

Utrecht, 29 mei 2013

Modellen en Simulatie

Gerard Sleijpen



Universiteit Utrecht
Department of Mathematics

<http://www.staff.science.uu.nl/~sleij101/>

Utrecht, 29 mei 2013

Modellen en Simulatie

Differentiaal- vergelijkingen

Gerard Sleijpen



Universiteit Utrecht
Department of Mathematics

<http://www.staff.science.uu.nl/~sleij101/>

N_n : aantal individuen eind tijdvak n .

Aanname [Malthus, 1798]:

in ieder tijdvak: fractie s sterft, fractie g geboren

Model. $N_{n+1} = N_n + g N_n - s N_n = \kappa N_n$
met $\kappa = 1 + g - s$, κ is de **groei**coëfficiënt

Oplossing. $N_n = (1 + g - s)^n N_0 = \kappa^n N_0$:
de groei is **exponentiël**

Bezwaren tegen het Malthus model

- groeicoëfficiënt kan afhangen van N_n ,
- groeicoëfficiënt kan afhangen van n ,
- groeicoëfficiënt kan afhangen van N_n, N_{n-1}, \dots
- groeicoëfficiënt kan beïnvloed worden door andere soorten,
- veranderingen kunnen optreden op elk tijdstip (tijdsvakgedachte niet houdbaar)
- groei kan plaats afhankelijk zijn
-

Bezwaren tegen het Malthus model

- groeicoëfficiënt kan afhangen van N_n ,
- groeicoëfficiënt kan afhangen van n ,
- groeicoëfficiënt kan afhangen van N_n, N_{n-1}, \dots
- groeicoëfficiënt kan beïnvloed worden door andere soorten,
- veranderingen kunnen optreden op elk tijdstip (tijdsvakgedachte niet houdbaar)
- groei kan plaats afhankelijk zijn
-

Program

- Continue modellen
- Voorbeeld
- Oplosmethoden
- Evenwicht, stabiliteit
- Discreet versus continue
- Terminologie
- Meer dimensionale eerste orde modellen
- Een dimensionale hogere orde modellen
- Resonantie
- Meer dimensionale eerste orde modellen, II

Program

- Continue modellen
- Voorbeeld
- Oplosmethoden
- Evenwicht, stabiliteit
- Discreet versus continue
- Terminologie
- Meer dimensionale eerste orde modellen
- Een dimensionale hogere orde modellen
- Resonantie
- Meer dimensionale eerste orde modellen, II

Continue modellen

Discrete modellen.

- Duidelijk tijdvak.

Binnen het tijdvak verandert de situatie niet echt.

Herten, vogels, zaadplanten, vlinders, scholen, nationaal inkomen, . . .

- Aantal individuen niet al te klein.

Ook discreet in geval periodieke waarneming “continu” systeem.

Continue modellen

- Veranderingen zijn niet gebonden aan een specifiek tijdvak.

Bacteriën, algen, mensen, . . .

concentratie giftige stof, . . .

veeldeeltjessystemen (gassen, vloeistoffen), . . .

bewegingen, . . .

- Aantal individuen zéér groot.

Program

- Continue modellen
- Voorbeeld
- Oplosmethoden
- Evenwicht, stabiliteit
- Discreet versus continue
- Terminologie
- Meer dimensionale eerste orde modellen
- Een dimensionale hogere orde modellen
- Resonantie
- Meer dimensionale eerste orde modellen, II

$q(t)$ hoeveelheid Co^{60} op tijdstip t .

Aanname:

$\text{Co}^{60} \rightarrow \text{Ni}^{60}$: Afname hoeveelheid Co^{60} is \approx evenredig met hoeveelheid materiaal en met tijdsduur (evenredigheid is beter als de tijdsduur korter is).

Modeleer: $q(t + \Delta t) - q(t) \approx -\alpha \Delta t q(t),$

met $\alpha > 0$ (bekend) & " $\approx \rightarrow =$ " als $\Delta t \rightarrow 0$.

$q(t)$ hoeveelheid Co^{60} op tijdstip t .

Aanname:

$\text{Co}^{60} \rightarrow \text{Ni}^{60}$: Afname hoeveelheid Co^{60} is \approx evenredig met hoeveelheid materiaal en met tijdsduur (evenredigheid is beter als de tijdsduur korter is).

Modeleer: $q(t + \Delta t) - q(t) \approx -\alpha \Delta t q(t)$,

met $\alpha > 0$ (bekend) & “ $\approx \rightarrow =$ ” als $\Delta t \rightarrow 0$.

Model. $q'(t) = -\alpha q(t)$ voor alle $t \geq 0$.

$q(t)$ hoeveelheid Co^{60} op tijdstip t .

Aanname:

$\text{Co}^{60} \rightarrow \text{Ni}^{60}$: Afname hoeveelheid Co^{60} is \approx evenredig met hoeveelheid materiaal en met tijdsduur (evenredigheid is beter als de tijdsduur korter is).

Modeleer: $q(t + \Delta t) - q(t) \approx -\alpha \Delta t q(t)$,

met $\alpha > 0$ (bekend) & “ $\approx \rightarrow =$ ” als $\Delta t \rightarrow 0$.

Model. $q'(t) = -\alpha q(t)$ voor alle $t \geq 0$.

Oplossing. $q(t) = q(0) e^{-\alpha t}$. Hangt af van $q(0)$.

$q(t)$ hoeveelheid Co^{60} op tijdstip t .

Aanname:

$\text{Co}^{60} \rightarrow \text{Ni}^{60}$: Afname hoeveelheid Co^{60} is \approx evenredig met hoeveelheid materiaal en met tijdsduur (evenredigheid is beter als de tijdsduur korter is).

Modeleer: $q(t + \Delta t) - q(t) \approx -\alpha \Delta t q(t)$,

met $\alpha > 0$ (bekend) & “ $\approx \rightarrow =$ ” als $\Delta t \rightarrow 0$.

Model. $q'(t) = -\alpha q(t)$ voor alle $t \geq 0$.

Oplossing. $q(t) = q(0) e^{-\alpha t}$. Hangt af van $q(0)$.

T (**halveringstijd**) zodat $q(T) = q(0)/2 \Rightarrow$

$$\alpha = \frac{\ln 2}{T} \quad \& \quad q(t) = q(0) \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}.$$

Model. $q'(t) = -\alpha q(t)$ voor alle $t \geq 0$. $q(0) = q_0$.

Oplossen

Scheid de variabelen: $\frac{q'(t)}{q(t)} = -\alpha$

Integreer: $\int_0^t \frac{q'(t)}{q(t)} dt = \int_0^t -\alpha dt$

Model. $q'(t) = -\alpha q(t)$ voor alle $t \geq 0$. $q(0) = q_0$.

Oplossen

Scheid de variabelen: $\frac{q'(t)}{q(t)} = -\alpha$

Integreer: $\int_0^t \frac{q'(t)}{q(t)} dt = \int_0^t -\alpha dt$

$$\int_0^t \frac{q'(t)}{q(t)} dt = \int_{q_0}^{q(t)} \frac{1}{q} dq = \ln \left(\frac{q(t)}{q_0} \right) = \int_0^t -\alpha dt = -\alpha t$$

$$\Rightarrow q(t) = q_0 e^{-\alpha t}$$

Program

- Continue modellen
- Voorbeeld
- Oplosmethoden
- Evenwicht, stabiliteit
- Discreet versus continue
- Terminologie
- Meer dimensionale eerste orde modellen
- Een dimensionale hogere orde modellen
- Resonantie
- Meer dimensionale eerste orde modellen, II

Scheiden van variabelen

Voorbeeld. $q'(t) = \frac{q(t)}{t^2 - 3t + 2}$ voor alle $t \geq t_0$. $q(t_0) = q_0$.

Scheid:
$$\frac{q'(t)}{q(t)} = \frac{1}{t^2 - 3t + 2} = \frac{1}{t - 2} - \frac{1}{t - 1}$$

Integreer:
$$\int_{t_0}^t \frac{q'(t)}{q(t)} dt = \int_{t_0}^t \frac{1}{t - 2} - \frac{1}{t - 1} dt$$

$$\int_{t_0}^t \frac{q'(t)}{q(t)} dt = \int_{q_0}^{q(t)} \frac{1}{q} dq = \ln \left(\frac{q(t)}{q_0} \right) =$$

$$\int_{t_0}^t \frac{1}{t - 2} - \frac{1}{t - 1} dt = \ln \left(\frac{t - 1}{t - 2} \cdot \frac{t_0 - 2}{t_0 - 1} \right)$$

$$\Rightarrow q(t) = q_0 \frac{t - 1}{t - 2} \frac{t_0 - 2}{t_0 - 1}$$

$q(t)$ concentratie gif (gr/m^3) in 'n meer op tijdstip t .

Volume meer: $V \text{ m}^3$.

Instroom: $v \text{ m}^3$ water per seconde (s) verontreinigd met l gram gif per m^3 water.

Uitstroom: $v \text{ m}^3$ water per seconde.

Aanname:

Verontreiniging verdeelt zich homogeen over het meer

Modeleer:

Verandering van de totale hoeveelheid gif (in gram) op tijdstip t in het meer gedurende Δt seconde:

$$\approx V \cdot (q(t + \Delta t) - q(t)).$$

Verandering door instroom: $= v l \Delta t$ gram

Verandering door uitstroom: $\approx -v q(t) \Delta t$ gram

$q(t)$ concentratie gif (gr/m^3) in 'n meer op tijdstip t .

Volume meer: $V \text{ m}^3$.

Instroom: $v \text{ m}^3$ water per seconde (s) verontreinigd met l gram gif per m^3 water.

Uitstroom: $v \text{ m}^3$ water per seconde.

Aanname:

Verontreiniging verdeelt zich homogeen over het meer

Modeleer: $V \cdot (q(t + \Delta t) - q(t)) \approx v l \Delta t - v q(t) \Delta t.$

$q(t)$ concentratie gif (gr/m^3) in 'n meer op tijdstip t .

Volume meer: $V \text{ m}^3$.

Instroom: $v \text{ m}^3$ water per seconde (s) verontreinigd met l gram gif per m^3 water.

Uitstroom: $v \text{ m}^3$ water per seconde.

Aanname:

Verontreiniging verdeelt zich homogeen over het meer

Modeleer: $V \cdot (q(t + \Delta t) - q(t)) \approx vl \Delta t - vq(t) \Delta t.$

Model: $q' = \frac{vl}{V} - \frac{v}{V}q = \frac{v}{V}(l - q) \quad \text{voor } t \geq 0.$

$q(t)$ concentratie gif (gr/m^3) in 'n meer op tijdstip t .

Volume meer: $V \text{ m}^3$.

Instroom: $v \text{ m}^3$ water per seconde (s) verontreinigd met l gram gif per m^3 water.

Uitstroom: $v \text{ m}^3$ water per seconde.

Aanname:

Verontreiniging verdeelt zich homogeen over het meer

Modeleer: $V \cdot (q(t + \Delta t) - q(t)) \approx vl \Delta t - vq(t) \Delta t.$

Model: $q' = \frac{vl}{V} - \frac{v}{V}q = \frac{v}{V}(l - q) \quad \text{voor } t \geq 0.$

Evenwicht als $q'(t) = 0 \quad \text{alle } t \quad (\Leftrightarrow \quad q = l).$

$q(t)$ concentratie gif (gr/m^3) in 'n meer op tijdstip t .

Volume meer: $V \text{ m}^3$.

Instroom: $v \text{ m}^3$ water per seconde (s) verontreinigd met l gram gif per m^3 water.

Uitstroom: $v \text{ m}^3$ water per seconde.

Aanname:

Verontreiniging verdeelt zich homogeen over het meer

Modeleer: $V \cdot (q(t + \Delta t) - q(t)) \approx vl \Delta t - vq(t) \Delta t.$

Model: $q' = \frac{vl}{V} - \frac{v}{V}q = \frac{v}{V}(l - q) \quad \text{voor } t \geq 0.$

Evenwicht als $q'(t) = 0 \quad \text{alle } t \quad (\Leftrightarrow \quad q = l).$

Algemene oplossing: $q(t) = (q(0) - l)e^{-\alpha t} + l$ met $\alpha \equiv \frac{v}{V}$

Model. $q'(t) = -\alpha (q(t) - \beta)$ voor alle $t \geq 0$, $q(0) = q_0$.

Oplossen

Scheid de variabelen: $\frac{q'(t)}{q(t) - \beta} = -\alpha$

Integreer: $\int_0^t \frac{q'(t)}{q(t) - \beta} dt = \int_0^t -\alpha dt$

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{q'(t)}{q(t) - \beta} dt &= \int_{q_0}^{q(t)} \frac{1}{q - \beta} dq = \ln \left(\frac{q(t) + \beta}{q_0 - \beta} \right) \\ &= \int_0^t -\alpha dt = -\alpha t \end{aligned}$$

$$\Rightarrow q(t) = (q_0 - \beta) e^{-\alpha t} + \beta$$

Model. $q'(t) = -\alpha q(t) + \alpha t + 1$ voor alle $t \geq 0$.

Oplossen

Scheid de variabelen: **????**

Model. $q'(t) = -\alpha q(t) + \alpha t + 1$ voor alle $t \geq 0$.

Lineaire differentiaalvergelijking

Homogeen (= lineair) **deel**:

$$q'(t) = -\alpha q(t)$$

met oplossing $q(t) = C e^{-\alpha t}$

Model. $q'(t) = -\alpha q(t) + \alpha t + 1$ voor alle $t \geq 0$.

Lineaire differentiaalvergelijking

Homogeen (= lineair) **deel**:

$$q'(t) = -\alpha q(t)$$

met oplossing $q(t) = C e^{-\alpha t}$

Inhomogeen deel: $\alpha t + 1$.

Model. $q'(t) = -\alpha q(t) + \alpha t + 1$ voor alle $t \geq 0$.

Lineaire differentiaalvergelijking

Homogeen (= lineair) **deel**:

$$q'(t) = -\alpha q(t)$$

met oplossing $q(t) = C e^{-\alpha t}$

Inhomogeen deel: $\alpha t + 1$.

Oplosmethode.

- Vind 'n **particulier** oplossing, bv., $q(t) = t$.
- Los het homogene deel op: $q(t) = C e^{-\alpha t}$
- De algemene oplossing is $t + C e^{-\alpha t}$.

Model. $q'(t) = -\alpha q(t) + \alpha t + 1$ voor alle $t \geq 0$.

Lineaire differentiaalvergelijking

Homogeen (= lineair) **deel**:

$$q'(t) = -\alpha q(t)$$

met oplossing $q(t) = C e^{-\alpha t}$

Inhomogeen deel: $\alpha t + 1$.

Oplosmethode.

- Vind 'n **particulier** oplossing, bv., $q(t) = t$.
- Los het homogene deel op: $q(t) = C e^{-\alpha t}$
- De algemene oplossing is $t + C e^{-\alpha t}$.

$$q'(t) = -\alpha q(t) + r(t) \quad \text{voor alle } t \geq 0$$

Lineaire differentiaalvergelijking

Homogeen (= lineair) **deel**:

$$q'(t) = -\alpha q(t)$$

met oplossing $q(t) = C e^{-\alpha t}$

Inhomogeen deel: $r(t)$.

Oplosmethode.

- Vind 'n **particuliere** oplossing, zeg q_{part} .
- Los het homogene deel op: $q_{\text{hom}}(t) = C e^{-\alpha t}$
- De algemene oplossing q is $q = q_{\text{part}} + q_{\text{hom}}$.

De constante C wordt bepaald door de **beginwaarde** q_0 , dat is de waarde van q op het begintijdstip.

$$q'(t) = -\alpha q(t) + r(t) \quad \text{voor alle } t \geq 0$$

Lineaire differentiaalvergelijking

Los het homogene deel op:

$$q_{\text{hom}}(t) = C q_h(t) \quad \text{met} \quad q_h(t) = e^{-\alpha t}.$$

Vind 'n particuliere oplossing.

$$q'(t) = -\alpha q(t) + r(t) \quad \text{voor alle } t \geq 0 \quad .$$

Lineaire differentiaalvergelijking

Los het homogene deel op:

$$q_{\text{hom}}(t) = C q_h(t) \quad \text{met} \quad q_h(t) = e^{-\alpha t}.$$

‘Varieer de constante’, dat wil zeggen,
zoek een (particuliere) oplossing van de vorm

$$q(t) = C(t) q_h(t) \quad \text{met} \quad q_h(t) = e^{-\alpha t} \quad (q'_h = -\alpha q_h)$$

$$q'(t) = -\alpha q(t) + r(t) \quad \text{voor alle } t \geq 0$$

Lineaire differentiaalvergelijking

Los het homogene deel op:

$$q_{\text{hom}}(t) = C q_h(t) \quad \text{met} \quad q_h(t) = e^{-\alpha t}.$$

‘Varieer de constante’, dat wil zeggen,
zoek een (particuliere) oplossing van de vorm

$$q(t) = C(t) q_h(t) \quad \text{met} \quad q_h(t) = e^{-\alpha t} \quad (q_h' = -\alpha q_h)$$

$$q'(t) = C'(t) q_h(t) + C(t) q_h'(t) = -\alpha C(t) q_h(t) + r(t)$$

$$\Rightarrow C'(t) q_h(t) = r(t) \quad \Rightarrow C'(t) = r(t) e^{\alpha t}$$

$$\Rightarrow C(t) = \int_0^t r(t) e^{\alpha t} dt \quad \Rightarrow q_{\text{part}}(t) = C(t) q_h(t).$$

Voorbeeld. $q' = tq + 2t$

Voorbeeld. $q' = tq + 2t$

• Los homogeen deel op: $q' = tq$

$$\Rightarrow \frac{q'}{q} = t \Rightarrow q_{\text{hom}} = C \exp\left(\frac{1}{2}t^2\right).$$

Voorbeeld. $q' = tq + 2t$

• Los homogeen deel op: $q' = tq$

$$\Rightarrow \frac{q'}{q} = t \Rightarrow q_{\text{hom}} = C \exp\left(\frac{1}{2}t^2\right).$$

• Varieer constante om 'n particuliere oplossing te vinden:

probeer $q_{\text{part}}(t) = C(t) \exp\left(\frac{1}{2}t^2\right)$

$$\Rightarrow C'(t) \exp\left(\frac{1}{2}t^2\right) = 2t \Rightarrow C'(t) = 2t \exp\left(-\frac{1}{2}t^2\right)$$

$$\Rightarrow C(t) = -2 \exp\left(-\frac{1}{2}t^2\right)$$

Voorbeeld. $q' = tq + 2t$

• Los homogeen deel op: $q' = tq$

$$\Rightarrow \frac{q'}{q} = t \Rightarrow q_{\text{hom}} = C \exp\left(\frac{1}{2}t^2\right).$$

• Varieer constante om 'n particuliere oplossing te vinden:

probeer $q_{\text{part}}(t) = C(t) \exp\left(\frac{1}{2}t^2\right)$

$$\Rightarrow C'(t) \exp\left(\frac{1}{2}t^2\right) = 2t \Rightarrow C'(t) = 2t \exp\left(-\frac{1}{2}t^2\right)$$

$$\Rightarrow C(t) = -2 \exp\left(-\frac{1}{2}t^2\right)$$

• De algemene oplossing is:

$$-2 \exp\left(-\frac{1}{2}t^2\right) \exp\left(\frac{1}{2}t^2\right) + C \exp\left(\frac{1}{2}t^2\right) = -2 + C \exp\left(\frac{1}{2}t^2\right)$$

Voorbeeld. Voor $\alpha, \beta > 0$, $q' = -\alpha q + e^{-\beta t}$

• Los homogeen deel op: $q' = -\alpha q$

$$\Rightarrow q_{\text{hom}} = C e^{-\alpha t}.$$

• Varieer constante om 'n particuliere oplossing te vinden:

probeer $q_{\text{part}}(t) = C(t) e^{-\alpha t}$

$$\Rightarrow C'(t) e^{-\alpha t} = e^{-\beta t} \quad \Rightarrow \quad C'(t) = e^{(\alpha-\beta)t}$$

$$\Rightarrow C(t) = \frac{1}{\alpha-\beta} e^{(\alpha-\beta)t}$$

• De algemene oplossing is:

$$\frac{1}{\alpha-\beta} e^{(\alpha-\beta)t} e^{-\alpha t} + C e^{-\alpha t} = \frac{1}{\alpha-\beta} e^{-\beta t} + C e^{-\alpha t}$$

Voorbeeld. Voor $\alpha, \beta > 0$, $q' = -\alpha q + e^{-\beta t}$

Alternatief. Probeer

$$q_{\text{part}}(t) = q(t) = \gamma e^{-\beta t}$$

voor een geschikte (nader te bepalen) constante γ .

Invullen levert:

$$-\beta\gamma e^{-\beta t} = -\alpha\gamma e^{-\beta t} + e^{-\beta t}$$

Dus

$$\gamma = \frac{1}{\alpha - \beta}$$

Voorbeeld. Voor $\alpha > 0, \nu \in \mathbb{R}$, $q' = -\alpha q + \cos(\nu t)$ (*)

Varieer constante om particuliere oplossing te vinden.

Alternatief. Er is 'n oplossing van de vorm

$$q_{\text{part}}(t) = a \cos(\nu t) + b \sin(\nu t).$$

Vul in, in (*), en vind a en b .

Voor details, zie dictaat.

Voorbeeld. Voor $\alpha > 0, \nu \in \mathbb{R}$, $q' = -\alpha q + \cos(\nu t)$ (*)

Handigere variant. Merk op dat

$$r e^{i\nu t} = r \cos(\nu t) + ir \sin(\nu t): \quad r \cos(\nu t) = \operatorname{Re}(r e^{i\nu t}).$$

Bewering. Als $\tilde{q}' = -\alpha \tilde{q} + e^{i\nu t}$

dan is $q(t) \equiv \operatorname{Re}(\tilde{q}(t))$ een oplossing van (*).

Complexe getallen

$\lambda = a + ib \in \mathbb{C}$ dan is $a = \operatorname{Re}(\lambda)$ en $b = \operatorname{Im}(\lambda)$.

$$a + ib = r e^{i\phi}, \quad a = \frac{1}{2}(\lambda + \bar{\lambda}), \quad b = \frac{1}{2i}(\lambda - \bar{\lambda})$$

voor $r = \sqrt{a^2 + b^2} = |\lambda| \geq 0$ en

$\phi \in [0, 2\pi)$ zodat $a = r \cos(\phi)$, $b = r \sin(\phi)$ ($\tan(\phi) = \frac{b}{a}$)

$\lambda, \zeta \in \mathbb{C}$. Dan $\overline{\lambda\zeta} = \bar{\lambda}\bar{\zeta}$, $\overline{\lambda + \zeta} = \bar{\lambda} + \bar{\zeta}$

$a, b \in \mathbb{R}$, $\lambda = r e^{i\phi} \in \mathbb{C}$. Dan

$$\operatorname{Re}(\lambda(a + ib)) = r \cos(\phi) a - r \sin(\phi) b.$$

$\alpha, \beta, a, b \in \mathbb{R}$. Dan

$$\alpha a - \beta b = \operatorname{Re}(\gamma z) \quad \text{voor} \quad \gamma \equiv \alpha + i\beta, \quad z \equiv a + ib$$

Voorbeeld. Voor $\alpha > 0, \nu \in \mathbb{R}$, $q' = -\alpha q + \cos(\nu t)$ (*)

Handigere variant. Merk op dat

$$r e^{i\nu t} = r \cos(\nu t) + ir \sin(\nu t): \quad r \cos(\nu t) = \operatorname{Re}(r e^{i\nu t}).$$

Bewering. Als $\tilde{q}' = -\alpha \tilde{q} + e^{i\nu t}$

dan is $q(t) \equiv \operatorname{Re}(\tilde{q}(t))$ een oplossing van (*).

Probeer $\tilde{q}(t) = \gamma e^{i\nu t}$ met $\gamma = a + ib \in \mathbb{C}$ en $a, b \in \mathbb{R}$.

