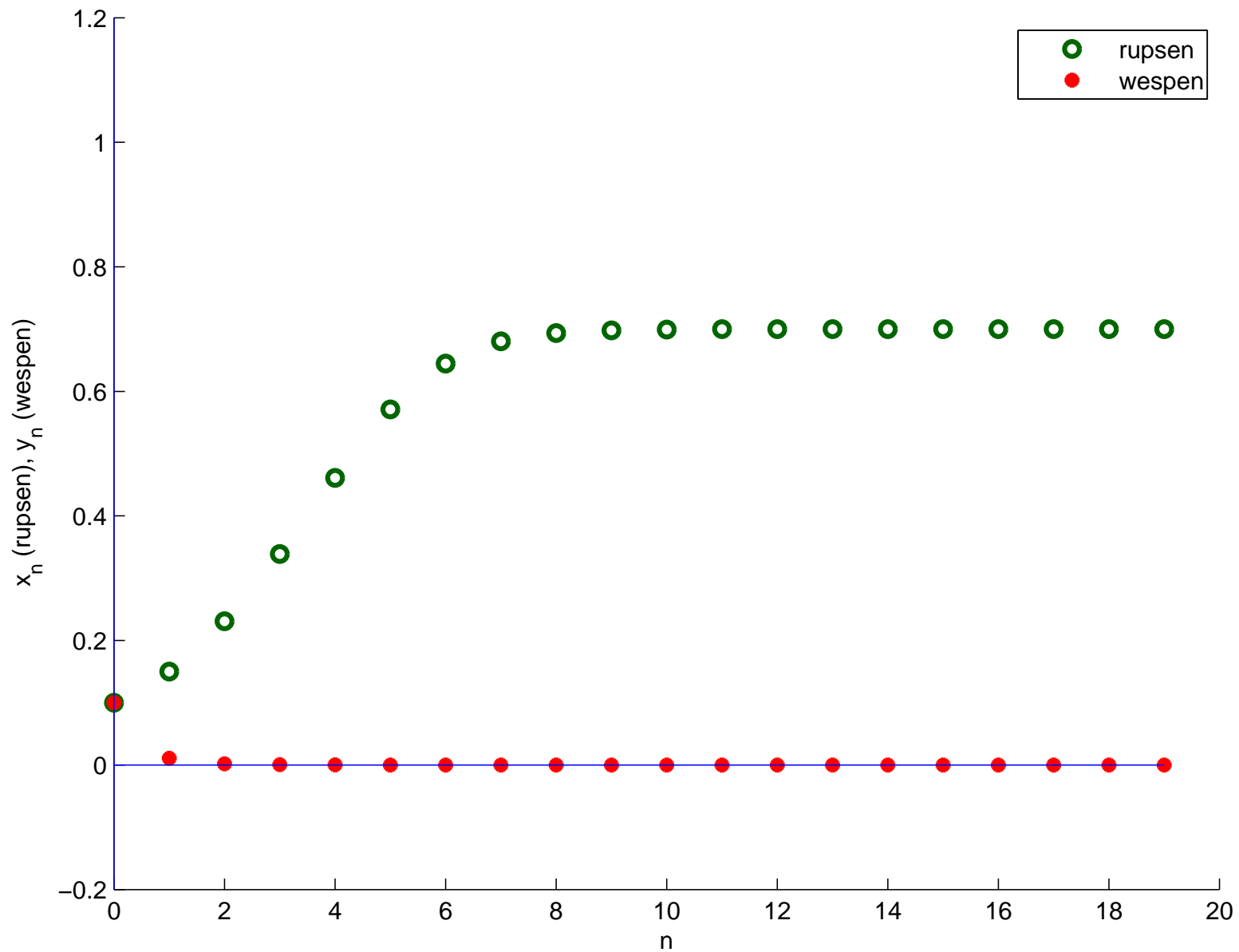


$$x_{n+1}=f(x_n, y_n), \quad y_{n+1}=g(x_n, y_n) \quad \text{met} \quad f(x, y)=(1.7-x-y) \cdot x, \quad g(x, y)=1.1 \cdot x \cdot y$$

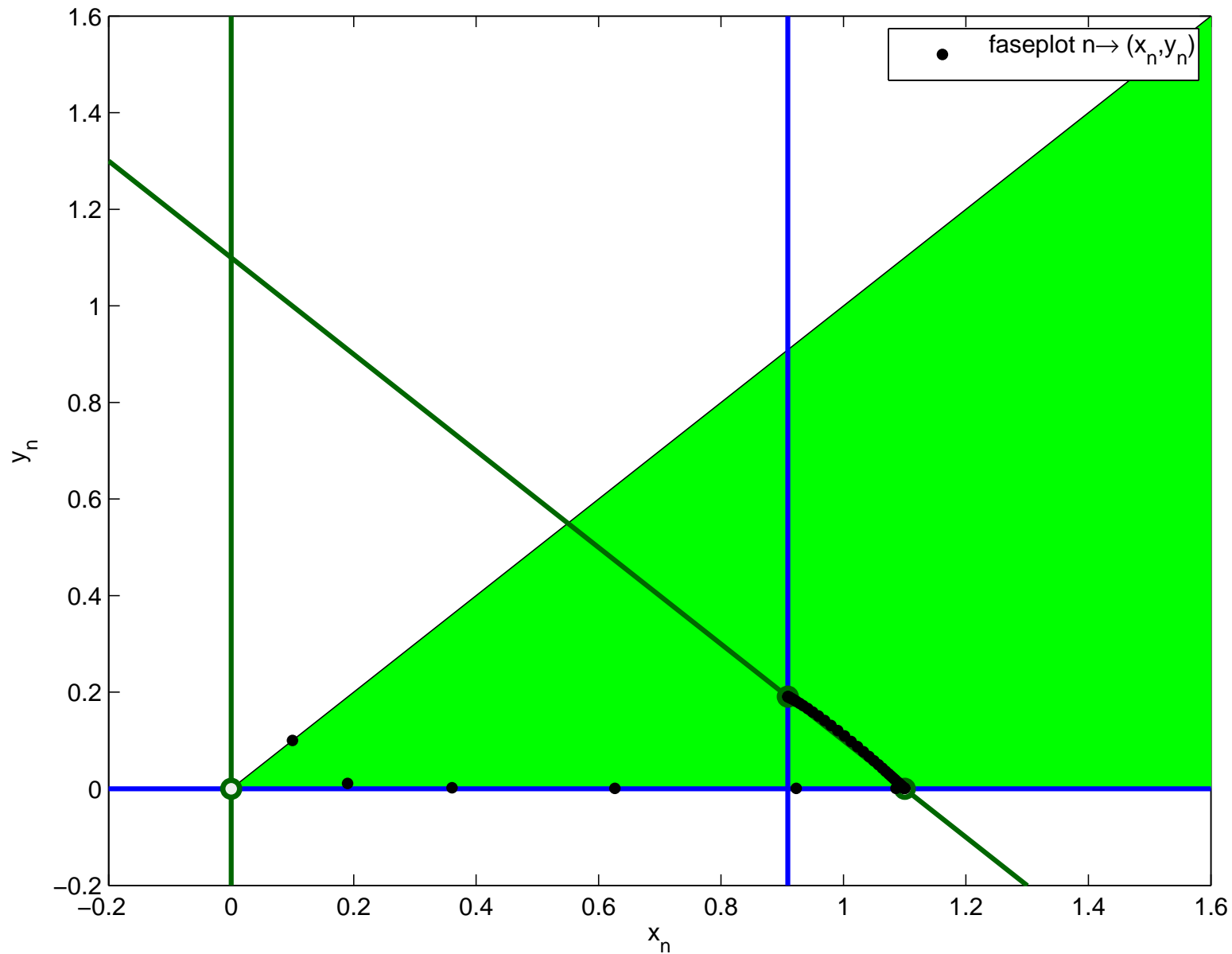




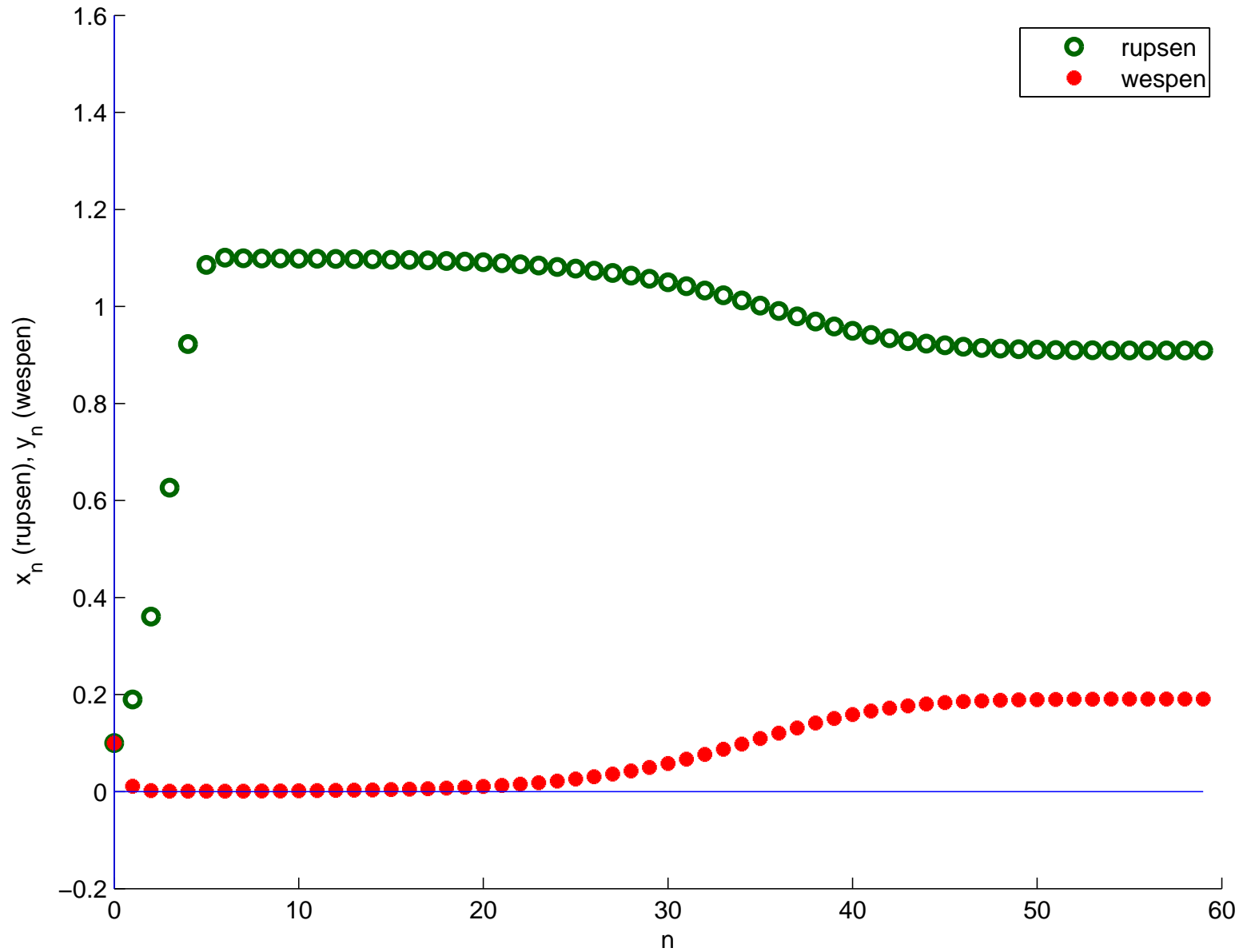
$$x_{n+1}=f(x_n, y_n), y_{n+1}=g(x_n, y_n) \text{ met } f(x,y)=(1.7-x-y).\text{*}x, g(x,y)=1.1.\text{*}x.\text{*}y$$



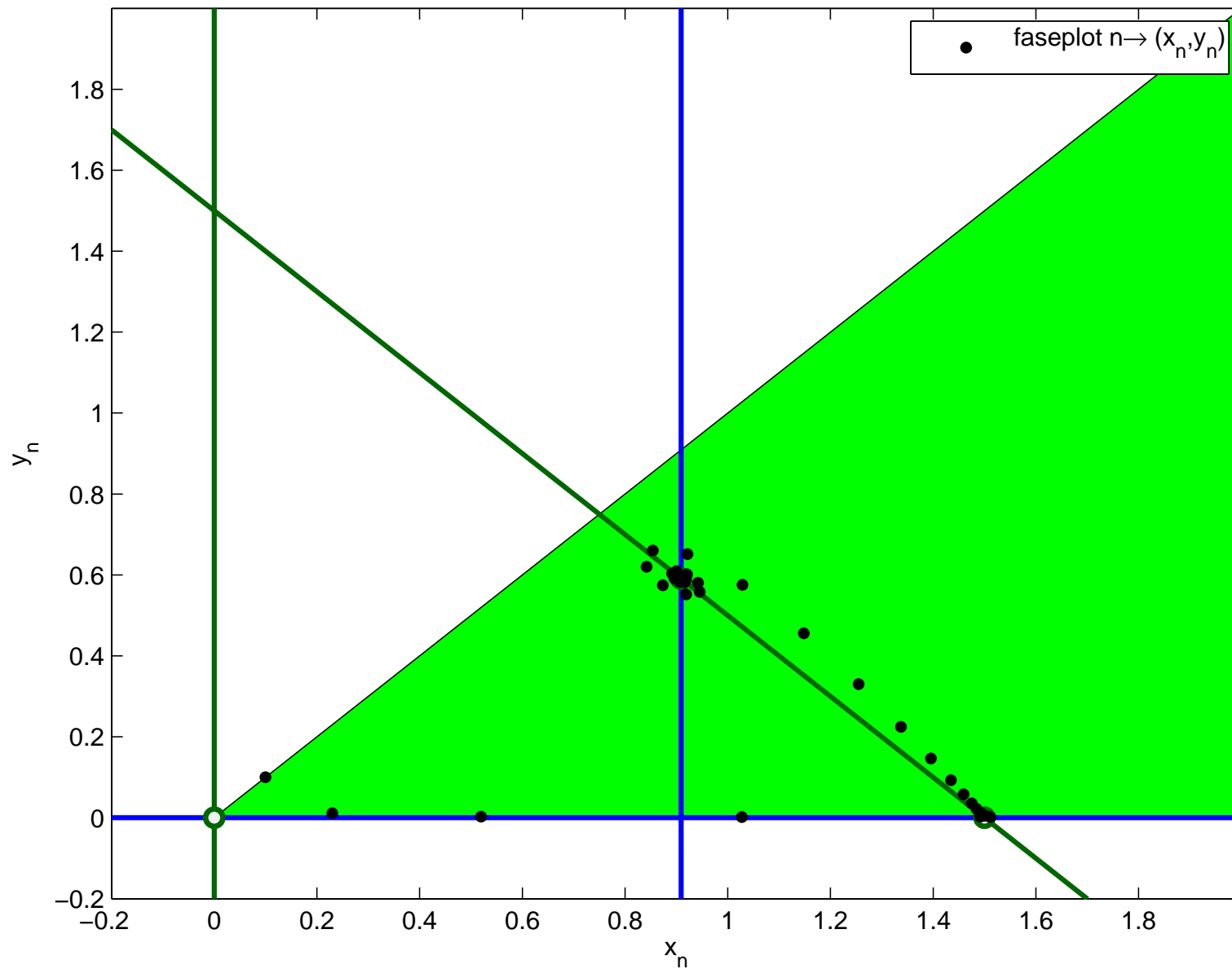
$x_{n+1}=f(x_n, y_n)$ ,  $y_{n+1}=g(x_n, y_n)$  met  $f(x,y)=(2.1-x-y).\text{*}x$ ,  $g(x,y)=1.1.\text{*}x.\text{*}y$



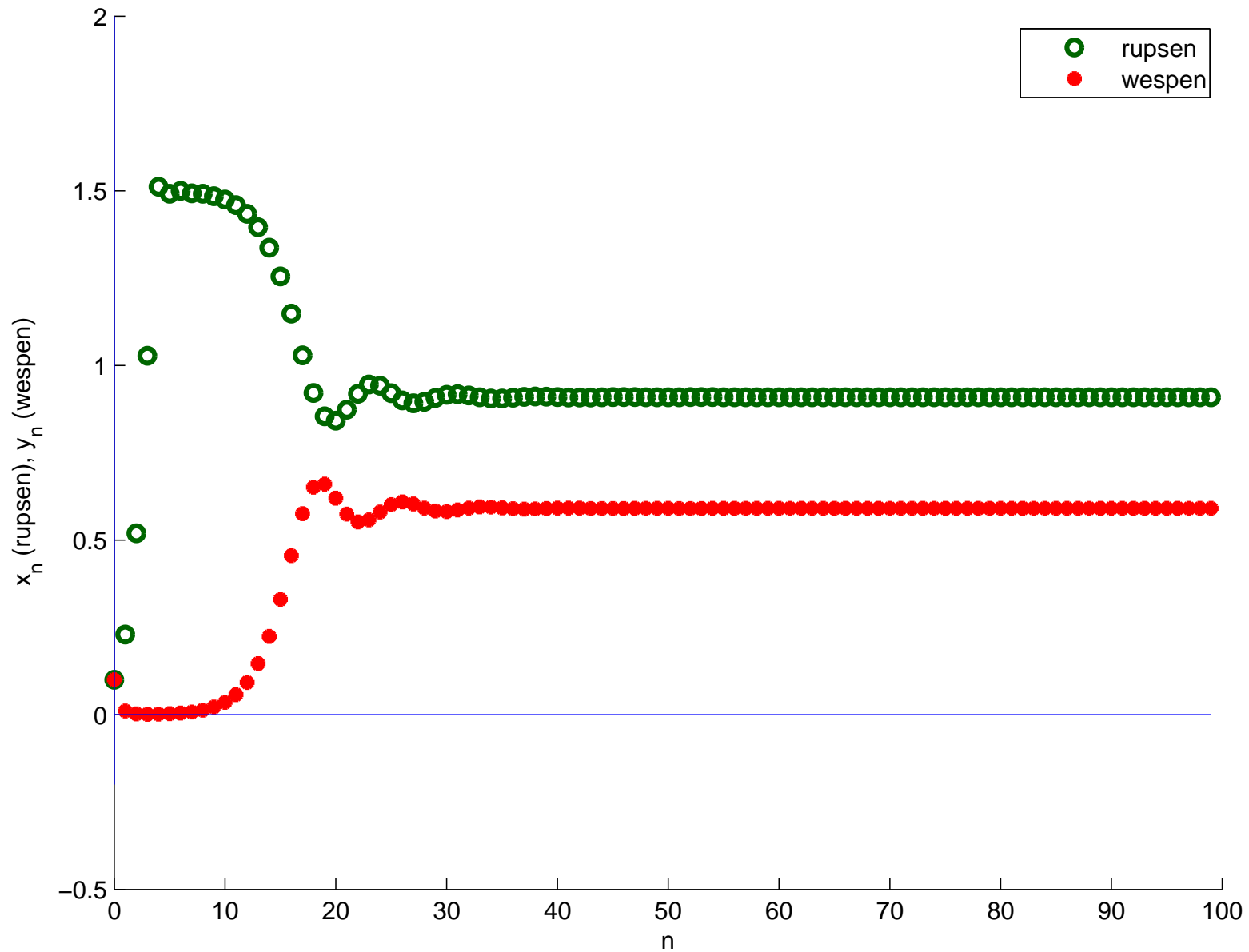
$$x_{n+1}=f(x_n, y_n), y_{n+1}=g(x_n, y_n) \text{ met } f(x,y)=(2.1-x-y).\text{*}x, g(x,y)=1.1.\text{*}x.\text{*}y$$



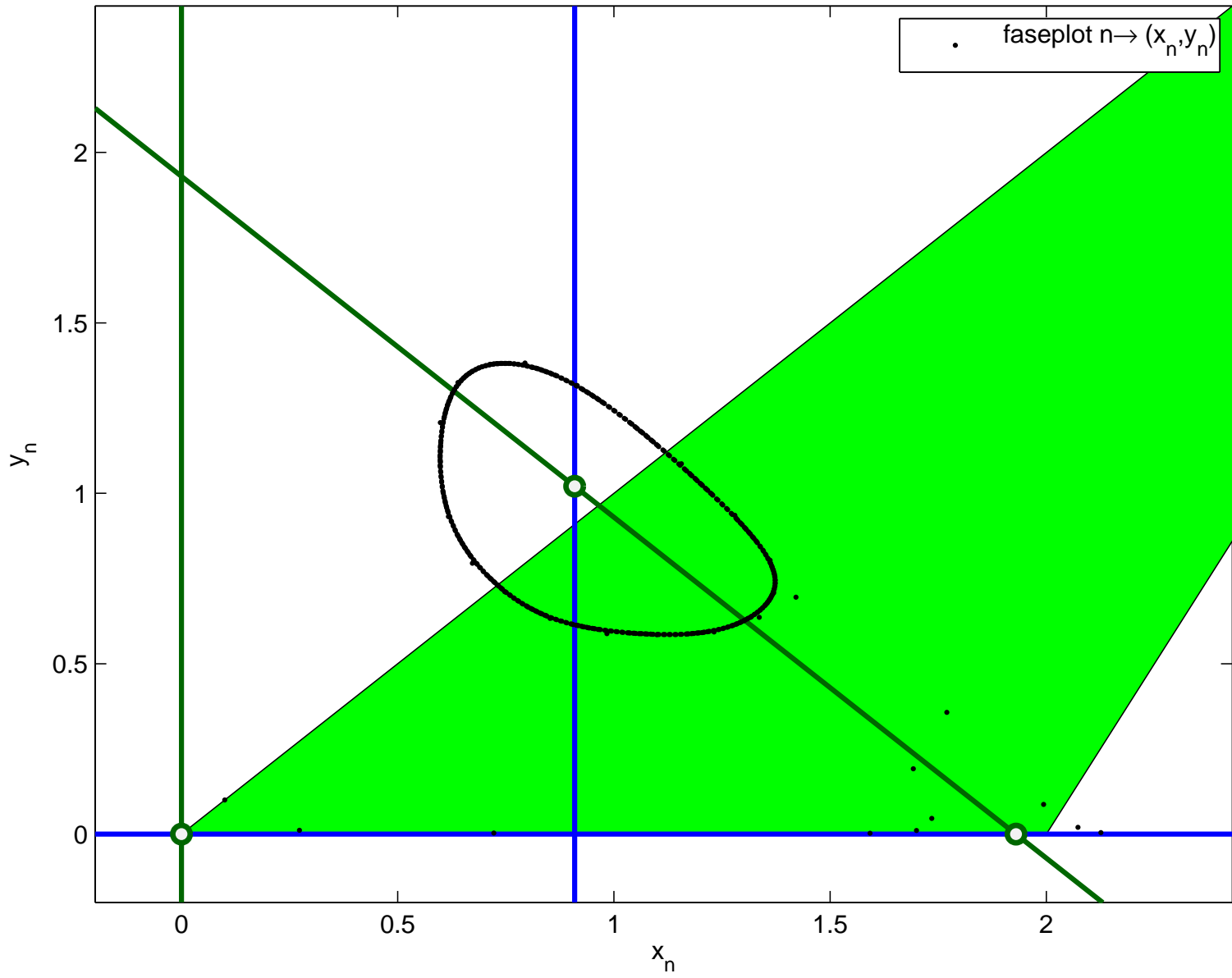
$x_{n+1}=f(x_n, y_n)$ ,  $y_{n+1}=g(x_n, y_n)$  met  $f(x,y)=(2.5-x-y).\text{*}x$ ,  $g(x,y)=1.1.\text{*}x.\text{*}y$



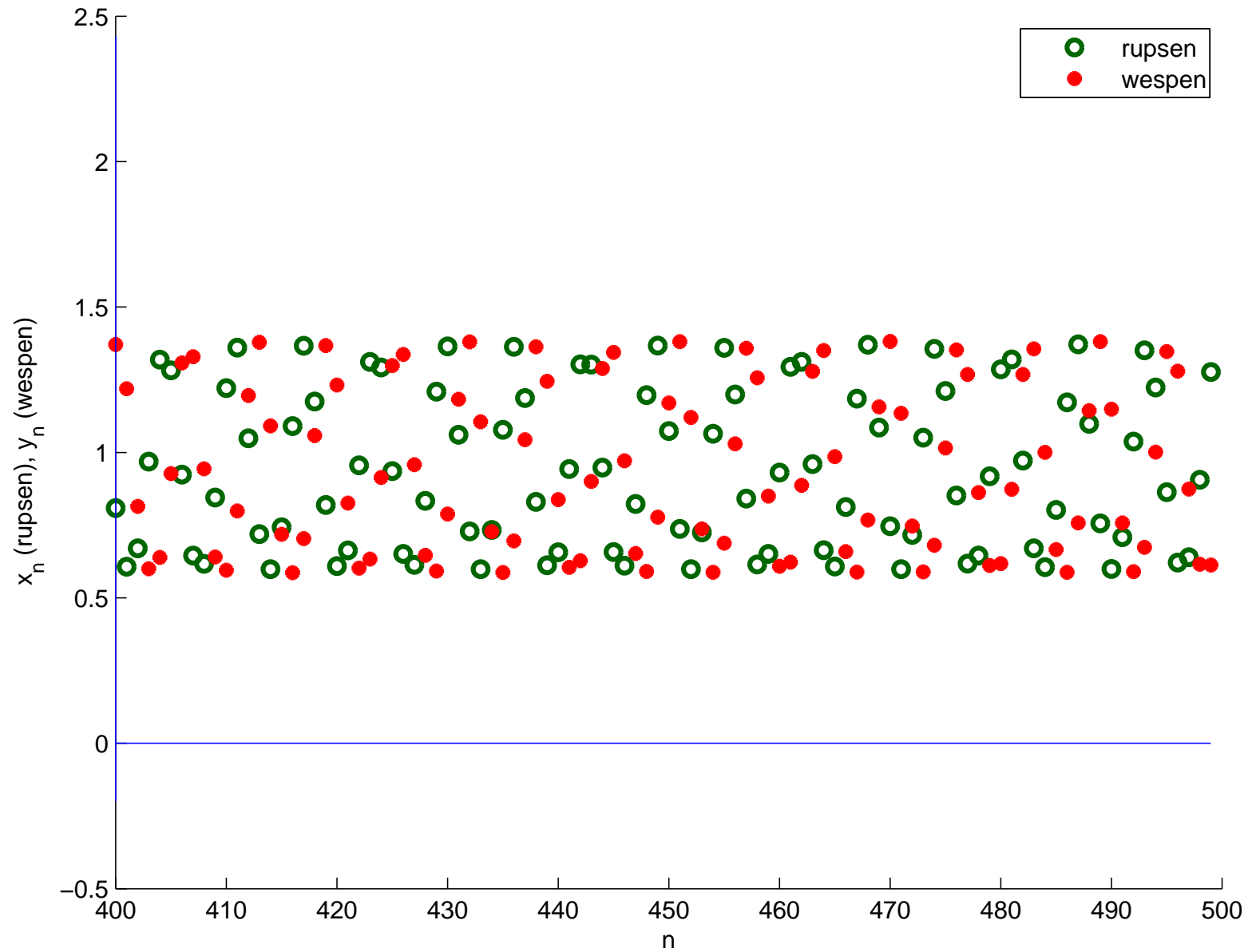
$$x_{n+1}=f(x_n, y_n), y_{n+1}=g(x_n, y_n) \text{ met } f(x,y)=(2.5-x-y).\text{*}x, g(x,y)=1.1.\text{*}x.\text{*}y$$