Voorbeeld. Voor $\alpha > 0, \nu \in \mathbb{R}$, $q' = -\alpha q + \cos(\nu t)$ (*)

Handigere variant. Merk op dat

$$r e^{i\nu t} = r \cos(\nu t) + ir \sin(\nu t): \quad r \cos(\nu t) = \operatorname{Re}(r e^{i\nu t}).$$

Bewering. Als $\tilde{q}' = -\alpha \tilde{q} + e^{i\nu t}$

dan is $q(t) \equiv \operatorname{Re}(\tilde{q}(t))$ een oplossing van (*).

Probeer $\tilde{q}(t) = \gamma e^{i\nu t}$ met $\gamma = a + ib \in \mathbb{C}$ en $a, b \in \mathbb{R}$.

$$i\nu\gamma e^{i\nu t} = -\alpha\gamma e^{i\nu t} + e^{i\nu t} \quad \Rightarrow \quad i\nu\gamma = -\alpha\gamma + 1$$

$$\Rightarrow \gamma = \frac{1}{\alpha + i\nu} = \frac{\alpha - i\nu}{\alpha^2 + \nu^2}$$

$$\begin{aligned} q_{\text{part}}(t) &= \frac{1}{\alpha^2 + \nu^2} \operatorname{Re}(\alpha e^{i\nu t}) - \frac{1}{\alpha^2 + \nu^2} \operatorname{Re}(i\nu e^{i\nu t}) \\ &= \frac{\alpha}{\alpha^2 + \nu^2} \cos(\nu t) + \frac{\nu}{\alpha^2 + \nu^2} \sin(\nu t) \end{aligned}$$

Voorbeeld. Voor $\alpha > 0, \nu \in \mathbb{R}$, $q' = -\alpha q + \cos(\nu t)$ (*)

Handigere variant. Merk op dat

$$r e^{i\nu t} = r \cos(\nu t) + ir \sin(\nu t): \quad r \cos(\nu t) = \operatorname{Re}(r e^{i\nu t}).$$

Bewering. Als $\tilde{q}' = -\alpha \tilde{q} + e^{i\nu t}$

dan is $q(t) \equiv \operatorname{Re}(\tilde{q}(t))$ een oplossing van (*).

Probeer $\tilde{q}(t) = \gamma e^{i\nu t}$ met $\gamma = a + ib \in \mathbb{C}$ en $a, b \in \mathbb{R}$.

$$i\nu\gamma e^{i\nu t} = -\alpha\gamma e^{i\nu t} + e^{i\nu t} \quad \Rightarrow \quad i\nu\gamma = -\alpha\gamma + 1$$

$$\Rightarrow \gamma = \frac{1}{\alpha + i\nu} = \frac{\alpha - i\nu}{\alpha^2 + \nu^2} = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \nu^2}} e^{-i\phi} \quad \text{met } \cos(\phi) = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \nu^2}}, \dots$$

$$\begin{aligned} q_{\text{part}}(t) &= \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \nu^2}} \operatorname{Re}(e^{i(\nu t - \phi)}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \nu^2}} \cos(\nu t - \phi) \end{aligned}$$

Voorbeeld. Voor $\alpha > 0, \nu \in \mathbb{R}$, $q' = -\alpha q + \cos(\nu t)$ (*)

Handigere variant. Merk op dat

$$r e^{i\nu t} = r \cos(\nu t) + ir \sin(\nu t): \quad r \cos(\nu t) = \operatorname{Re}(r e^{i\nu t}).$$

Bewering. Als $\tilde{q}' = -\alpha \tilde{q} + e^{i\nu t}$

dan is $q(t) \equiv \operatorname{Re}(\tilde{q}(t))$ een oplossing van (*).

Probeer $\tilde{q}(t) = \gamma e^{i\nu t}$ met $\gamma = a + ib \in \mathbb{C}$ en $a, b \in \mathbb{R}$.

$$q_{\text{part}}(t) = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \nu^2}} \cos(\nu t - \phi)$$

Voorbeeld. Voor $\alpha > 0, \nu \in \mathbb{R}$, $q' = -\alpha q + \cos(\nu t)$ (*)

Handigere variant. Merk op dat

$$r e^{i\nu t} = r \cos(\nu t) + ir \sin(\nu t): \quad r \cos(\nu t) = \operatorname{Re}(r e^{i\nu t}).$$

Bewering. Als $\tilde{q}' = -\alpha \tilde{q} + e^{i\nu t}$

dan is $q(t) \equiv \operatorname{Re}(\tilde{q}(t))$ een oplossing van (*).

Probeer $\tilde{q}(t) = \gamma e^{i\nu t}$ met $\gamma = a + ib \in \mathbb{C}$ en $a, b \in \mathbb{R}$.

$$q_{\text{part}}(t) = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \nu^2}} \cos(\nu t - \phi)$$

Opmerking.

$$\cos(\nu t - \phi) = \cos(\nu t) \cos(\phi) - \sin(\nu t) \sin(\phi).$$

Voorbeeld. Voor $\alpha > 0, \nu \in \mathbb{R}$, $q' = -\alpha q + \cos(\nu t)$ (*)

Handigere variant. Merk op dat

$$r e^{i\nu t} = r \cos(\nu t) + ir \sin(\nu t): \quad r \cos(\nu t) = \operatorname{Re}(r e^{i\nu t}).$$

Bewering. Als $\tilde{q}' = -\alpha \tilde{q} + e^{i\nu t}$

dan is $q(t) \equiv \operatorname{Re}(\tilde{q}(t))$ een oplossing van (*).

Probeer $\tilde{q}(t) = \gamma e^{i\nu t}$ met $\gamma = a + ib \in \mathbb{C}$ en $a, b \in \mathbb{R}$.

$$q_{\text{part}}(t) = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \nu^2}} \cos(\nu t - \phi)$$

Interpretatie. $q_{\text{hom}}(t) = C e^{-\alpha t} \rightarrow 0$ als $t \rightarrow \infty$.

Dus $q(t) \approx q_{\text{part}}(t)$ voor t groot (op den duur).

q_{part} **periodiek** met dezelfde **periode** als de inhomogene term $\cos(\nu t)$, maar met

een **fase verschuiving** ϕ en **amplitude** $\frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \nu^2}}$.

Oplosmethoden differentiaalvergelijkingen

- 1) Analytisch. **Geeft alle oplossingen**
- 2) Numeriek. **Geeft alleen oplossing bij 'n beginwaarde**

Oplosmethoden differentiaalvergelijkingen

- 1) Analytisch. **Werkt alleen in modelsituaties**
- 2) Numeriek. **Werkt altijd**

Oplosmethoden differentiaalvergelijkingen

- 1) Analytisch.
- 2) Numeriek.

Analytisch

- a) Scheiden van variabelen.
- b) Voor lineaire differentiaalvergelijkingen:
oplossing = particuliere opl. + opl. homogeen deel
- c) Vind particuliere oplossing door variatie van constante

Program

- Continue modellen
- Voorbeeld
- Oplosmethoden
- Evenwicht, stabiliteit
- Discreet versus continue
- Terminologie
- Meer dimensionale eerste orde modellen
- Een dimensionale hogere orde modellen
- Resonantie
- Meer dimensionale eerste orde modellen, II

Evenwicht als $q'(t) = 0$ alle t .

Voorbeeld. $q' = \lambda(q - \beta)$ zekere $\lambda, \beta \in \mathbb{C}$. (*)

$$q' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad q(t) = \beta.$$

Stel $q_e(t) = \beta$ is een evenwicht.

Het evenwicht is **stabiel** als voor iedere oplossing q geldt

- $q(t) \rightarrow \beta$ ($t \rightarrow \infty$) als $q(0) \approx \beta$
- en • $q(t) \approx \beta$ alle t als $q(0) \approx \beta$.

Evenwicht als $q'(t) = 0$ alle t .

Voorbeeld. $q' = \lambda(q - \beta)$ zekere $\lambda, \beta \in \mathbb{C}$. (*)

$$q' = 0 \Leftrightarrow q(t) = \beta.$$

Stel $q_e(t) = \beta$ is een evenwicht.

Het evenwicht is **stabiel** als voor iedere oplossing q geldt

- $q(t) \rightarrow \beta$ ($t \rightarrow \infty$) als $q(0) \approx \beta$
- en • $q(t) \approx \beta$ alle t als $q(0) \approx \beta$.

Voorbeeld. $q = \beta + (q(0) - \beta)e^{\lambda t}$ oplossing (*).

Stabiel $\Leftrightarrow e^{\lambda t} \rightarrow 0$ voor $t \rightarrow \infty$.

Evenwicht als $q'(t) = 0$ alle t .

Voorbeeld. $q' = \lambda(q - \beta)$ zekere $\lambda, \beta \in \mathbb{C}$. (*)

$$q' = 0 \Leftrightarrow q(t) = \beta.$$

Stel $q_e(t) = \beta$ is een evenwicht.

Het evenwicht is **stabiel** als voor iedere oplossing q geldt

- $q(t) \rightarrow \beta$ ($t \rightarrow \infty$) als $q(0) \approx \beta$
- en • $q(t) \approx \beta$ alle t als $q(0) \approx \beta$.

Voorbeeld. $q = \beta + (q(0) - \beta)e^{\lambda t}$ oplossing (*).

Stabiel $\Leftrightarrow e^{\lambda t} \rightarrow 0$ voor $t \rightarrow \infty$.

Met $\lambda = \nu + i\phi \in \mathbb{C}$ met $\nu, \phi \in \mathbb{R}$, $\nu \geq 0$ is

$$|e^{\lambda t}| = |e^{\nu t}| \cdot |e^{i\phi t}| = |e^{\nu t}| \rightarrow 0 \Leftrightarrow \nu < 0$$

Evenwicht als $q'(t) = 0$ alle t .

Voorbeeld. $q' = \lambda(q - \beta)$ zekere $\lambda, \beta \in \mathbb{C}$. (*)

$$q' = 0 \Leftrightarrow q(t) = \beta.$$

Stel $q_e(t) = \beta$ is een evenwicht.

Het evenwicht is **stabiel** als voor iedere oplossing q geldt

- $q(t) \rightarrow \beta$ ($t \rightarrow \infty$) als $q(0) \approx \beta$
- en • $q(t) \approx \beta$ alle t als $q(0) \approx \beta$.

Voorbeeld. $q = \beta + (q(0) - \beta)e^{\lambda t}$ oplossing (*).

Stabiel $\Leftrightarrow e^{\lambda t} \rightarrow 0$ voor $t \rightarrow \infty$.

Met $\lambda = \nu + i\phi \in \mathbb{C}$ met $\nu, \phi \in \mathbb{R}$, $\nu \geq 0$ is

$$|e^{\lambda t}| = |e^{\nu t}| \cdot |e^{i\phi t}| = |e^{\nu t}| \rightarrow 0 \Leftrightarrow \nu < 0$$

Stabiel $\Leftrightarrow \nu = \operatorname{Re}(\lambda) < 0$.

Program

- Continue modellen
- Voorbeeld
- Oplosmethoden
- Evenwicht, stabiliteit
- Discreet versus continue
- Terminologie
- Meer dimensionale eerste orde modellen
- Een dimensionale hogere orde modellen
- Resonantie
- Meer dimensionale eerste orde modellen, II

Verband met discreet model

Model. $x_{n+1} = \kappa x_n$

$$q'(t) = \lambda q(t)$$

Oplossing. $x_n = \kappa^n x_0$

$$q(t) = q(0) e^{\lambda t}$$

Evenwicht. $x_n = 0$ alle n

$$q(t) = 0 \text{ alle } t.$$

Verband met discreet model

Model. $x_{n+1} = \kappa x_n$

$$q'(t) = \lambda q(t)$$

Oplossing. $x_n = \kappa^n x_0$

$$q(t) = q(0) e^{\lambda t}$$

Evenwicht. $x_n = 0$ alle n

$$q(t) = 0 \text{ alle } t.$$

Stabiel. $|\kappa| < 1$

$$\operatorname{Re}(\lambda) < 0$$

Verband met discreet model

Model. $x_{n+1} = \kappa x_n$ $q'(t) = \lambda q(t)$

Oplossing. $x_n = \kappa^n x_0$ $q(t) = q(0) e^{\lambda t}$

Evenwicht. $x_n = 0$ alle n $q(t) = 0$ alle t .

Stabiel. $|\kappa| < 1$ $\text{Re}(\lambda) < 0$

Verklaring verschil $|\kappa| < 1 \iff \text{Re}(\lambda) < 0$

Verband met discreet model

Model. $x_{n+1} = \kappa x_n$ $q'(t) = \lambda q(t)$

Oplossing. $x_n = \kappa^n x_0$ $q(t) = q(0) e^{\lambda t}$

Evenwicht. $x_n = 0$ alle n $q(t) = 0$ alle t .

Stabiel. $|\kappa| < 1$ $\text{Re}(\lambda) < 0$

Verklaring verschil $|\kappa| \leftrightarrow \text{Re}(\lambda) < 0$

$$\frac{q(t + \Delta t) - q(t)}{\Delta t} \approx q'(t) = \lambda q(t)$$

$$\Rightarrow q(t + \Delta t) = q(t) + \lambda \Delta t q(t) = (1 + \lambda \Delta t) q(t).$$

Met $t_n \equiv n \Delta t$ en $q_n \equiv q(t_n)$ geldt

$$q_{n+1} = q(t_n + \Delta t) \approx (1 + \Delta t \lambda) q(t_n) = (1 + \Delta t \lambda) q_n$$

Verband met discreet model

Model. $x_{n+1} = \kappa x_n$ $q'(t) = \lambda q(t)$

Oplossing. $x_n = \kappa^n x_0$ $q(t) = q(0) e^{\lambda t}$

Evenwicht. $x_n = 0$ alle n $q(t) = 0$ alle t .

Stabiel. $|\kappa| < 1$ $\text{Re}(\lambda) < 0$

Verklaring verschil $|\kappa| \leftrightarrow \text{Re}(\lambda) < 0$

Met $t_n \equiv n \Delta t$ en $q_n \equiv q(t_n)$ geldt

$$q_{n+1} = q(t_n + \Delta t) \approx (1 + \Delta t \lambda) q(t_n) = (1 + \Delta t \lambda) q_n$$

Verband met discreet model

Model. $x_{n+1} = \kappa x_n$ $q'(t) = \lambda q(t)$

Oplossing. $x_n = \kappa^n x_0$ $q(t) = q(0) e^{\lambda t}$

Evenwicht. $x_n = 0$ alle n $q(t) = 0$ alle t .

Stabiel. $|\kappa| < 1$ $\text{Re}(\lambda) < 0$

Verklaring verschil $|\kappa| \leftrightarrow \text{Re}(\lambda) < 0$

Met $t_n \equiv n \Delta t$ en $q_n \equiv q(t_n)$ geldt

$$q_{n+1} = q(t_n + \Delta t) \approx (1 + \Delta t \lambda) q(t_n) = (1 + \Delta t \lambda) q_n$$

Conclusie.

We moeten $|\kappa| < 1$ vergelijken met $|1 + \Delta t \lambda| < 1$.

Verband met discreet model

Model. $x_{n+1} = \kappa x_n$ $q'(t) = \lambda q(t)$

Oplossing. $x_n = \kappa^n x_0$ $q(t) = q(0) e^{\lambda t}$

Evenwicht. $x_n = 0$ alle n $q(t) = 0$ alle t .

Stabiel. $|\kappa| < 1$ $\text{Re}(\lambda) < 0$

Verklaring verschil $|\kappa| \leftrightarrow \text{Re}(\lambda) < 0$

Met $t_n \equiv n \Delta t$ en $q_n \equiv q(t_n)$ geldt

$$q_{n+1} = q(t_n + \Delta t) \approx (1 + \Delta t \lambda) q(t_n) = (1 + \Delta t \lambda) q_n$$

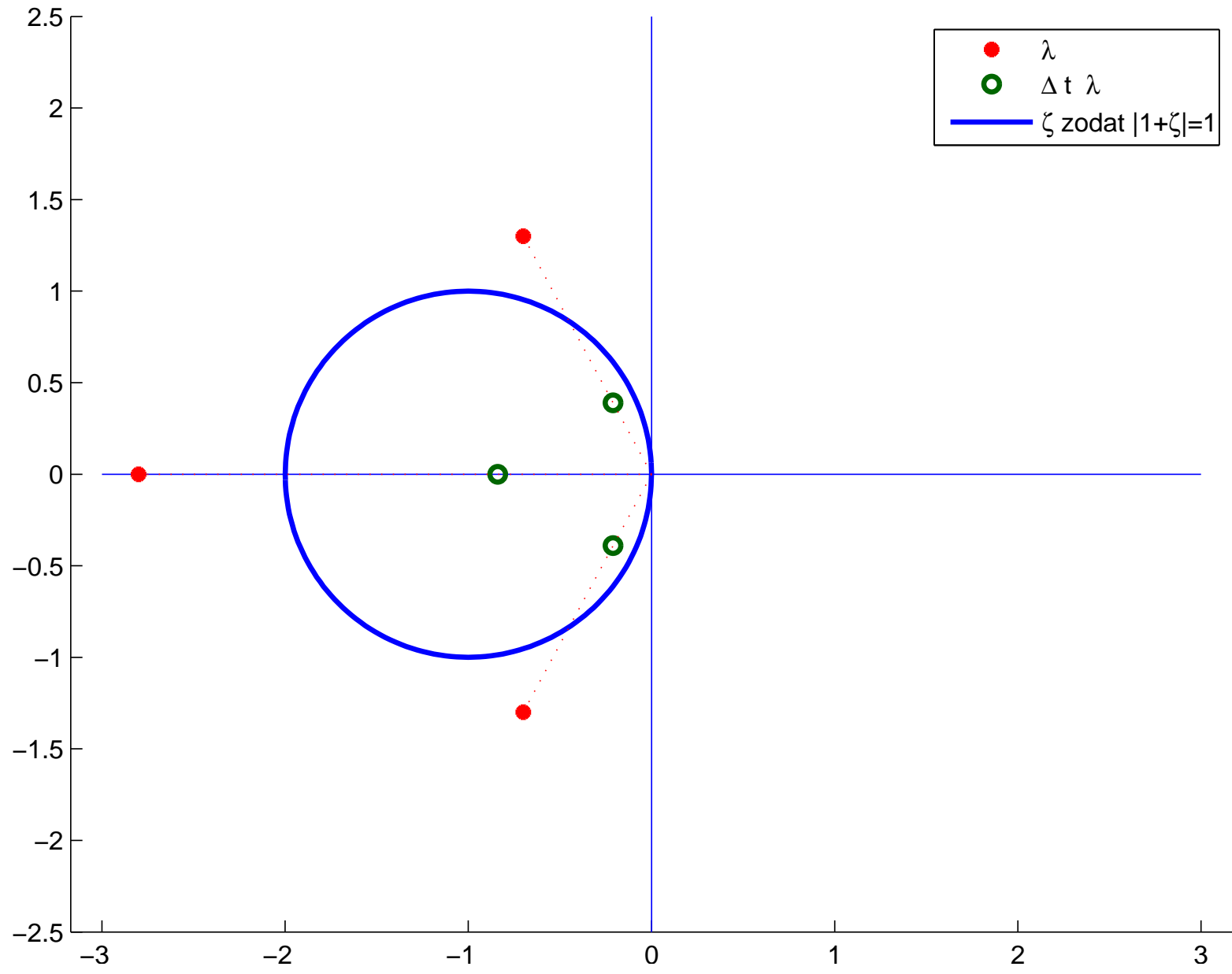
Conclusie.

We moeten $|\kappa| < 1$ vergelijken met $|1 + \Delta t \lambda| < 1$.

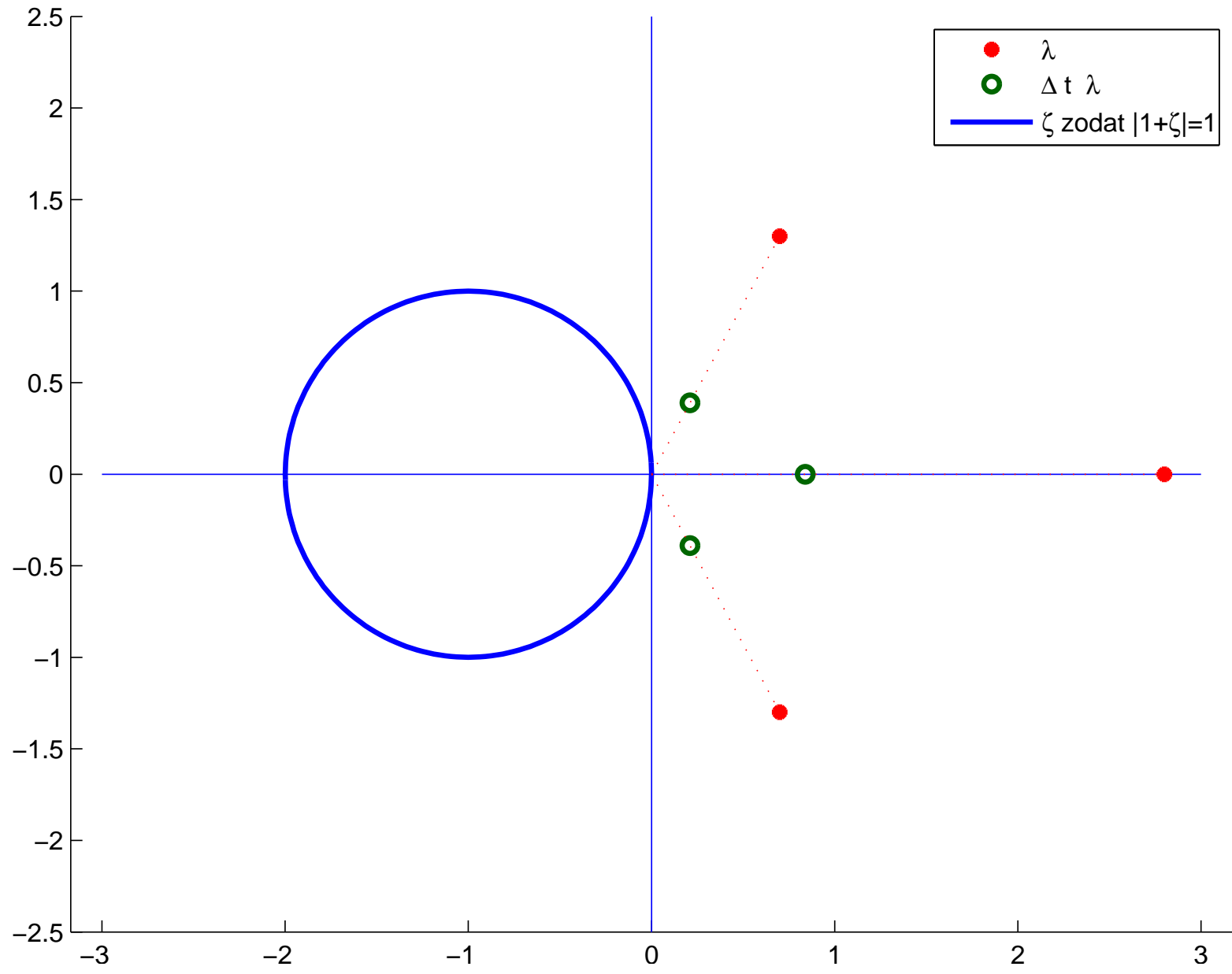
Stelling. Voor $\Delta t > 0$, en Δt voldoende klein is

$$|1 + \Delta t \lambda| < 1 \Leftrightarrow \text{Re}(\lambda) < 0.$$

In het complexe vlak, λ met $\text{Re}(\lambda) < 0$



In het complexe vlak, λ met $\text{Re}(\lambda) < 0$



Oplosmethoden differentiaalvergelijkingen

- 1) Analytisch.
- 2) Numeriek.

Analytisch

- a) Scheiden van variabelen.
- b) Voor lineaire differentiaalvergelijkingen:
oplossing = particuliere opl. + opl. homogeen deel
- c) Vind particuliere oplossing door variatie van constante

Numeriek.

Met $q_{n+1} = q_n + \Delta t f(t_n, q_n)$ (**Euler voorwaarts**)

is $q_n \approx q(t_n)$, waarbij $q'(t) = f(t, q(t))$

mits $\Delta t > 0$ voldoende klein.

Program

- Continue modellen
- Voorbeeld
- Oplosmethoden
- Evenwicht, stabiliteit
- Discreet versus continue
- Terminologie
- Meer dimensionale eerste orde modellen
- Een dimensionale hogere orde modellen
- Resonantie
- Meer dimensionale eerste orde modellen, II

Differentiaalvergelijkingen; terminologie

$$q'(t) = f(t, q(t))$$

met f een gegeven functie.

Voorbeelden. 1) $f(t, q) = -\alpha (q^2 - \beta)$

2) $f(t, q) = -\alpha (q - \beta \sin(\nu t)).$

eerste orde differentiaalvergelijking:

alleen eerste orde afgeleiden

Autonoom als $f(t, q) = f(q)$ (vb 1).

Anders **niet-autonoom**. (vb 2)

1) is **niet-lineair**, 2) is **lineair**.

Beide voorbeelden zijn **1-dimensionaal** ($q(t) \in \mathbb{R}$ alle t)

en **reëel**.

Program

- Continue modellen
- Voorbeeld
- Oplosmethoden
- Evenwicht, stabiliteit
- Discreet versus continue
- Terminologie
- Meer dimensionale eerste orde modellen
- Een dimensionale hogere orde modellen
- Resonantie
- Meer dimensionale eerste orde modellen, II

Klassieke oorlogsvoering

$x(t)$ ($y(t)$) is (\approx) het aantal operationele soldaten van een 19-eeuws leger X (resp. Y). De legers X en Y bevechten elkaar in 'n veldslag.

Aanname:

De verliezen van X (Y) zijn evenredig met de 'schietkracht' van Y (resp. X), die evenredig is met het aantal operationele soldaten van Y (resp. X).

Model:

$$\begin{cases} x'(t) = a s_Y y(t) \\ y'(t) = b s_X x(t) \end{cases} \quad \text{voor } t_0 \leq t \leq t_0 + T,$$

waarbij $a, b < 0$, $s_X, s_Y > 0$ bekend, evenals $x(t_0)$ en $y(t_0)$.

Hoe verloopt het gevecht?

*Kan daaruit $a s_X$ en $b s_Y$ bepaald worden?
Is er evenwicht (stabiel)? Wie wint?*

Lineaire differentiaalvergelijkingen

$$\begin{cases} x'(t) = a s_Y y(t) \\ y'(t) = b s_X x(t) \end{cases} \quad \begin{cases} x' = a s_Y y \\ y' = b s_X x. \end{cases}$$

In matrix representatie:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{met} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & a s_Y \\ b s_X & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) + y(t) \\ y'(t) = x(t) + 2y(t) \end{cases} \quad \begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = x + 2y. \end{cases}$$

In matrix representatie:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{met} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ontkoppelen

Eigenvectoren \mathbf{v}_i met eigenwaarden λ_i

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_1 = \lambda_1\mathbf{v}_1 \quad \text{en} \quad \mathbf{A}\mathbf{v}_2 = \lambda_2\mathbf{v}_2.$$

We nemen verlopig aan dat de eigenvectoren

\mathbf{v}_1 en \mathbf{v}_2 lineair onafhankelijk zijn.

(Dit is zo als bijvoorbeeld $\lambda_1 \neq \lambda_2$)

In een latere les zullen we ook het geval bekijken waarin $\lambda_1 = \lambda_2$ en er maar één eigenvector is bij λ_1 .

Ontkoppelen

Eigenvectoren \mathbf{v}_i met eigenwaarden λ_i

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_1 = \lambda_1\mathbf{v}_1 \quad \text{en} \quad \mathbf{A}\mathbf{v}_2 = \lambda_2\mathbf{v}_2.$$

Splits, voor iedere t , $\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$ in eigenvectorcomponenten:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = u(t)\mathbf{v}_1 + w(t)\mathbf{v}_2.$$

Invullen levert het **ontkoppelde stelsel**:

$$\begin{cases} u'(t) = \lambda_1 u(t) \\ w'(t) = \lambda_2 w(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} \\ w(t) = C_2 e^{\lambda_2 t} \end{cases}$$

zekere C_1, C_2 .

Bewijs.

$$\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = u'(t) \mathbf{v}_1 + w'(t) \mathbf{v}_2.$$

&

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} &= u(t) \mathbf{A} \mathbf{v}_1 + w(t) \mathbf{A} \mathbf{v}_2 \\ &= u(t) \lambda_1 \mathbf{v}_1 + w(t) \lambda_2 \mathbf{v}_2. \end{aligned}$$

Blijkbaar $u'(t) \mathbf{v}_1 + w'(t) \mathbf{v}_2 = u(t) \lambda_1 \mathbf{v}_1 + w(t) \lambda_2 \mathbf{v}_2$.

Dus $(u'(t) - \lambda_1 u(t)) \mathbf{v}_1 + (w'(t) - \lambda_2 w(t)) \mathbf{v}_2 = 0$

en, omdat de eigenvectoren lineair onafhankelijk zijn,

$$\begin{cases} u'(t) = \lambda_1 u(t) \\ w'(t) = \lambda_2 w(t). \end{cases}$$

De oplossing

Eigenvectoren \mathbf{v}_i met eigenwaarden λ_i

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_1 = \lambda_1\mathbf{v}_1 \quad \text{en} \quad \mathbf{A}\mathbf{v}_2 = \lambda_2\mathbf{v}_2.$$

Als

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

dan $\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = C_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{v}_2$ zekere C_1, C_2 .

C_1, C_2 te bepalen uit de **beginwaarde** $\begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$

Als $\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \gamma_1 \mathbf{v}_1 + \gamma_2 \mathbf{v}_2$ dan $C_1 = \gamma_1$ en $C_2 = \gamma_2$.

De oplossing op den duur

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = C_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{v}_2$$

De oplossing op den duur

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = C_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{v}_2$$

Stel $\operatorname{Re}(\lambda_2) < \operatorname{Re}(\lambda_1)$ en $C_1 \neq 0$.

Dan

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = C_1 e^{\lambda_1 t} \left[\mathbf{v}_1 + \frac{C_2}{C_1} \exp((\lambda_2 - \lambda_1)t) \mathbf{v}_2 \right]$$

Omdat $\operatorname{Re}(\lambda_2 - \lambda_1) < 0$

geldt $\exp((\lambda_2 - \lambda_1)t) \rightarrow 0$ als $t \rightarrow \infty$.

Op den duur (dwz voor grote t) geldt

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \approx C_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1.$$

Stabiliteit

$$\mathbf{x}'(t) = (x'_1(t), \dots, x'_m(t))^T = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

en $\mathbf{A}\mathbf{v}_j = \lambda_j \mathbf{v}_j$ voor $j = 1, \dots, m$.

Stelling.

- Als $\operatorname{Re}(\lambda_1) > \operatorname{Re}(\lambda_j)$ voor $j = 2, \dots, m$, dan

$$\mathbf{x}(t) \approx C_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1 \text{ voor grote } t$$

Stabiliteit

$$\mathbf{x}'(t) = (x'_1(t), \dots, x'_m(t))^T = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

en $\mathbf{A}\mathbf{v}_j = \lambda_j \mathbf{v}_j$ voor $j = 1, \dots, m$.

Stelling.

- Als $\operatorname{Re}(\lambda_1) > \operatorname{Re}(\lambda_j)$ voor $j = 2, \dots, m$, dan

$$\mathbf{x}(t) \approx C_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1 \text{ voor grote } t$$

- Als $0 > \operatorname{Re}(\lambda_j)$ voor $j = 1, \dots, m$, dan

$$\mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{0} \text{ voor } t \rightarrow \infty$$

Opmerking. De stelling geldt ook in geval van meervoudige eigenwaarden (dus als $\lambda_k = \lambda_j$ voor zekere $k \neq j$).

Classificatie evenwichten 2-d (reëel)

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{met} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad a_{ij}, \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \text{ reëel.}$$

\mathbf{A} met eigenwaarden λ_1 en λ_2 .

Classificatie evenwichten 2-d (reëel)

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{met} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad a_{ij}, \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \text{ reëel.}$$

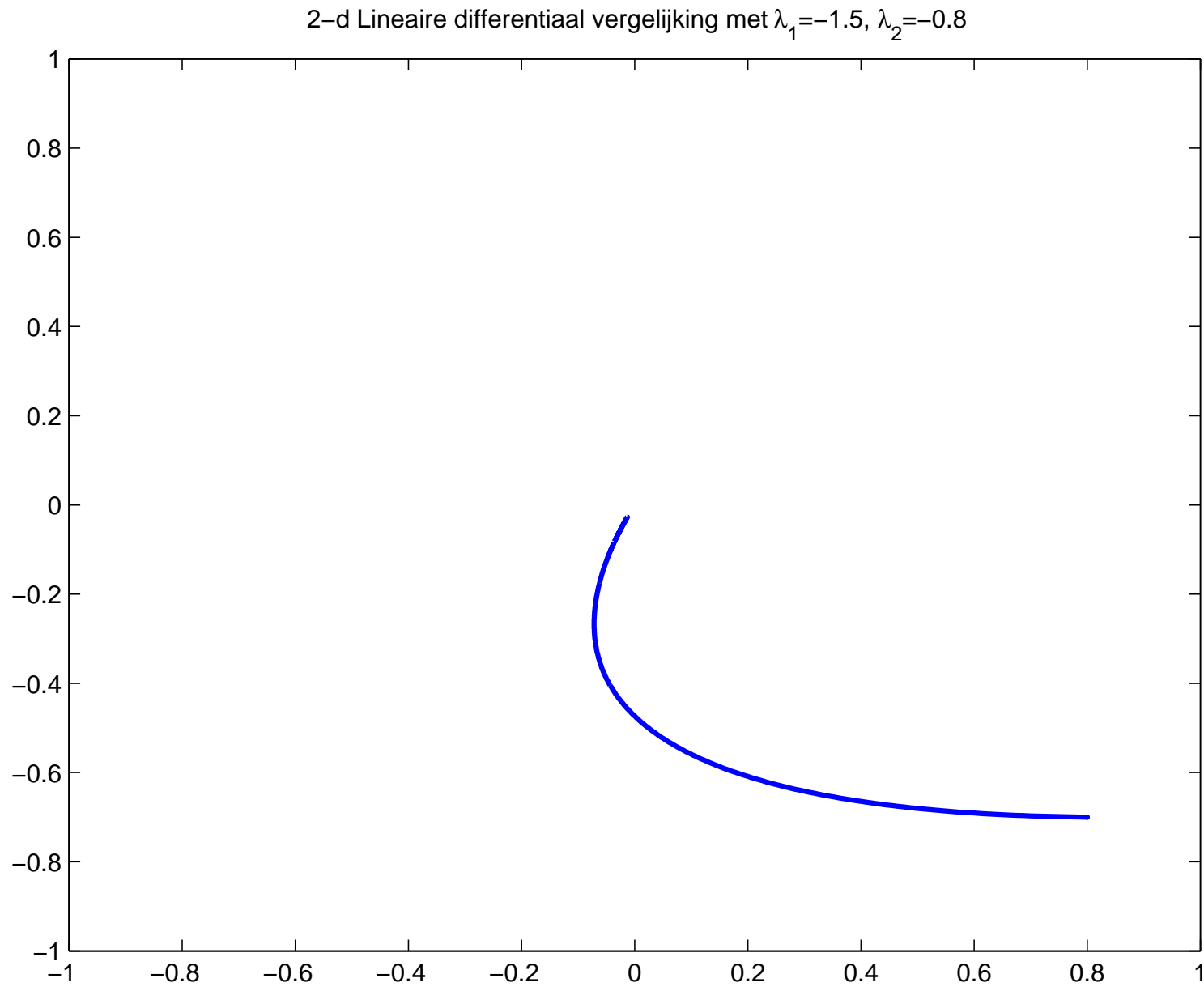
\mathbf{A} met eigenwaarden λ_1 en λ_2 .

Mogelijkheden.

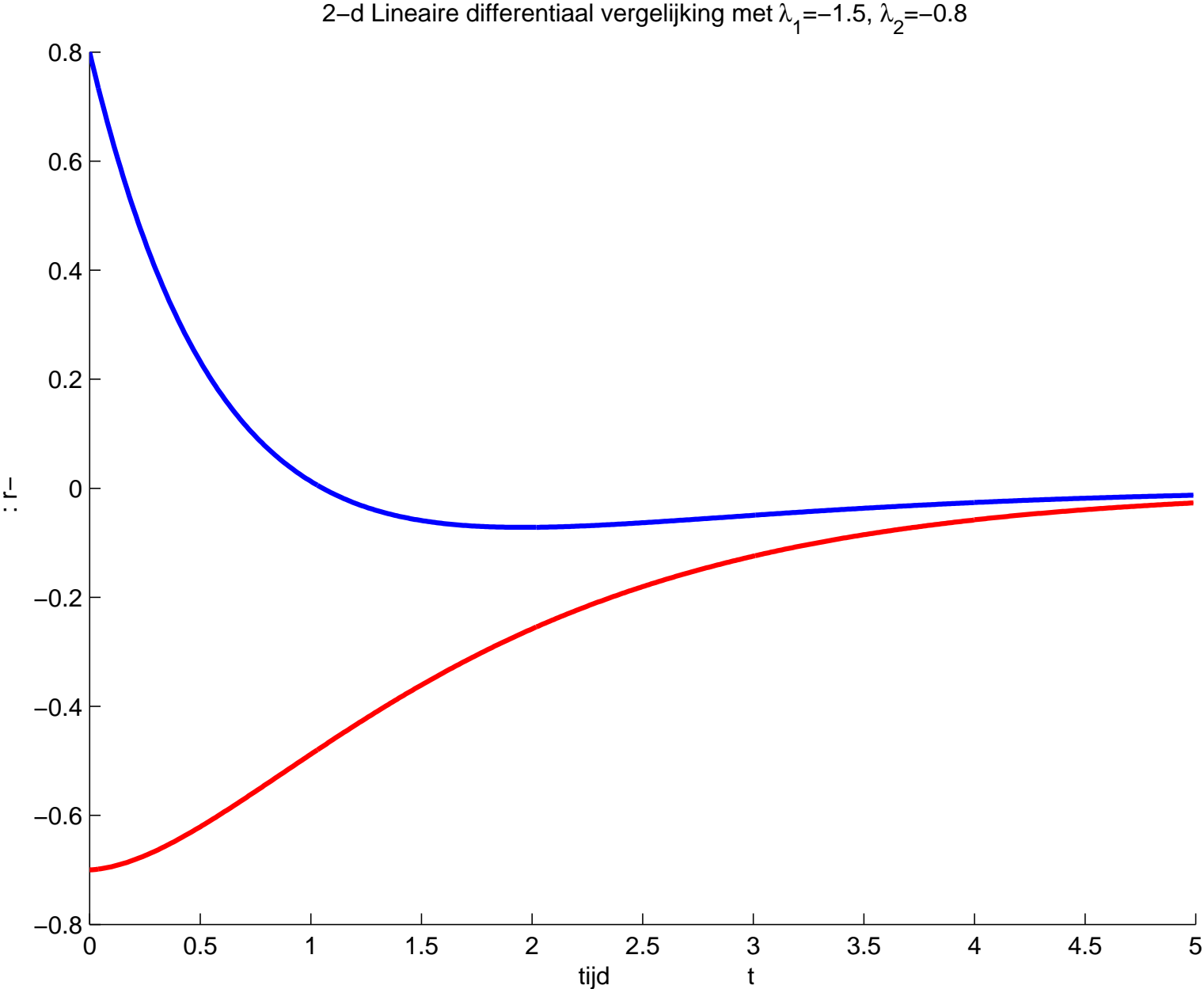
- $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

1) $\lambda_2 < \lambda_1 < 0,$	$\lambda_2 < \lambda_1 = 0,$	$\lambda_2 = \lambda_1 < 0$
2) $\lambda_2 < 0 < \lambda_1,$	$\lambda_2 = 0 = \lambda_1$	
3) $0 < \lambda_2 < \lambda_1,$	$0 = \lambda_2 < \lambda_1,$	$0 < \lambda_2 = \lambda_1$

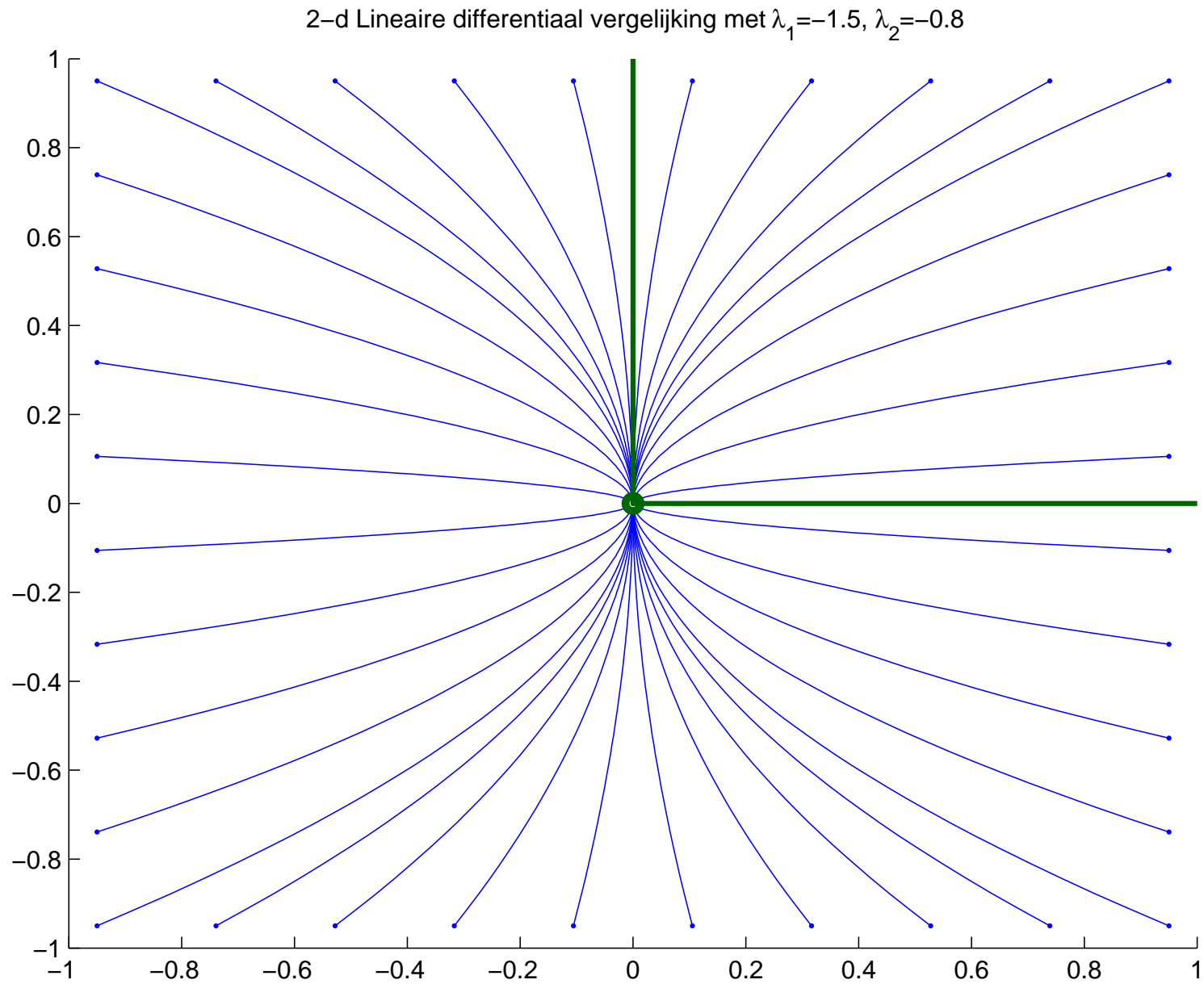
Een oplossingskromme in het (x, y) -vlak



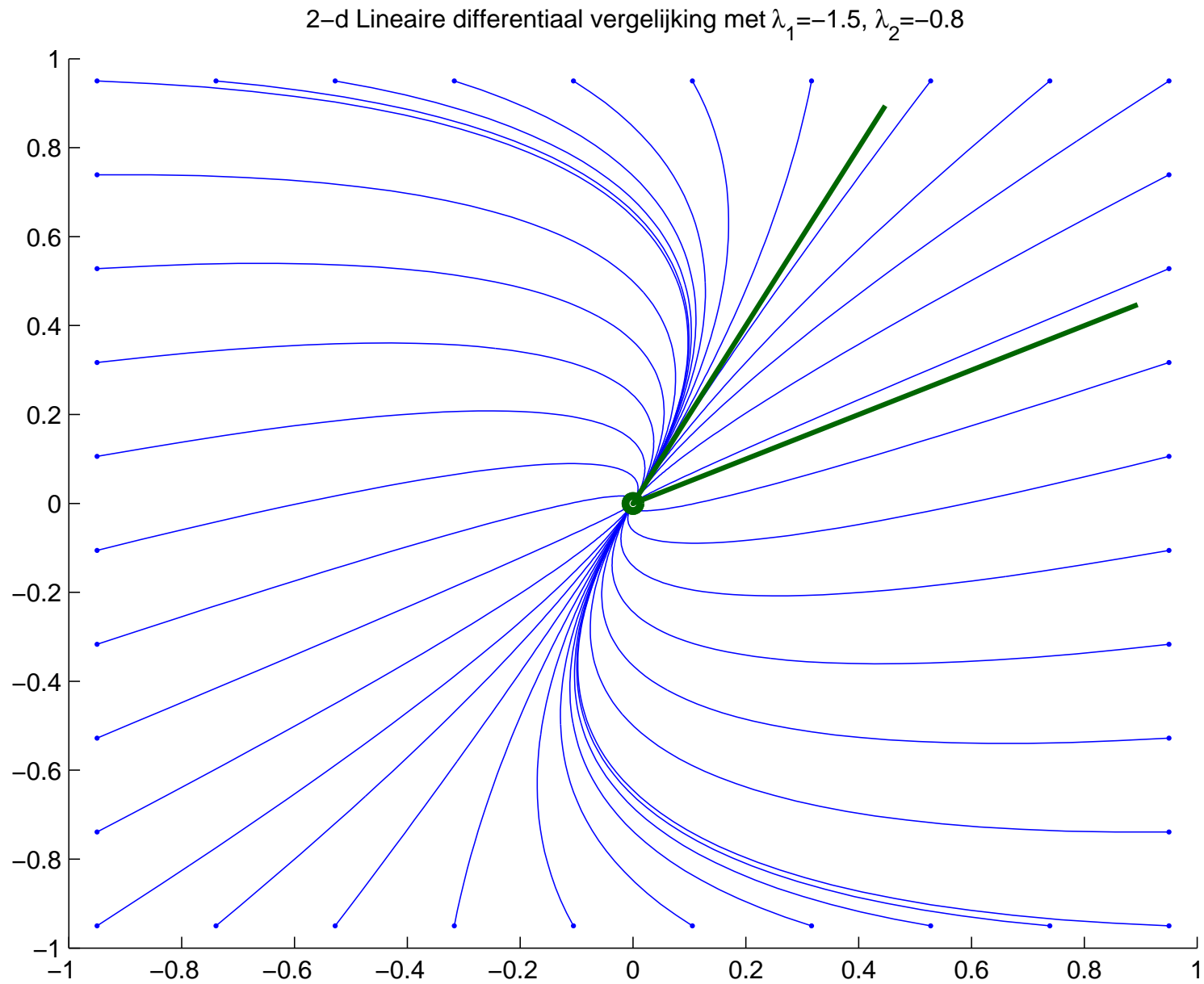
De oplossingscomponenten x en y als functie van t