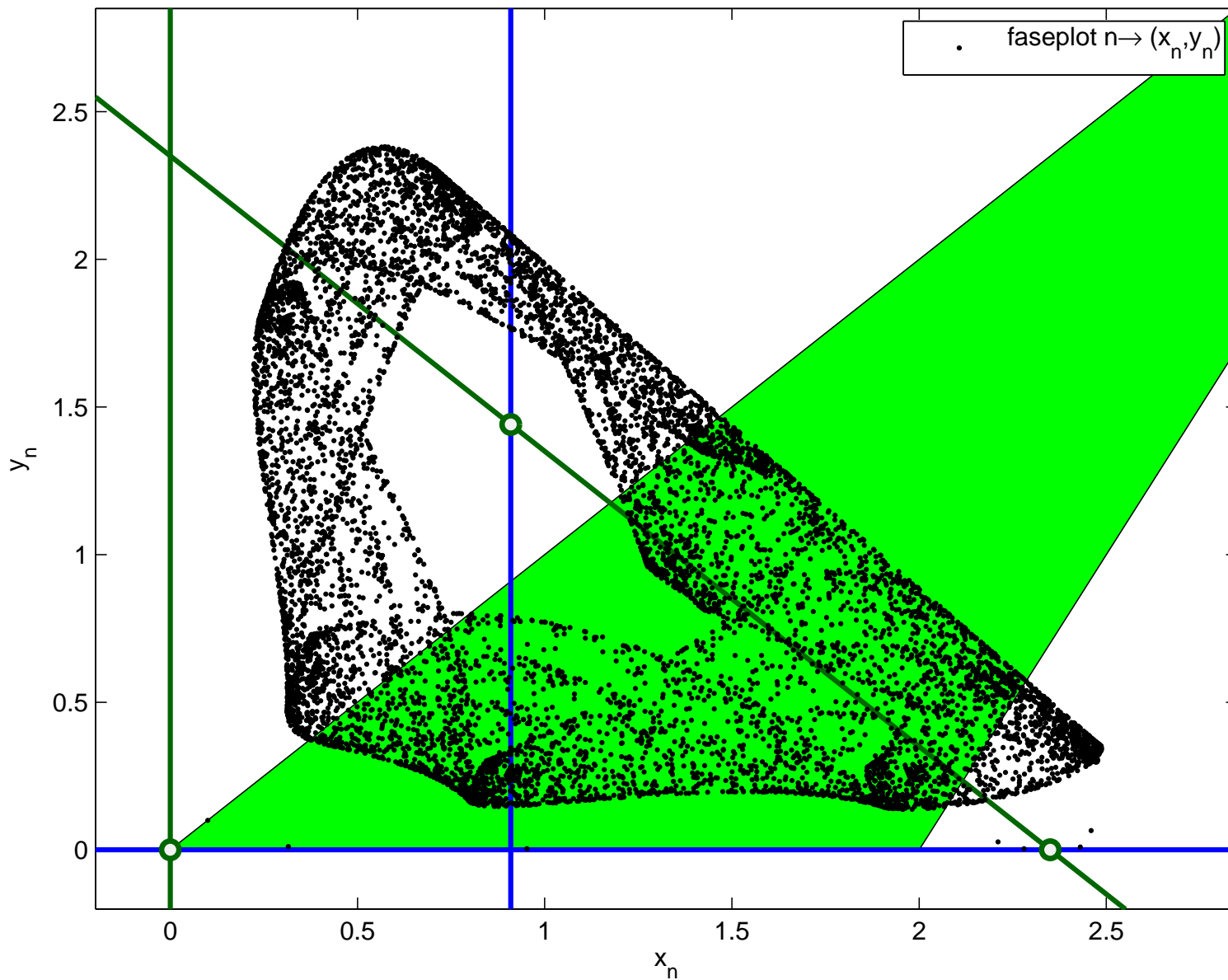
$$x_{n+1}=f(x_n, y_n), \quad y_{n+1}=g(x_n, y_n) \quad \text{met} \quad f(x, y)=(2.93-x-y) \cdot x, \quad g(x, y)=1.1 \cdot x \cdot y$$



$$x_{n+1}=f(x_n, y_n), y_{n+1}=g(x_n, y_n) \text{ met } f(x,y)=(2.93-x-y).\text{*}x, g(x,y)=1.1.\text{*}x.\text{*}y$$

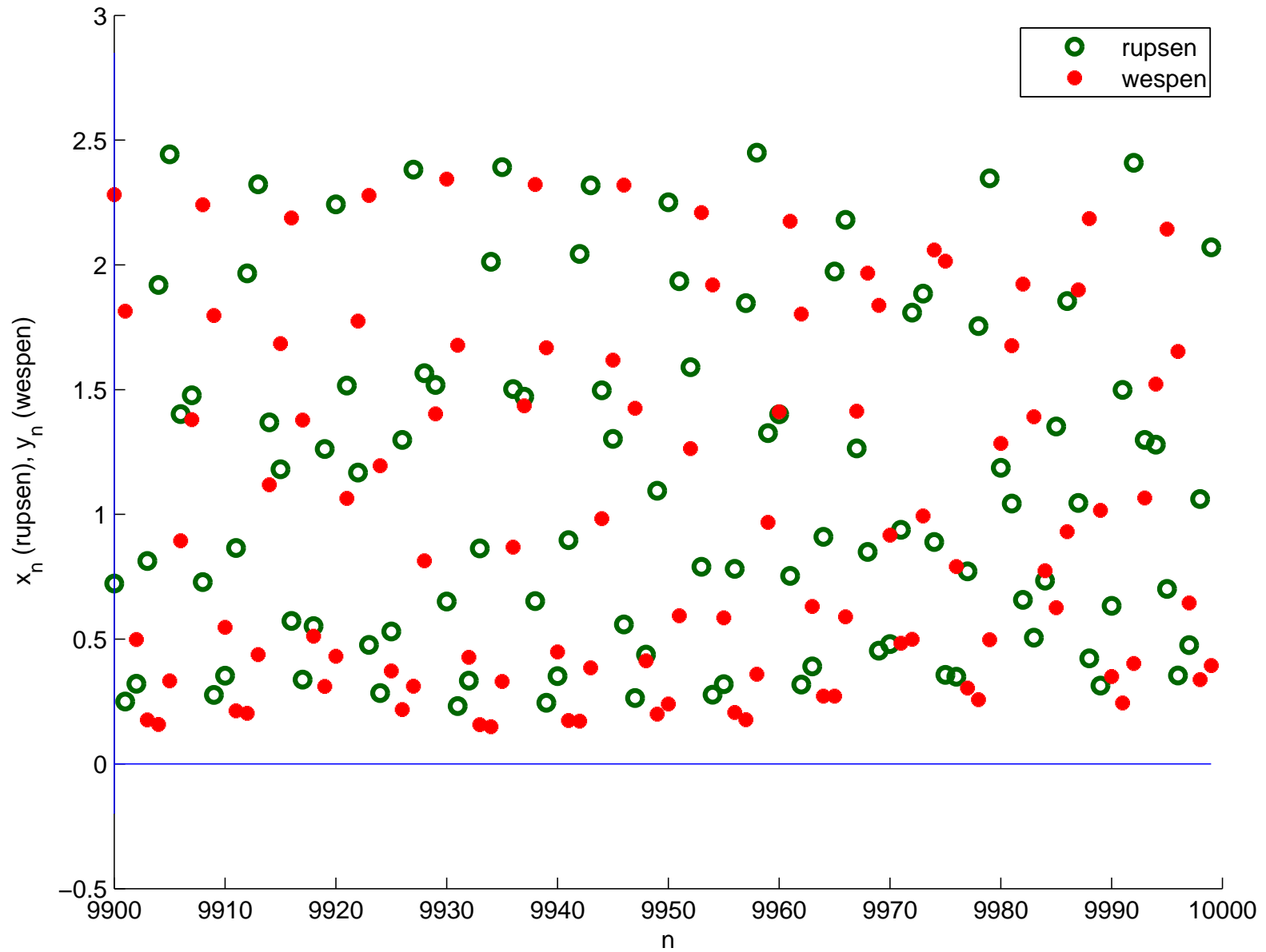


$$x_{n+1}=f(x_n, y_n), \quad y_{n+1}=g(x_n, y_n) \quad \text{met} \quad f(x, y)=(3.35-x-y) \cdot x, \quad g(x, y)=1.1 \cdot x \cdot y$$





$$x_{n+1}=f(x_n, y_n), \quad y_{n+1}=g(x_n, y_n) \quad \text{met} \quad f(x, y)=(3.35-x-y) \cdot x, \quad g(x, y)=1.1 \cdot x \cdot y$$



**Voorbeeld I.** 
$$\begin{cases} x_{n+1} = (a - x_n - y_n) x_n, \\ y_{n+1} = b x_n y_n. \end{cases}$$

$$f(x, y) = (a - x - y) x \quad \& \quad g(x, y) = b x y.$$

Drie evenwichtsooplossingen  $(\alpha, \beta)$ :

- (1)  $\alpha = \beta = 0$ ;
- (2)  $\alpha = a - 1$  &  $\beta = 0$ ;
- (3)  $\alpha = 1/b$  &  $\beta = a - 1 - 1/b$ .

---

**Voorbeeld II.** 
$$\begin{cases} x_{n+1} = (a - x_n - y_n) x_n, \\ y_{n+1} = b \frac{x_n}{1 + x_n} y_n. \end{cases}$$

# Program

- Management voorbeeld (affien)
- Economisch voorbeeld (affien)
- Rupsen-wespen (niet lineair)
- Niet-lineaire modellen, evenwicht, stabiliteit
- **Lineairiseren**
- Companion vorm
- Complex als 2-d reeel
- Hoefijzer van Smale

# Linearizeren

$$f(\alpha + \varepsilon) \approx f(\alpha) + \varepsilon f'(\alpha) \quad \text{voor} \quad \varepsilon \approx 0.$$

---

2-dimensionaal:  $\varepsilon, \delta \approx 0 \Rightarrow$

$$f(\alpha + \varepsilon, \beta + \delta) \approx f(\alpha, \beta) + \varepsilon \frac{\partial f}{\partial x}(\alpha, \beta) + \delta \frac{\partial f}{\partial y}(\alpha, \beta).$$

## Linearizeren rond evenwicht

Stel  $(\alpha, \beta)$  evenwicht,  $\vec{\alpha} \equiv \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$ .

Als  $\begin{cases} x_n = \alpha + \varepsilon_n \\ y_n = \beta + \delta_n \end{cases}$  oplossing met  $\begin{cases} \varepsilon_n \approx 0 \\ \delta_n \approx 0 \end{cases} \Rightarrow$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{n+1} \\ \delta_{n+1} \end{bmatrix} \approx \mathbf{D} \begin{bmatrix} \varepsilon_n \\ \delta_n \end{bmatrix}, \text{ met } \mathbf{D} \equiv \mathbf{Df}(\vec{\alpha}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(\alpha, \beta) & \frac{\partial f}{\partial y}(\alpha, \beta) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(\alpha, \beta) & \frac{\partial g}{\partial y}(\alpha, \beta) \end{bmatrix},$$

de **Jacobi matrix** of **totale afgeleide** van **f**.

## Linearizeren rond evenwicht

Stel  $(\alpha, \beta)$  evenwicht,  $\vec{\alpha} \equiv \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$ .

Als  $\begin{cases} x_n = \alpha + \varepsilon_n \\ y_n = \beta + \delta_n \end{cases}$  oplossing met  $\begin{cases} \varepsilon_n \approx 0 \\ \delta_n \approx 0 \end{cases} \Rightarrow$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{n+1} \\ \delta_{n+1} \end{bmatrix} \approx \mathbf{D} \begin{bmatrix} \varepsilon_n \\ \delta_n \end{bmatrix}, \text{ met } \mathbf{D} \equiv \mathbf{Df}(\vec{\alpha}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(\alpha, \beta) & \frac{\partial f}{\partial y}(\alpha, \beta) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(\alpha, \beta) & \frac{\partial g}{\partial y}(\alpha, \beta) \end{bmatrix},$$

de **Jacobi matrix** of **totale afgeleide** van **f**.

---

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{n+1} \\ \delta_{n+1} \end{bmatrix} = \mathbf{D} \begin{bmatrix} \varepsilon_n \\ \delta_n \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_n \approx \alpha + \varepsilon_n \\ y_n \approx \beta + \delta_n \end{cases} \text{ opl. mits } \begin{cases} \varepsilon_n \approx 0 \\ \delta_n \approx 0. \end{cases}$$

## Lineariseren en stabiliteit

**Stelling.**  $\vec{\alpha}$  evenwichtsooplossing.  $\lambda$  eigenwaarde  $D\mathbf{f}(\vec{\alpha})$ .

Evenwicht stabiel  $\Leftrightarrow |\lambda| < 1$  alle  $\lambda$ .

Evenwicht instabiel  $\Leftrightarrow |\lambda| > 1$  zekere  $\lambda$ .

Geen conclusie als

$|\lambda| \leq 1$  alle  $\lambda$  &  $|\lambda| = 1$  zekere  $\lambda$ !

Stelling ook goed in meer dan 2 dimensies.

## Stabiliteit evenwichten 2-d (reëel)

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} \text{ met } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, a_{ij}, \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \text{ reëel.}$$

$\mathbf{A}$  met eigenwaarden  $\lambda_1$  en  $\lambda_2$ ,  $|\lambda_2| \leq |\lambda_1|$ .

Hoe zie je eenvoudig of  $|\lambda_1| < 1$ ?



## Stabiliteit evenwichten 2-d (reëel)

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} \text{ met } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad a_{ij}, \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \text{ reëel.}$$

$\mathbf{A}$  met eigenwaarden  $\lambda_1$  en  $\lambda_2$ ,  $|\lambda_2| \leq |\lambda_1|$ .

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) &= (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12} a_{21} \\ &= \lambda^2 - (a_{11} + a_{22}) \lambda + (a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}) \\ &= \lambda^2 - s \lambda + d \end{aligned}$$

met  $d \equiv \det(\mathbf{A}) \equiv a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$

$s \equiv \text{spoor}(\mathbf{A}) \equiv a_{11} + a_{22}$

## Stabiliteit evenwichten 2-d (reëel)

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} \text{ met } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad a_{ij}, \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \text{ reëel.}$$

$\mathbf{A}$  met eigenwaarden  $\lambda_1$  en  $\lambda_2$ ,  $|\lambda_2| \leq |\lambda_1|$ .

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) &= (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12} a_{21} \\ &= \lambda^2 - (a_{11} + a_{22}) \lambda + (a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}) \\ &= \lambda^2 - s \lambda + d \end{aligned}$$

met  $d \equiv \det(\mathbf{A}) \equiv a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$

$s \equiv \text{spoor}(\mathbf{A}) \equiv a_{11} + a_{22}$

$$\lambda^2 - s \lambda + d = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)$$

$$\Rightarrow \quad s = \lambda_1 + \lambda_2 \quad \text{en} \quad d = \lambda_1 \lambda_2$$

## Stabiliteit evenwichten 2-d (reëel)

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} \text{ met } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, a_{ij}, \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \text{ reëel.}$$

$\mathbf{A}$  met eigenwaarden  $\lambda_1$  en  $\lambda_2$ ,  $|\lambda_2| \leq |\lambda_1|$ .

$$d \equiv a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} = \det(\mathbf{A}) = \lambda_1 \lambda_2$$

$$s \equiv a_{11} + a_{22} = \text{spoor}(\mathbf{A}) = \lambda_1 + \lambda_2$$

## Stabiliteit evenwichten 2-d (reëel)

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} \text{ met } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad a_{ij}, \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \text{ reëel.}$$

$\mathbf{A}$  met eigenwaarden  $\lambda_1$  en  $\lambda_2$ ,  $|\lambda_2| \leq |\lambda_1|$ .

$$d \equiv a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} = \det(\mathbf{A}) = \lambda_1 \lambda_2$$

$$s \equiv a_{11} + a_{22} = \text{spoor}(\mathbf{A}) = \lambda_1 + \lambda_2$$

$$4d \leq s^2 \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Stabiel: } 1 - s + d > 0 \text{ en } 1 + s + d > 0 \Leftrightarrow -1 < \lambda_2 \leq \lambda_1 < 1$$

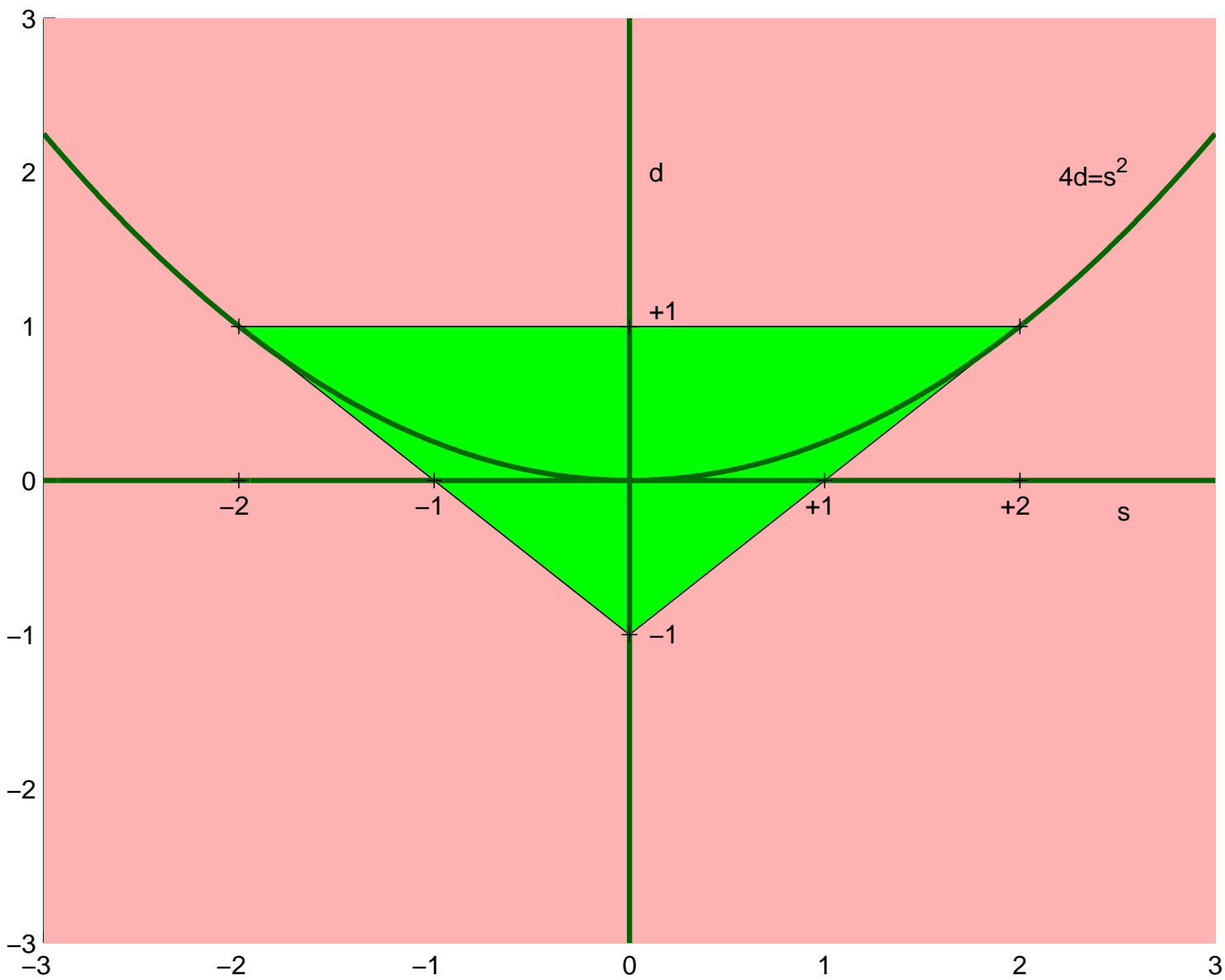
$$4d > s^2 \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2 \notin \mathbb{R}, \quad \lambda_2 = \bar{\lambda}_1$$

$$\text{Stabiel: } d = |\lambda_1|^2: |\lambda_1| = |\lambda_2| < 1 \Leftrightarrow d < 1$$

**Bewering.** Stabiel als  $|s| - 1 < d < 1$ .

Instabiel als  $|s| - 1 > d$  of  $d > 1$ .

# Stabiliteit evenwichten in 2-d



Horizontaal:  $s = \text{spoor}$ . Verticaal:  $d = \text{det}$

**Voorbeeld.** 
$$\begin{cases} x_{n+1} = (a - x_n - y_n) x_n, \\ y_{n+1} = b x_n y_n, \end{cases} \quad \text{met } a, b \geq 0.$$

Lineariseer rond  $(\alpha, \beta)$ : 
$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{n+1} \\ \delta_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a - 2\alpha - \beta & -\alpha \\ b\beta & b\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_n \\ \delta_n \end{bmatrix}.$$

Evenwicht (1): 
$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{n+1} \\ \delta_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_n \\ \delta_n \end{bmatrix}.$$

Evenwicht (2): 
$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{n+1} \\ \delta_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - a & 1 - a \\ 0 & b(a - 1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_n \\ \delta_n \end{bmatrix}.$$

Evenwicht (3): 
$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{n+1} \\ \delta_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{b} & -\frac{1}{b} \\ b(a - 1) - 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_n \\ \delta_n \end{bmatrix}.$$

Evenwicht (1) is stabiel  $\Leftrightarrow a < 1$ .

Evenwicht (2) is stabiel  $\Leftrightarrow 1 < a < 3$  &  $a < 1 + \frac{1}{b}$ .

Evenwicht (3) is stabiel  $\Leftrightarrow \max(\frac{3}{b} - 3, 1 + \frac{1}{b}) < a < 1 + \frac{2}{b}$ .

*Wat als  $a > 1 + \frac{2}{b}$ ?*

# Program

- Management voorbeeld (affien)
- Economisch voorbeeld (affien)
- Rupsen-wespen (niet lineair)
- Niet-lineaire modellen, evenwicht, stabiliteit
- Lineairiseren
- Companion vorm
- Complex als 2-d reeel
- Hoefijzer van Smale

$N_n$  aantal individuen eind maand  $n$

**Aanname:**

- Alleen individuen ouder dan 1 maand produceren nakomelingen  
Productie is met vaste groeicoëfficiënt,
- Sterfte hangt lineair af van het totaal aantal individuen.

**Model:** Voor zekere  $g > 0$

$$N_{n+1} = \left(1 - \kappa \frac{N_n}{N}\right) N_n + g \left(1 - \kappa \frac{N_{n-1}}{N}\right) N_{n-1}.$$

Na schaling  $x_n \equiv N_n/N$ :

$$x_{n+1} = (1 - \kappa x_n) x_n + g(1 - \kappa x_{n-1}) x_{n-1}$$

of equivalent hiermee (**companion vorm**)

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - \kappa x_n^2 + g(y_n - \kappa y_n^2), \\ y_{n+1} = x_n \end{cases}.$$

(d.w.z.  $y_1 = x_0 \Leftrightarrow y_{n+1} = x_n$ ).



# Program

- Management voorbeeld (affien)
- Economisch voorbeeld (affien)
- Rupsen-wespen (niet lineair)
- Niet-lineaire modellen, evenwicht, stabiliteit
- Lineairiseren
- Companion vorm
- Complex als 2-d reeel
- Hoefijzer van Smale

# Verhulst

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad \text{waarbij} \quad f(x) \equiv \kappa(1-x)x - b$$

- Afhankelijk van  $\kappa$  en  $b$ 
  - geen evenwicht(en)
  - (stabiele) evenwichten
  - (stabiele)  $p$ -periodieke banen ( $p = 2^\ell$ )
  - chaos
- Afhankelijk van  $x_0$   
(en van het bestaan van stabiele evenwichten,...)
  - $|x_n| \rightarrow \infty$  voor  $n \rightarrow \infty$
  - $x_n \rightarrow \alpha$  voor  $n \rightarrow \infty$  (als  $\alpha$  stabiel evenwicht)
  - $(x_n)$  op den duur bijna  $p$ -periodiek
  - $(x_n)$  chaotisch

# Verhulst

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad \text{waarbij} \quad f(x) \equiv \kappa(1-x)x - b$$

- Afhankelijk van  $\kappa$  en  $b$ 
  - geen evenwicht(en)
  - (stabiele) evenwichten
  - (stabiele)  $p$ -periodieke banen ( $p = 2^\ell$ )
  - chaos
- Afhankelijk van  $x_0$   
(en van het bestaan van stabiele evenwichten,...)
  - $|x_n| \rightarrow \infty$  voor  $n \rightarrow \infty$
  - $x_n \rightarrow \alpha$  voor  $n \rightarrow \infty$  (als  $\alpha$  stabiel evenwicht)
  - $(x_n)$  op den duur bijna  $p$ -periodiek
  - $(x_n)$  chaotisch

$\alpha = \kappa(1 - \alpha)\alpha - b$  heeft twee (complexe) wortels  $\alpha$ .

# Verhulst

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad \text{waarbij} \quad f(x) \equiv \kappa(1-x)x - b$$

- Afhankelijk van  $\kappa$  en  $b$ 
  - geen evenwicht(en)
  - (stabiele) evenwichten
  - (stabiele)  $p$ -periodieke banen ( $p = 2^\ell$ )
  - chaos
- Afhankelijk van  $x_0$   
(en van het bestaan van stabiele evenwichten,...)
  - $|x_n| \rightarrow \infty$  voor  $n \rightarrow \infty$
  - $x_n \rightarrow \alpha$  voor  $n \rightarrow \infty$  (als  $\alpha$  stabiel evenwicht)
  - $(x_n)$  op den duur bijna  $p$ -periodiek
  - $(x_n)$  chaotisch

$\alpha = \kappa(1 - \alpha)\alpha - b$  heeft twee (complexe) wortels  $\alpha$ .

*Wat gebeurt er als we complex rekenen?*

Voor de notationele eenvoud bekijken we een ietsje eenvoudigere situatie.

## Complex als 2-d reëel

Voor  $c \in \mathbb{R}$ , bekijk

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad \text{met} \quad f(x) \equiv x^2 + c \quad (x \in \mathbb{R})$$

## Complex als 2-d reëel

Voor  $c \in \mathbb{C}$ , bekijk

$$z_{n+1} = F(z_n) \quad \text{met} \quad F(z) \equiv z^2 + c \quad (z \in \mathbb{C})$$

## Complex als 2-d reëel

Voor  $c \in \mathbb{C}$ , bekijk

$$z_{n+1} = F(z_n) \quad \text{met} \quad F(z) \equiv z^2 + c \quad (z \in \mathbb{C})$$

Voor  $z \in \mathbb{C}$ , schrijf  $z = x + iy$  met  $x, y \in \mathbb{R}$ . Evenzo  $c = a + ib$ .

$$\text{Dan} \quad F(x + iy) = (x^2 - y^2 + a) + i(2xy + b).$$

## Complex als 2-d reëel

Voor  $c \in \mathbb{C}$ , bekijk

$$z_{n+1} = F(z_n) \quad \text{met} \quad F(z) \equiv z^2 + c \quad (z \in \mathbb{C})$$

Voor  $z \in \mathbb{C}$ , schrijf  $z = x + iy$  met  $x, y \in \mathbb{R}$ . Evenzo  $c = a + ib$ .

$$\text{Dan} \quad F(x + iy) = (x^2 - y^2 + a) + i(2xy + b).$$

Schrijf  $z_n = x_n + iy_n$ . Dan

$$\begin{cases} x_{n+1} = f(x_n, y_n) \equiv x_n^2 - y_n^2 + a \\ y_{n+1} = g(x_n, y_n) \equiv 2x_n y_n + b \end{cases}$$



## Complex als 2-d reëel

Voor  $c \in \mathbb{C}$ , bekijk

$$z_{n+1} = F(z_n) \quad \text{met} \quad F(z) \equiv z^2 + c \quad (z \in \mathbb{C})$$

Voor  $z \in \mathbb{C}$ , schrijf  $z = x + iy$  met  $x, y \in \mathbb{R}$ . Evenzo  $c = a + ib$ .

$$\text{Dan} \quad F(x + iy) = (x^2 - y^2 + a) + i(2xy + b).$$

Schrijf  $z_n = x_n + iy_n$ . Dan

$$\begin{cases} x_{n+1} = f(x_n, y_n) \equiv x_n^2 - y_n^2 + a \\ y_{n+1} = g(x_n, y_n) \equiv 2x_n y_n + b \end{cases}$$

### Conclusie.

(1-d) Complex is equivalent met 2-dimensionaal reëel.