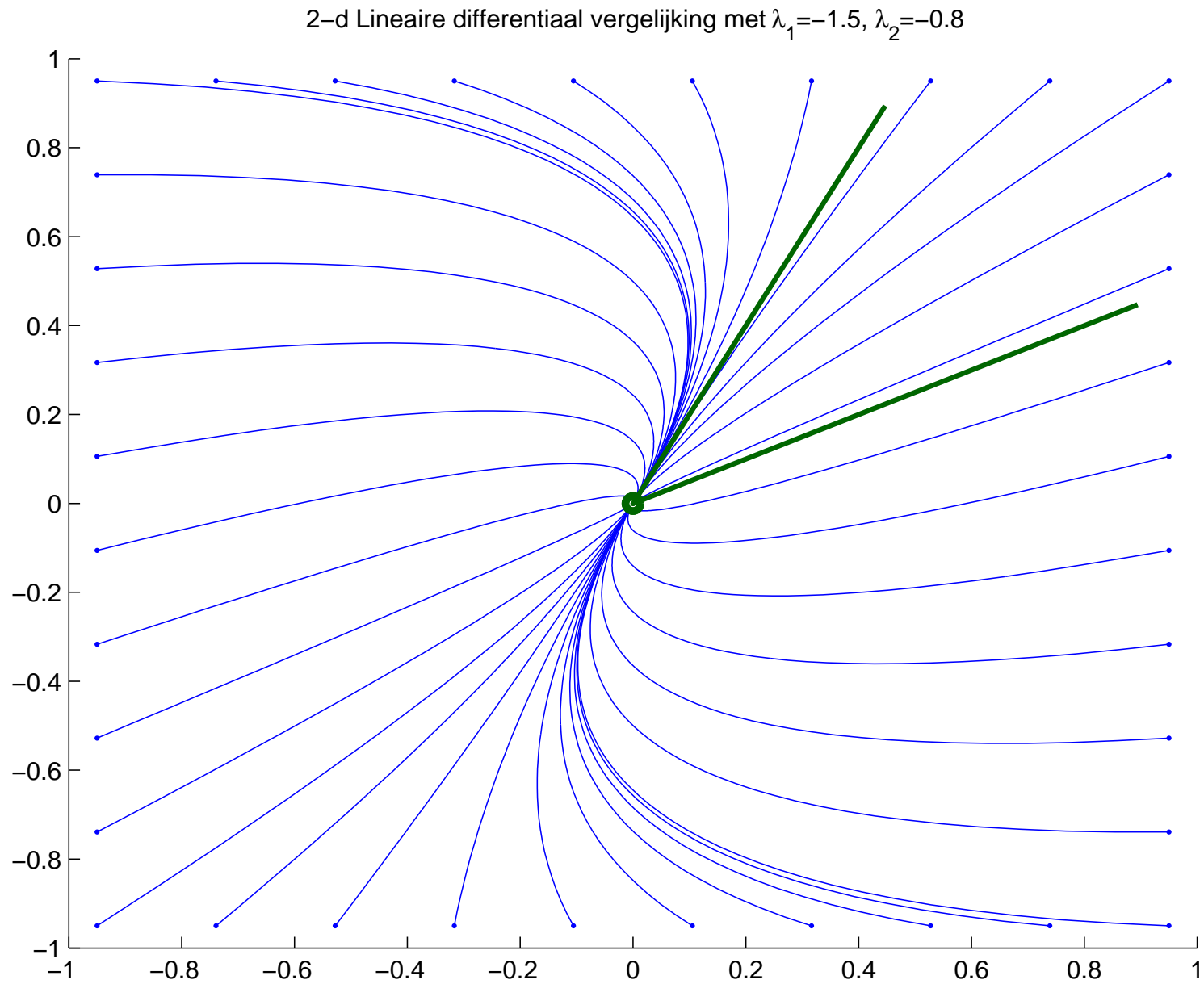
Faseportret in het (u, w) -vlak



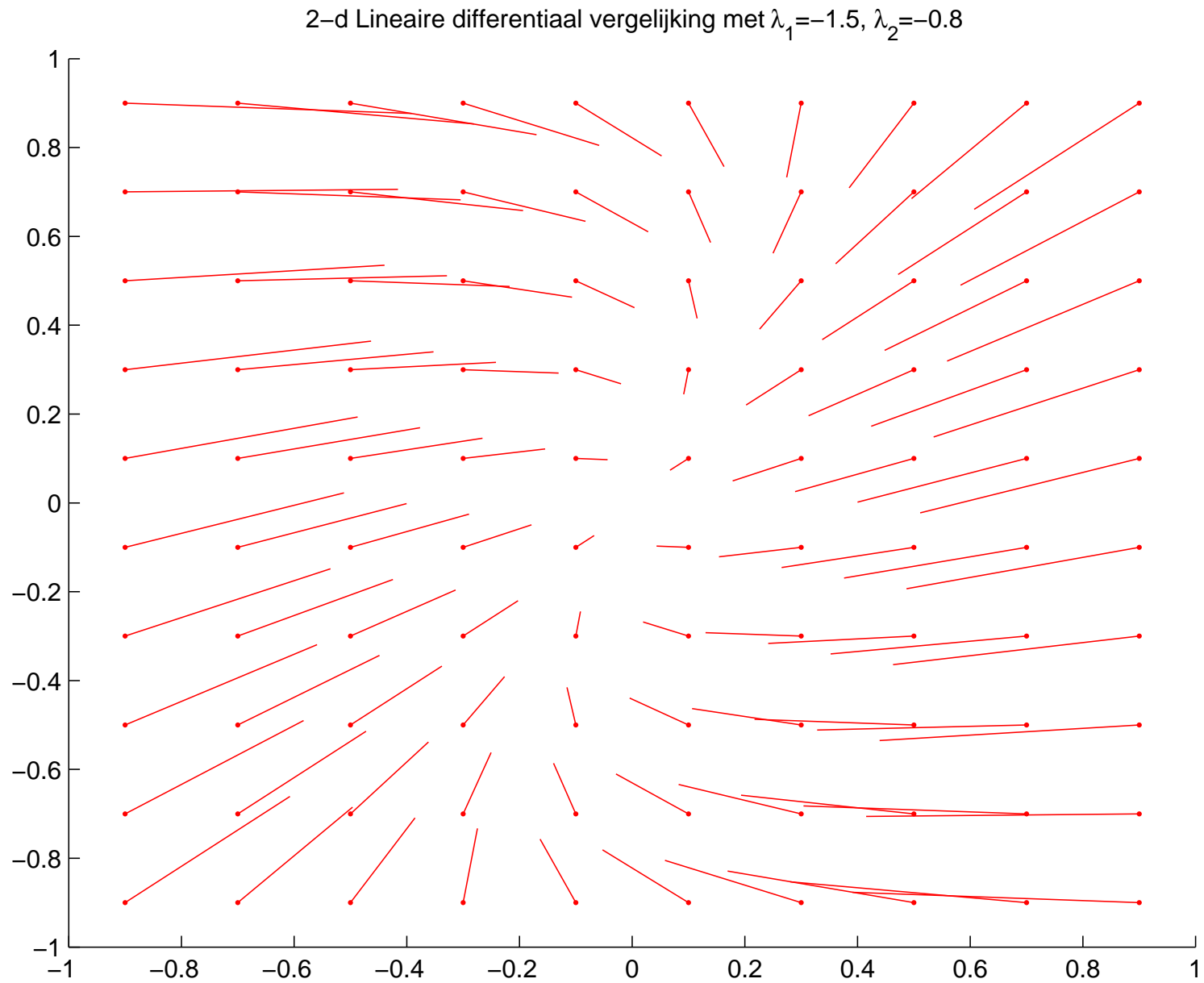
Faseportret in het (x, y) -vlak



Faseportret in het (x, y) -vlak. **Stabiele knoop**



Richtingsveld in het (x, y) -vlak



Classificatie evenwichten 2-d (reëel)

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{met} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad a_{ij}, \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \text{ reëel.}$$

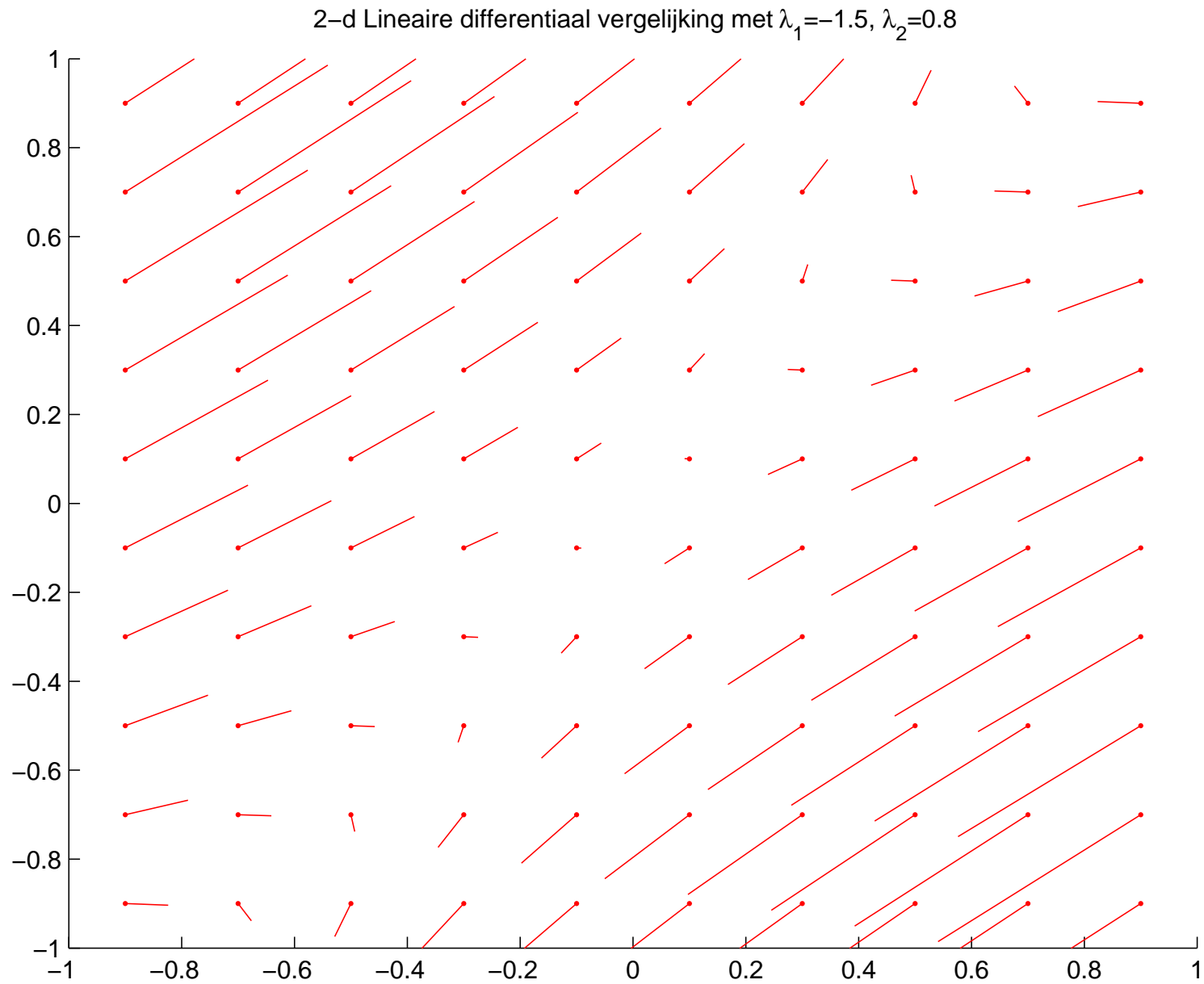
\mathbf{A} met eigenwaarden λ_1 en λ_2 .

Mogelijkheden.

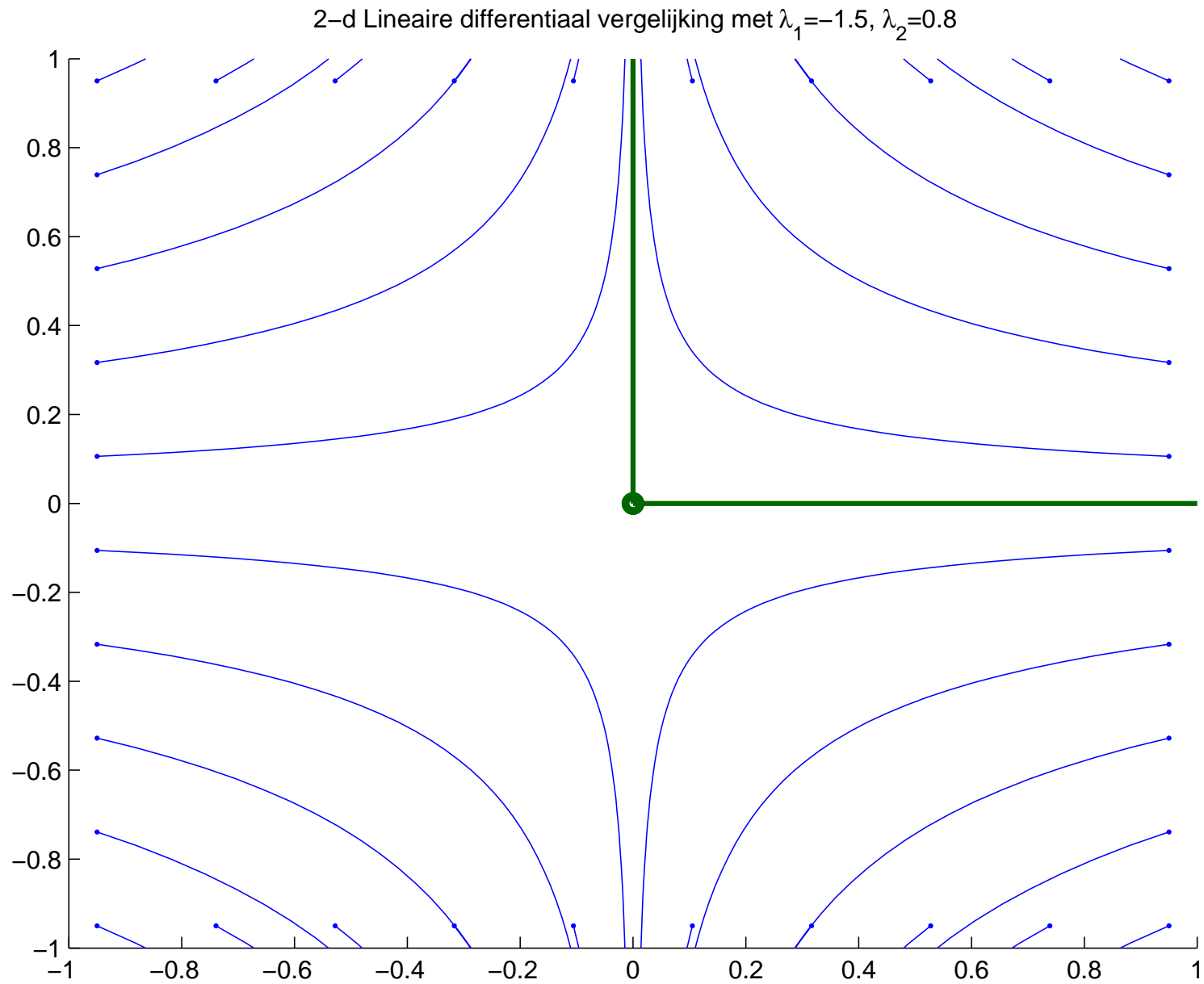
- $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

1) $\lambda_2 < \lambda_1 < 0,$	$\lambda_2 < \lambda_1 = 0,$	$\lambda_2 = \lambda_1 < 0$
2) $\lambda_2 < 0 < \lambda_1,$	$\lambda_2 = 0 = \lambda_1$	
3) $0 < \lambda_2 < \lambda_1,$	$0 = \lambda_2 < \lambda_1,$	$0 < \lambda_2 = \lambda_1$

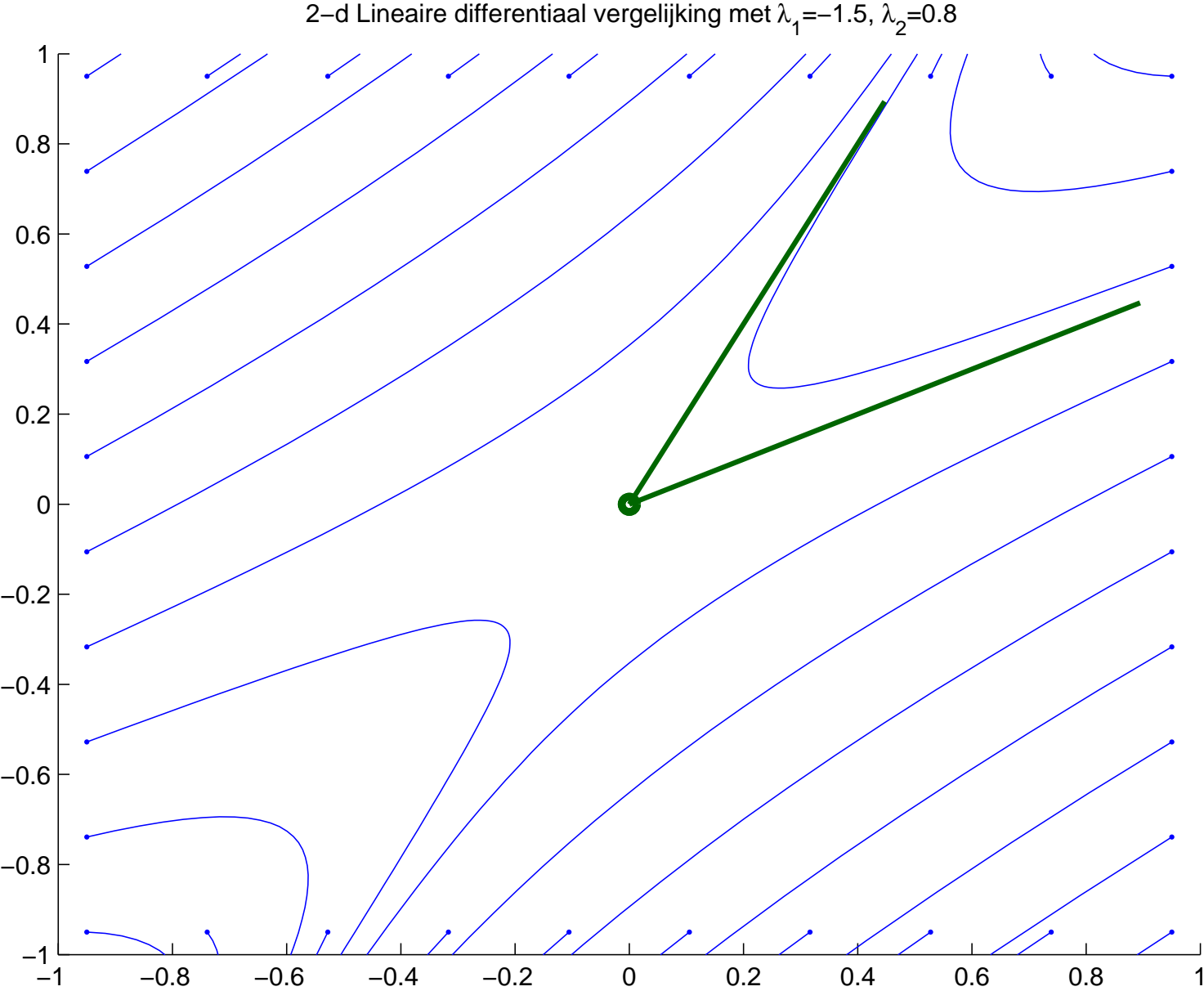
Richtingsveld in het (x, y) -vlak



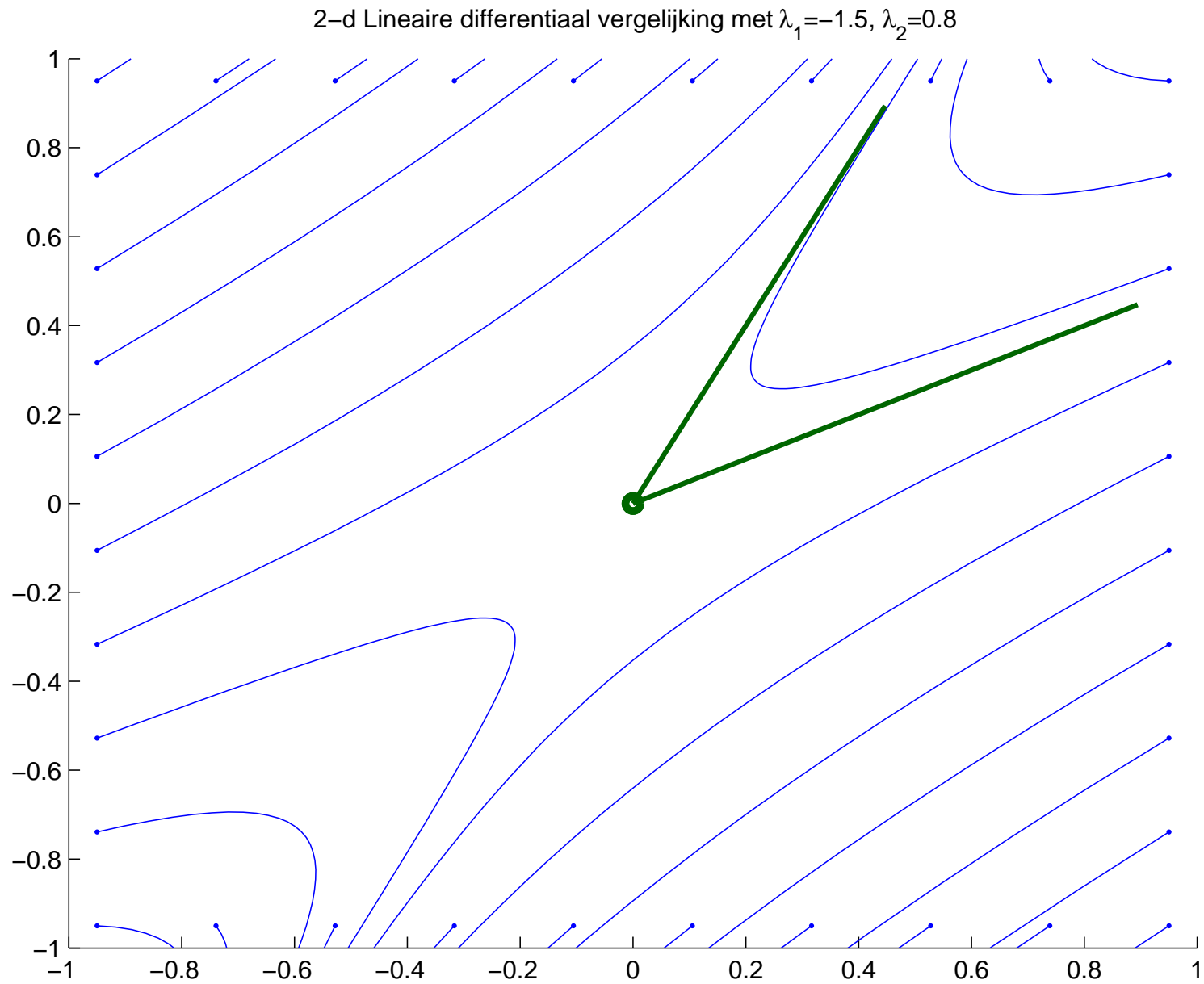
Faseportret in het (u, w) -vlak



Faseportret in het (x, y) -vlak

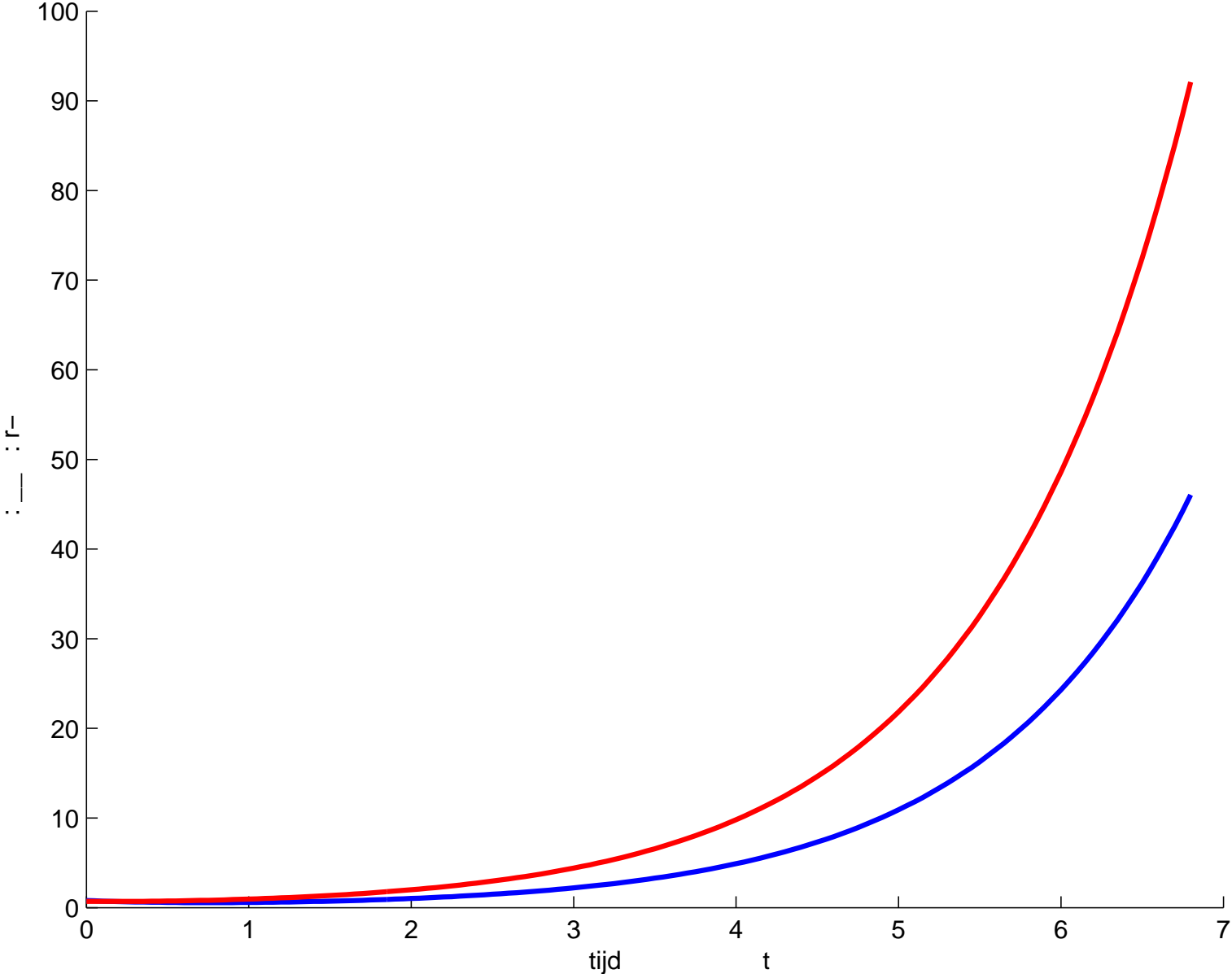


Faseportret in het (x, y) -vlak. **Zadelpunt**



De oplossingscomponenten x en y als functie van t

2-d Lineaire differentiaal vergelijking met $\lambda_1=-1.5, \lambda_2=0.8$



Classificatie evenwichten 2-d (reëel)

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{met} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad a_{ij}, \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \text{ reëel.}$$

\mathbf{A} met eigenwaarden λ_1 en λ_2 .

Mogelijkheden.

- $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

1) $\lambda_2 < \lambda_1 < 0,$	$\lambda_2 < \lambda_1 = 0,$	$\lambda_2 = \lambda_1 < 0$
2) $\lambda_2 < 0 < \lambda_1,$	$\lambda_2 = 0 = \lambda_1$	
3) $0 < \lambda_2 < \lambda_1,$	$0 = \lambda_2 < \lambda_1,$	$0 < \lambda_2 = \lambda_1$

Classificatie evenwichten 2-d (reëel)

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{met} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad a_{ij}, \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \text{ reëel.}$$

\mathbf{A} met eigenwaarden λ_1 en λ_2 .

Mogelijkheden.

- $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

$$1) \lambda_2 < \lambda_1 < 0, \quad \lambda_2 < \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = \lambda_1 < 0$$

$$2) \lambda_2 < 0 < \lambda_1, \quad \lambda_2 = 0 = \lambda_1$$

$$3) 0 < \lambda_2 < \lambda_1, \quad 0 = \lambda_2 < \lambda_1, \quad 0 < \lambda_2 = \lambda_1$$

zie later

Stel $\lambda_1 \notin \mathbb{R}$.

$\mathbf{A}\mathbf{v}_1 = \lambda_1 \mathbf{v}_1$. Dus $\mathbf{A}\overline{\mathbf{v}_1} = \overline{\lambda_1} \overline{\mathbf{v}_1}$. Bovendien $\lambda_1 \neq \overline{\lambda_1}$.

Hieruit volgt dat $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$ en $\mathbf{v}_2 = \overline{\mathbf{v}_1}$.

Classificatie evenwichten 2-d (reëel)

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{met} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad a_{ij}, \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \text{ reëel.}$$

\mathbf{A} met eigenwaarden λ_1 en λ_2 .

Mogelijkheden.

- $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$
 - 1) $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < \lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \lambda_1 < 0$
 - 2) $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$, $\lambda_2 = 0 = \lambda_1$
 - 3) $0 < \lambda_2 < \lambda_1$, $0 = \lambda_2 < \lambda_1$, $0 < \lambda_2 = \lambda_1$
- $\lambda_1 = \overline{\lambda_2} \notin \mathbb{R}$
 - 4) $\text{Re}(\lambda_1) < 0$
 - 5) $\text{Re}(\lambda_1) > 0$
 - 6) $\text{Re}(\lambda_1) = 0$

Stel $\lambda_1 \notin \mathbb{R}$.

$\mathbf{A}\mathbf{v}_1 = \lambda_1 \mathbf{v}_1$. Dus $\mathbf{A}\overline{\mathbf{v}_1} = \overline{\lambda_1} \overline{\mathbf{v}_1}$. Bovendien $\lambda_1 \neq \overline{\lambda_1}$.

Hieruit volgt dat $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$ en $\mathbf{v}_2 = \overline{\mathbf{v}_1}$.

Schrijf $\lambda_1 = \rho + i\nu$, $\mathbf{v}_1 = \mathbf{w}_1 + i\mathbf{w}_2$ met $\rho, \nu, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ reëel.

Omdat de beginwaarde reëel is, zijn er $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ zodat

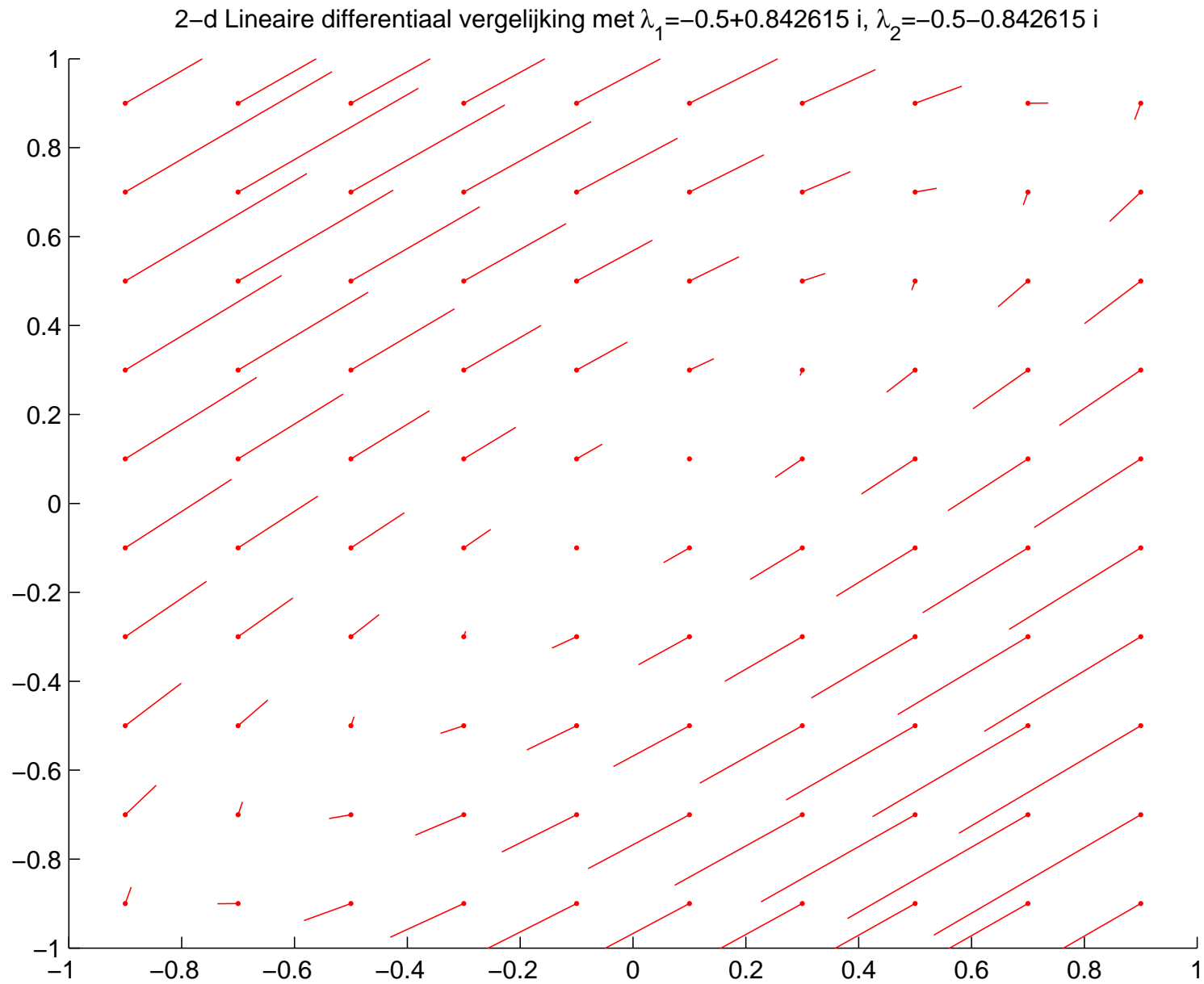
$$\begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} = \alpha\mathbf{w}_1 + \beta\mathbf{w}_2 = \operatorname{Re}((\alpha - i\beta)(\mathbf{w}_1 + i\mathbf{w}_2)).$$

Schrijf $\gamma \equiv \alpha - i\beta = |\gamma| e^{i\phi}$. Dan

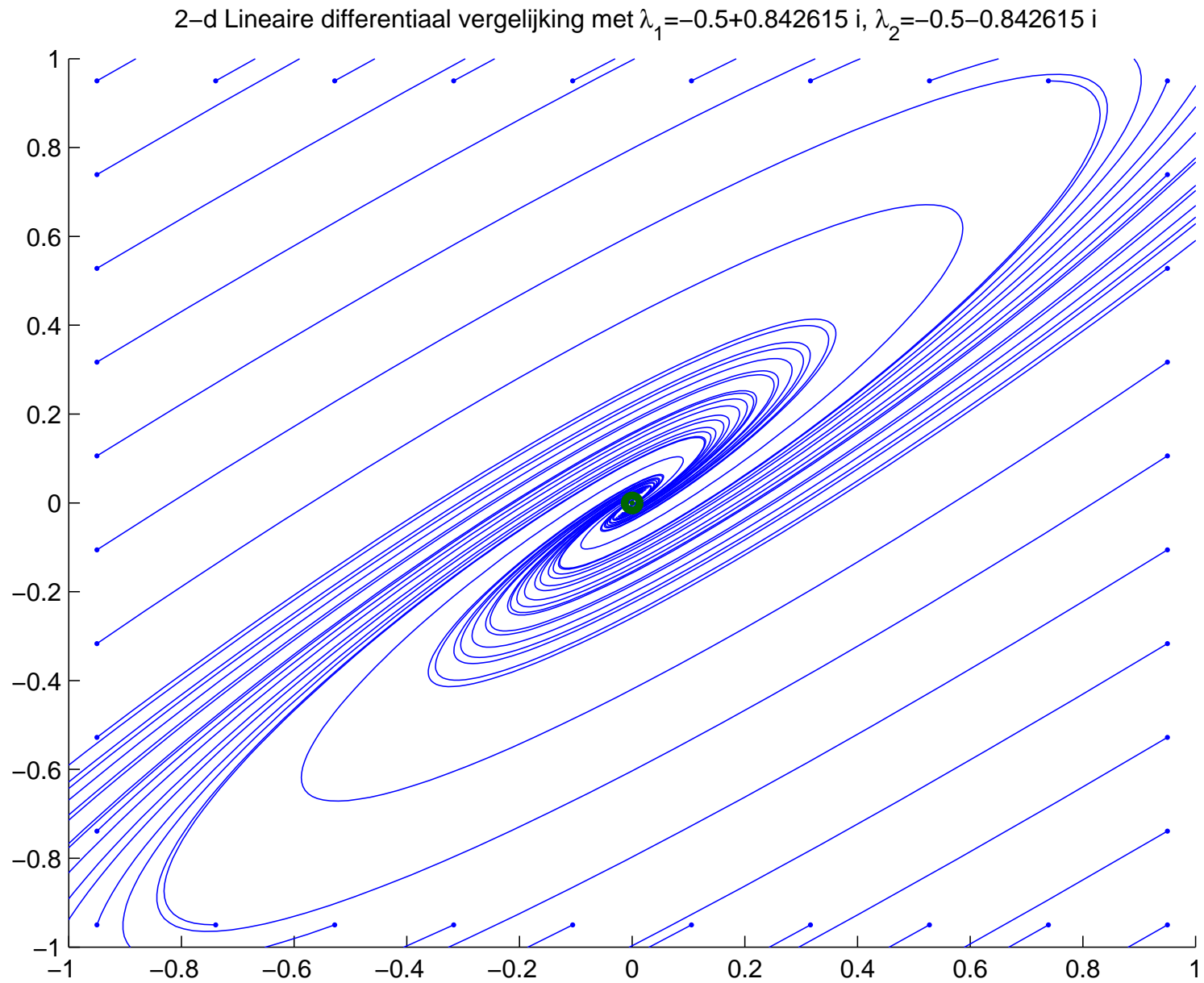
$$\begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} = \operatorname{Re}(\gamma \mathbf{v}_1) = \frac{1}{2} (\gamma \mathbf{v}_1 + \overline{\gamma} \overline{\mathbf{v}_1}) = \frac{1}{2} (\gamma \mathbf{v}_1 + \overline{\gamma} \mathbf{v}_2).$$

$$\begin{aligned} \text{Dus } \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} &= \frac{1}{2} (\gamma e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1 + \overline{\gamma} e^{\lambda_2 t} \mathbf{v}_2) = \operatorname{Re}(\gamma e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1) \\ &= |\gamma| e^{\rho t} \operatorname{Re}(e^{i(\nu t + \phi)} \mathbf{v}_1) \\ &= |\gamma| e^{\rho t} [\cos(\nu t + \phi) \mathbf{w}_1 - \sin(\nu t + \phi) \mathbf{w}_2] \end{aligned}$$

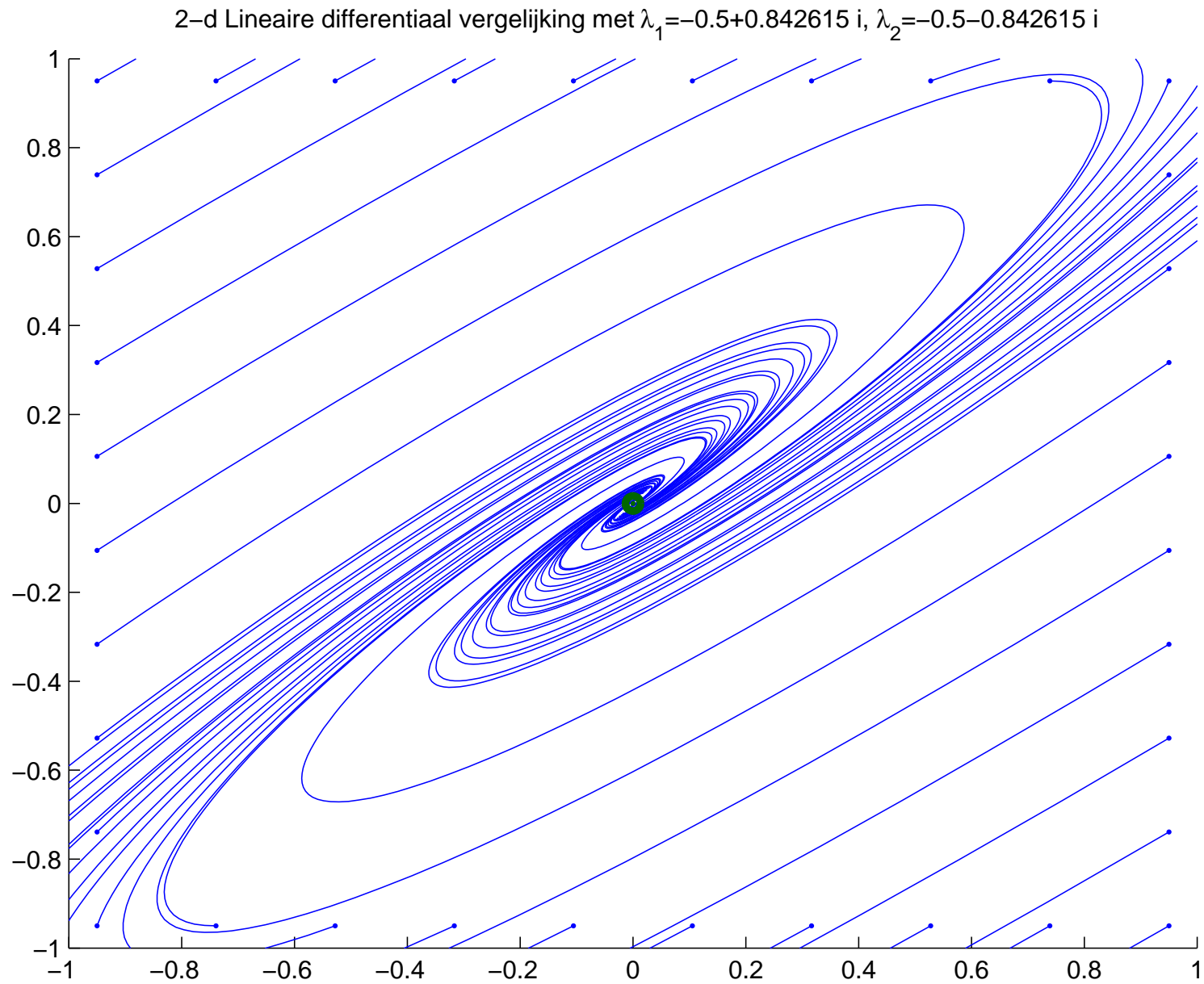
Richtingsveld in het (x, y) -vlak



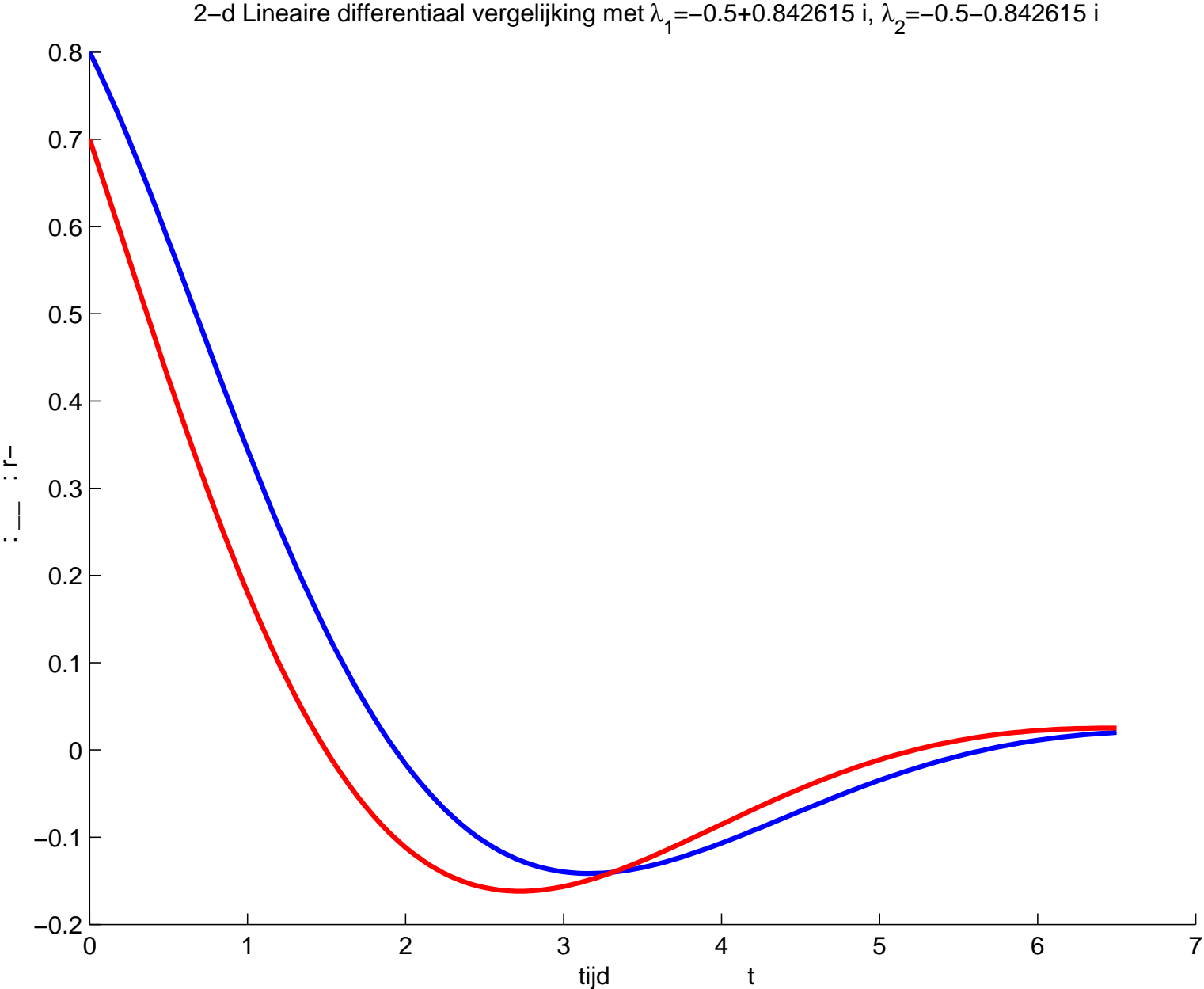
Faseportret in het (x, y) -vlak, $\rho = \text{Re}(\lambda_1) < 0$