*In onze volgende voorbeelden rekenen we complex omdat dat de notatie vereenvoudigt.*

## Complex als 2-d reëel

Voor  $c \in \mathbb{C}$ , bekijk

$$z_{n+1} = F(z_n) \quad \text{met} \quad F(z) \equiv z^2 + c \quad (z \in \mathbb{C})$$

Voor  $z \in \mathbb{C}$ , schrijf  $z = x + iy$  met  $x, y \in \mathbb{R}$ . Evenzo  $c = a + ib$ .

$$\text{Dan} \quad F(x + iy) = (x^2 - y^2 + a) + i(2xy + b).$$

Schrijf  $z_n = x_n + iy_n$ . Dan

$$\begin{cases} x_{n+1} = f(x_n, y_n) \equiv x_n^2 - y_n^2 + a \\ y_{n+1} = g(x_n, y_n) \equiv 2x_n y_n + b \end{cases}$$

**Stabiliteit.** Jacobi matrix in  $(x, y)$ :  $\begin{bmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{bmatrix}$

met eigenwaarden  $\lambda_1 = 2(x + iy)$  en  $\lambda_2 = 2(x - iy)$ .

Met  $z = x + iy$  is  $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 2|z| = |F'(z)|$ .

Evenwicht (in  $\mathbb{C}$ ) in  $\zeta_1 \equiv \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 - 4c})$ . Stabiel als  $|2\zeta_1| < 1$

## Voorbeeld

Kies  $c \in \mathbb{C}$ . Definieer  $F(z) \equiv z^2 + c$  ( $z \in \mathbb{C}$ ).

Voor iedere rij  $(z_n)$  met  $z_{n+1} = F(z_n)$  zijn er drie mogelijkheden:

- 1)  $z_n \rightarrow \alpha$  ( $n \rightarrow \infty$ ) met  $\alpha$  evenwicht:  $\alpha = F(\alpha)$
- 2)  $z_n \rightarrow \infty$  ( $n \rightarrow \infty$ )
- 3) anders (chaos, periodieke banen)

## Voorbeeld

Kies  $c \in \mathbb{C}$ . Definieer  $F(z) \equiv z^2 + c$  ( $z \in \mathbb{C}$ ).

Voor iedere rij  $(z_n)$  met  $z_{n+1} = F(z_n)$  zijn er drie mogelijkheden:

- 1)  $z_n \rightarrow \alpha$  ( $n \rightarrow \infty$ ) met  $\alpha$  evenwicht:  $\alpha = F(\alpha)$
- 2)  $z_n \rightarrow \infty$  ( $n \rightarrow \infty$ )
- 3) anders (chaos, periodieke banen)

Voorbeeld:  $c = 0$ .  $\alpha = 0$  is stabiel,  $\alpha = 1$  is instabiel

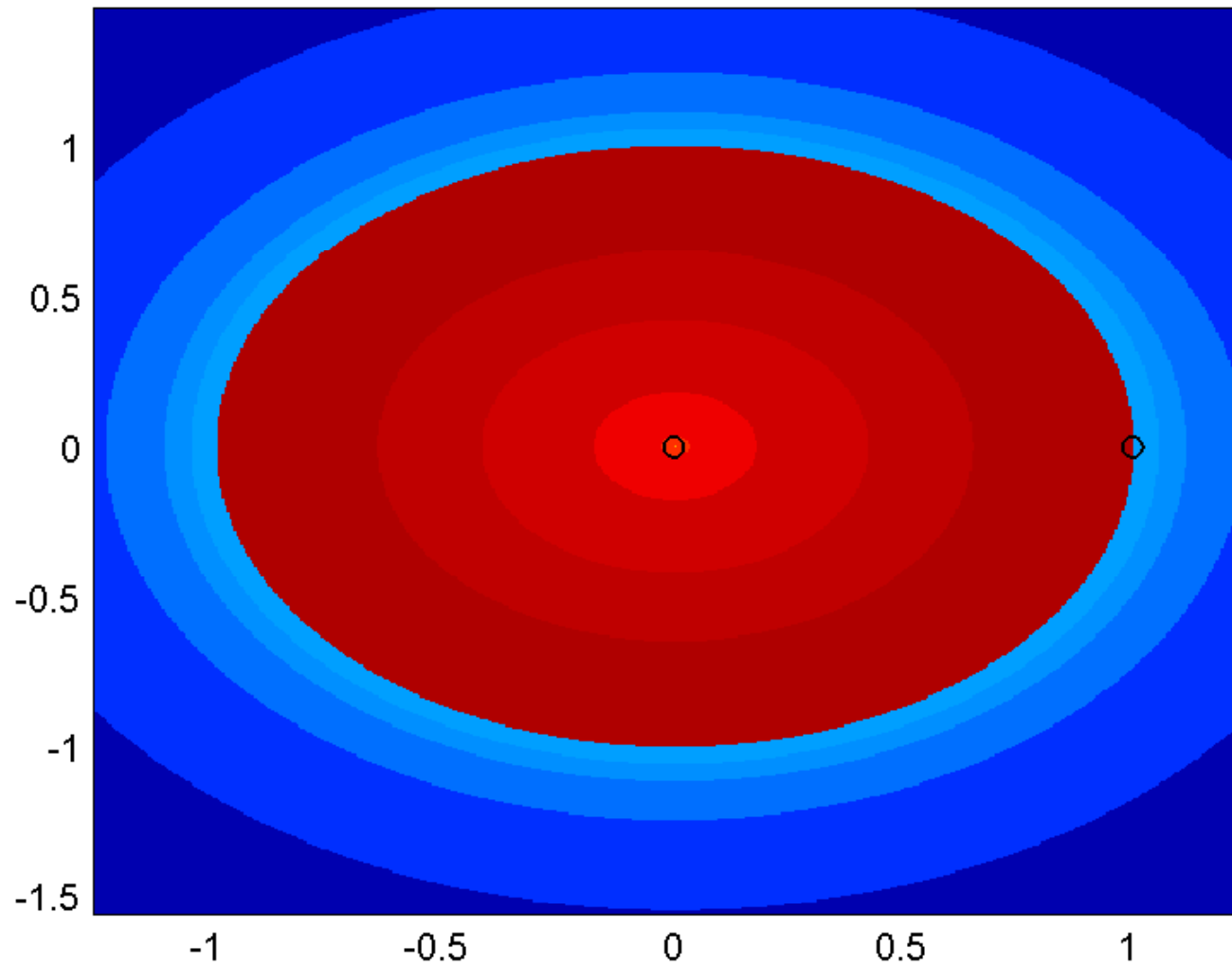
$(z_n)$  heeft eigenschap 1) als  $|z_0| < 1$

$(z_n)$  heeft eigenschap 2) als  $|z_0| > 1$

$(z_n)$  heeft eigenschap 3) als  $|z_0| = 1, z_0 \neq 1$

# Julia set

Successive substitution; check 251001 initial values for convergence



## Voorbeeld

Kies  $c \in \mathbb{C}$ . Definieer  $F(z) \equiv z^2 + c$  ( $z \in \mathbb{C}$ ).

Voor iedere rij  $(z_n)$  met  $z_{n+1} = F(z_n)$  zijn er drie mogelijkheden:

- 1)  $z_n \rightarrow \alpha$  ( $n \rightarrow \infty$ ) met  $\alpha$  evenwicht:  $\alpha = F(\alpha)$
- 2)  $z_n \rightarrow \infty$  ( $n \rightarrow \infty$ )
- 3) anders (chaos, periodieke banen)

**Julia set:**  $\{z_0 \in \mathbb{C} \mid (z_n) \text{ heeft eigenschap 3)}\}$

- Kies  $c = -1.25$ .

Kleur  $z_0 \in \mathbb{C}$  met kleur afhankelijk van gedrag  $(z_n)$  voor  $n \rightarrow \infty$ .

Kleurnuance per  $n$ -de 'schil':

$$S_n(\alpha) = \{z_0 \in \mathbb{C} \mid |z_{n-1} - \alpha| > 10^{-8}, |z_n - \alpha| \leq 10^{-8}\},$$

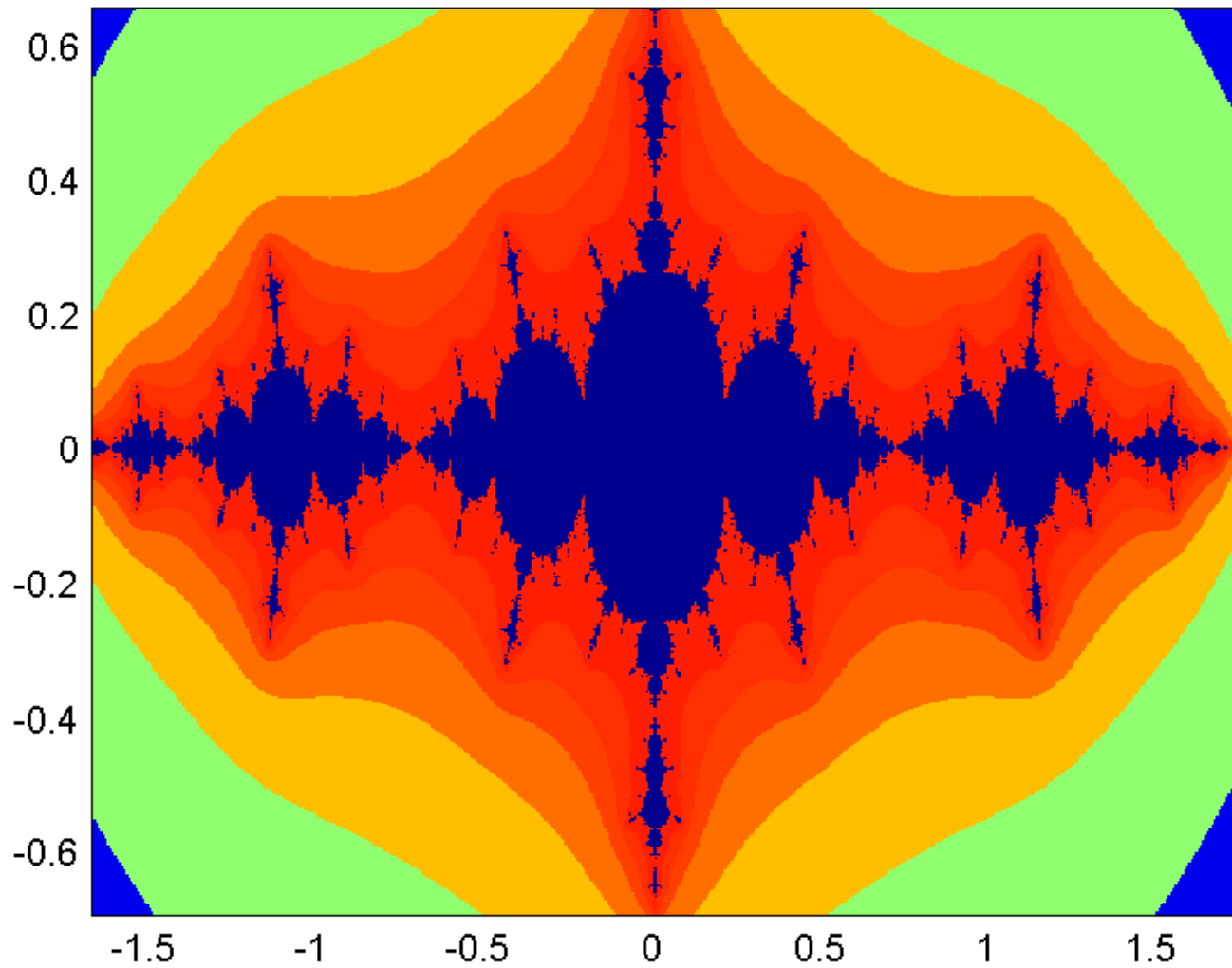
$$S_n(\infty) = \{z_0 \in \mathbb{C} \mid |z_{n-1}| < 10^8, |z_n| \geq 10^8\},$$

$S_\infty$  (Julia set) is de rest;

*Kleurnuance voor 'n schil kan per plaatje verschillen.*

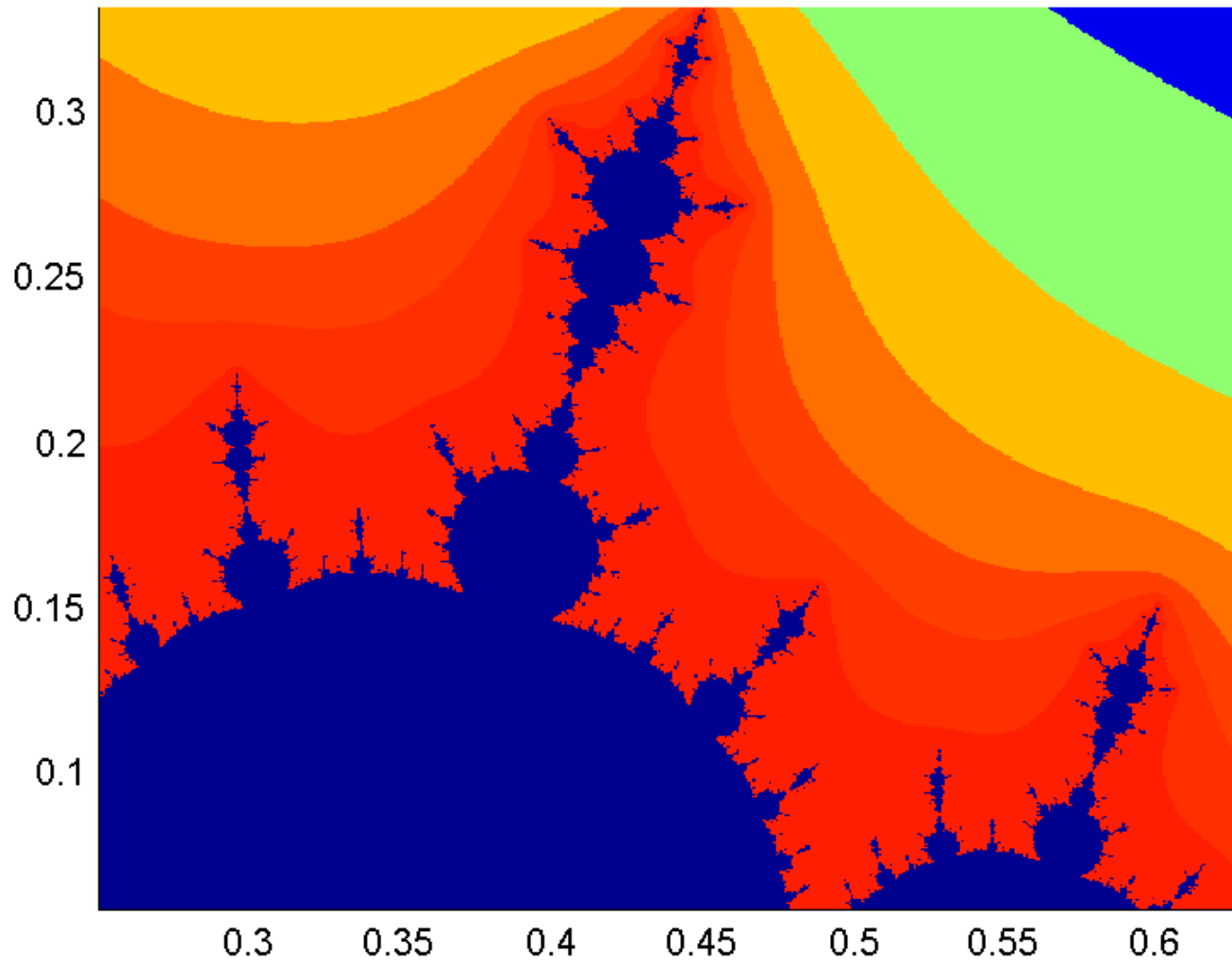
# Julia set

Successive substitution; check 251001 initial values for convergence



# Julia set

Successive substitution; check 251001 initial values for convergence





## Voorbeeld

Kies  $c \in \mathbb{C}$ . Definieer  $F(z) \equiv z^2 + c$  ( $z \in \mathbb{C}$ ).

Voor iedere rij  $(z_n)$  met  $z_{n+1} = F(z_n)$  zijn er drie mogelijkheden:

- 1)  $z_n \rightarrow \alpha$  ( $n \rightarrow \infty$ ) met  $\alpha$  evenwicht:  $\alpha = F(\alpha)$
- 2)  $z_n \rightarrow \infty$  ( $n \rightarrow \infty$ )
- 3) anders (chaos, periodieke banen)

**Julia set:**  $\{z_0 \in \mathbb{C} \mid (z_n) \text{ heeft eigenschap 3)}\}$

- Kies  $c = -1.25$ .

Kleur  $z_0 \in \mathbb{C}$  met kleur afhankelijk van gedrag  $(z_n)$  voor  $n \rightarrow \infty$ .

- Kies  $z_0 = 1$ .

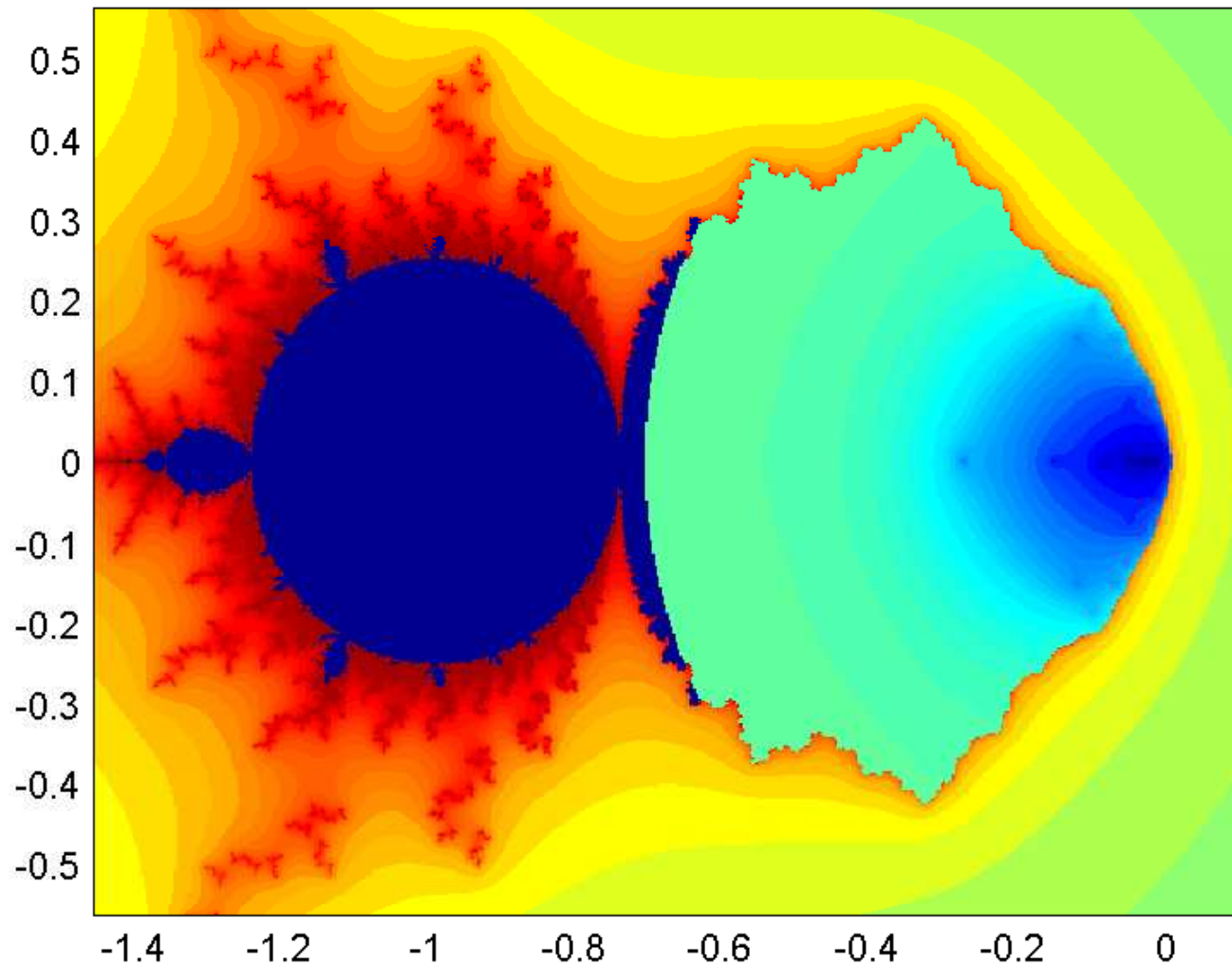
Kleur  $c \in \mathbb{C}$  met kleur afhankelijk van gedrag  $(z_n)$  voor  $n \rightarrow \infty$ .

*Kleurnuances corresponderen met*

*waarde  $n$  waarvoor  $|z_n - \alpha| < 10^{-8}$  of  $|z_n| > 10^8$*

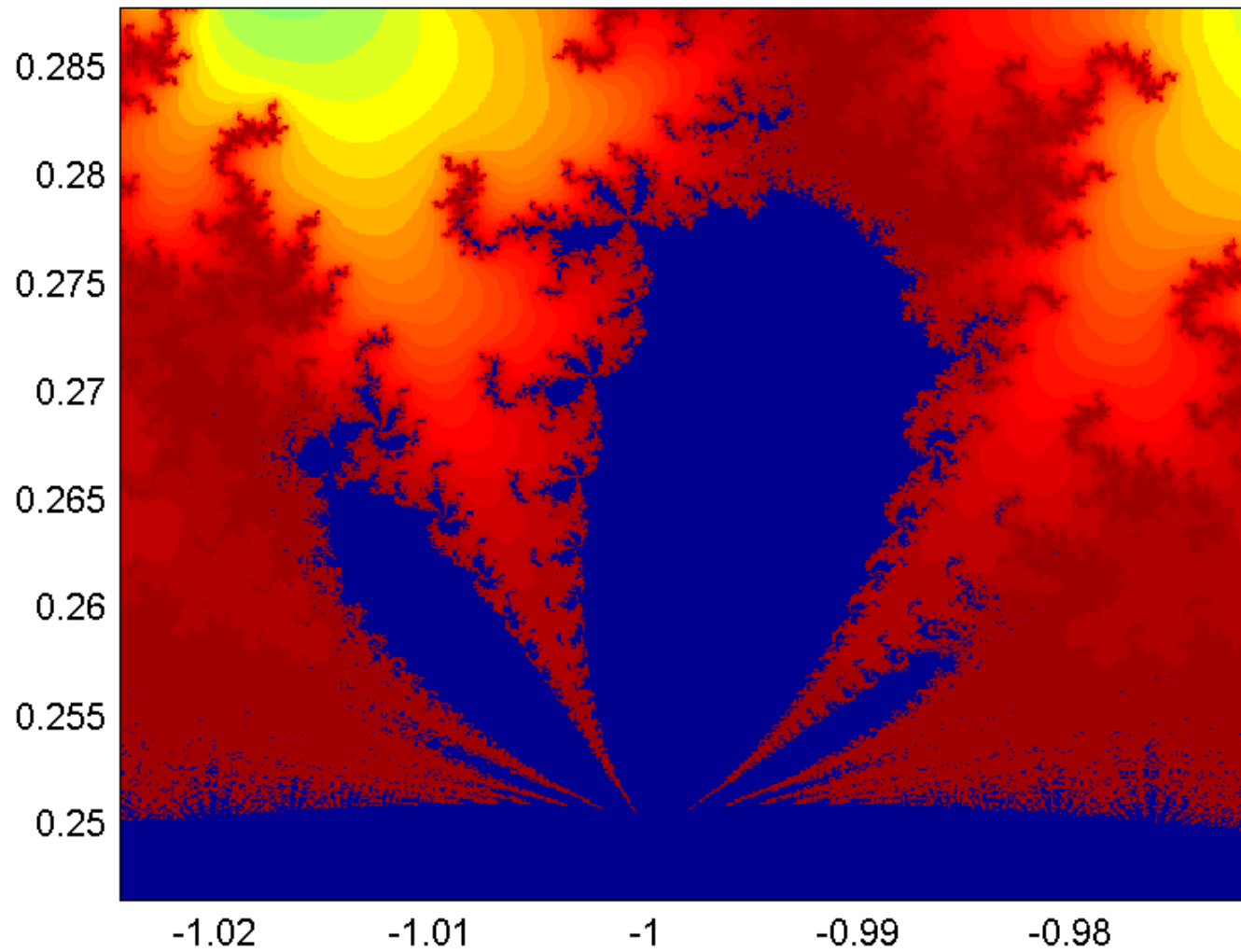
# Julia set

Successive substitution; check 251001 initial values for convergence



# Julia set

Successive substitution; check 251001 initial values for convergence



## Newton proces

$$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)} \quad (x \in \mathbb{R})$$

**Voorbeeld.**  $F(x) = x^3 - a.$

Dan 
$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - a}{3x_n^2}$$

## Newton proces

$$z_{n+1} = z_n - \frac{F(z_n)}{F'(z_n)} \quad (z \in \mathbb{C})$$

**Voorbeeld.**  $F(z) = z^3 - a.$

Dan 
$$z_{n+1} = z_n - \frac{z_n^3 - a}{3z_n^2}$$

## Newton proces

$$z_{n+1} = z_n - \frac{F(z_n)}{F'(z_n)} \quad (z \in \mathbb{C})$$

**Voorbeeld.**  $F(z) = z^3 - a.$

Dan  $z_{n+1} = z_n - \frac{z_n^3 - a}{3z_n^2} = G(z_n)$  met  $G(z) \equiv \frac{2}{3}z + \frac{a}{3z^2}.$

Voor  $z \in \mathbb{C}$ , schrijf  $z = x + iy$  met  $x, y \in \mathbb{R}.$

Evenzo  $a = \alpha + i\beta.$

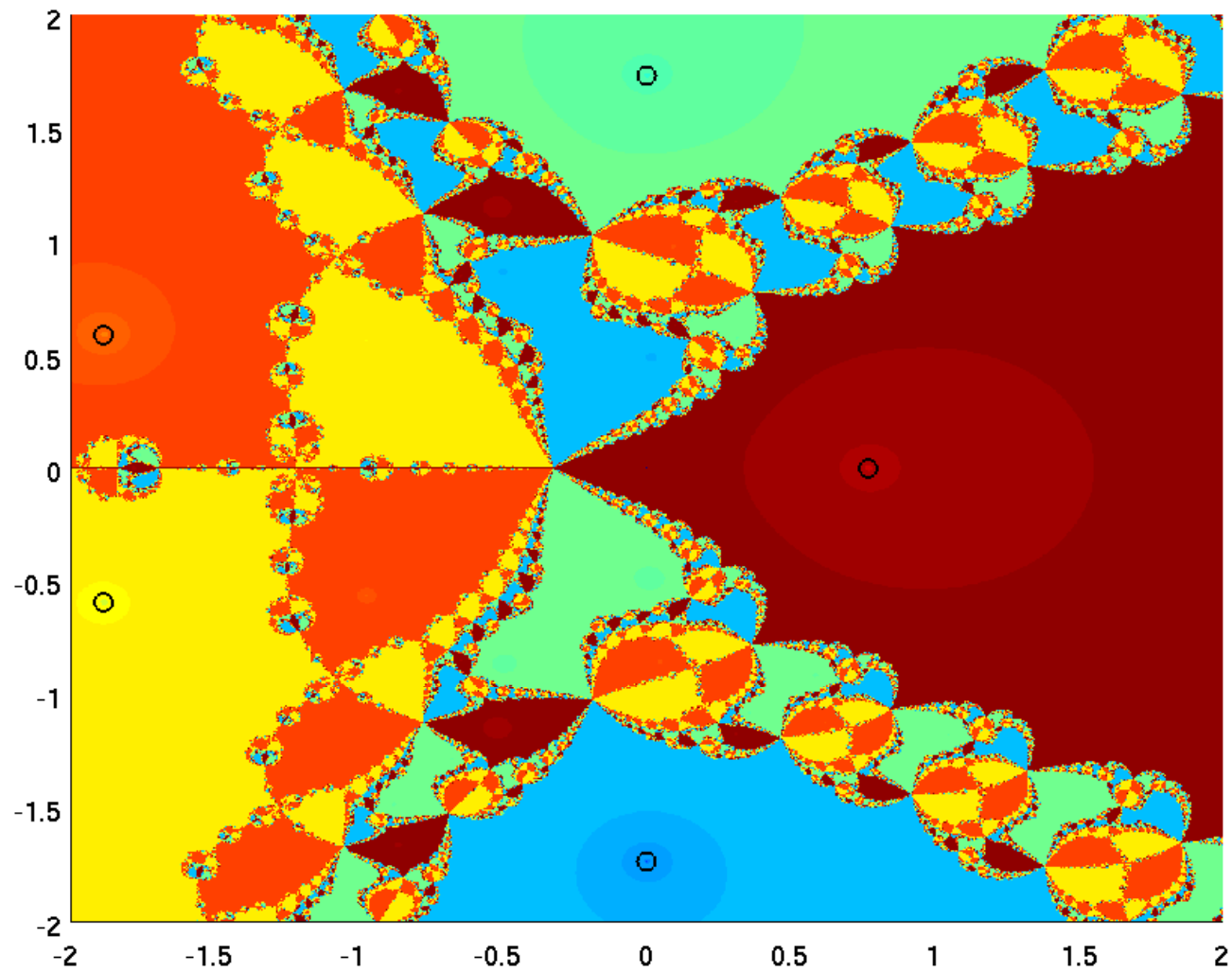
Definieer,  $f(x, y) \equiv \operatorname{Re}(G(x + iy)),$   
 $g(x, y) \equiv \operatorname{Im}(G(x + iy)).$

Volgende plaatje:  $F(z) = z^5 + 3z^4 + 4z^3 + 6z^2 + 3z - 9$

$F(\zeta_j) = 0.$  Kleur  $\mathcal{S}_n(\zeta_j) \equiv \{z_0 \in \mathbb{C} \mid |z_{n-1} - \zeta_j| > 10^{-8}, |z_n - \zeta_j| \leq 10^{-8}\}$

Verschillende kleuren voor verschillende  $\zeta_j,$   
verschillende kleurnuances voor verschillende  $n$  ('schillen').

Newton Raphson; check 1002000 initial values for convergence

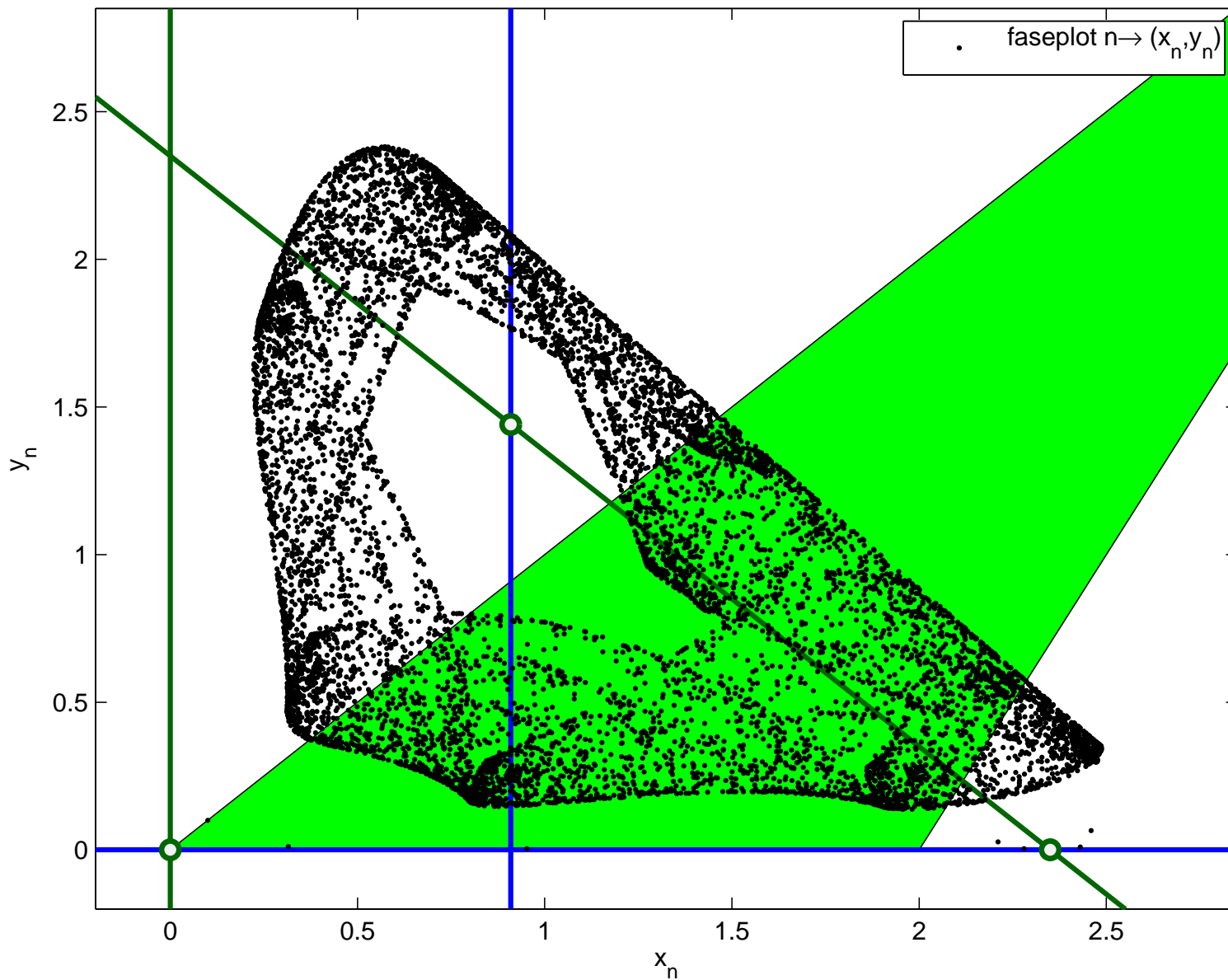


# Program

- Management voorbeeld (affien)
- Economisch voorbeeld (affien)
- Rupsen-wespen (niet lineair)
- Niet-lineaire modellen, evenwicht, stabiliteit
- Lineairiseren
- Companion vorm
- Complex als 2-d reeel
- Hoefijzer van Smale



$$x_{n+1}=f(x_n, y_n), \quad y_{n+1}=g(x_n, y_n) \quad \text{met} \quad f(x, y)=(3.35-x-y) \cdot x, \quad g(x, y)=1.1 \cdot x \cdot y$$



Chaotisch gedrag vertoont zich vaak op structuren met een zekere **self similarity** (zelf gelijkenis): details en details van details, . . . , vertonen zelfde structuren als het geheel (zoals bij broccoli en romanesco). Die structuur is **fractaal** (d.w.z., grillig zoals van broccoli en romanesco).

- *Kunnen we deze 'broccoli' structuur begrijpen?*
- *Kunnen we bewijzen dat het gedrag chaotisch is (en niet maar alleen bijvoorbeeld 64–periodiek)?*

# Chaos $f : I \rightarrow I$

Een iteratief proces  $x_{n+1} = f(x_n)$  is **chaotisch** (op  $I$ ) als

- 1) er voor iedere  $x_0 \in I$  **kleine** verstoringen zijn die op den duur tot **grote** afwijkingen leiden,
- 2) er in de buurt van iedere  $x \in I$  een  $x_0 \in I$  te vinden is waarvoor de baan  $(x_n)$  periodiek is,
- 3) er een baan  $(x_n)$  te vinden is in  $I$  die voor iedere  $x \in I$  willekeurig dicht in de buurt van  $x$  komt.

**Voorbeeld.**  $x_{n+1} = 10x_n \bmod 1$

$$x_0 = 0.3415982 \dots$$

$$x_1 = 0.4159827 \dots$$

$$x_2 = 0.1598276 \dots$$

$$x_3 = 0.5982769 \dots$$

# Chaos $f : I \rightarrow I$

Een iteratief proces  $x_{n+1} = f(x_n)$  is **chaotisch** (op  $I$ ) als

- 1) er voor iedere  $x_0 \in I$  **kleine** verstoringen zijn die op den duur tot **grote** afwijkingen leiden,
- 2) er in de buurt van iedere  $x \in I$  een  $x_0 \in I$  te vinden is waarvoor de baan  $(x_n)$  periodiek is,
- 3) er een baan  $(x_n)$  te vinden is in  $I$  die voor iedere  $x \in I$  willekeurig dicht in de buurt van  $x$  komt.

**Voorbeeld.**  $x_{n+1} = 10x_n \bmod 1$

$x_0 = 0.3415982 \dots$	ad 1)	$\tilde{x}_0 = 0.3416982 \dots$
$x_1 = 0.4159827 \dots$		$\tilde{x}_1 = 0.4169827 \dots$
$x_2 = 0.1598276 \dots$		$\tilde{x}_2 = 0.1698276 \dots$
$x_3 = 0.5982769 \dots$		$\tilde{x}_3 = 0.6982769 \dots$

# Chaos $f : I \rightarrow I$

Een iteratief proces  $x_{n+1} = f(x_n)$  is **chaotisch** (op  $I$ ) als

- 1) er voor iedere  $x_0 \in I$  **kleine** verstoringen zijn die op den duur tot **grote** afwijkingen leiden,
- 2) er in de buurt van iedere  $x \in I$  een  $x_0 \in I$  te vinden is waarvoor de baan  $(x_n)$  periodiek is,
- 3) er een baan  $(x_n)$  te vinden is in  $I$  die voor iedere  $x \in I$  willekeurig dicht in de buurt van  $x$  komt.

**Voorbeeld.**  $x_{n+1} = 10x_n \bmod 1$

$x_0 = 0.3415982 \dots$	ad 2)	$\tilde{x}_0 = 0.3413413 \dots$
$x_1 = 0.4159827 \dots$		$\tilde{x}_1 = 0.4134134 \dots$
$x_2 = 0.1598276 \dots$		$\tilde{x}_2 = 0.1341341 \dots$
$x_3 = 0.5982769 \dots$		$\tilde{x}_3 = 0.3413413 \dots$

# Chaos $f : I \rightarrow I$

Een iteratief proces  $x_{n+1} = f(x_n)$  is **chaotisch** (op  $I$ ) als

- 1) er voor iedere  $x_0 \in I$  **kleine** verstoringen zijn die op den duur tot **grote** afwijkingen leiden,
- 2) er in de buurt van iedere  $x \in I$  een  $x_0 \in I$  te vinden is waarvoor de baan  $(x_n)$  periodiek is,
- 3) er een baan  $(x_n)$  te vinden is in  $I$  die voor iedere  $x \in I$  willekeurig dicht in de buurt van  $x$  komt.

**Voorbeeld.**  $x_{n+1} = 10x_n \bmod 1$

$$x_0 = 0.3415982 \dots$$

$$x_1 = 0.4159827 \dots$$

$$x_2 = 0.1598276 \dots$$

$$x_3 = 0.5982769 \dots$$

ad 3)  $\tilde{x}_0 = 0.1234 \dots 01020304 \dots 9899001002 \dots 00010002 \dots$

# Chaos $f : I \rightarrow I$

Een iteratief proces  $x_{n+1} = f(x_n)$  is **chaotisch** (op  $I$ ) als

- 1) er voor iedere  $x_0 \in I$  **kleine** verstoringen zijn die op den duur tot **grote** afwijkingen leiden,
- 2) er in de buurt van iedere  $x \in I$  een  $x_0 \in I$  te vinden is waarvoor de baan  $(x_n)$  periodiek is,
- 3) er een baan  $(x_n)$  te vinden is in  $I$  die voor iedere  $x \in I$  willekeurig dicht in de buurt van  $x$  komt.

**Voorbeeld.**  $x_{n+1} = 2x_n \bmod 1$

$$x_0 = 0.01001011101011010 \dots$$

$$x_1 = 0.10010111010110101 \dots$$

$$x_2 = 0.00101110101101011 \dots$$

$$x_3 = 0.01011101011010111 \dots$$

⋮

# Chaos $f : I \rightarrow I$

Een iteratief proces  $x_{n+1} = f(x_n)$  is **chaotisch** (op  $I$ ) als

- 1) er voor iedere  $x_0 \in I$  **kleine** verstoringen zijn die op den duur tot **grote** afwijkingen leiden,
- 2) er in de buurt van iedere  $x \in I$  een  $x_0 \in I$  te vinden is waarvoor de baan  $(x_n)$  periodiek is,
- 3) er een baan  $(x_n)$  te vinden is in  $I$  die voor iedere  $x \in I$  willekeurig dicht in de buurt van  $x$  komt.

**Voorbeeld.**  $z_{n+1} = F(z_n)$  met  $F(z) \equiv z^2$  ( $z \in \mathbb{C}$ ),

$$|z_0| < 1 \Rightarrow z_n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

$$|z_0| > 1 \Rightarrow z_n \rightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty)$$

$|z_0| = 1$ . Schrijf  $z_n = e^{2\pi i \phi_n}$  voor een  $\phi_n \in [0, 1)$ .

$$z_{n+1} = z_n^2 \Leftrightarrow \phi_{n+1} = 2\phi_n \text{ mod } 1:$$

Chaos op  $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ .



# Chaos $f : I \rightarrow I$

Een iteratief proces  $x_{n+1} = f(x_n)$  is **chaotisch** (op  $I$ ) als

- 1) er voor iedere  $x_0 \in I$  **kleine** verstoringen zijn die op den duur tot **grote** afwijkingen leiden,
- 2) er in de buurt van iedere  $x \in I$  een  $x_0 \in I$  te vinden is waarvoor de baan  $(x_n)$  periodiek is,
- 3) er een baan  $(x_n)$  te vinden is in  $I$  die voor iedere  $x \in I$  willekeurig dicht in de buurt van  $x$  komt.

**Voorbeeld.**  $z_{n+1} = F(z_n)$  met  $F(z) \equiv z^2$  ( $z \in \mathbb{C}$ ),

$$|z_0| < 1 \Rightarrow z_n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

$$|z_0| > 1 \Rightarrow z_n \rightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty)$$

$|z_0| = 1$ . Schrijf  $z_n = e^{2\pi i \phi_n}$  voor een  $\phi_n \in [0, 1)$ .

$$z_{n+1} = z_n^2 \Leftrightarrow \phi_{n+1} = 2\phi_n \text{ mod } 1:$$

Chaos op  $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ . *Is chaos zichtbaar hier?*

# Chaos $f : I \rightarrow I$

Een iteratief proces  $x_{n+1} = f(x_n)$  is **chaotisch** (op  $I$ ) als

- 1) er voor iedere  $x_0 \in I$  **kleine** verstoringen zijn die op den duur tot **grote** afwijkingen leiden,
- 2) er in de buurt van iedere  $x \in I$  een  $x_0 \in I$  te vinden is waarvoor de baan  $(x_n)$  periodiek is,
- 3) er een baan  $(x_n)$  te vinden is in  $I$  die voor iedere  $x \in I$  willekeurig dicht in de buurt van  $x$  komt.

**Voorbeeld.**  $z_{n+1} = F(z_n)$  met  $F(z) \equiv z^2 + c$  ( $z \in \mathbb{C}$ ),

De (Julia) set  $\{z_0 \mid (z_n) \text{ 'convergeert' niet}\}$  is 'dik'  
voor bv.  $c = -1.25$ .

*Is de iteratie voor  $z_0$  in die verzameling chaotisch?*

## Het hoefijzer van Smale

We geven een constructie (bewijstechniek) die in een aantal gevallen naar een verzameling  $\mathcal{D}$  leidt die self similarity vertoont en waarop het iteratief proces chaotisch is.

De constructie kan uiteraard maar alleen werken als het proces daadwerkelijk chaotisch is op zekere verzamelingen.

Voor de duidelijkheid leggen we de constructie uit aan de hand van een drietal concrete voorbeelden. Maar de constructie (hoefijzer van Smale) is algemener uitvoerbaar.

Het eerste voorbeeld is in essentie 1 dimensionaal:

**Voorbeeld.**  $z_{n+1} = F(z_n)$  met  $F(z) \equiv z^3 \quad (z \in \mathbb{C})$ .

Omdat voor  $|z_0| = 1$  geldt  $z_n = e^{2\pi i \phi_n}$  en

$$\phi_{n+1} = 3\phi_n \text{ mod } 1,$$

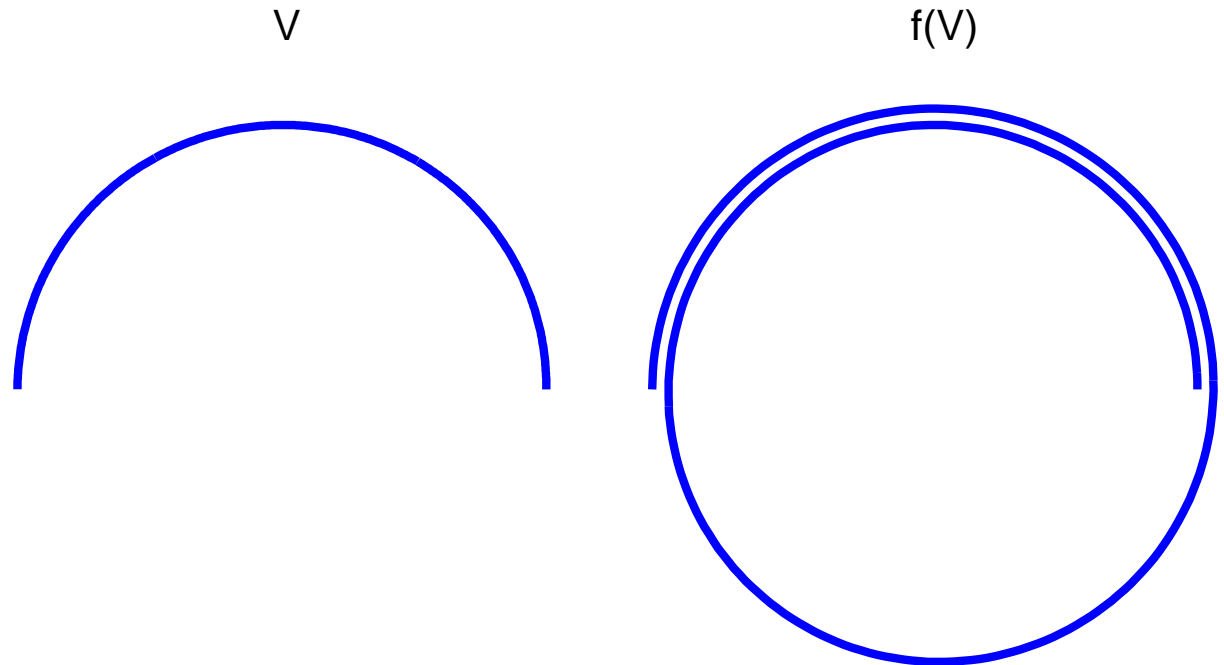
weten we dat het proces chaotisch is op de hele eenheids-  
cirkel

$$\mathcal{S} \equiv \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}.$$

We negeren dit feit en gaan uit van een vermoeden dat er op zekere deelverzamelingen  $\mathcal{D}$  van de eenheids-  
cirkel ( $\mathcal{D} \subset \mathcal{S}$ ) het proces chaotisch is en proberen zo'n verzameling  $\mathcal{D}$  te construeren (en leveren impliciet het bewijs dat het proces daadwerkelijk chaotisch is op  $\mathcal{D}$ ).

$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n)$  op  $\mathbb{R}^2$   $\sim$  op  $\mathbb{C}$  met  $F(z) = z^3$  ( $z \in \mathbb{C}$ ).

*Wat gebeurt er met de bovenste helft van de eenheidscirkel?*



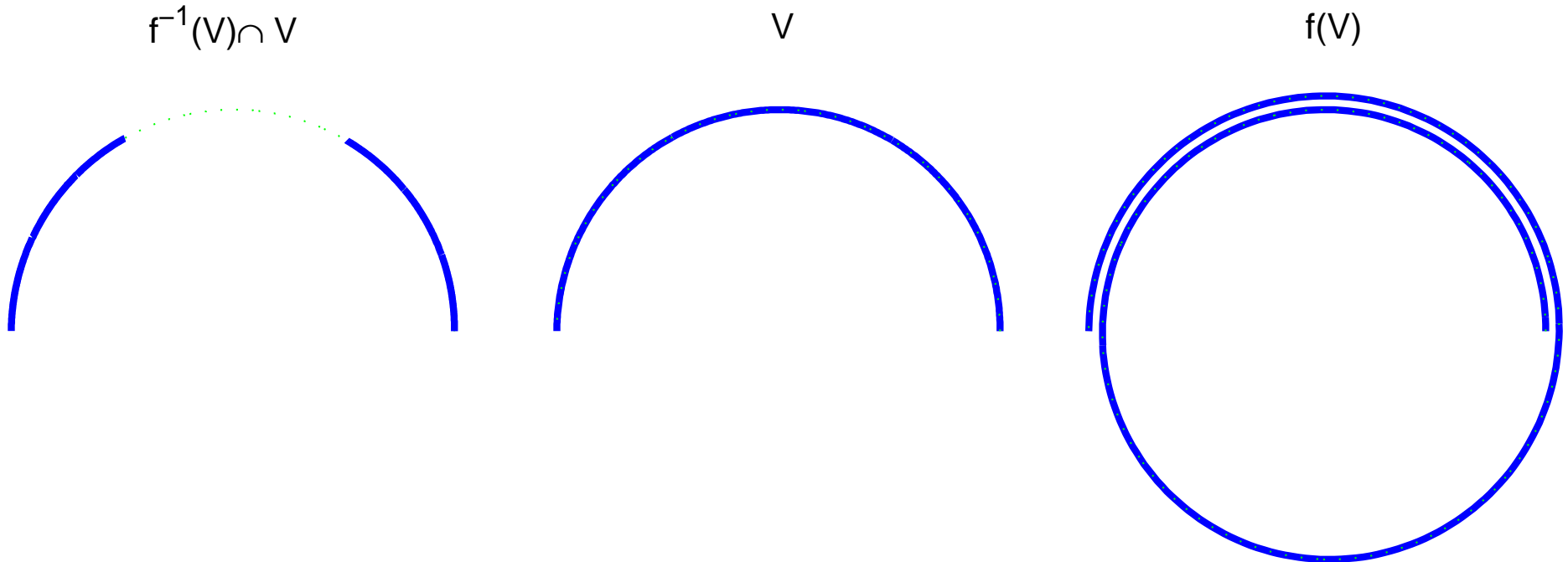
*F beeldt de eenheidscirkel af binnen deze cirkel.*

*Voor de uitleg hebben we echter in de rechter tekening*

*$\mathcal{V} \subset \{z \mid |z| = 1 + \varepsilon, \text{Im}(z) \geq 0\}$  genomen.*

$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n)$  op  $\mathbb{R}^2$   $\sim$  op  $\mathbb{C}$  met  $F(z) = z^3$  ( $z \in \mathbb{C}$ ).

*Wat gebeurt er met de bovenste helft van de eenheidscirkel?*



*$F$  beeldt de eenheidscirkel af binnen deze cirkel.*

*Voor de uitleg hebben we echter in de rechter tekening*

*$\mathcal{V} \subset \{z \mid |z| = 1 + \varepsilon, \text{Im}(z) \geq 0\}$  genomen.*

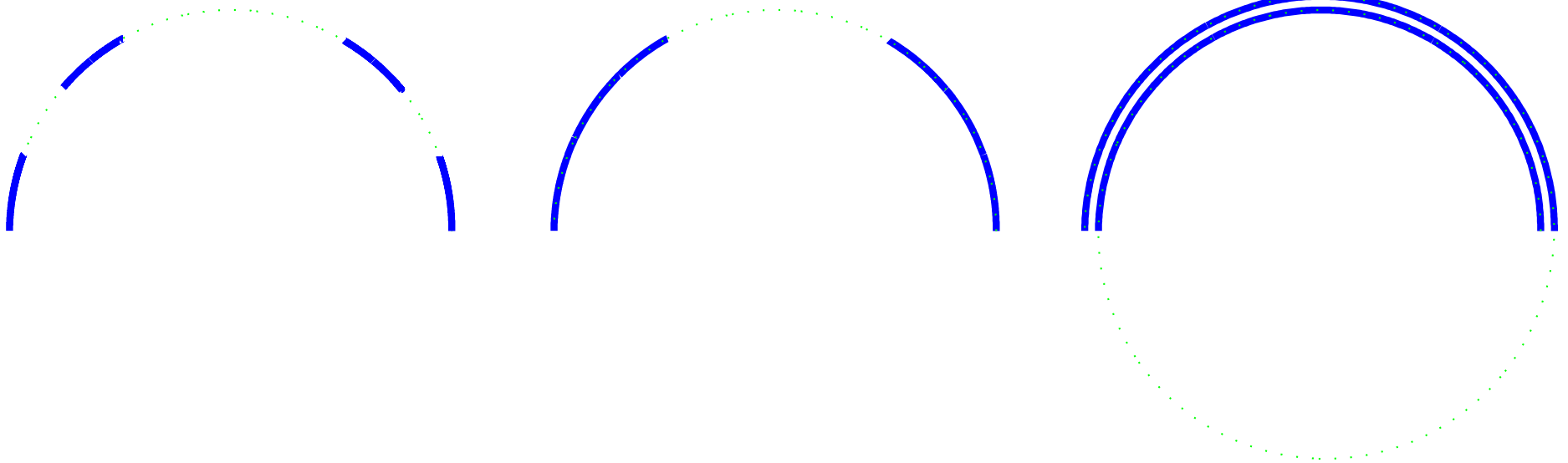
$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n)$  op  $\mathbb{R}^2 \sim$  op  $\mathbb{C}$  met  $F(z) = z^3$  ( $z \in \mathbb{C}$ ).