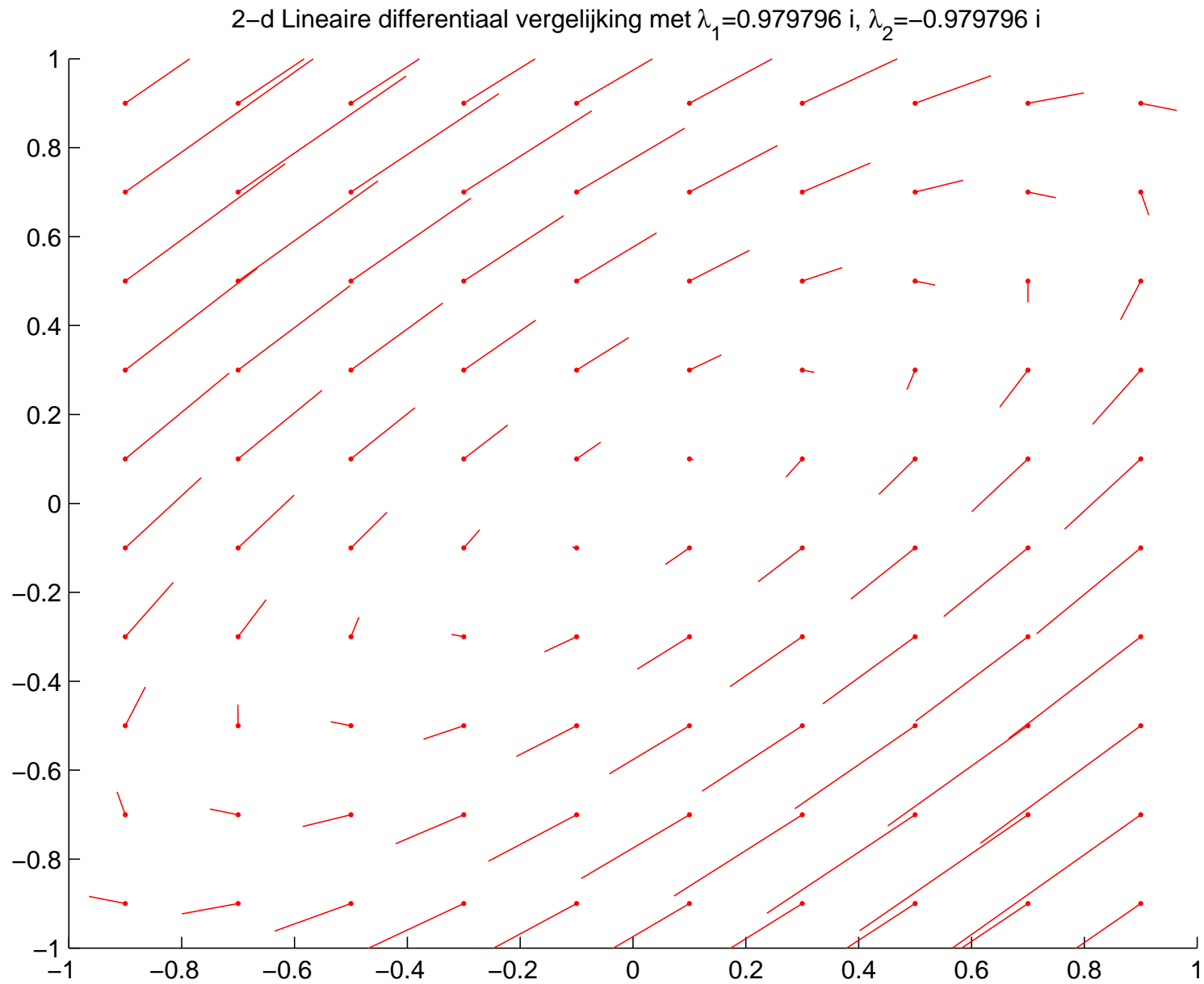
Faseportret in het (x, y) -vlak. **Stabiele spiraal**



De oplossingscomponenten x en y als functie van t

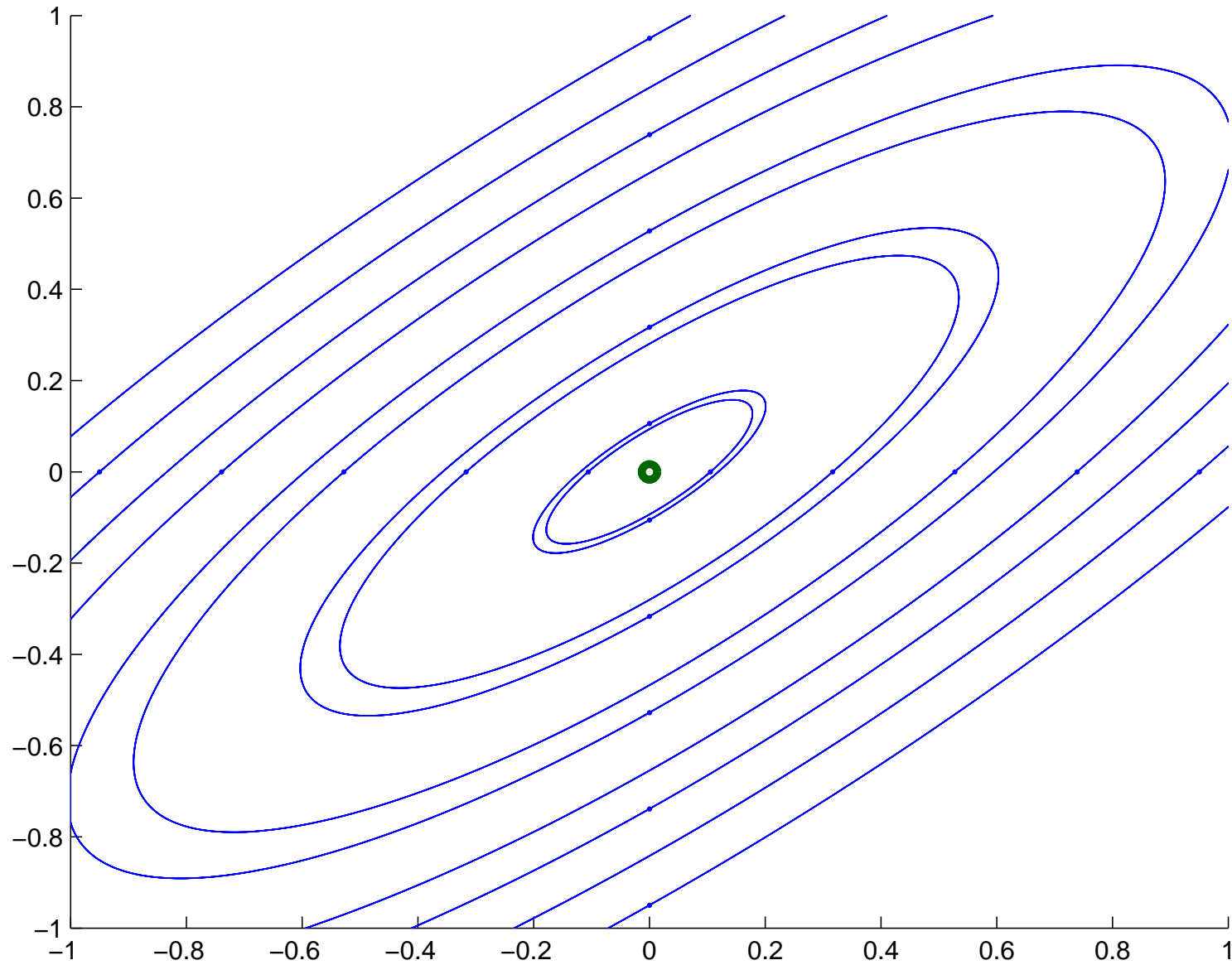


Richtingsveld in het (x, y) -vlak



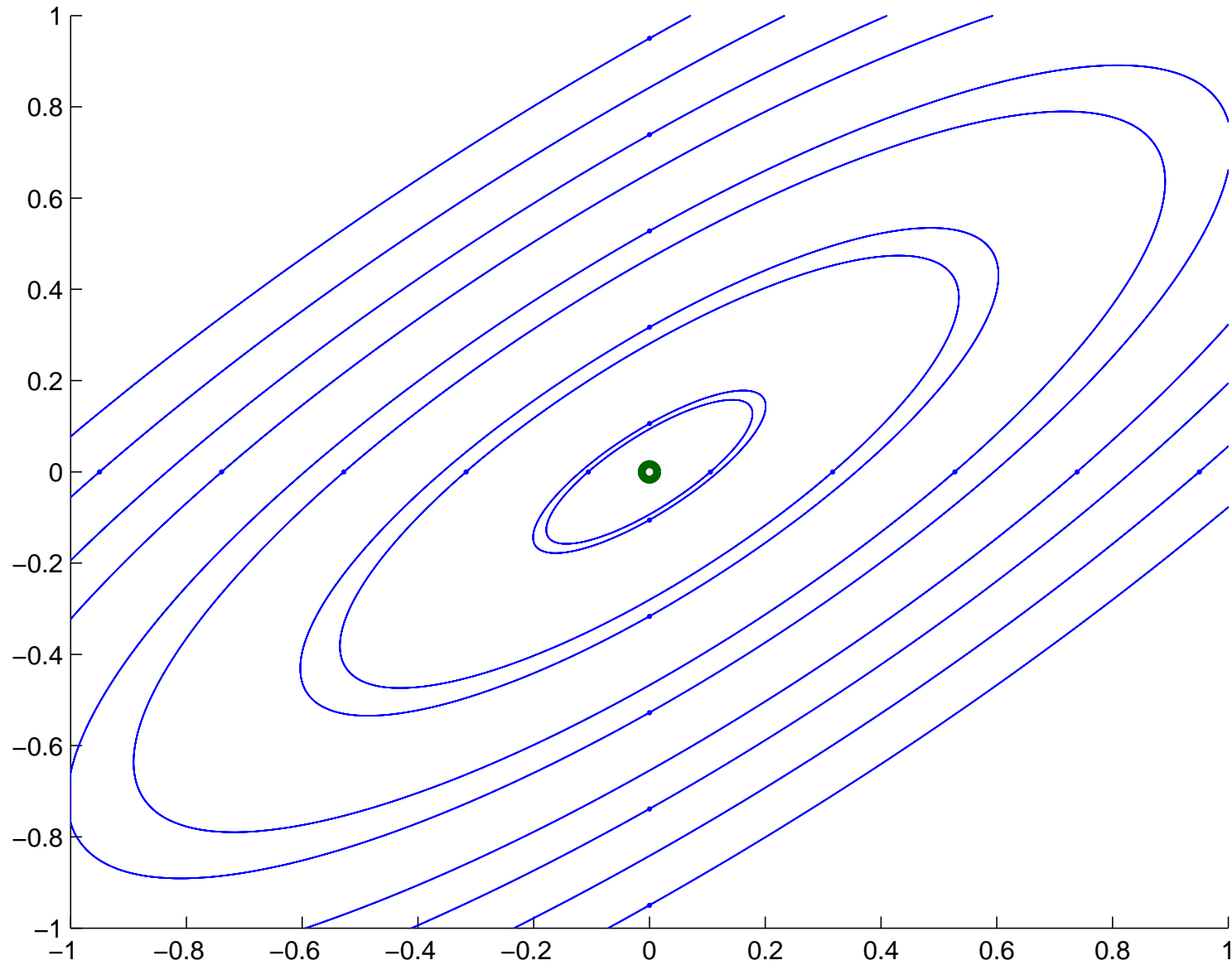
Faseportret in het (x, y) -vlak, $\rho = \text{Re}(\lambda_1) = 0$

2-d Lineaire differentiaal vergelijking met $\lambda_1=0.979796 i$, $\lambda_2=-0.979796 i$



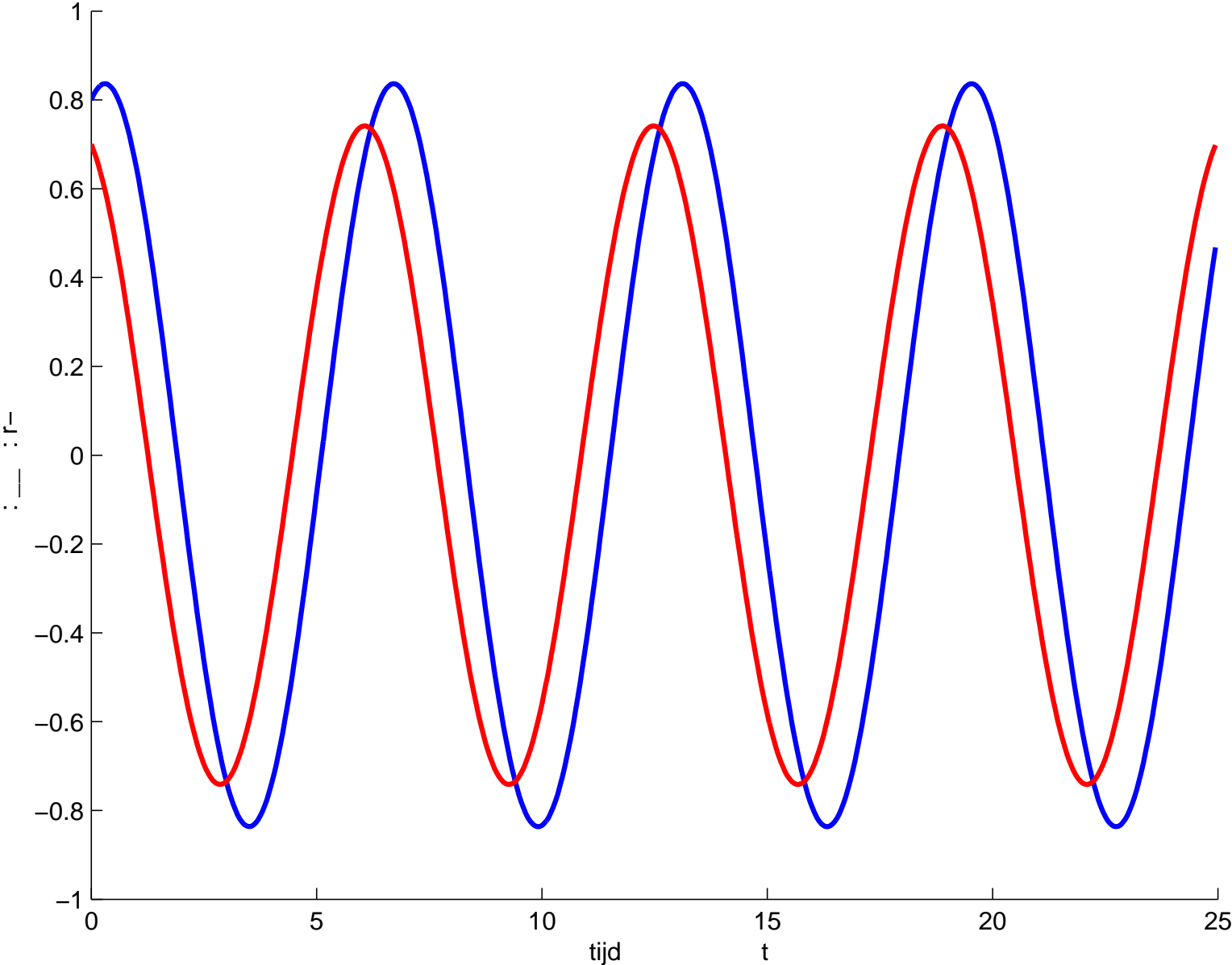
Faseportret in het (x, y) -vlak. **Centrumpunt**

2-d Lineaire differentiaal vergelijking met $\lambda_1=0.979796 i$, $\lambda_2=-0.979796 i$



De oplossingscomponenten x en y als functie van t

2-d Lineaire differentiaal vergelijking met $\lambda_1=0.979796 i$, $\lambda_2=-0.979796 i$



Classificatie evenwichten 2-d (reëel)

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{met} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad a_{ij}, \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \text{ reëel.}$$

\mathbf{A} met eigenwaarden λ_1 en λ_2 .

Classificatie evenwichten 2-d (reëel)

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{met} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad a_{ij}, \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \text{ reëel.}$$

\mathbf{A} met eigenwaarden λ_1 en λ_2 .

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) &= (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12} a_{21} \\ &= \lambda^2 - (a_{11} + a_{22}) \lambda + (a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}) \\ &= \lambda^2 - s \lambda + d \end{aligned}$$

met $d \equiv \det(\mathbf{A}) \equiv a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$

$s \equiv \text{spoor}(\mathbf{A}) \equiv a_{11} + a_{22}$

Classificatie evenwichten 2-d (reëel)

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{met} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad a_{ij}, \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \text{ reëel.}$$

\mathbf{A} met eigenwaarden λ_1 en λ_2 .

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) &= (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12} a_{21} \\ &= \lambda^2 - (a_{11} + a_{22}) \lambda + (a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}) \\ &= \lambda^2 - s \lambda + d \end{aligned}$$

met $d \equiv \det(\mathbf{A}) \equiv a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$

$s \equiv \text{spoor}(\mathbf{A}) \equiv a_{11} + a_{22}$

$$\lambda^2 - s \lambda + d = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)$$

$$\Rightarrow \quad s = \lambda_1 + \lambda_2 \quad \text{en} \quad d = \lambda_1 \lambda_2$$

Classificatie evenwichten 2-d (reëel)

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{met} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad a_{ij}, \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \text{ reëel.}$$

\mathbf{A} met eigenwaarden λ_1 en λ_2 .

$$d \equiv a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} = \det(\mathbf{A}) = \lambda_1 \lambda_2$$

$$s \equiv a_{11} + a_{22} = \text{spoor}(\mathbf{A}) = \lambda_1 + \lambda_2$$

Classificatie evenwichten 2-d (reëel)

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{met} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad a_{ij}, \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \text{ reëel.}$$

\mathbf{A} met eigenwaarden λ_1 en λ_2 .

$$d \equiv a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} = \det(\mathbf{A}) = \lambda_1 \lambda_2$$

$$s \equiv a_{11} + a_{22} = \text{spoor}(\mathbf{A}) = \lambda_1 + \lambda_2$$

$$4d \leq s^2 \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

$$d < 0 \Rightarrow \lambda_2 < 0 < \lambda_1, \quad \text{zadelpunt (instabiel)}$$

$$0 < 4d < s^2, \quad s < 0 \Rightarrow \lambda_2 < \lambda_1 < 0, \quad \text{stabiele knoop}$$

$$s > 0 \Rightarrow 0 < \lambda_2 < \lambda_1, \quad \text{instabiele knoop}$$

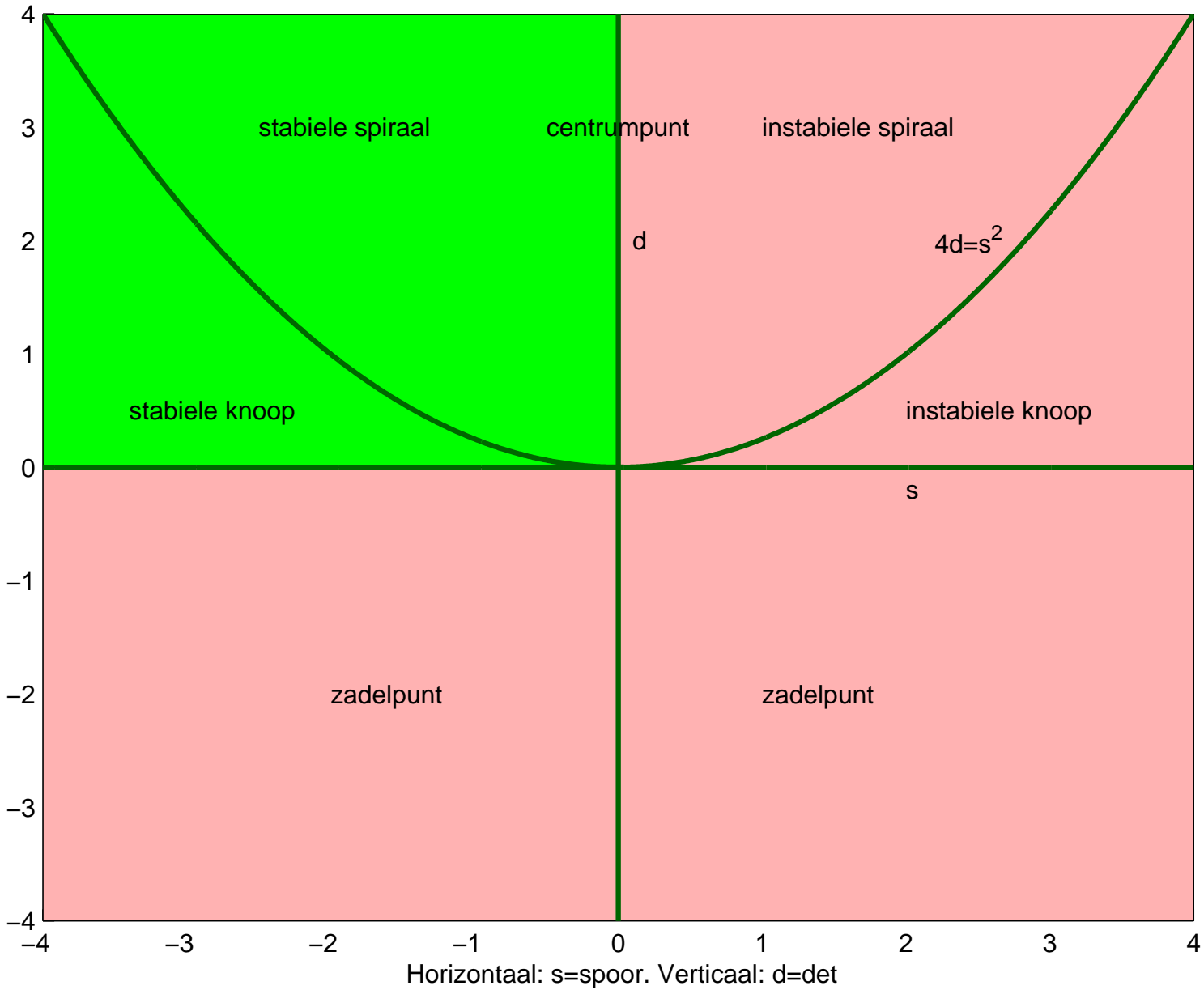
$$4d > s^2 \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2 \notin \mathbb{R}, \quad \text{Re}(\lambda_1) = \text{Re}(\lambda_2)$$

$$s < 0 \Rightarrow \text{Re}(\lambda_1) < 0, \quad \text{stabiel spiraal}$$

$$s > 0 \Rightarrow \text{Re}(\lambda_1) > 0, \quad \text{instabiel spiraal}$$

$$s = 0 \Rightarrow \text{Re}(\lambda_1) = 0, \quad \text{centrumpunt}$$

Overzicht classificatie evenwichten in 2-d



Klassieke oorlogsvoering

$x(t)$ ($y(t)$) is (\approx) het aantal operationele soldaten van een 19-eeuws leger X (resp. Y). De legers X en Y bevechten elkaar in 'n veldslag.

Aanname:

De verliezen van X (Y) zijn evenredig met de 'schietkracht' van Y (resp. X), die evenredig is met het aantal operationele soldaten van Y (resp. X).

Model:

$$\begin{cases} x'(t) = a s_Y y(t) \\ y'(t) = b s_X x(t) \end{cases} \quad \text{voor } t_0 \leq t \leq t_0 + T,$$

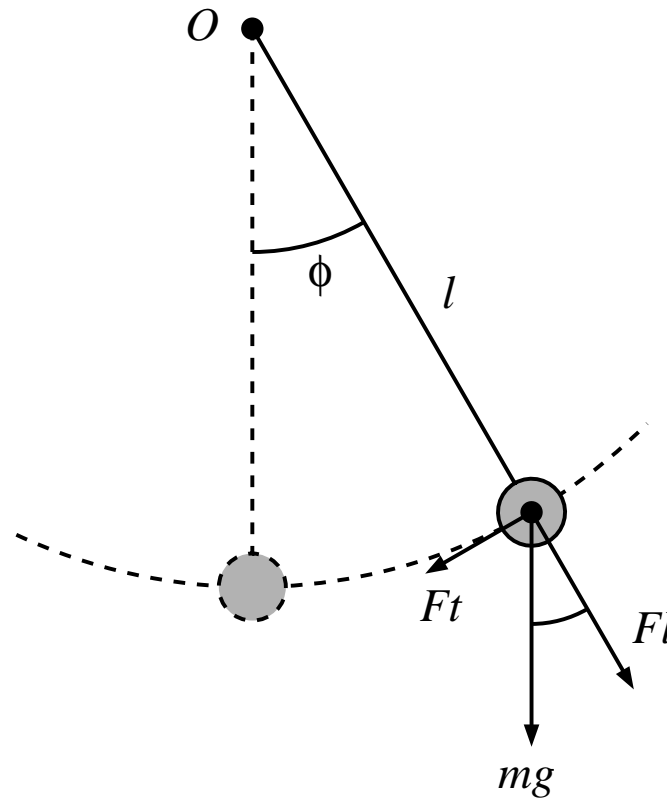
waarbij $a, b < 0$, $s_X, s_Y > 0$ bekend, evenals $x(t_0)$ en $y(t_0)$.

Hoe verloopt het gevecht?