*Wat gebeurt er met de bovenste helft van de eenheidscirkel?*

$f^{-1}(V) \cap V$

$V$

$f(V)$



*$F$  beeldt de eenheidscirkel af binnen deze cirkel.*

*Voor de uitleg hebben we echter in de rechter tekening*

*$\mathcal{V} \subset \{z \mid |z| = 1 + \varepsilon, \text{Im}(z) \geq 0\}$  genomen.*

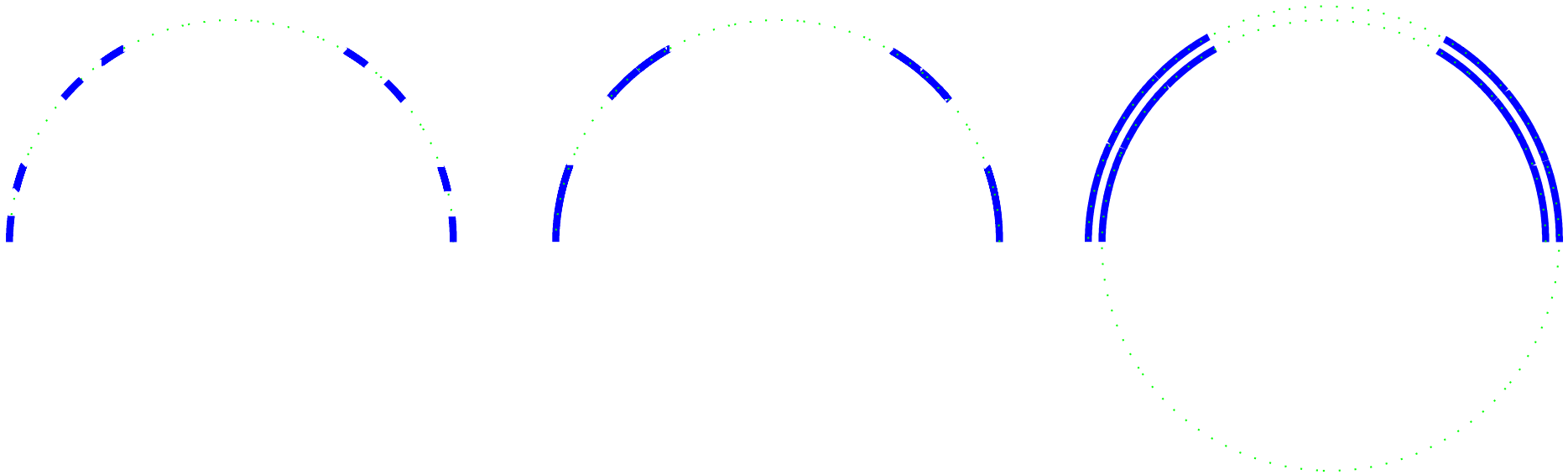
$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n)$  op  $\mathbb{R}^2 \sim$  op  $\mathbb{C}$  met  $F(z) = z^3$  ( $z \in \mathbb{C}$ ).

*Wat gebeurt er met de bovenste helft van de eenheidscirkel?*

$f^{-1}(V) \cap V$

$V$

$f(V)$



*$F$  beeldt de eenheidscirkel af binnen deze cirkel.*

*Voor de uitleg hebben we echter in de rechter tekening*

*$\mathcal{V} \subset \{z \mid |z| = 1 + \varepsilon, \text{Im}(z) \geq 0\}$  genomen.*



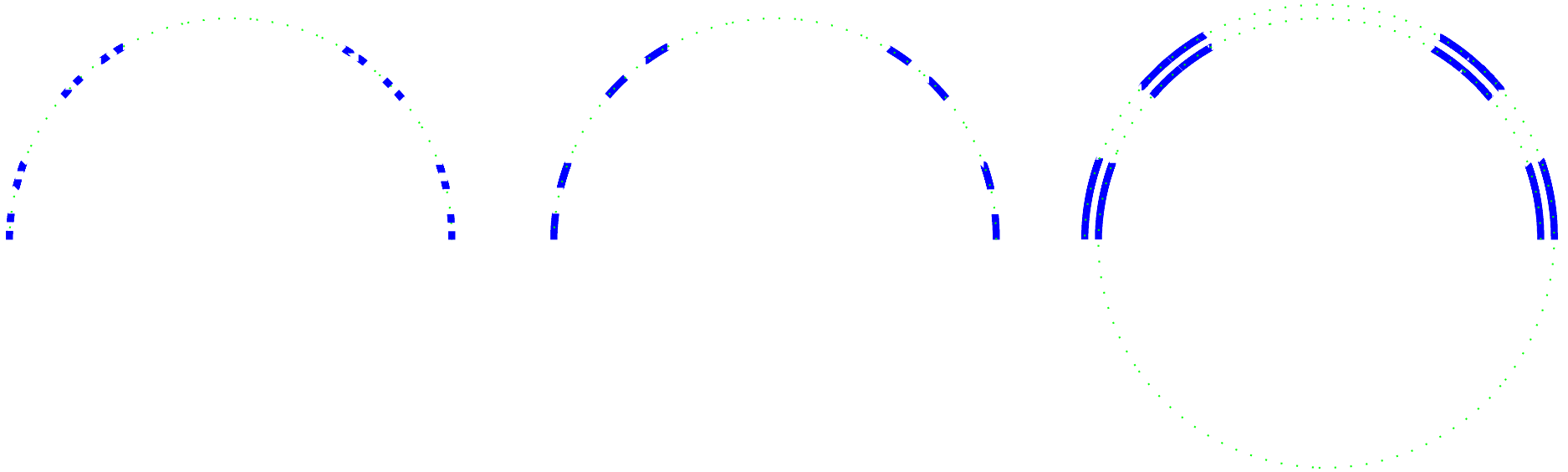
$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n)$  op  $\mathbb{R}^2$   $\sim$  op  $\mathbb{C}$  met  $F(z) = z^3$  ( $z \in \mathbb{C}$ ).

*Wat gebeurt er met de bovenste helft van de eenheidscirkel?*

$f^{-1}(V) \cap V$

$V$

$f(V)$



*$F$  beeldt de eenheidscirkel af binnen deze cirkel.*

*Voor de uitleg hebben we echter in de rechter tekening*

*$\mathcal{V} \subset \{z \mid |z| = 1 + \varepsilon, \text{Im}(z) \geq 0\}$  genomen.*

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n)$$

Definieer de keten van verzamelingen  $\mathcal{V}_n$  door

$$\mathcal{V}_{n+1} \equiv \mathbf{f}^{-1}(\mathcal{V}_n) \cap \mathbf{f}(\mathcal{V}_n) \cap \mathcal{V}_n$$

Met

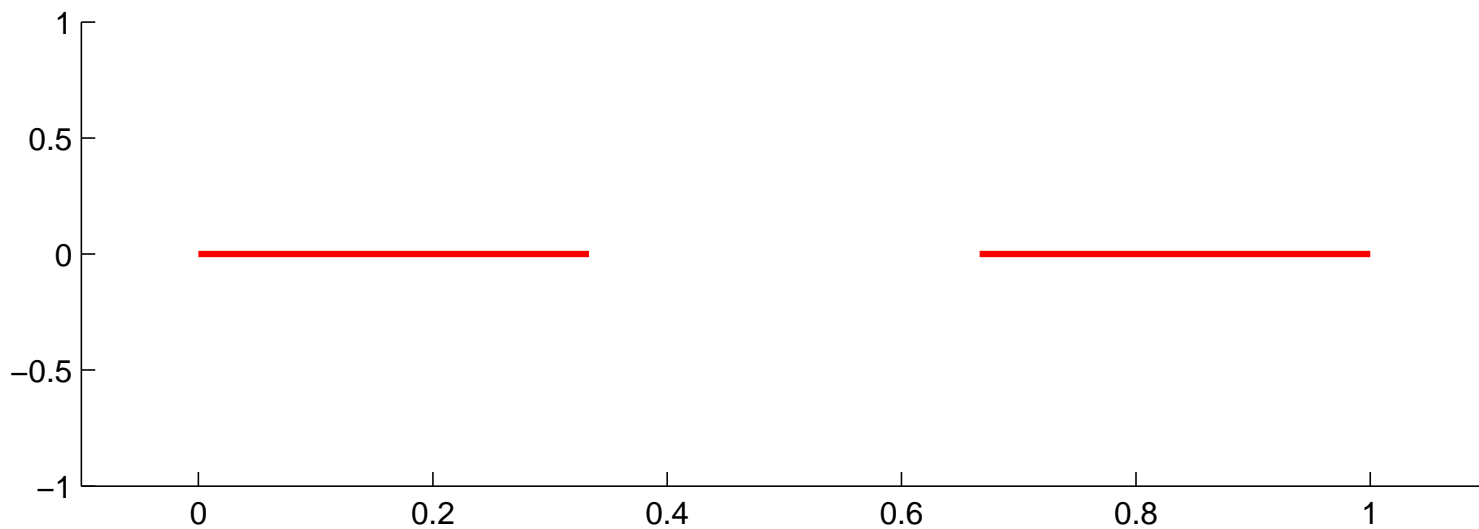
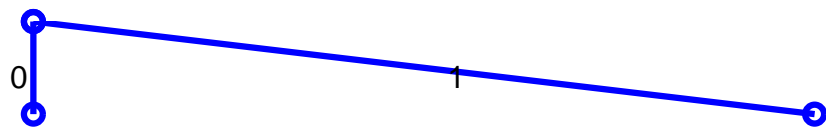
$$\mathcal{D} \equiv \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathcal{V}_n$$

geldt

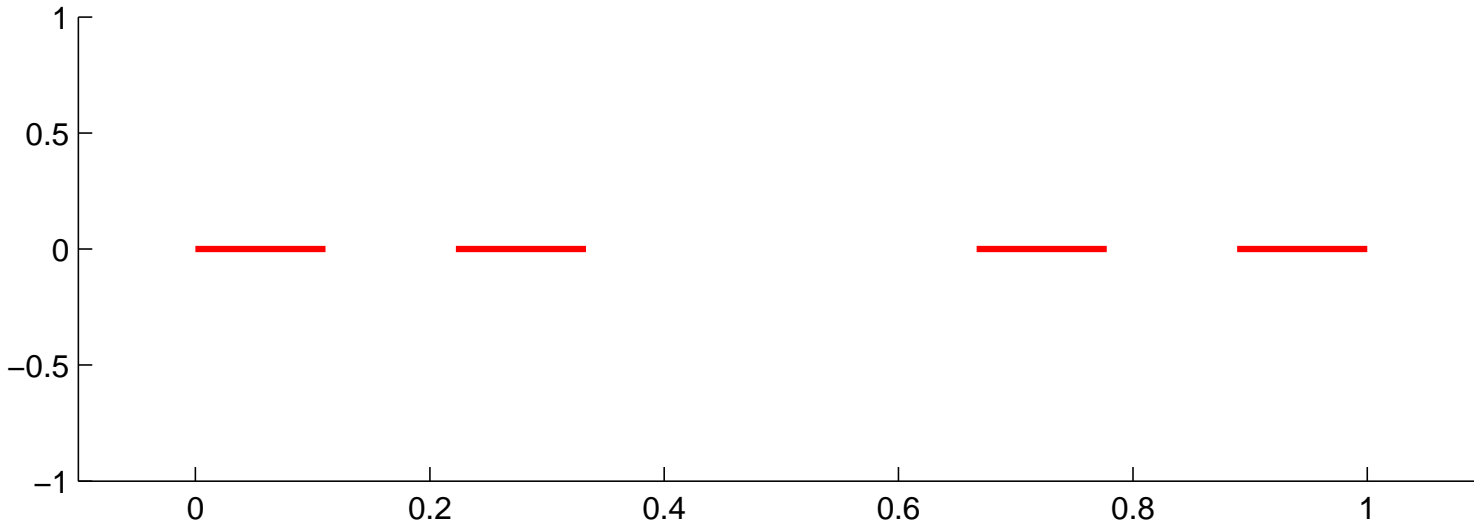
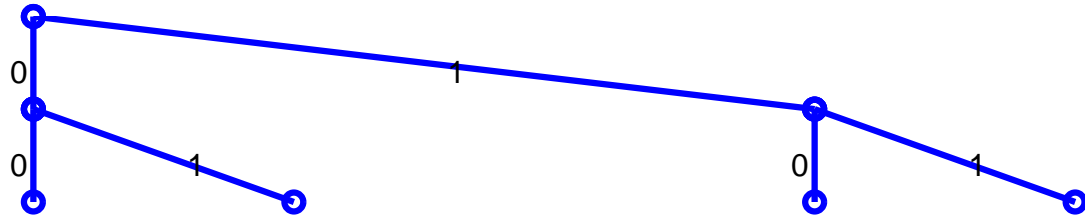
$$\mathbf{f}(\mathcal{D}) = \mathcal{D}$$

Is  $\mathcal{D} \neq \emptyset$ ? Is er chaos op  $\mathcal{D}$ ?

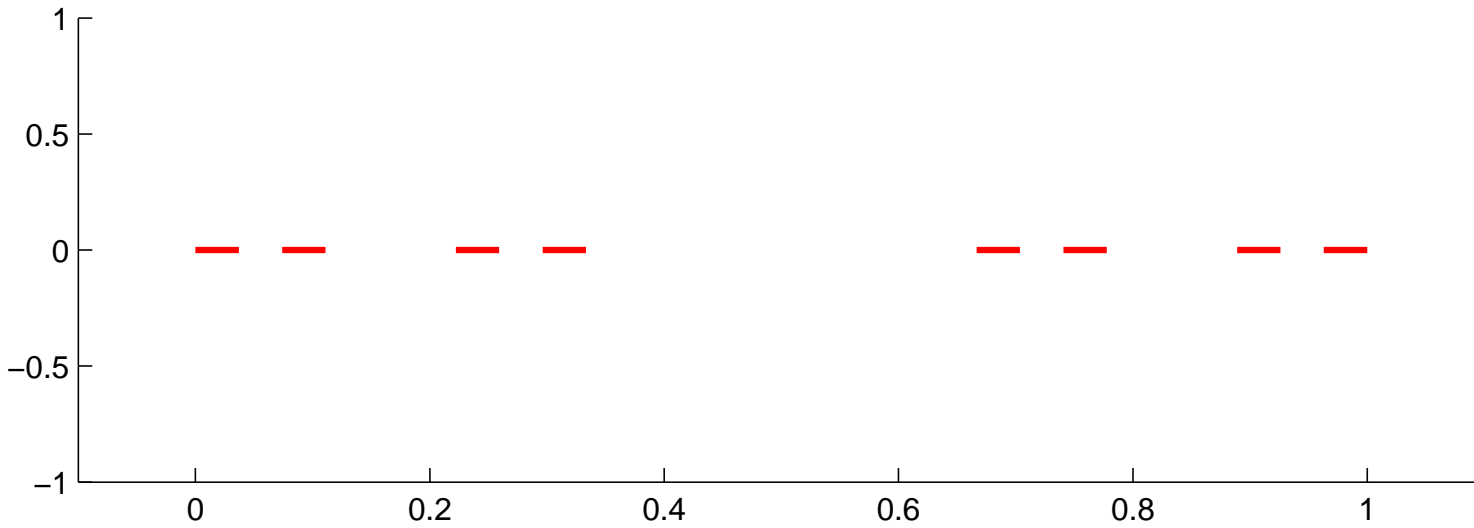
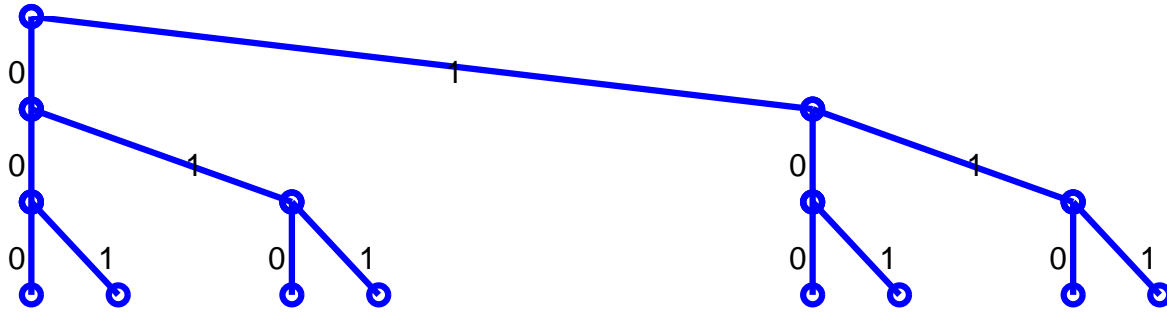
# Cantor verzameling



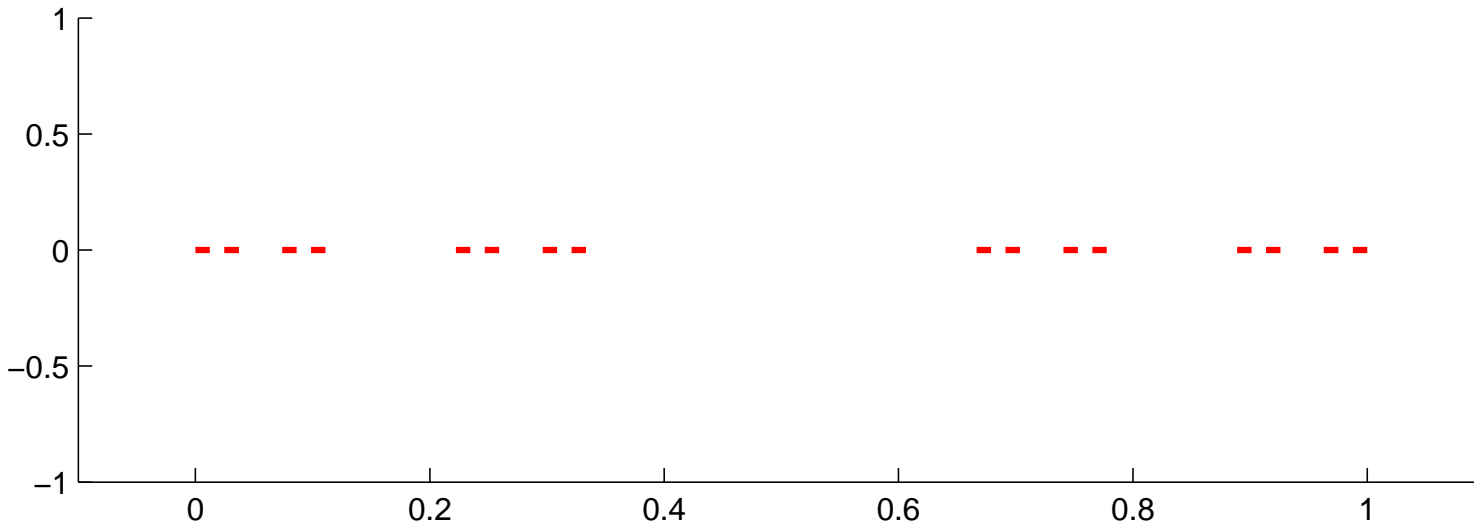
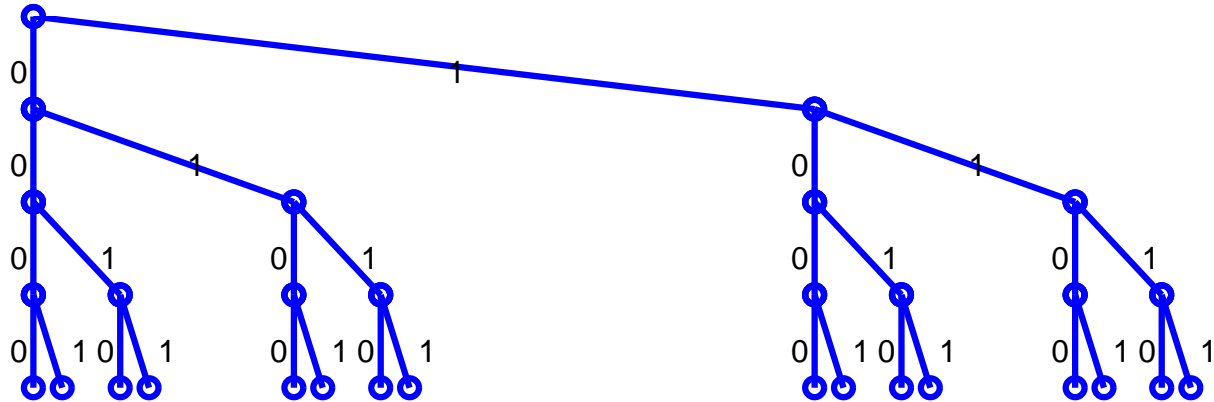
# Cantor verzameling



# Cantor verzameling



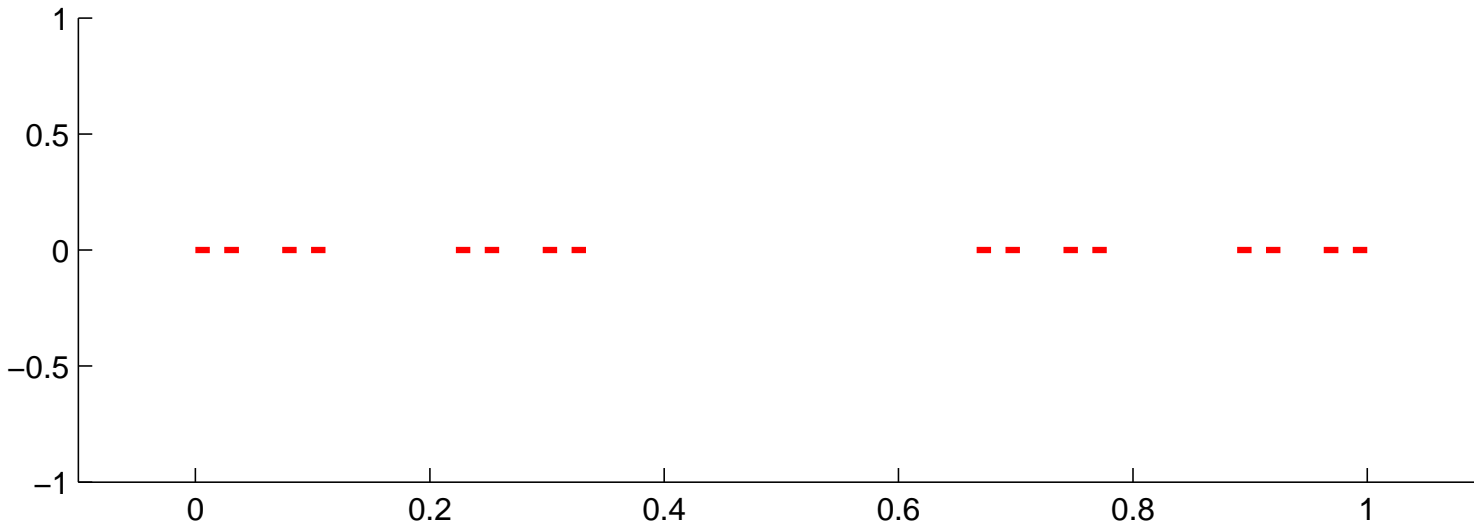
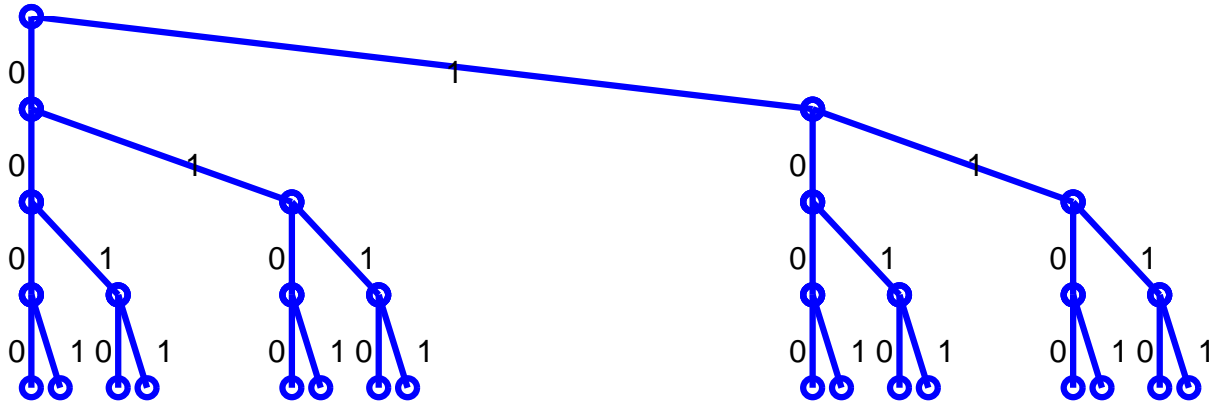
# Cantor verzameling



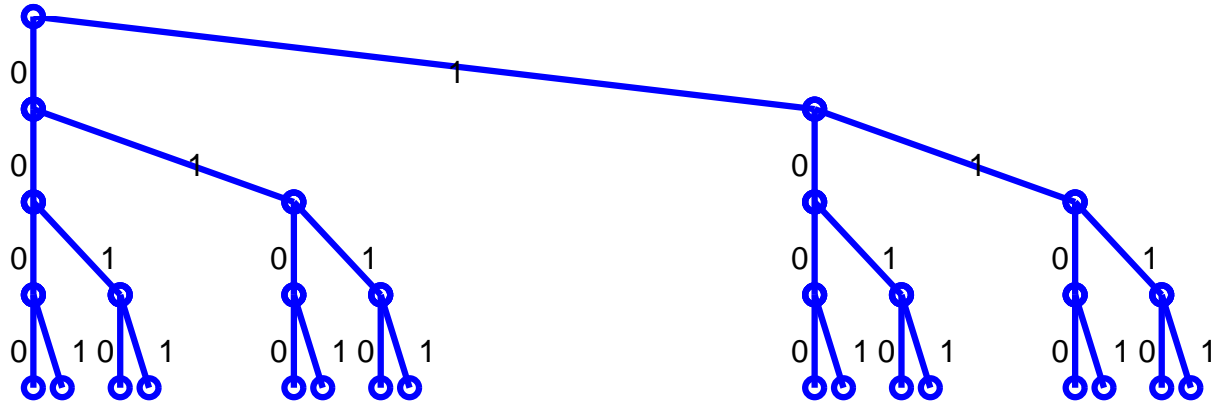
# Cantor verzameling

$$\sum_{i=1}^{\infty} 2 a_i 3^{-i}$$

met  $a_i \in \{0, 1\}$



# Cantor verzameling



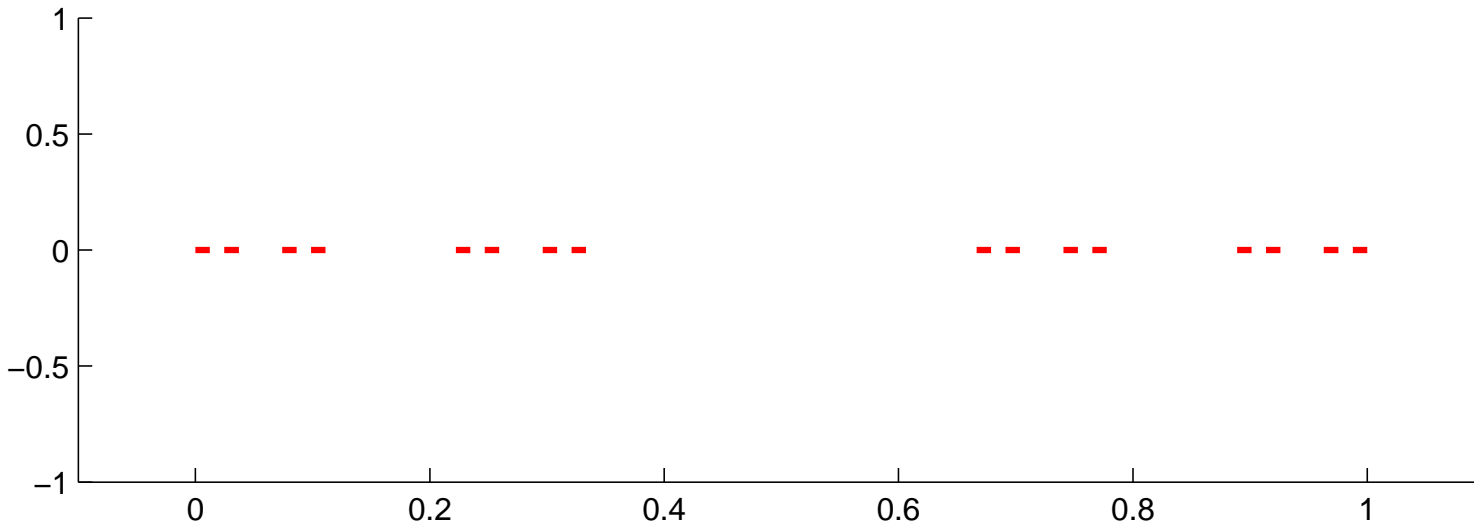
$$\sum_{i=1}^{\infty} 2 a_i 3^{-i}$$

met  $a_i \in \{0, 1\}$



$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i 2^{-i}$$

met  $a_i \in \{0, 1\}$





.....

**Cantor verzameling.**  $\mathcal{D} \equiv \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} 2 a_i 3^{-i} \mid a_i \in \{0, 1\} \right\}$

$\mathcal{D}$  wordt ook wel het **Discontinuüm van Cantor** genoemd.

.....

**Cantor verzameling.**  $\mathcal{D} \equiv \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} 2 a_i 3^{-i} \mid a_i \in \{0, 1\} \right\}$

**Self similarity:**  $3([0, \frac{1}{3}] \cap \mathcal{D}) = \mathcal{D}$

... ..                      ... ..                      ... ..                      ... ..

**Cantor verzameling.**  $\mathcal{D} \equiv \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} 2 a_i 3^{-i} \mid a_i \in \{0, 1\} \right\}$

**Itereren op de Cantor verzameling.**

$x_{n+1} = 2 x_n \text{ mod } 1$  op  $[0, 1]$  is equivalent met (binair)

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j 2^{-j} \rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} a_{j+1} 2^{-j} .$$

‘Verplaats’ dit proces naar  $\mathcal{D}$ :

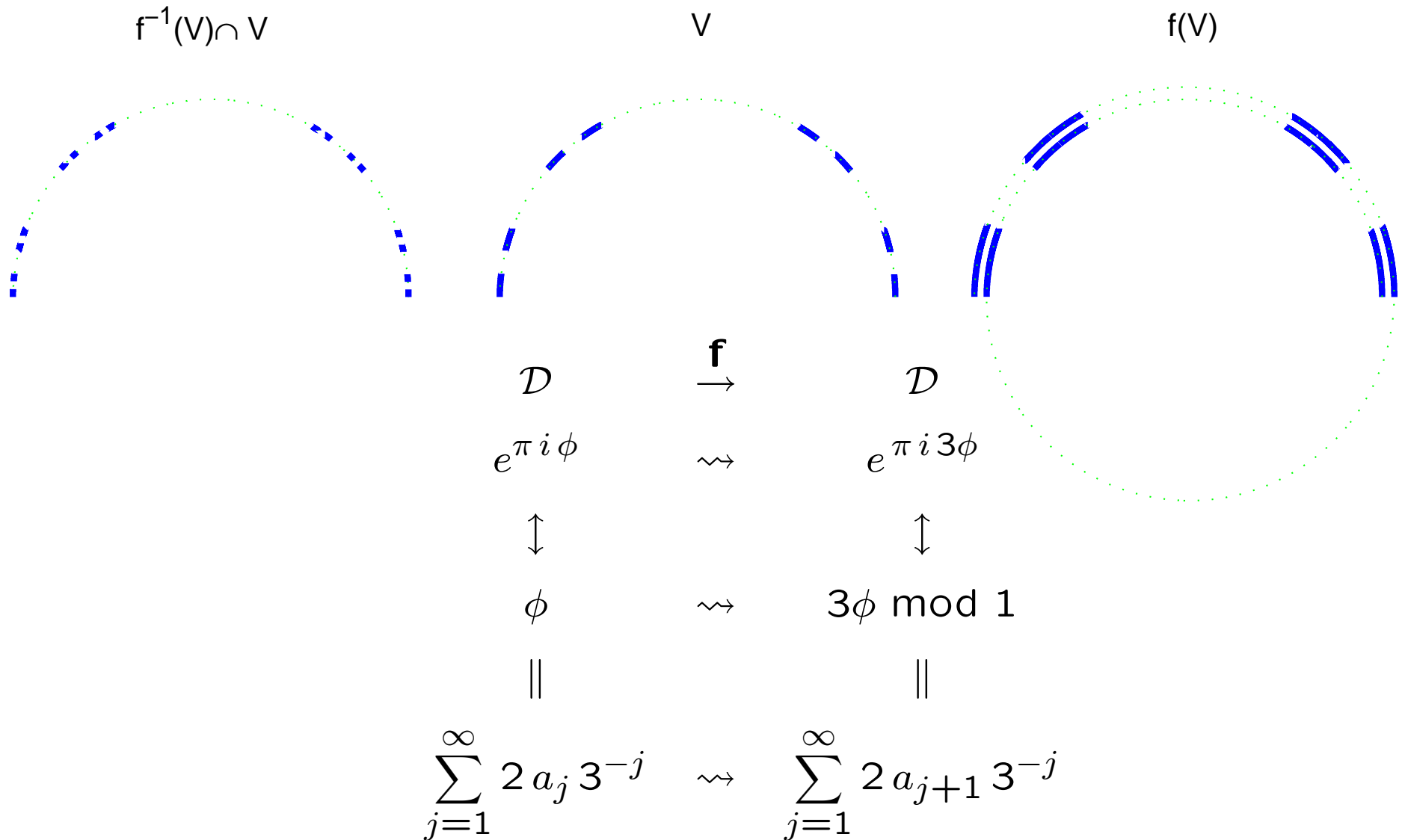
$$\sum_{j=1}^{\infty} 2 a_j 3^{-j} \rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} 2 a_{j+1} 3^{-j} \quad *)$$

Zo correspondeert  $x_0 = 0.01011001 \dots$   
 $= 0 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} + 0 \cdot 2^{-3} + 1 \cdot 2^{-4} + 1 \cdot 2^{-5} + \dots$   
 op  $\mathcal{D}$  met  $0 \cdot 3^{-1} + 2 \cdot 3^{-2} + 0 \cdot 3^{-3} + 2 \cdot 3^{-4} + 2 \cdot 3^{-5} + \dots$

**Conclusie.** Proces \*) is chaotisch op de Cantor verzameling.

$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n)$  op  $\mathbb{R}^2 \sim$  op  $\mathbb{C}$  met  $F(z) = z^3 \quad (z \in \mathbb{C})$ .

*Wat gebeurt er met de bovenste helft van de eenheidscirkel?*



$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n)$$

Definieer de keten van verzamelingen  $\mathcal{V}_n$  door

$$\mathcal{V}_{n+1} \equiv \mathbf{f}^{-1}(\mathcal{V}_n) \cap \mathbf{f}(\mathcal{V}_n) \cap \mathcal{V}_n$$

Met

$$\mathcal{D} \equiv \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathcal{V}_n$$

geldt

$$\mathbf{f}(\mathcal{D}) = \mathcal{D}$$

Chaos op  $\mathcal{D}$ ?

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n)$$

Definieer de keten van verzamelingen  $\mathcal{V}_n$  door

$$\mathcal{V}_{n+1} \equiv \mathbf{f}^{-1}(\mathcal{V}_n) \cap \mathbf{f}(\mathcal{V}_n) \cap \mathcal{V}_n$$

Met

$$\mathcal{D} \equiv \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathcal{V}_n$$

geldt

$$\mathbf{f}(\mathcal{D}) = \mathcal{D}$$

Chaos op  $\mathcal{D}$  in vorige voorbeeld.

Is deze constructie algemener toepasbaar?

Wanneer werkt hij?

$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n)$  op  $\mathbb{R}^2 \quad \sim \quad$  op  $\mathbb{C}$  met  $F(z) = z^3 \quad (z \in \mathbb{C})$ .

0 is een stabiel evenwicht. **Andere evenwichten?**

- $(z_n)$  convergeert naar 0 als  $|z_0| < 1$ .
- $(z_n)$  'convergeert' naar  $\infty$  (divergeert) als  $|z_0| > 1$ .
- Chaotisch gedrag voor  $|z_0| = 1$ .

**Varianten.**  $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n)$  op  $\mathbb{R}^2 \quad \sim \quad$  op  $\mathbb{C}$  met

- $F(z) = z^2 \quad (z \in \mathbb{C})$ .
- $F(z) \equiv z^2 + c$  voor zekere  $c$ . **Julia set.**
- $F(z) = F(r e^{2\pi i \phi}) \equiv \sqrt{r} e^{2\pi i 2\phi}$ .

$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n)$  op  $\mathbb{R}^2 \sim$  op  $\mathbb{C}$  met  $F(z) = z^3$  ( $z \in \mathbb{C}$ ).

0 is een stabiel evenwicht. **Andere evenwichten?**

- $(z_n)$  convergeert naar 0 als  $|z_0| < 1$ .
- $(z_n)$  'convergeert' naar  $\infty$  (divergeert) als  $|z_0| > 1$ .
- Chaotisch gedrag voor  $|z_0| = 1$ .

**Varianten.**  $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n)$  op  $\mathbb{R}^2 \sim$  op  $\mathbb{C}$  met

- $F(z) = z^2$  ( $z \in \mathbb{C}$ ).
- $F(z) \equiv z^2 + c$  voor zekere  $c$ . **Julia set.**
- $F(z) = F(r e^{2\pi i \phi}) \equiv \sqrt{r} e^{2\pi i 2\phi}$ .
- $F(z) = F(r e^{\pi i \phi}) \equiv (\frac{1}{3} r + \frac{8}{9} |\phi|) e^{3\pi i \phi}$  ( $r \in [0, \infty)$ ,  $|\phi| \leq 1$ )

Actie  $F$  op  $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1, \operatorname{Re}(z) \geq 0\}$  is

samendrukken, uitrekken, oprollen

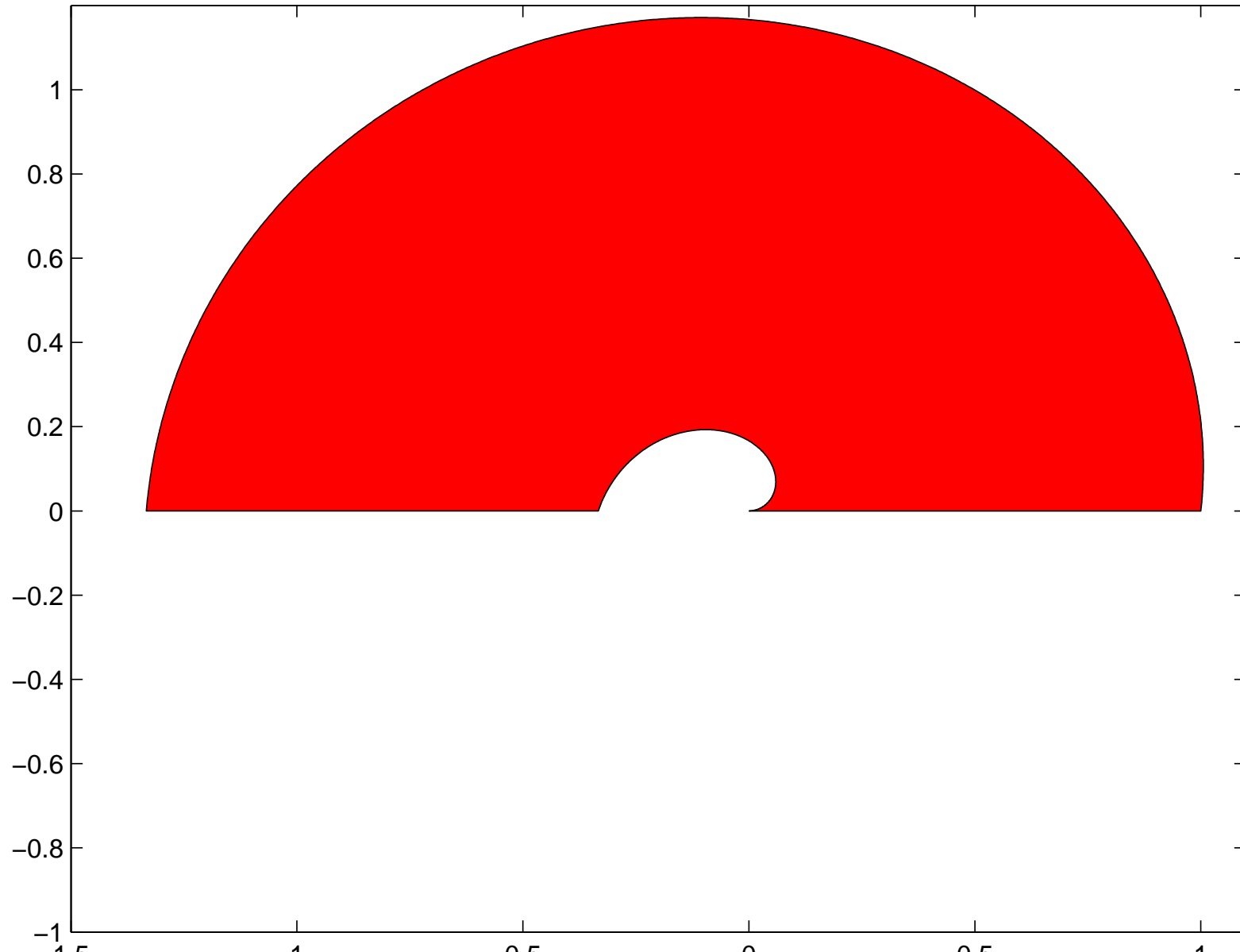
*(Plaatjes op de volgende transparanten voor deze iteratie)*



$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n) \text{ op } \mathbb{R}^2$$

$\mathbf{f}$ : samendrukken, uitrekken, oprollen

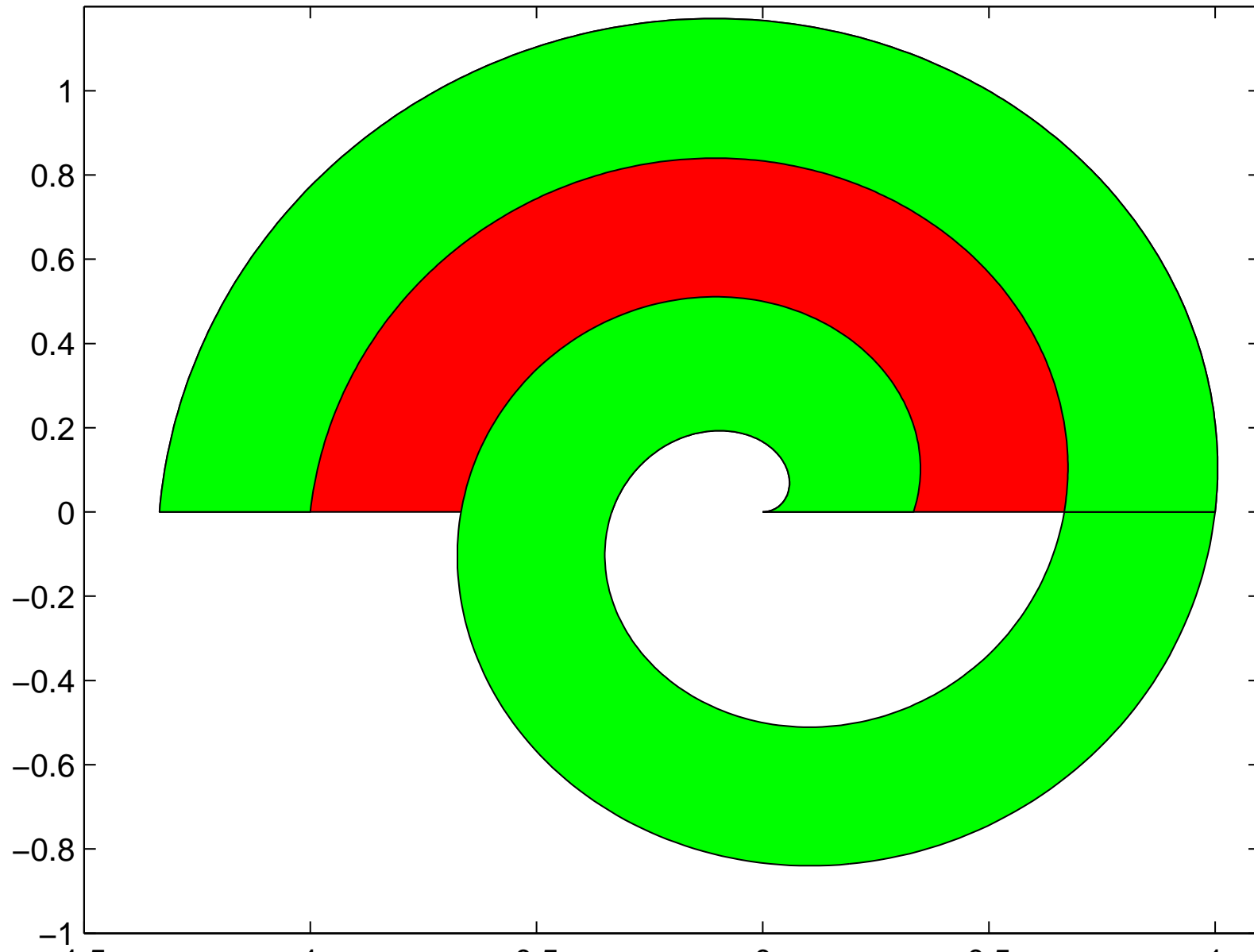
$\mathcal{V}_0$  in rood



$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n) \text{ op } \mathbb{R}^2$$

$\mathbf{f}$ : samendrukken, uitrekken, oprollen

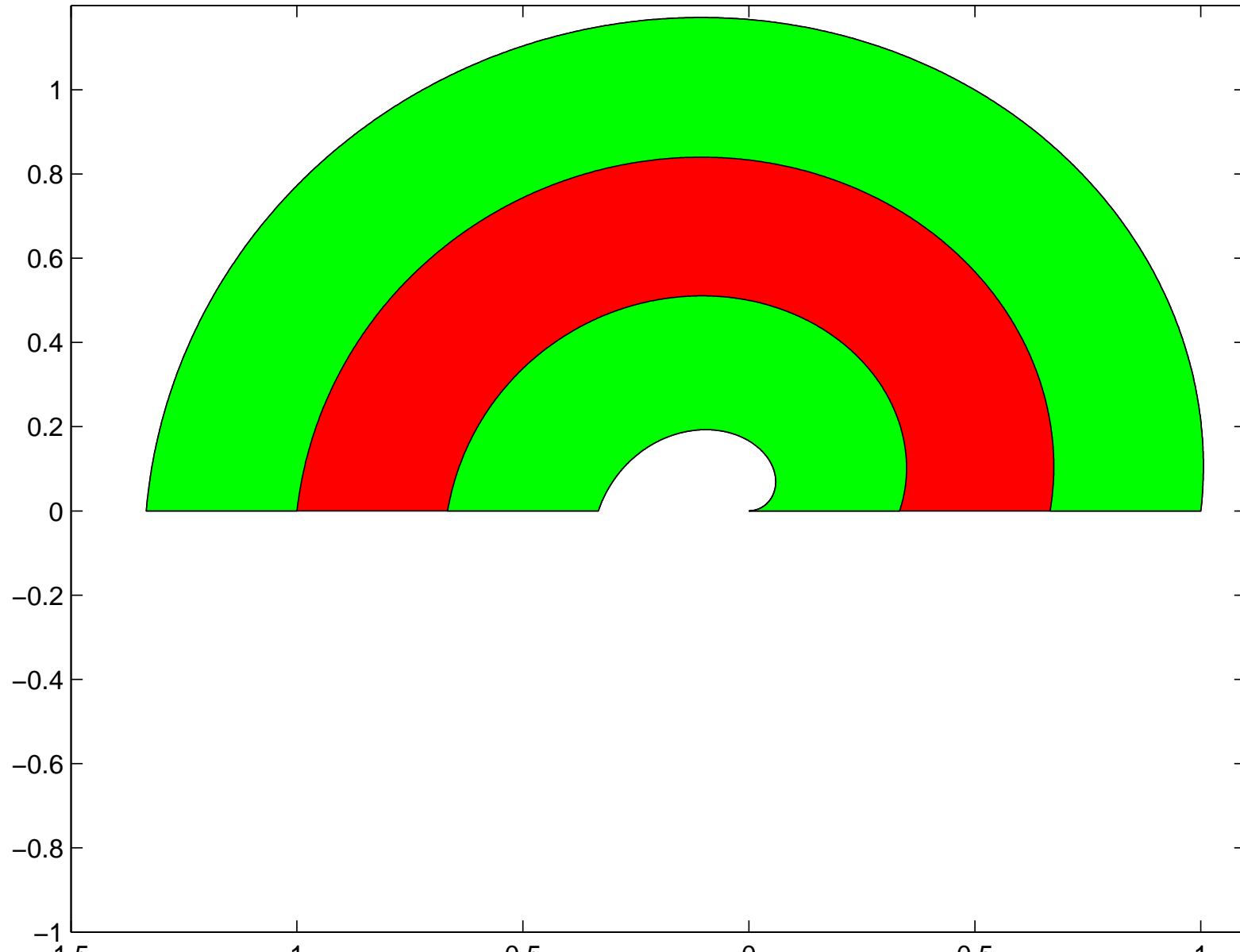
$\mathcal{V}_0$  in rood,  $\mathcal{V}_n \equiv \mathbf{f}(\mathcal{V}_{n-1}) \cap \mathcal{V}_{n-1}$  in groen,  $n = 1$



$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n) \text{ op } \mathbb{R}^2$$

$\mathbf{f}$ : samendrukken, uitrekken, oprollen

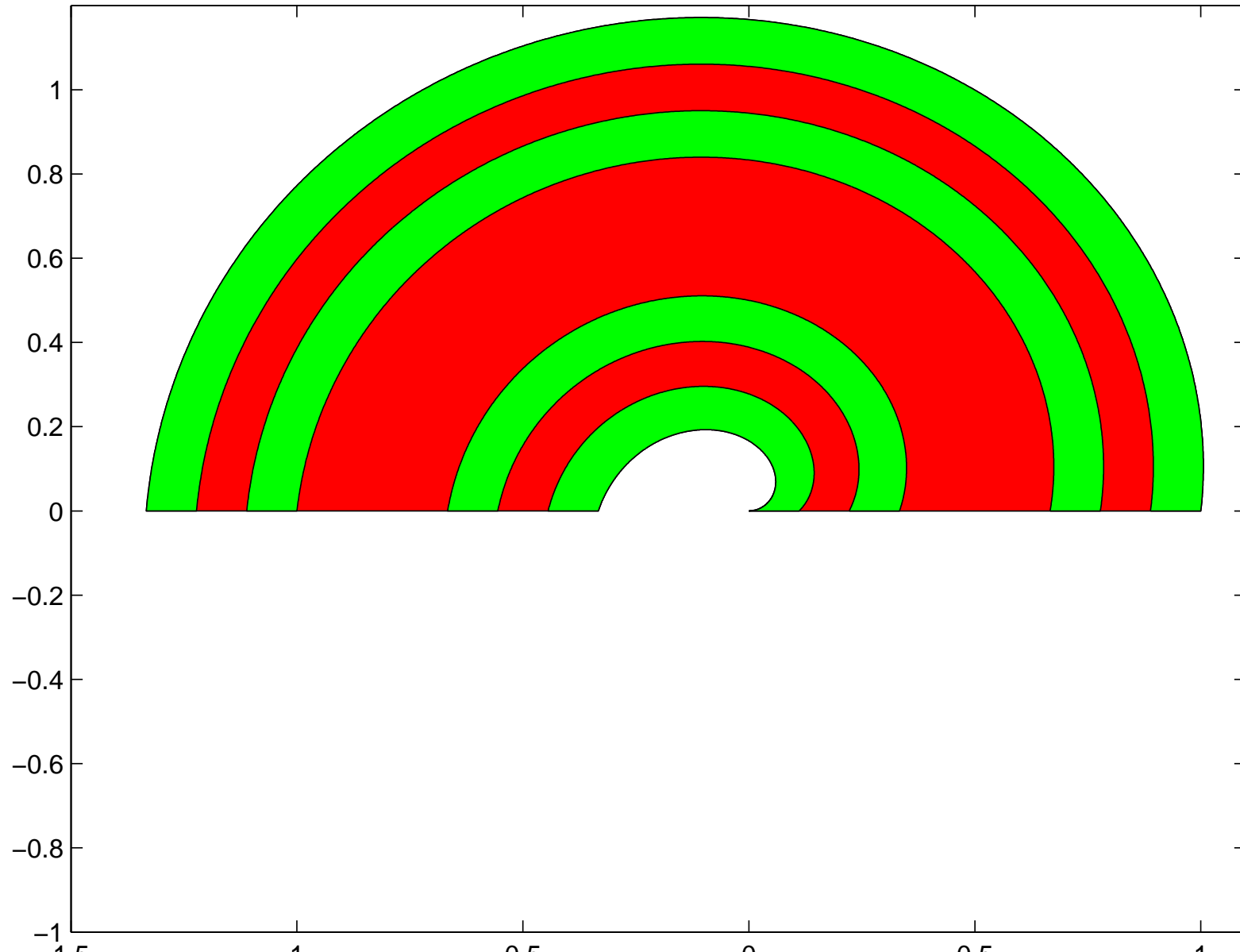
$\mathcal{V}_0$  in rood,  $\mathcal{V}_n \equiv \mathbf{f}(\mathcal{V}_{n-1}) \cap \mathcal{V}_{n-1}$  in groen, ( $n = 1$ ).