*Kan daaruit $a s_X$ en $b s_Y$ bepaald worden?
Is er evenwicht (stabiel)? Wie wint?*

Program

- Continue modellen
- Voorbeeld
- Oplosmethoden
- Evenwicht, stabiliteit
- Discreet versus continue
- Terminologie
- Meer dimensionale eerste orde modellen
- Een dimensionale hogere orde modellen
- Resonantie
- Meer dimensionale eerste orde modellen, II



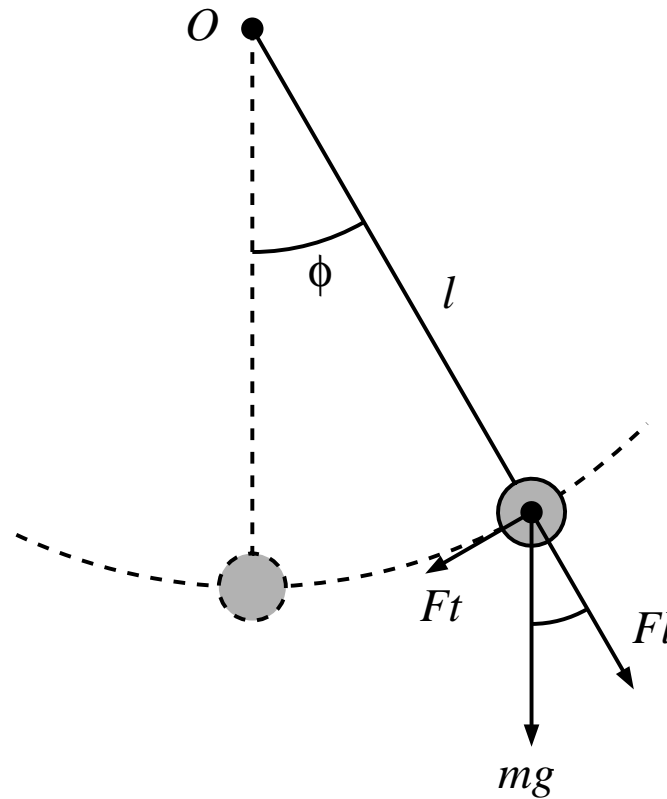
Massa m slingert aan een gewichtsluus touw van lengte l .

Snelheid massa: $v = l \phi'$. Versnelling: $a = l \phi''$.

Effect zwaartekracht (in bewegingsrichting): $F_t = -m g \sin(\phi)$.

Wrijving: $F_w = -c l \phi'$. *Grootte afremming evenredig snelheid.*

Newton. $F = ma \quad \Rightarrow \quad -m g \sin(\phi) - c l \phi' = m l \phi''$



Massa m slingert aan een gewichtsloos touw van lengte l .

Snelheid massa: $v = l \phi'$. Versnelling: $a = l \phi''$.

Effect zwaartekracht (in bewegingsrichting): $F_t = -m g \sin(\phi)$.

Wrijving: $F_w = -c l \phi'$. *Grootte afremming evenredig snelheid.*

Newton. $F = ma \quad \Rightarrow \quad -m g \sin(\phi) - c l \phi' = m l \phi''$

Slinger

$$\phi'' = -\frac{c}{m} \phi' - \frac{g}{\ell} \sin(\phi)$$

Slinger

$$\phi'' = -\frac{c}{m} \phi' - \frac{g}{\ell} \sin(\phi)$$

Niet-lineaire differentiaal vergelijking

$$\sin(\phi) = \phi - \frac{1}{6} \phi^3 \xi \quad \text{zekere } \xi, \text{ met } |\xi| \leq 1.$$

*Laten we in in eerste instantie $\frac{1}{6} \phi^3$ verwaarlozen
(denk aan de situatie waarin $|\phi| < 0.1$).*

Slinger

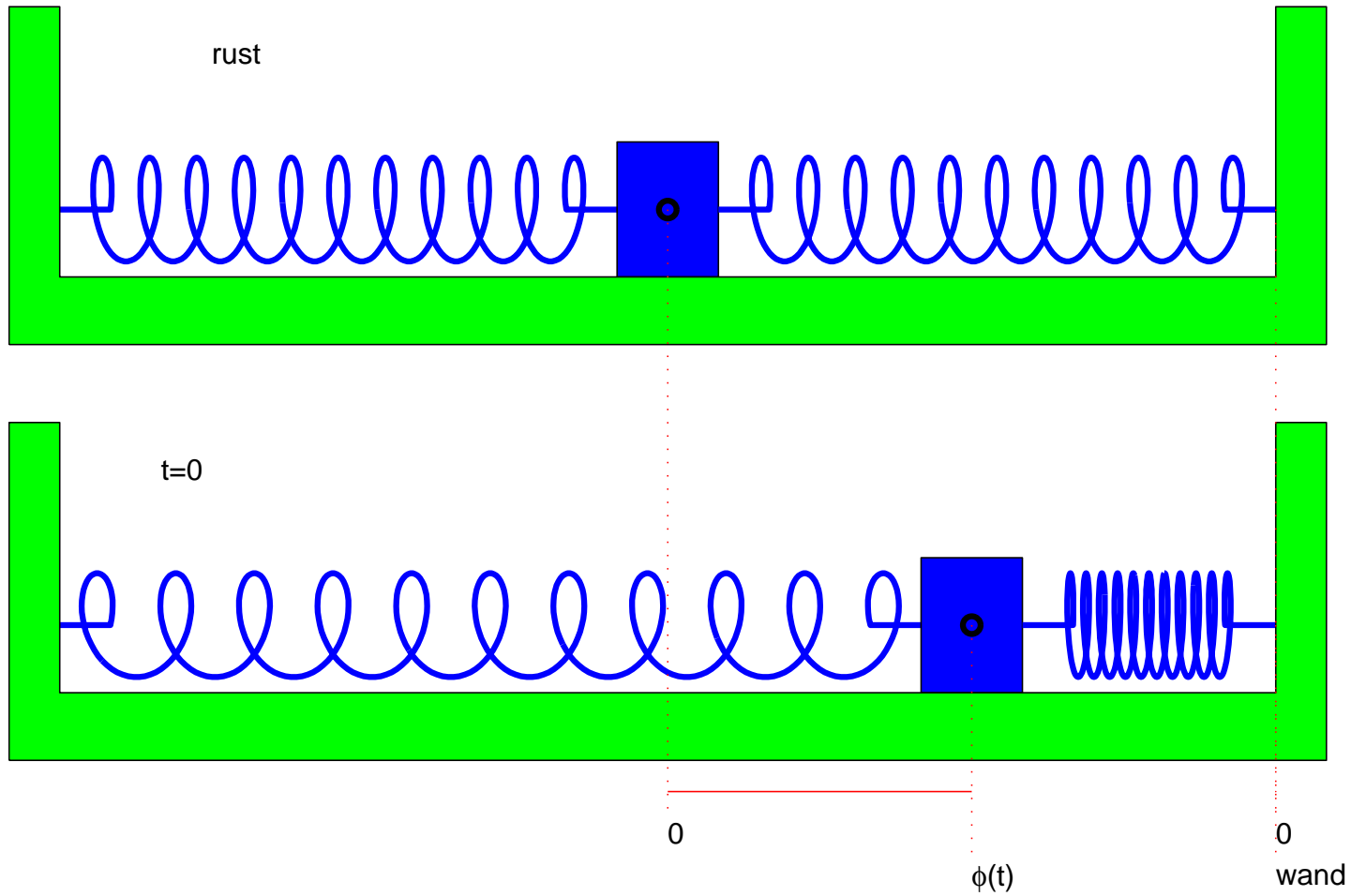
$$\phi'' = -\frac{c}{m}\phi' - \frac{g}{\ell}\phi$$

Slinger

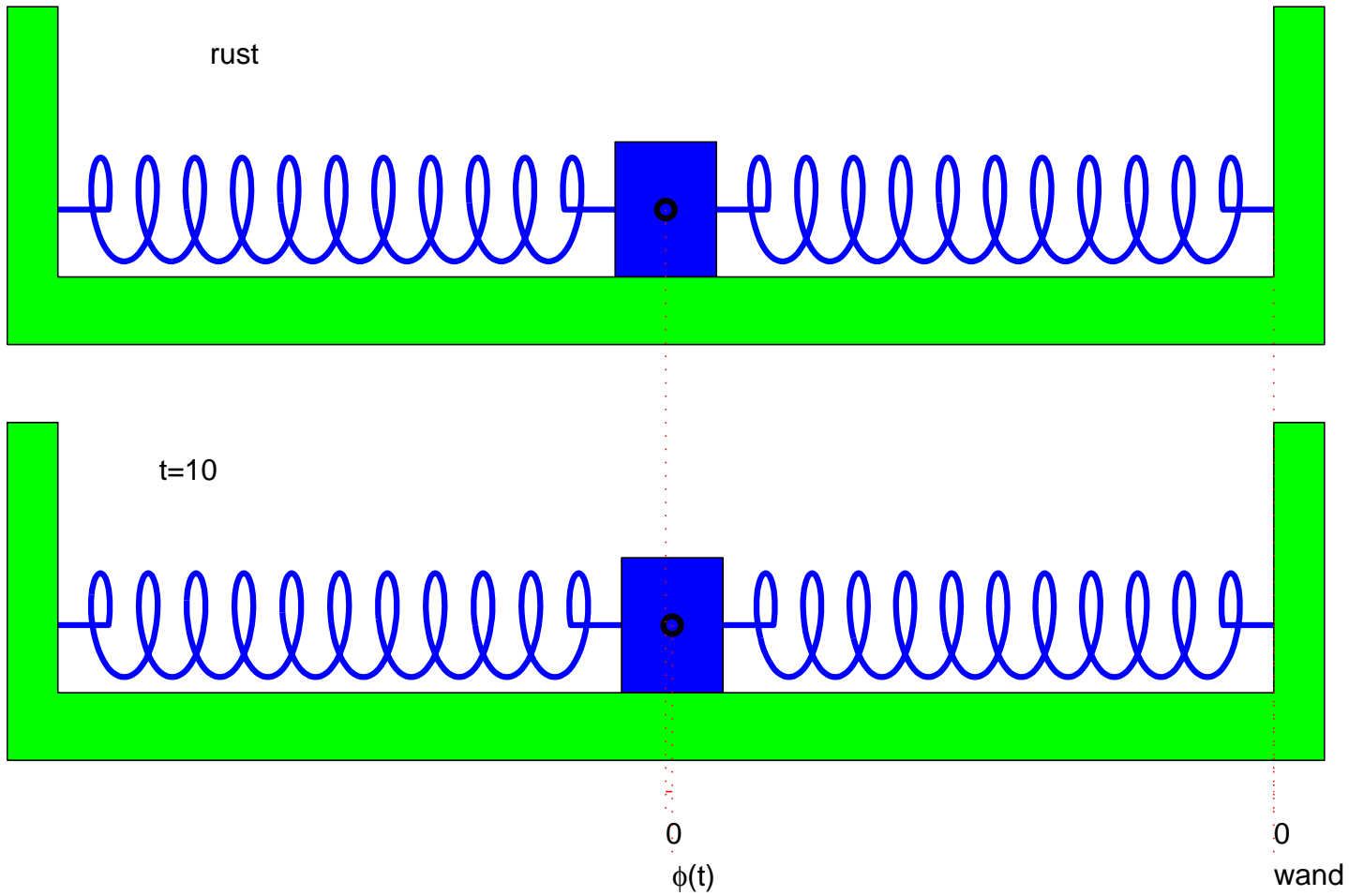
$$\phi'' = -\frac{c}{m} \phi' - \frac{g}{\ell} \phi$$

Lineaire 1-d tweede orde differentiaal vergelijking

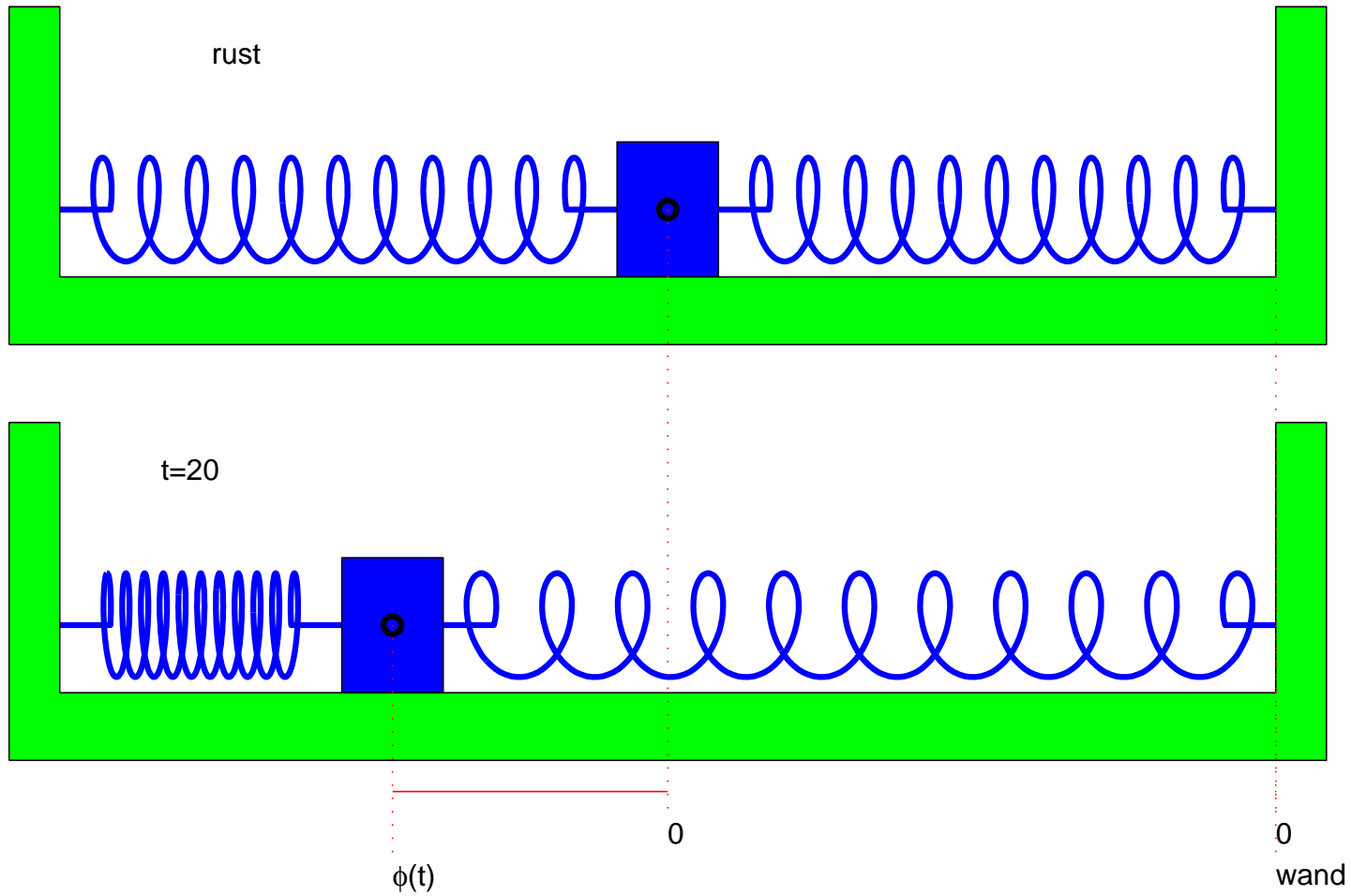
Een systeem met een blokje en twee veren



Een systeem met een blokje en twee veren



Een systeem met een blokje en twee veren



Een verensysteem

We bekijken de afwijking van de positie het blokje van diens rustsituatie (evenwicht). Het blokje is in positie ϕ als het midden van het blokje op afstand ϕ is vanaf het midden van het blokje bij evenwicht. Rechts van het evenwicht is $\phi \geq 0$, links is $\phi \leq 0$.

Beide veren trekken aan het blokje. In evenwicht zijn de resulterende veerkrachten even groot (en tegengesteld). Als het blokje in positie ϕ is, $\phi \neq 0$, dan leveren de veren een extra kracht. Voor veer 1 is die $-k_1\phi$ en voor veer 2 $-k_2\phi$: *de extra kracht is evenredig met de verandering van de lengte van de veer*; k_1 en k_2 zijn **veerkrachtconstanten**. Merk op dat beide krachten dezelfde kant op werken (de ene veer trekt, de andere duwt).

De bewegingsvergelijking

Laten we op tijdstip $t = 0$ het blokje los op positie ϕ_0 , dan zal het blokje bewegen: $\phi = \phi(t)$ is een functie van de tijd met (**beginwaarde**) $\phi(0) = \phi_0$ en $\phi'(0) = 0$.

Op tijdstip t is de veerkracht: $-k_1 \phi(t) - k_2 \phi(t)$.

Bij snelheid $\phi'(t)$ ondervindt het blokje een **wrijvingskracht** $-c \phi'(t)$ waarbij c de **wrijvingscoëfficiënt** is.

Als het blokje versnelt is de vertragende kracht $-m \phi''(t)$: m is de massa van het blokje (Newton).

De som de krachten is 0 (Newton). Dus

$$\begin{cases} m \phi'' + c \phi' + k_1 \phi + k_2 \phi = 0 \\ \phi(0) = \phi_0, \quad \phi'(0) = 0 \end{cases}$$

In plaatjes, $m = 1$, $c = 1$, $k_1 = k_2 = 1$

Tweede orde differentiaal vergelijkingen

$$\phi'' = \alpha \phi' + \beta \phi$$

Tweede orde differentiaal vergelijkingen

$$\phi'' = \alpha \phi' + \beta \phi$$

Companion vorm.

Definieer $y \equiv \phi$, $x \equiv y' = \phi'$.

$$\Rightarrow x' = \phi'' = \alpha x + \beta y$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$$

3-de orde differentiaal vergelijkingen

$$\phi^{(3)} = \alpha_1 \phi^{(2)} + \alpha_2 \phi^{(1)} + \alpha_3 \phi$$

Companion vorm.

Definieer $x_3 \equiv \phi$, $x_2 \equiv \phi^{(1)}$, $x_1 \equiv \phi^{(2)}$.

$$\Rightarrow x_1' = \phi^{(3)} = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_3'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}.$$

Opmerking.

Companion matrix is een Leslie matrix met $s_i = 1$.

3-de orde differentiaal vergelijkingen

$$\phi^{(3)} = \alpha_1 \phi^{(2)} + \alpha_2 \phi^{(1)} + \alpha_3 \phi$$

Companion vorm.

Definieer $x_1 \equiv \phi$, $x_2 \equiv \phi^{(1)}$, $x_3 \equiv \phi^{(2)}$.

$$\Rightarrow x'_3 = \phi^{(3)} = \alpha_1 x_3 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_1$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x'_1(t) \\ x'_2(t) \\ x'_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}.$$

Opmerking.

Er zijn verschillende equivalente manieren om een 1-dimensionaal k -de orde systeem om te schrijven naar een k -dimensionaal eerste orde systeem.

Tweede orde differentiaal vergelijkingen

$$\phi'' = \alpha \phi' + \beta \phi$$

Companion vorm.

Definieer $y \equiv \phi$, $x \equiv y' = \phi'$.

$$\Rightarrow x' = \phi'' = \alpha x + \beta y$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$$

Tweede orde differentiaal vergelijkingen

$$\phi'' = \alpha \phi' + \beta \phi$$

Companion vorm.

Definieer $y \equiv \phi$, $x \equiv y' = \phi'$.

$$\Rightarrow x' = \phi'' = \alpha x + \beta y$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = C_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{v}_2$$

Dus $\phi(t) = y(t) = \gamma_1 e^{\lambda_1 t} + \gamma_2 e^{\lambda_2 t}$

met γ_j is C_j maal de tweede coördinaat van \mathbf{v}_j .

γ_1 en γ_2 te bepalen uit de beginwaarden.

Tweede orde differentiaal vergelijkingen

$$\phi'' = \alpha \phi' + \beta \phi$$

Tweede orde differentiaal vergelijkingen

$$\phi'' = \alpha \phi' + \beta \phi$$

Stelling. Als $\lambda_1 \neq \lambda_2$, dan

$$\phi(t) = y(t) = \gamma_1 e^{\lambda_1 t} + \gamma_2 e^{\lambda_2 t},$$

waarbij λ_1 en λ_2 oplossing van

$$\lambda^2 = \alpha \lambda + \beta$$

en γ_1 en γ_2 zodat $\phi(0) = \gamma_1 + \gamma_2$,

Tweede orde differentiaal vergelijkingen

$$\phi'' = \alpha \phi' + \beta \phi$$

Stelling. Als $\lambda_1 \neq \lambda_2$, dan

$$\phi(t) = y(t) = \gamma_1 e^{\lambda_1 t} + \gamma_2 e^{\lambda_2 t},$$

waarbij λ_1 en λ_2 oplossing van

$$\lambda^2 = \alpha \lambda + \beta$$

en γ_1 en γ_2 zodat

$$\phi(0) = \gamma_1 + \gamma_2,$$

$$\phi'(0) = \gamma_1 \lambda_1 + \gamma_2 \lambda_2$$

3-de orde differentiaal vergelijkingen

$$\phi^{(3)} = \alpha_1 \phi^{(2)} + \alpha_2 \phi^{(1)} + \alpha_3 \phi$$

Stelling. Als $\lambda_i \neq \lambda_j$, voor $i \neq j$ dan

$$\phi(t) = y(t) = \gamma_1 e^{\lambda_1 t} + \gamma_2 e^{\lambda_2 t} + \gamma_3 e^{\lambda_3 t},$$

waarbij λ_j oplossingen zijn van

$$\lambda^3 = \alpha_1 \lambda^2 + \alpha_2 \lambda + \alpha_3$$

en γ_j zodat

$$\phi(0) = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3,$$

$$\phi'(0) = \gamma_1 \lambda_1 + \gamma_2 \lambda_2 + \gamma_3 \lambda_3$$

$$\phi''(0) = \gamma_1 \lambda_1^2 + \gamma_2 \lambda_2^2 + \gamma_3 \lambda_3^2.$$

Slinger

$$\phi'' = -\frac{c}{m}\phi' - \frac{g}{\ell}\phi$$

Slinger

$$\phi'' = -\frac{c}{m} \phi' - \frac{g}{\ell} \phi$$

$$c = 0: \quad \lambda_1 = \overline{\lambda_2} = i\nu \quad \text{met} \quad \nu \equiv \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

$$\phi(t) = \operatorname{Re}(\gamma e^{i\nu t}) = |\gamma| \cos(\nu t + \delta)$$

voor zekere constante $\gamma \in \mathbb{C}$.

Omdat $\gamma \in \mathbb{C}$ is $\gamma = |\gamma| e^{i\delta}$ voor zekere $\delta \in [0, 2\pi)$.

Schrijf $C \equiv |\gamma|$. Dan $C \in \mathbb{R}$.

Slinger

$$\phi'' = -\frac{c}{m} \phi' - \frac{g}{\ell} \phi$$

$$c = 0: \quad \lambda_1 = \overline{\lambda_2} = i\nu \quad \text{met} \quad \nu \equiv \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

$$\phi(t) = C \cos(\nu t + \delta)$$

voor zekere constanten $C \in [0, \infty)$ en $\delta \in [0, 2\pi)$.

Slinger

$$\phi'' = -\frac{c}{m} \phi' - \frac{g}{\ell} \phi$$

$$c = 0: \quad \lambda_1 = \overline{\lambda_2} = i\nu \quad \text{met} \quad \nu \equiv \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

$$\phi(t) = C \cos(\nu t + \delta)$$

voor zekere constanten $C \in [0, \infty)$ en $\delta \in [0, 2\pi)$.

De oplossing ϕ is een **harmonische oscillatie**

met **frequentie** ν ,

fase δ en

amplitude C .

Slinger

$$\phi'' = -\frac{c}{m} \phi' - \frac{g}{\ell} \phi$$

$$c = 0: \quad \lambda_1 = \overline{\lambda_2} = i\nu \quad \text{met} \quad \nu \equiv \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

$$\phi(t) = C \cos(\nu t + \delta)$$

voor zekere constanten $C \in [0, \infty)$ en $\delta \in [0, 2\pi)$.

C en δ hangen af van de **begin voorwaarden**.