$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n) \text{ op } \mathbb{R}^2$$

$\mathbf{f}$ : samendrukken, uitrekken, oprollen

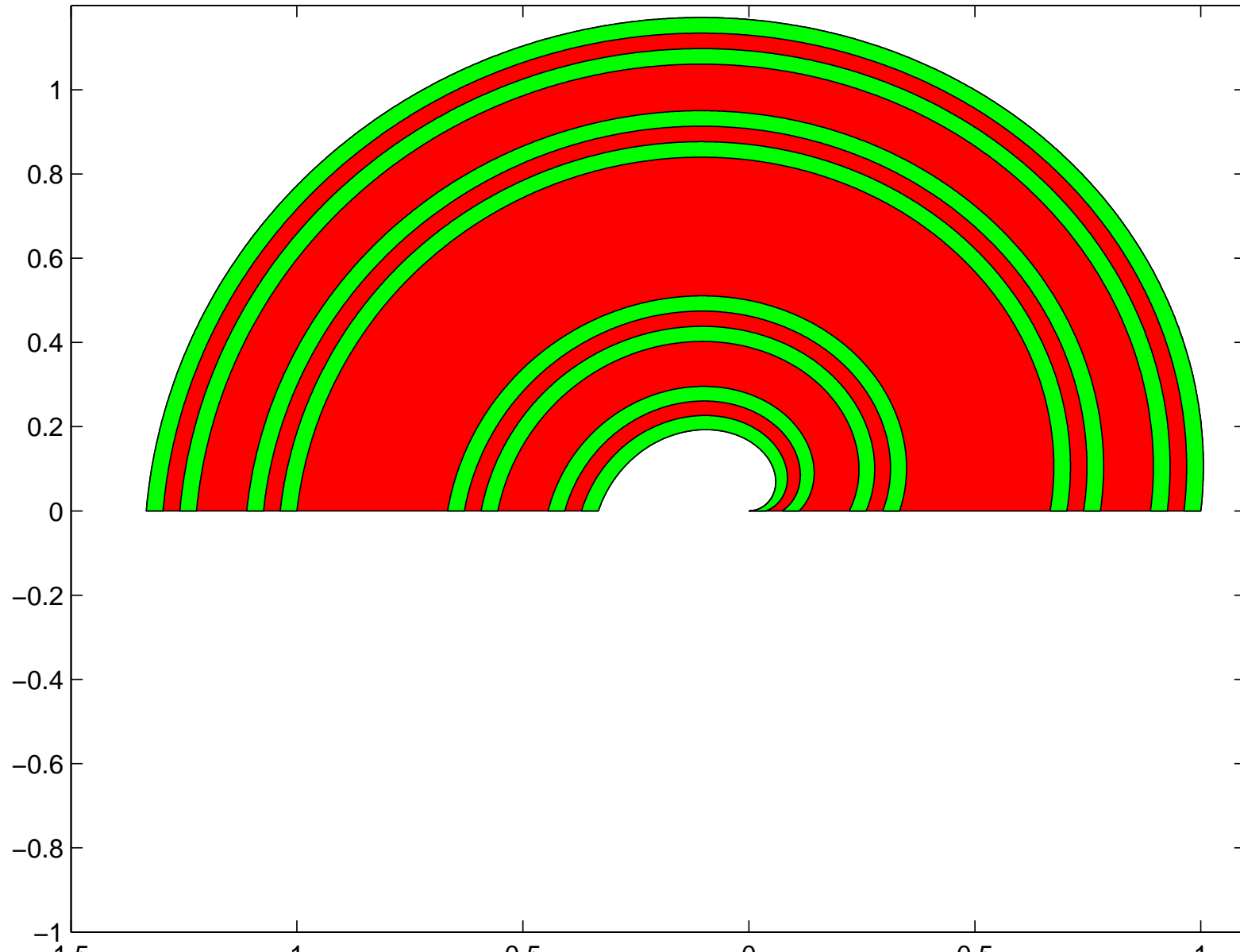
$\mathcal{V}_0$  in rood,  $\mathcal{V}_n \equiv \mathbf{f}(\mathcal{V}_{n-1}) \cap \mathcal{V}_{n-1}$  in groen, ( $n = 2$ ).



$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n) \text{ op } \mathbb{R}^2$$

$\mathbf{f}$ : samendrukken, uitrekken, oprollen

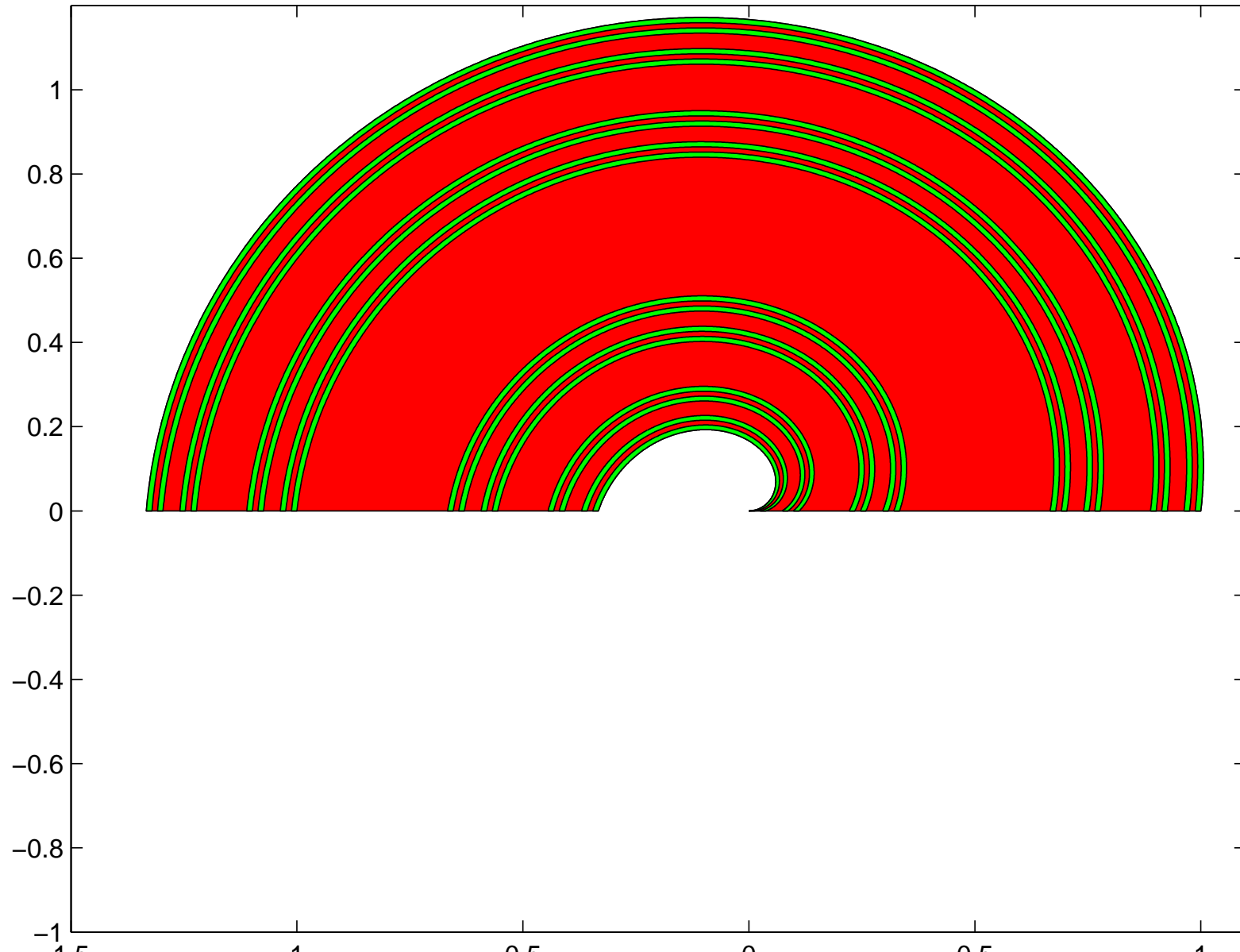
$\mathcal{V}_0$  in rood,  $\mathcal{V}_n \equiv \mathbf{f}(\mathcal{V}_{n-1}) \cap \mathcal{V}_{n-1}$  in groen, ( $n = 3$ ).



$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n) \text{ op } \mathbb{R}^2$$

$\mathbf{f}$ : samendrukken, uitrekken, oprollen

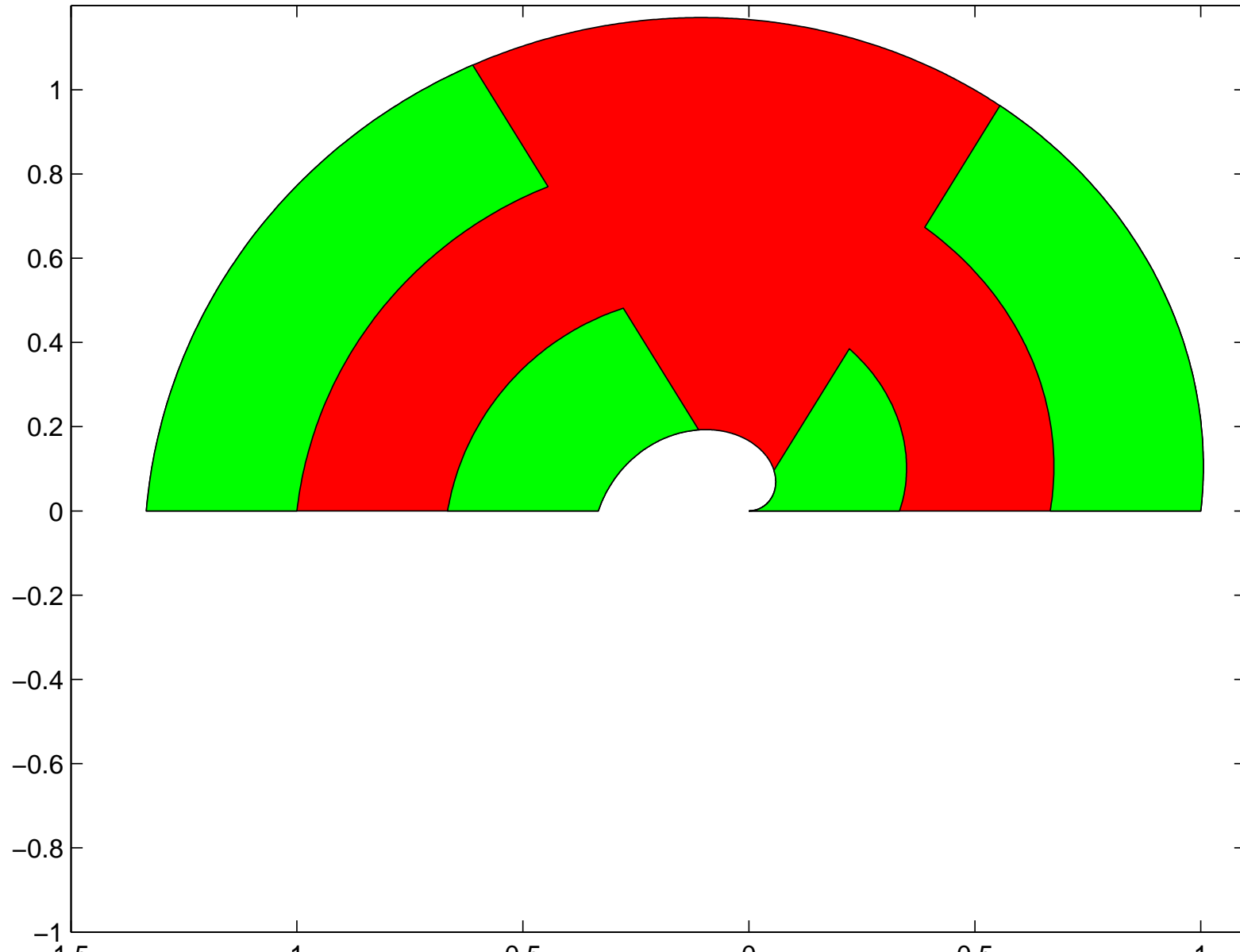
$\mathcal{V}_0$  in rood,  $\mathcal{V}_n \equiv \mathbf{f}(\mathcal{V}_{n-1}) \cap \mathcal{V}_{n-1}$  in groen, ( $n = 4$ ).



$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n) \text{ op } \mathbb{R}^2$$

$\mathbf{f}$ : samendrukken, uitrekken, oprollen

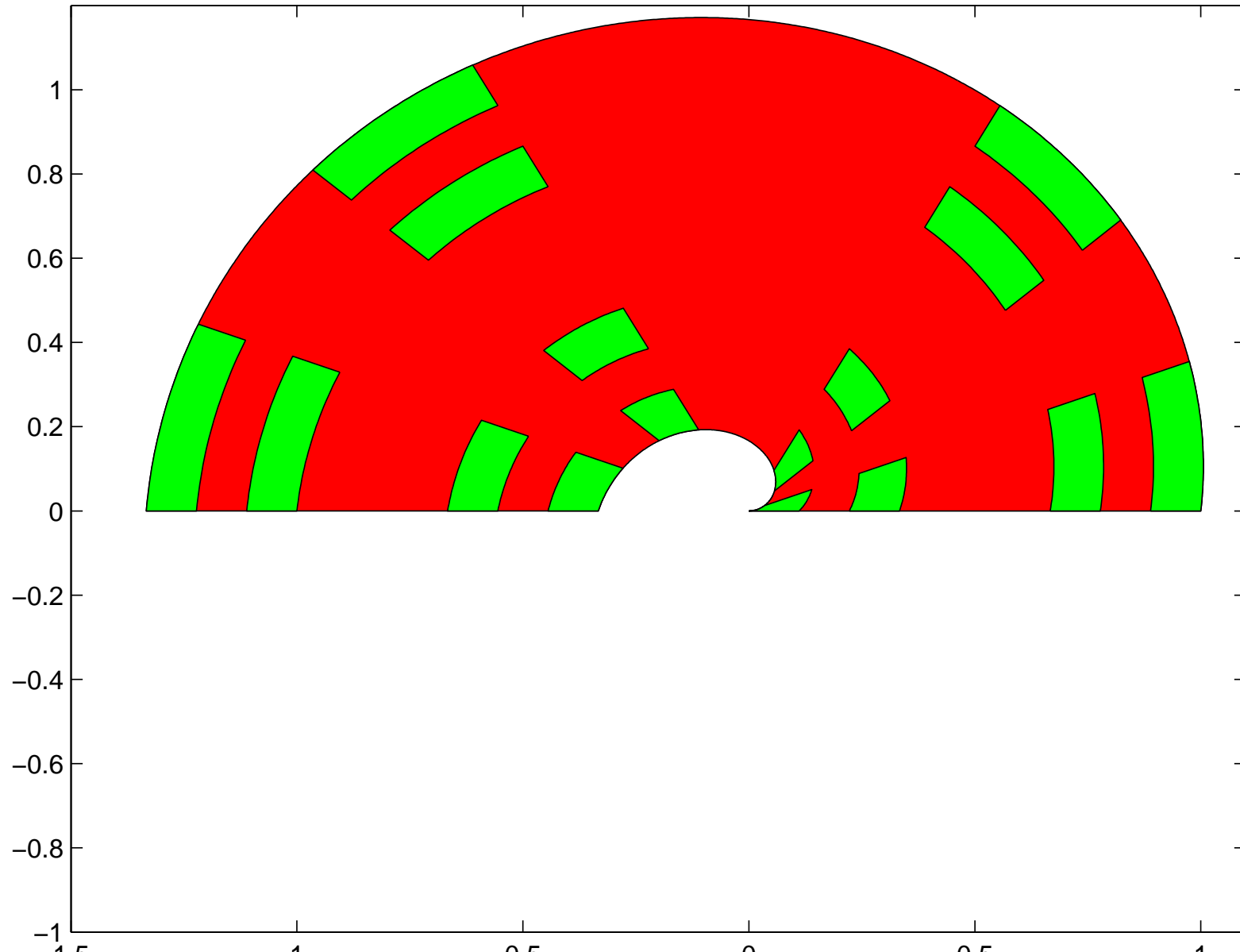
$\mathcal{V}_n \equiv \mathbf{f}^{-1}(\mathcal{V}_{n-1}) \cap \mathbf{f}(\mathcal{V}_{n-1}) \cap \mathcal{V}_{n-1}$  in groen, ( $n = 1$ ).



$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n) \text{ op } \mathbb{R}^2$$

$\mathbf{f}$ : samendrukken, uitrekken, oprollen

$\mathcal{V}_n \equiv \mathbf{f}^{-1}(\mathcal{V}_{n-1}) \cap \mathbf{f}(\mathcal{V}_{n-1}) \cap \mathcal{V}_{n-1}$  in groen, ( $n = 2$ ).

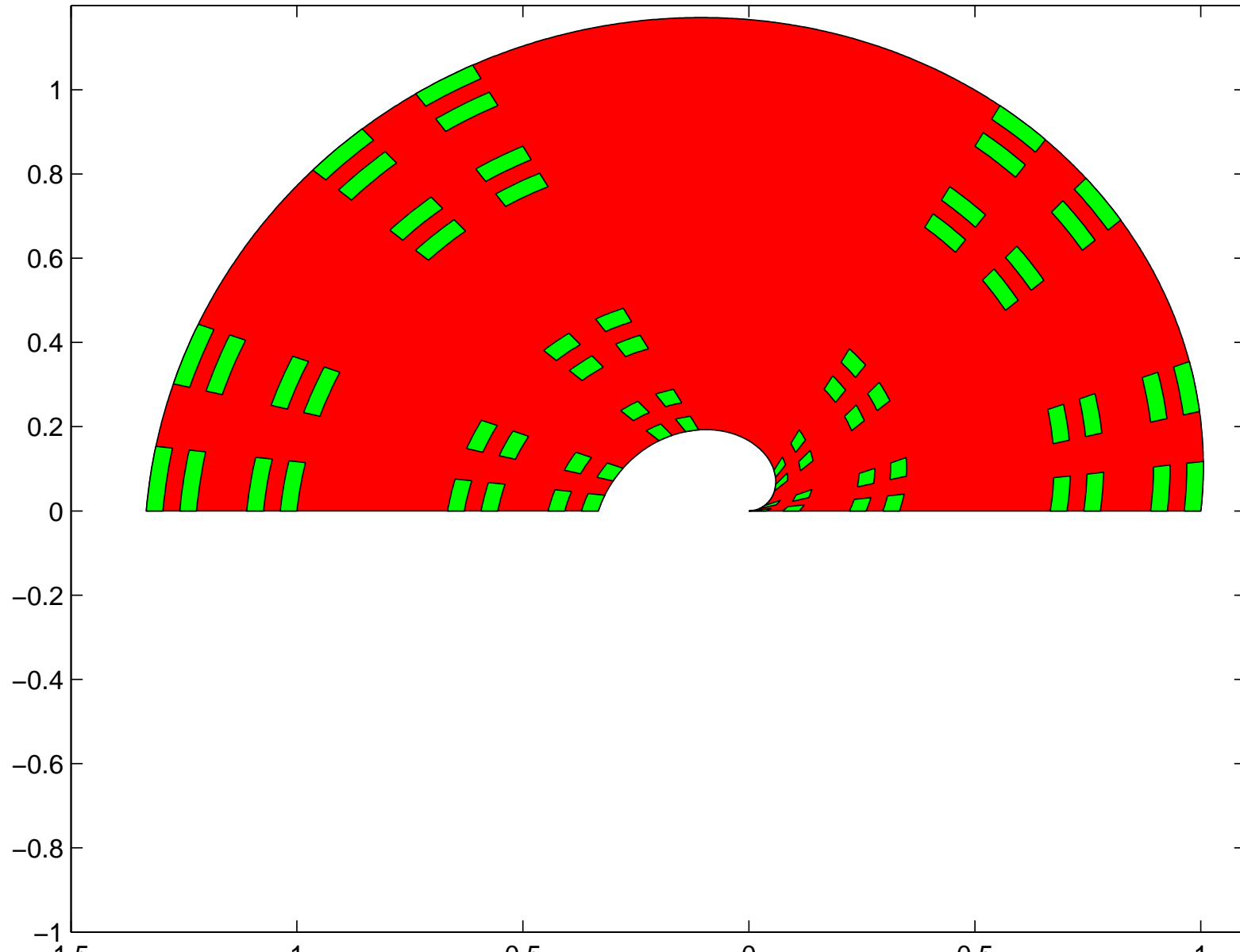




$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n) \text{ op } \mathbb{R}^2$$

$\mathbf{f}$ : samendrukken, uitrekken, oprollen

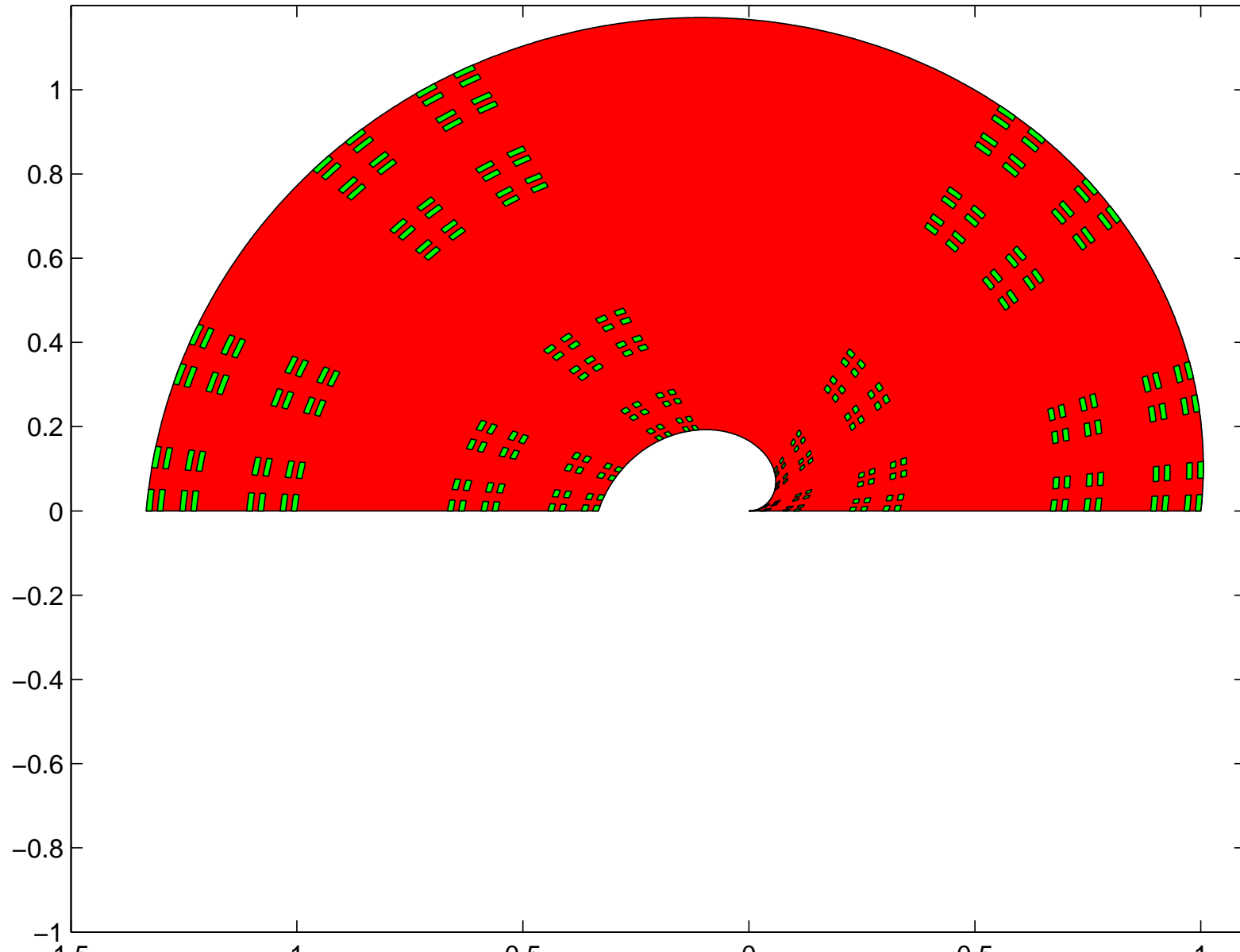
$\mathcal{V}_n \equiv \mathbf{f}^{-1}(\mathcal{V}_{n-1}) \cap \mathbf{f}(\mathcal{V}_{n-1}) \cap \mathcal{V}_{n-1}$  in groen, ( $n = 3$ ).



$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n) \text{ op } \mathbb{R}^2$$

$\mathbf{f}$ : samendrukken, uitrekken, oprollen

$\mathcal{V}_n \equiv \mathbf{f}^{-1}(\mathcal{V}_{n-1}) \cap \mathbf{f}(\mathcal{V}_{n-1}) \cap \mathcal{V}_{n-1}$  in groen, ( $n = 4$ ).



$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n)$$

Definieer de keten van verzamelingen  $\mathcal{V}_n$  door

$$\mathcal{V}_{n+1} \equiv \mathbf{f}^{-1}(\mathcal{V}_n) \cap \mathbf{f}(\mathcal{V}_n) \cap \mathcal{V}_n$$

Met

$$\mathcal{D} \equiv \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathcal{V}_n$$

geldt

$$\mathbf{f}(\mathcal{D}) = \mathcal{D}$$

### Voorbeeld.

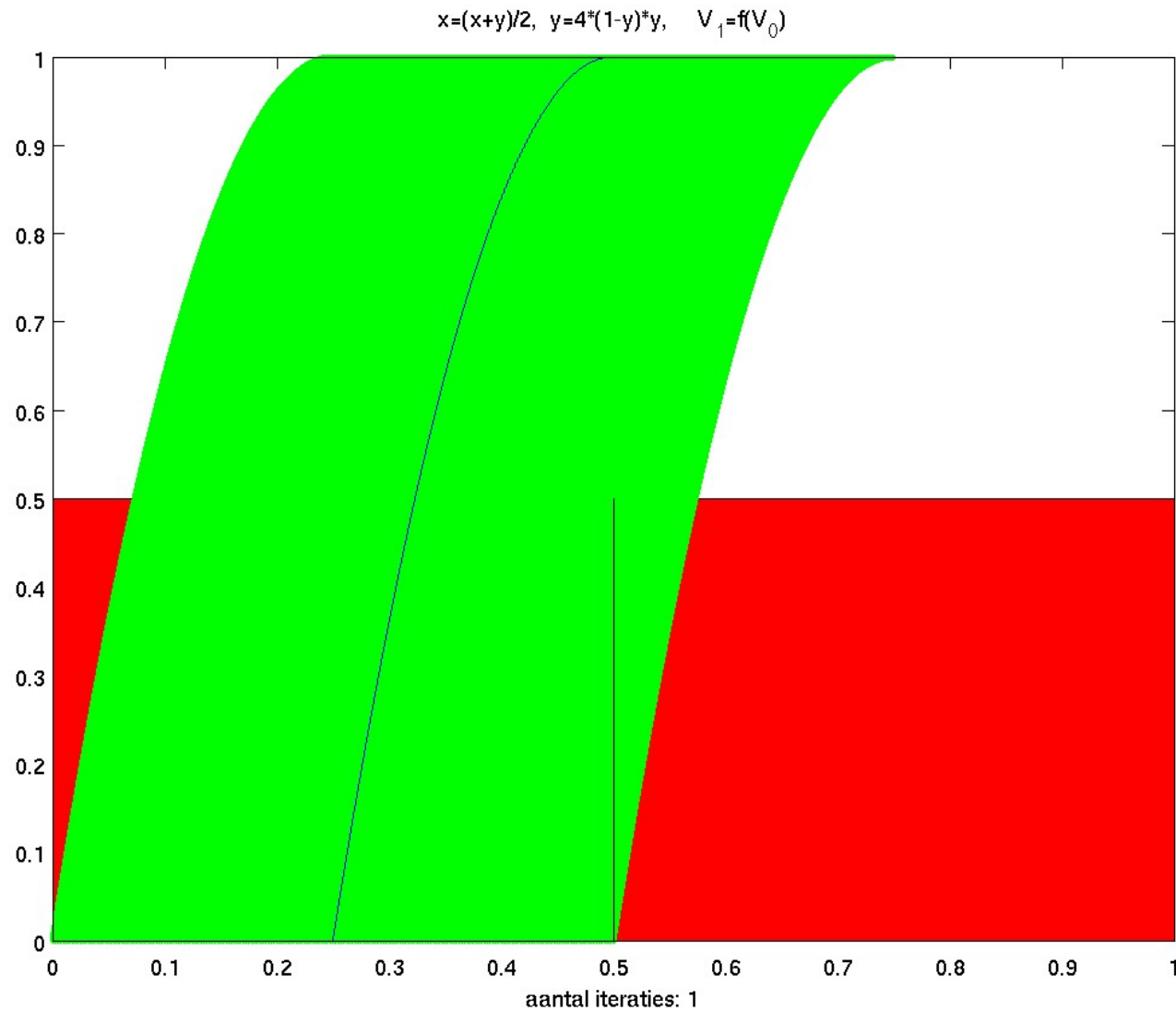
- $\mathcal{V}_0 \equiv \{r e^{\pi i \phi} \mid \phi \in [0, 1], r - \frac{1}{3}|\phi| \in [0, 1]\}$ ,  
en  $F(r e^{\pi i \phi}) \equiv (\frac{1}{3}r + \frac{8}{9}\phi) e^{3\pi i \phi}$ .
- $\mathcal{V}_0 \equiv \{(x, y) \mid x \in [0, 1], y \in [0, \frac{1}{2}]\}$   
en  $\mathbf{f}(x, y) \equiv ((x + y)/2, 4(1 - y)y)$ .

*(De plaatjes op de volgende transparanten voor deze iteratie)*

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n) \text{ op } \mathbb{R}^2$$

**f**: samendrukken, uitrekken, opvouwen

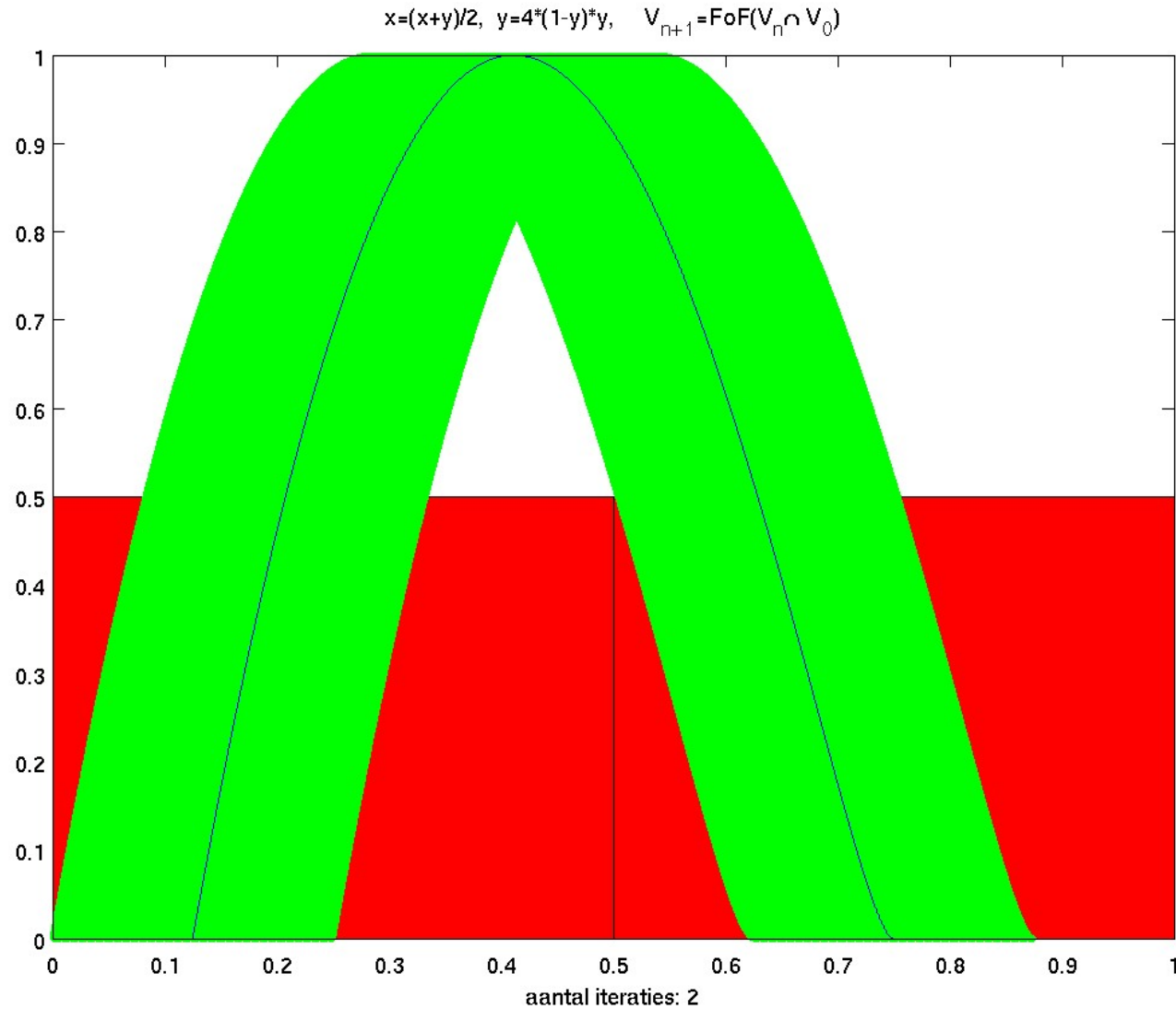
$\mathcal{V}_0$  in rood,  $\mathcal{V}_1 = \mathbf{f}(\mathcal{V}_0)$  in groen, ( $n = 1$ ).



$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n) \text{ op } \mathbb{R}^2$$

$\mathbf{f}$ : samendrukken, uitrekken, opvouwen

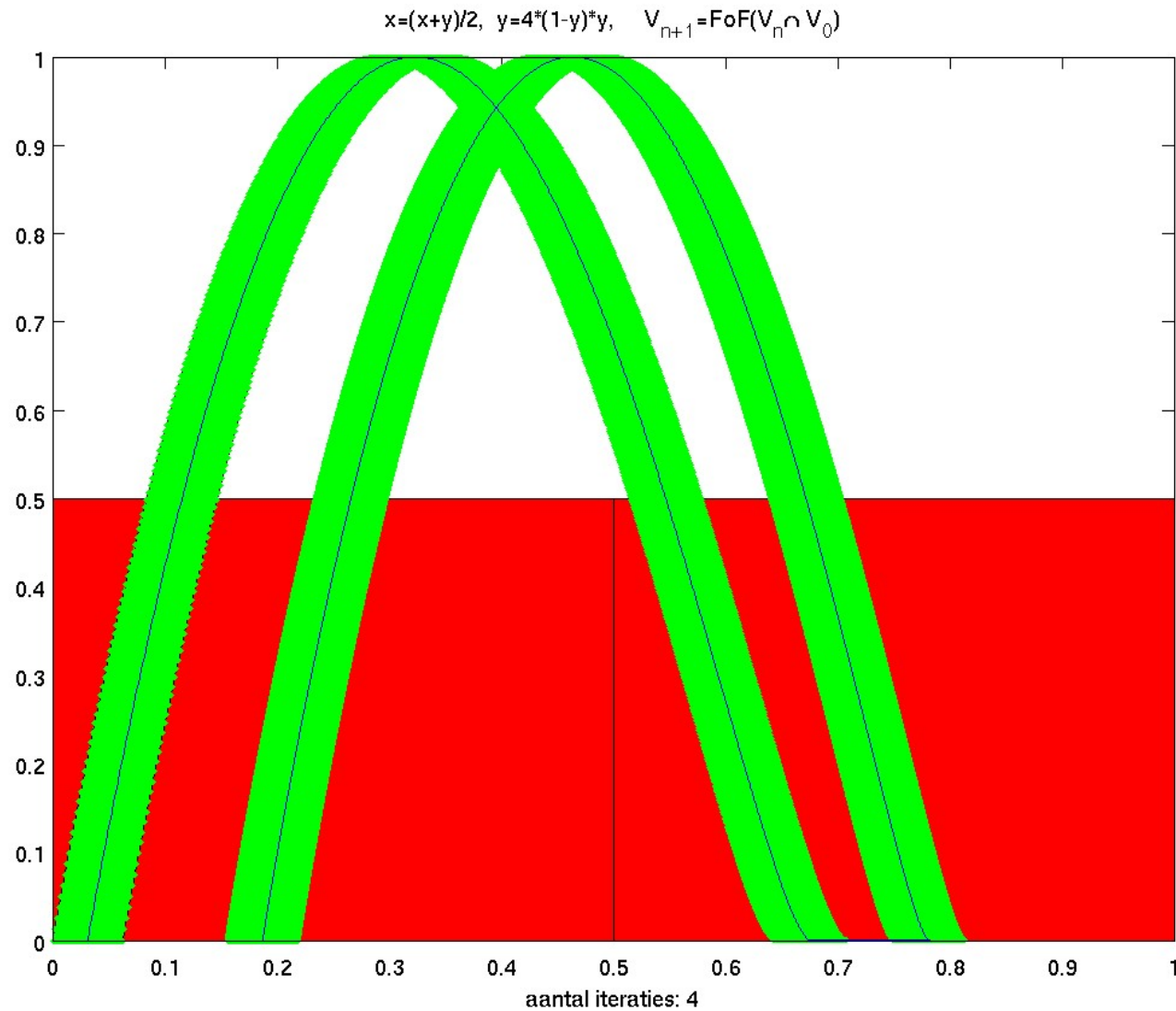
$\mathcal{V}_0$  in rood,  $\mathcal{V}_n = (\mathbf{f} \circ \mathbf{f})(\mathcal{V}_{n-2} \cap \mathcal{V}_0)$  in groen, ( $n = 2$ ).



$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n) \text{ op } \mathbb{R}^2$$

$\mathbf{f}$ : samendrukken, uitrekken, opvouwen

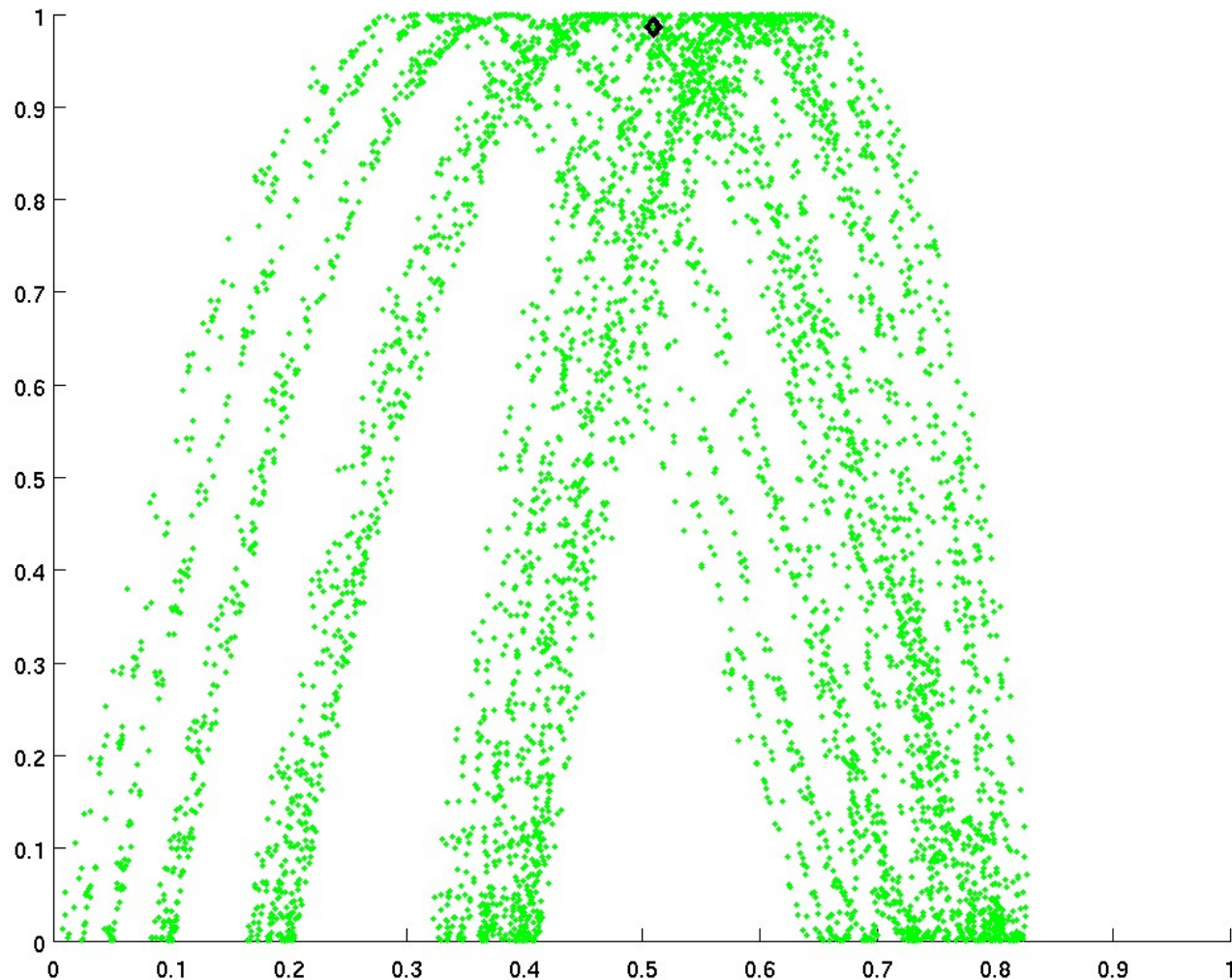
$\mathcal{V}_0$  in rood,  $\mathcal{V}_n = (\mathbf{f} \circ \mathbf{f})(\mathcal{V}_{n-2} \cap \mathcal{V}_0)$  in groen, ( $n = 4$ ).



$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n) \text{ op } \mathbb{R}^2$$

**f**: samendrukken, uitrekken, opvouwen

Voor  $(x_0, y_0) = (0.1, 0.1)$  is  $(x_0, y_0), \dots, (x_N, y_N)$  geplot.



$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n)$$

Definieer de keten van verzamelingen  $\mathcal{V}_n$  door

$$\mathcal{V}_{n+1} \equiv \mathbf{f}^{-1}(\mathcal{V}_n) \cap \mathbf{f}(\mathcal{V}_n) \cap \mathcal{V}_n$$

Met

$$\mathcal{D} \equiv \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathcal{V}_n$$

geldt

$$\mathbf{f}(\mathcal{D}) = \mathcal{D}$$

### Voorbeeld.

- $\mathbf{f}(x, y) = (\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y)$ .

Voor iedere  $\mathcal{V}_0$  die  $(0, 0)$  bevat is  $\mathcal{D} = \{(0, 0)\}$ :

geen Chaos of  $\mathcal{D}$ .

- $\mathbf{f}(x, y) = (x, y)$ .

Voor iedere  $\mathcal{V}_0$  is  $\mathcal{D} = \mathcal{V}_0$ : geen Chaos of  $\mathcal{D}$ .



$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n)$$

Definieer de keten van verzamelingen  $\mathcal{V}_n$  door

$$\mathcal{V}_{n+1} \equiv \mathbf{f}^{-1}(\mathcal{V}_n) \cap \mathbf{f}(\mathcal{V}_n) \cap \mathcal{V}_n$$

Met

$$\mathcal{D} \equiv \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathcal{V}_n$$

geldt

$$\mathbf{f}(\mathcal{D}) = \mathcal{D}$$

### Conclusie.

Als  $\mathbf{f}(\mathcal{V})$  in twee parallele stroken  $\mathcal{V}$  doorsnijdt, en als  $\ell$  een lijn is in  $\mathcal{V}$  en  $\mathbf{f}(\ell)$  als een hoefijzer om  $\ell$  ligt, dan

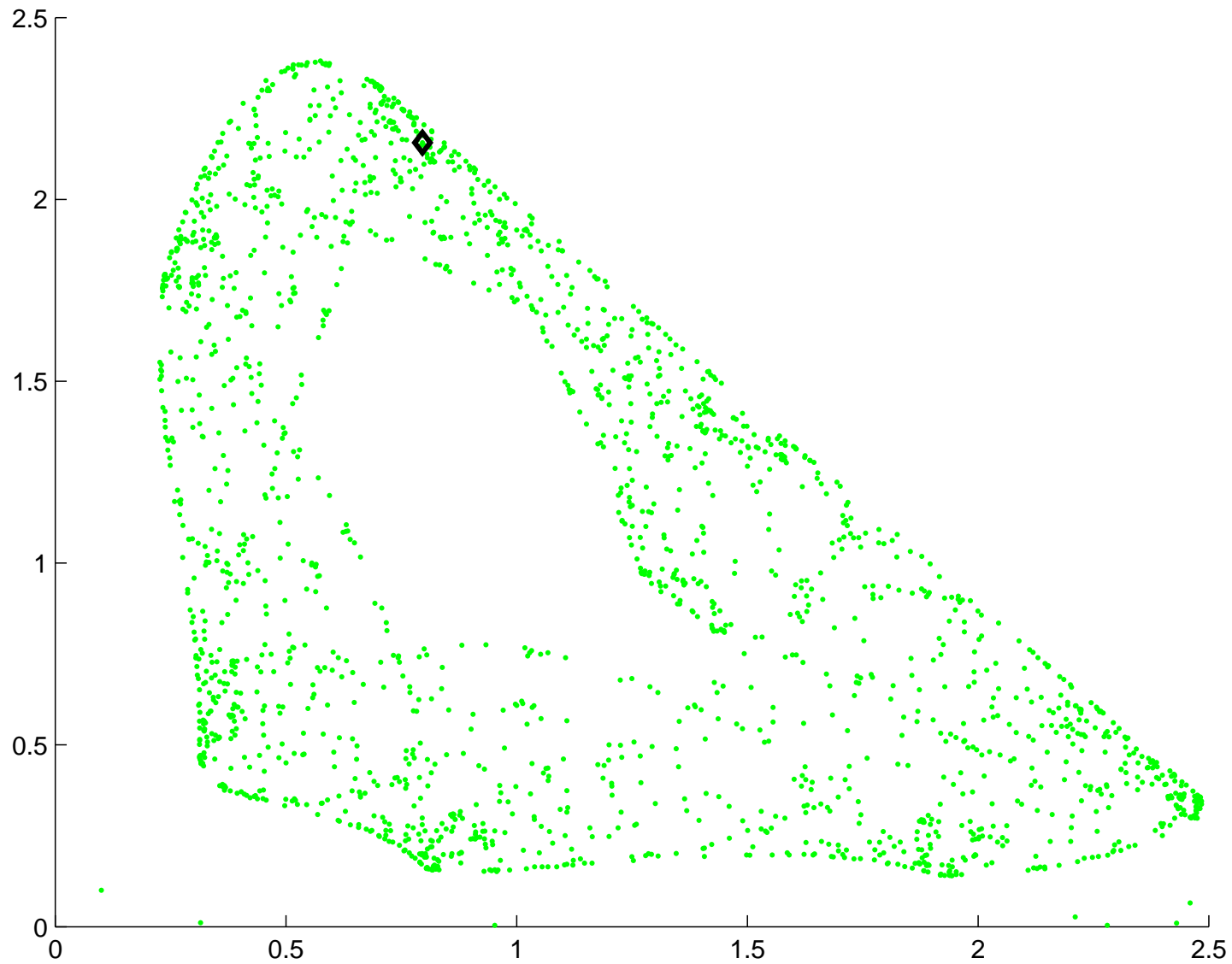
- is er een ‘Cantor achtige’ deelverzameling  $\mathcal{D}$  van  $\mathcal{V}$  met

$$\mathbf{f}(\mathcal{D}) = \mathcal{D}$$

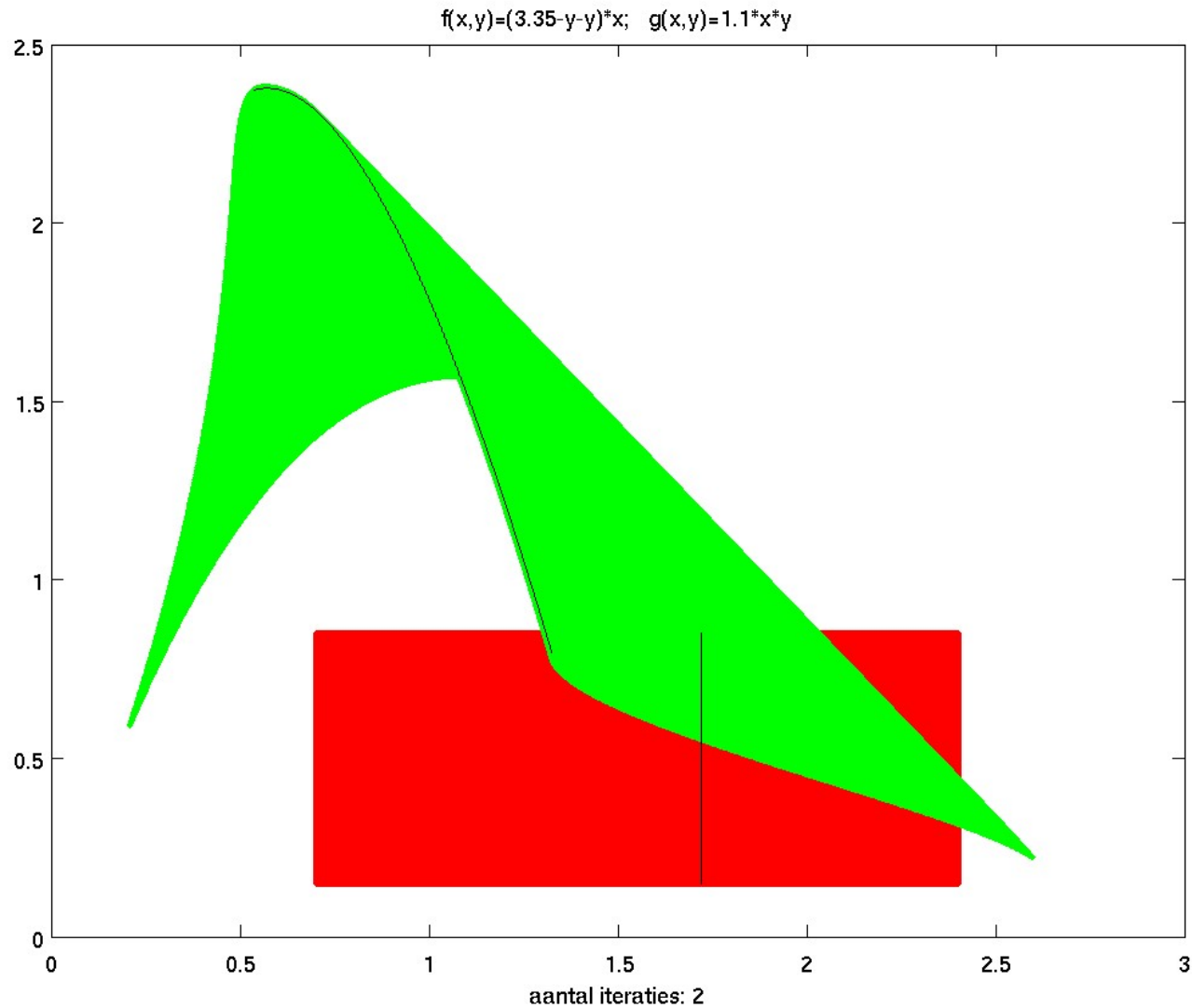
en

- het proces  $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n)$  is chaotisch op  $\mathcal{D}$ .

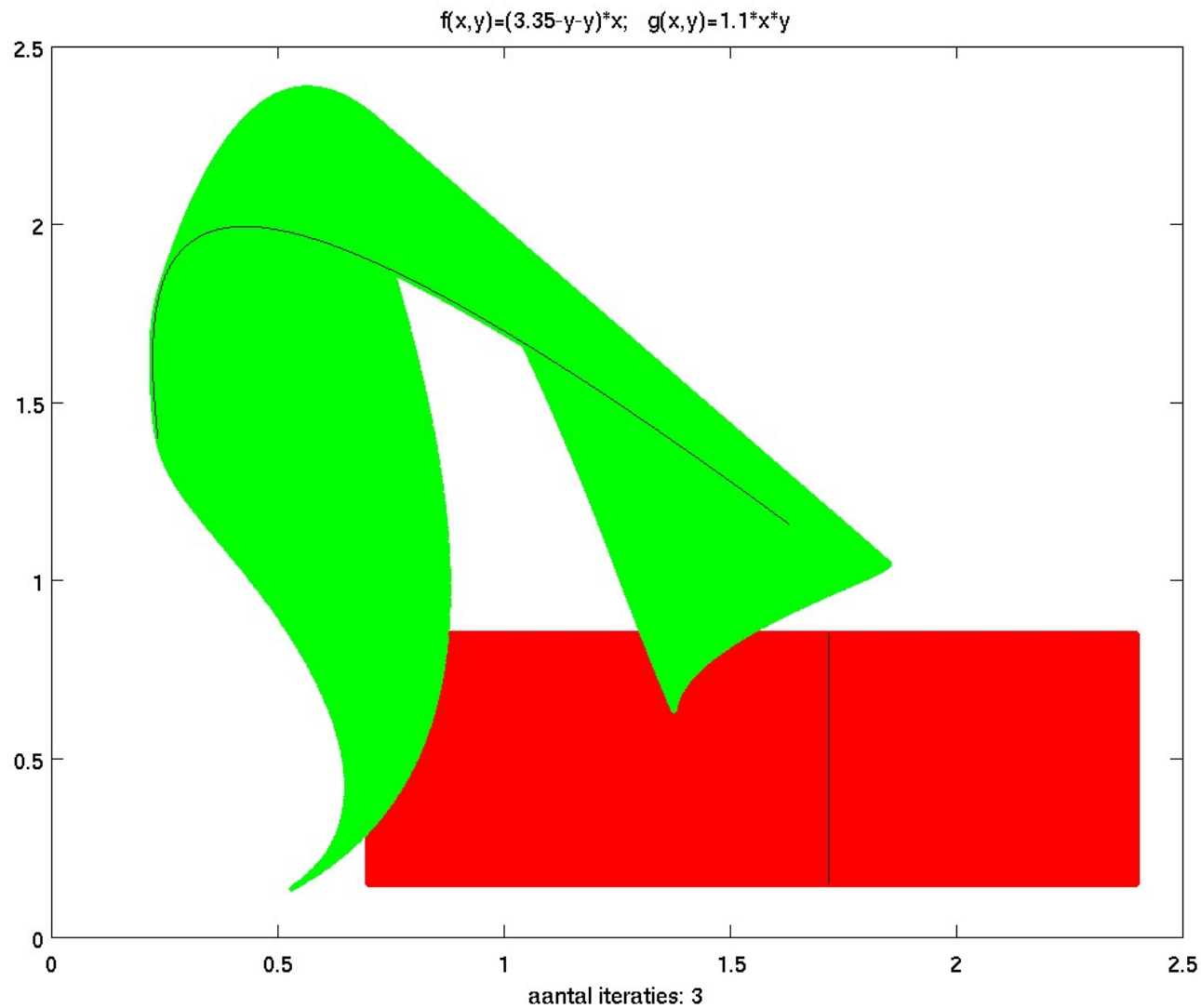
$$x_{n+1} = (3.35 - x_n - y_n)x_n, \quad y_{n+1} = 1.1 x_n y_n$$
  
Geplot  $(x_0, y_0), \dots, (x_N, y_N)$  voor een  $(x_0, y_0)$ .



$x_{n+1} = (3.35 - x_n - y_n)x_n, \quad y_{n+1} = 1.1 x_n y_n$   
Geplot  $(x_0, y_0)$  in rood en  $(x_2, y_2)$  in groen.



$x_{n+1} = (3.35 - x_n - y_n)x_n, \quad y_{n+1} = 1.1 x_n y_n$   
Geplot  $(x_0, y_0)$  in rood en  $(x_3, y_3)$  in groen.



$x_{n+1} = (3.35 - x_n - y_n)x_n, \quad y_{n+1} = 1.1 x_n y_n$   
Geplot  $(x_0, y_0)$  in rood en  $(x_7, y_7)$  in groen.