Voorbeeld. Als $\phi(0) = \alpha_0$ en $\phi'(0) = 0$ dan

$$\phi(t) = \alpha_0 \cos(\nu t).$$

Slinger

$$\phi'' = -\frac{c}{m} \phi' - \frac{g}{\ell} \phi$$

$$c = 0: \quad \lambda_1 = \overline{\lambda_2} = i\nu \quad \text{met} \quad \nu \equiv \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

$$\phi(t) = C \cos(\nu t + \delta)$$

voor zekere constanten $C \in [0, \infty)$ en $\delta \in [0, 2\pi)$.

$$c > 0: \quad \lambda_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\frac{c^2}{4m^2} - \nu^2} = -\rho \pm \sqrt{\rho^2 - \nu^2}$$

$$\text{met} \quad \rho \equiv \frac{c}{2m} = -\text{Re}(\lambda_1) \quad \text{en} \quad \nu \equiv \sqrt{\frac{g}{\ell}}.$$

λ_1 en λ_2 zijn de nulpunten van

$$p(\lambda) \equiv \lambda^2 + 2\rho\lambda + \nu^2.$$

Slinger

$$\phi'' = -\frac{c}{m} \phi' - \frac{g}{\ell} \phi$$

$$c = 0: \quad \lambda_1 = \overline{\lambda_2} = i\nu \quad \text{met} \quad \nu \equiv \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

$$\phi(t) = C \cos(\nu t + \delta)$$

voor zekere constanten $C \in [0, \infty)$ en $\delta \in [0, 2\pi)$.

$$c > 0: \quad \lambda_{1,2} = -\rho \pm \sqrt{\rho^2 - \nu^2} \quad \text{met} \quad \rho \equiv \frac{c}{2m}, \quad \nu \equiv \sqrt{\frac{g}{\ell}}.$$

$$\rho < \nu: \quad \sqrt{\rho^2 - \nu^2} = i\sqrt{\nu^2 - \rho^2} \quad \text{en}$$

$$\phi(t) = \text{Re} \left(\gamma \exp(-\rho t + i\sqrt{\nu^2 - \rho^2} t) \right)$$

$$\gamma = |\gamma| e^{i\delta} = C e^{i\delta}.$$

Slinger

$$\phi'' = -\frac{c}{m} \phi' - \frac{g}{\ell} \phi$$

$$c = 0: \quad \lambda_1 = \overline{\lambda_2} = i\nu \quad \text{met} \quad \nu \equiv \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

$$\phi(t) = C \cos(\nu t + \delta)$$

voor zekere constanten $C \in [0, \infty)$ en $\delta \in [0, 2\pi)$.

$$c > 0: \quad \lambda_{1,2} = -\rho \pm \sqrt{\rho^2 - \nu^2} \quad \text{met} \quad \rho \equiv \frac{c}{2m}, \quad \nu \equiv \sqrt{\frac{g}{\ell}}.$$

$$\rho < \nu: \quad \phi(t) = C \exp(-\rho t) \cos(\sqrt{\nu^2 - \rho^2} t + \delta)$$

Damping $\rho > 0$: **Oscillerende damping** als $\rho < \nu$

Amplitude verkleint in de tijd met de factor $e^{-\rho t}$

De **frequentie verschuift** van ν naar $\sqrt{\nu^2 - \rho^2}$.

Slinger

$$\phi'' = -\frac{c}{m} \phi' - \frac{g}{\ell} \phi$$

$$c = 0: \quad \lambda_1 = \overline{\lambda_2} = i\nu \quad \text{met} \quad \nu \equiv \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

$$\phi(t) = C \cos(\nu t + \delta)$$

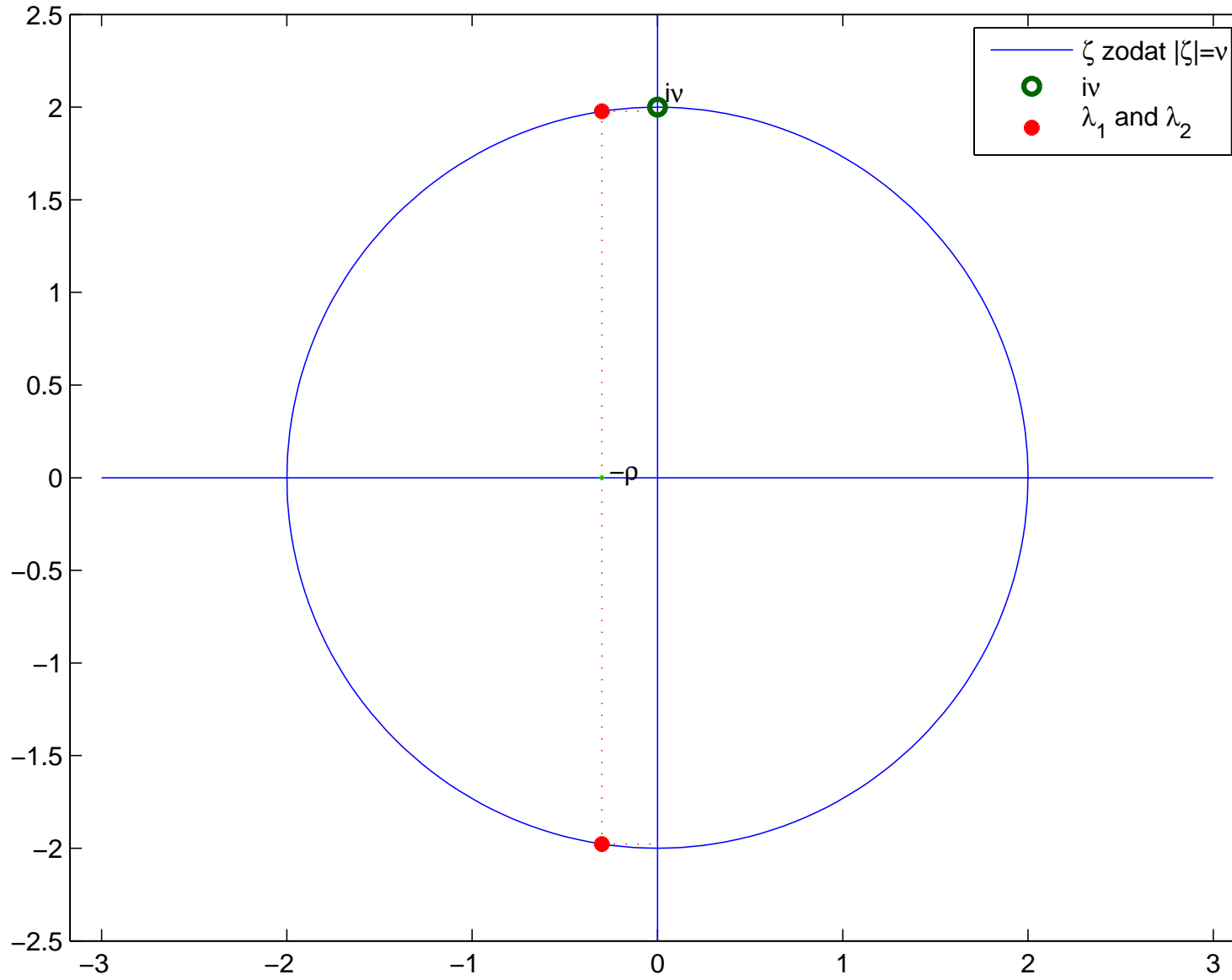
voor zekere constanten $C \in [0, \infty)$ en $\delta \in [0, 2\pi)$.

$$c > 0: \quad \lambda_{1,2} = -\rho \pm \sqrt{\rho^2 - \nu^2} \quad \text{met} \quad \rho \equiv \frac{c}{2m}, \quad \nu \equiv \sqrt{\frac{g}{\ell}}.$$

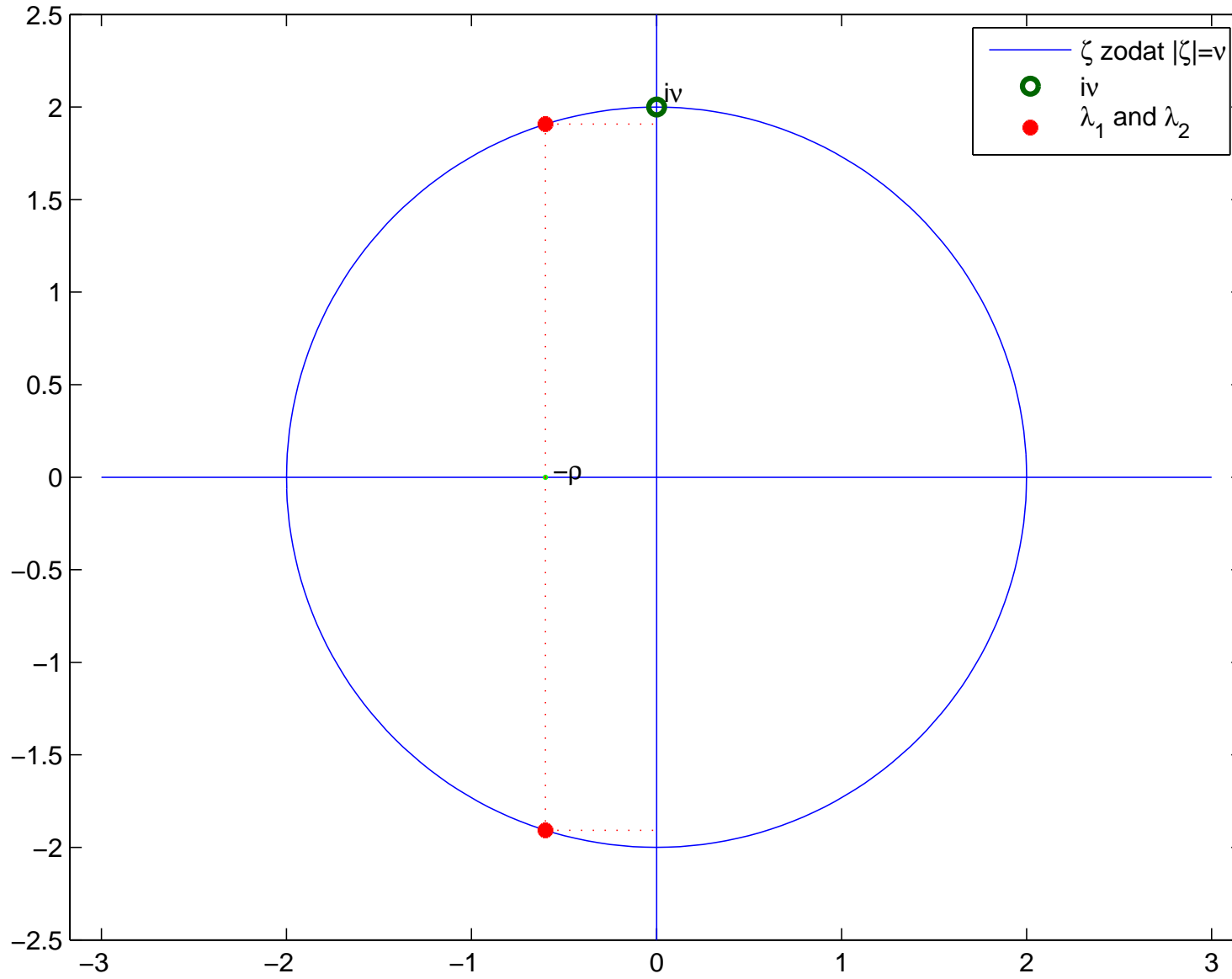
$$\rho < \nu: \quad \phi(t) = C \exp(-\rho t) \cos(\sqrt{\nu^2 - \rho^2} t + \delta)$$

Opmerking. $|\lambda_1| = |\lambda_2| = \nu$. Als $\rho \ll \nu$ dan $\sqrt{\nu^2 - \rho^2} \approx \nu$.

In het complexe vlak, λ_1 en λ_2 met $-\rho = \text{Re}(\lambda_1) < 0$ en $|\lambda_1| = v$



In het complexe vlak, λ_1 en λ_2 met $-\rho = \text{Re}(\lambda_1) < 0$ en $|\lambda_1| = v$



Slinger

$$\phi'' = -\frac{c}{m} \phi' - \frac{g}{\ell} \phi$$

$$c = 0: \quad \lambda_1 = \overline{\lambda_2} = i\nu \quad \text{met} \quad \nu \equiv \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

$$\phi(t) = C \cos(\nu t + \delta)$$

voor zekere constanten $C \in [0, \infty)$ en $\delta \in [0, 2\pi)$.

$$c > 0: \quad \lambda_{1,2} = -\rho \pm \sqrt{\rho^2 - \nu^2} \quad \text{met} \quad \rho \equiv \frac{c}{2m}, \quad \nu \equiv \sqrt{\frac{g}{\ell}}.$$

$$\rho < \nu: \quad \phi(t) = C \exp(-\rho t) \cos(\sqrt{\nu^2 - \rho^2} t + \delta)$$

Opmerking. $|\lambda_1| = |\lambda_2| = \nu$. Als $\rho \ll \nu$ dan $\sqrt{\nu^2 - \rho^2} \approx \nu$.

Conclusie. *Damping is 'sterker' dan frequentieverschuiving.*

Vb. $\nu = 1$, $\frac{c}{m} = 0.1$. Dan $\sqrt{\rho^2 - \nu^2} = i\sqrt{0.9975} = i0.9987\dots$

$$\phi(t) = C \exp(-0.05 t) \cos(0.9987 t + \delta).$$

Slinger

$$\phi'' = -\frac{c}{m} \phi' - \frac{g}{\ell} \phi$$

$$c = 0: \quad \lambda_1 = \overline{\lambda_2} = i\nu \quad \text{met} \quad \nu \equiv \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

$$\phi(t) = C \cos(\nu t + \delta)$$

voor zekere constanten $C \in [0, \infty)$ en $\delta \in [0, 2\pi)$.

$$c > 0: \quad \lambda_{1,2} = -\rho \pm \sqrt{\rho^2 - \nu^2} \quad \text{met} \quad \rho \equiv \frac{c}{2m}, \quad \nu \equiv \sqrt{\frac{g}{\ell}}.$$

$$\rho < \nu: \quad \phi(t) = C \exp(-\rho t) \cos(\sqrt{\nu^2 - \rho^2} t + \delta)$$

$$\rho \geq \nu: \quad \sqrt{\rho^2 - \nu^2} \in \mathbb{R}$$

$$\phi(t) = C_1 \exp([- \rho + \sqrt{\rho^2 - \nu^2}]t) + C_2 \exp([- \rho - \sqrt{\rho^2 - \nu^2}]t)$$

$$\phi(t) \approx C_1 \exp([- \rho + \sqrt{\rho^2 - \nu^2}]t) \quad \text{voor } t \rightarrow \infty$$

Slinger

$$\phi'' = -\frac{c}{m} \phi' - \frac{g}{\ell} \phi$$

$$c = 0: \quad \lambda_1 = \overline{\lambda_2} = i\nu \quad \text{met} \quad \nu \equiv \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

$$\phi(t) = C \cos(\nu t + \delta)$$

voor zekere constanten $C \in [0, \infty)$ en $\delta \in [0, 2\pi)$.

$$c > 0: \quad \lambda_{1,2} = -\rho \pm \sqrt{\rho^2 - \nu^2} \quad \text{met} \quad \rho \equiv \frac{c}{2m}, \quad \nu \equiv \sqrt{\frac{g}{\ell}}.$$

$$\rho < \nu: \quad \phi(t) = C \exp(-\rho t) \cos(\sqrt{\nu^2 - \rho^2} t + \delta)$$

$$\rho \geq \nu: \quad \phi(t) \approx C_1 \exp\left([- \rho + \sqrt{\rho^2 - \nu^2}]t\right) \quad \text{voor } t \rightarrow \infty$$

Demping $\rho > 0$: **Kritische demping** als $\rho = \nu$.

Overdemping als $\rho > \nu$

Slinger

$$\phi'' = -\frac{c}{m} \phi' - \frac{g}{\ell} \phi$$

$$c = 0: \quad \lambda_1 = \overline{\lambda_2} = i\nu \quad \text{met} \quad \nu \equiv \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

$$\phi(t) = C \cos(\nu t + \delta)$$

voor zekere constanten $C \in [0, \infty)$ en $\delta \in [0, 2\pi)$.

$$c > 0: \quad \lambda_{1,2} = -\rho \pm \sqrt{\rho^2 - \nu^2} \quad \text{met} \quad \rho \equiv \frac{c}{2m}, \quad \nu \equiv \sqrt{\frac{g}{\ell}}.$$

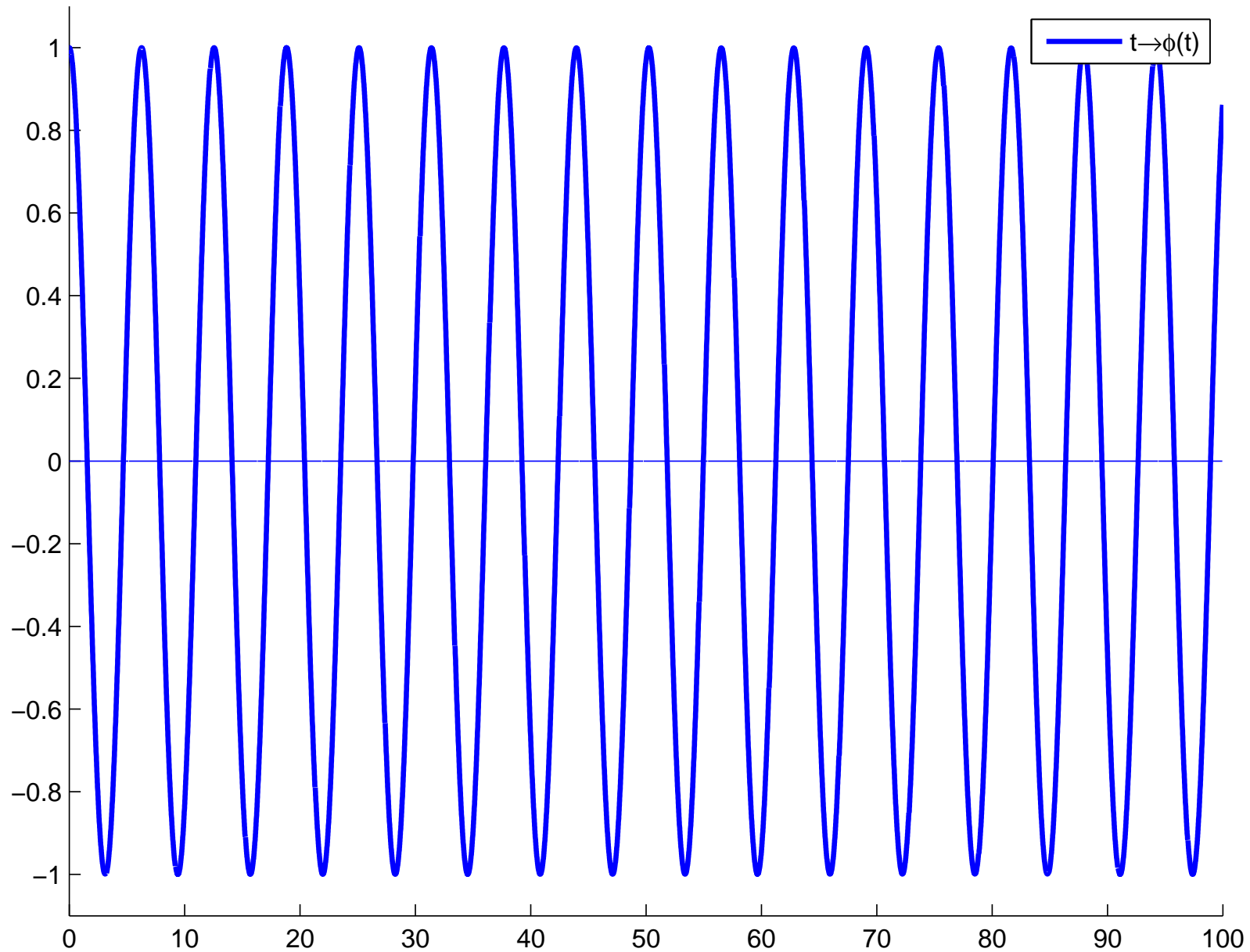
$$\rho < \nu: \quad \phi(t) = C \exp(-\rho t) \cos(\sqrt{\nu^2 - \rho^2} t + \delta)$$

Damping $\rho > 0$: **oscillerende demping** als $\rho < \nu$
 kritische demping als $\rho = \nu$
 overdemping als $\rho > \nu$

Kritische demping: “snelst” terug naar de rust situatie

Geen demping, harmonische oscillatie ($0 = \rho$)

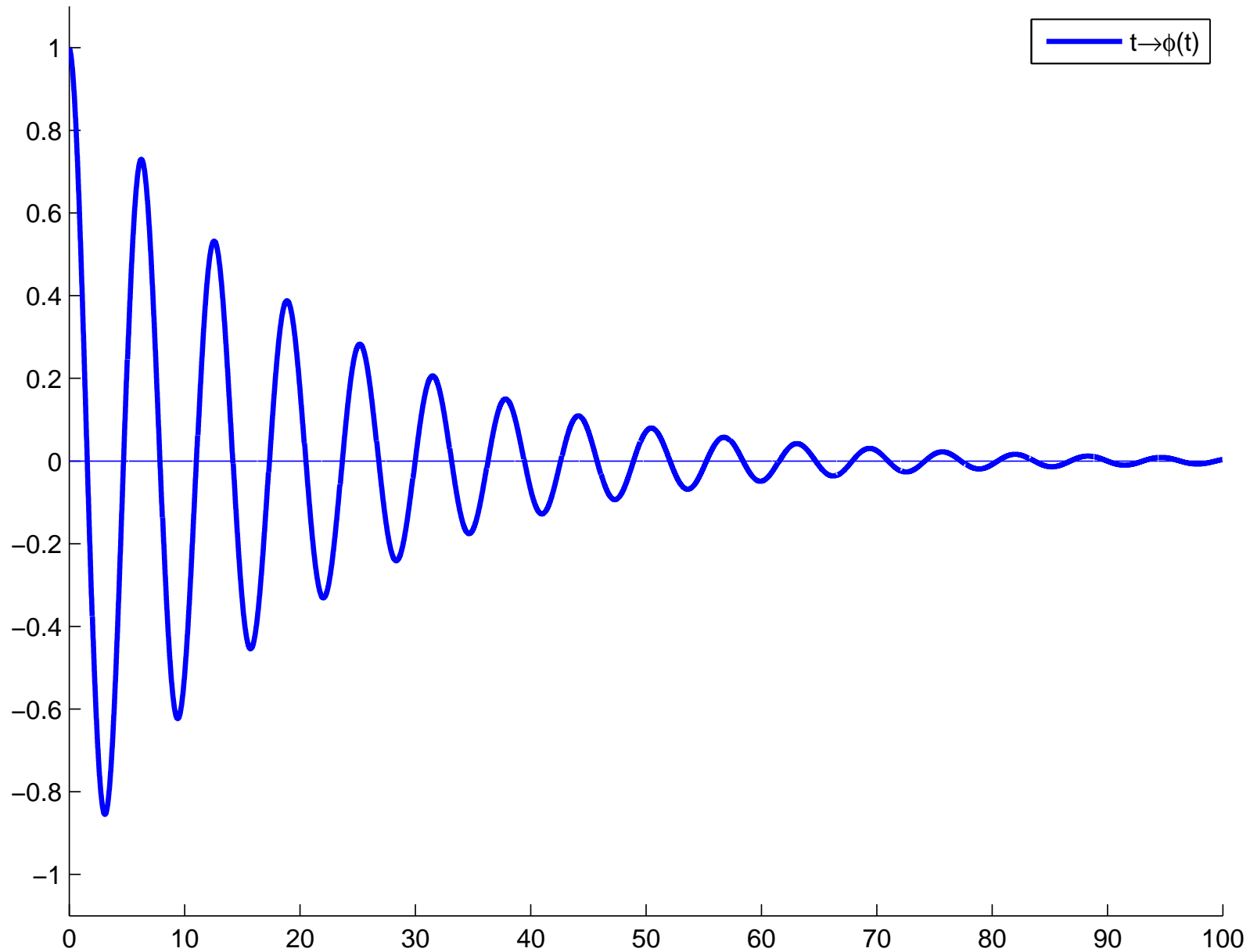
Gedempte slinger, $\nu=1$, $c/l=0$



Oscillerende demping

$$(0 < \rho < \nu)$$

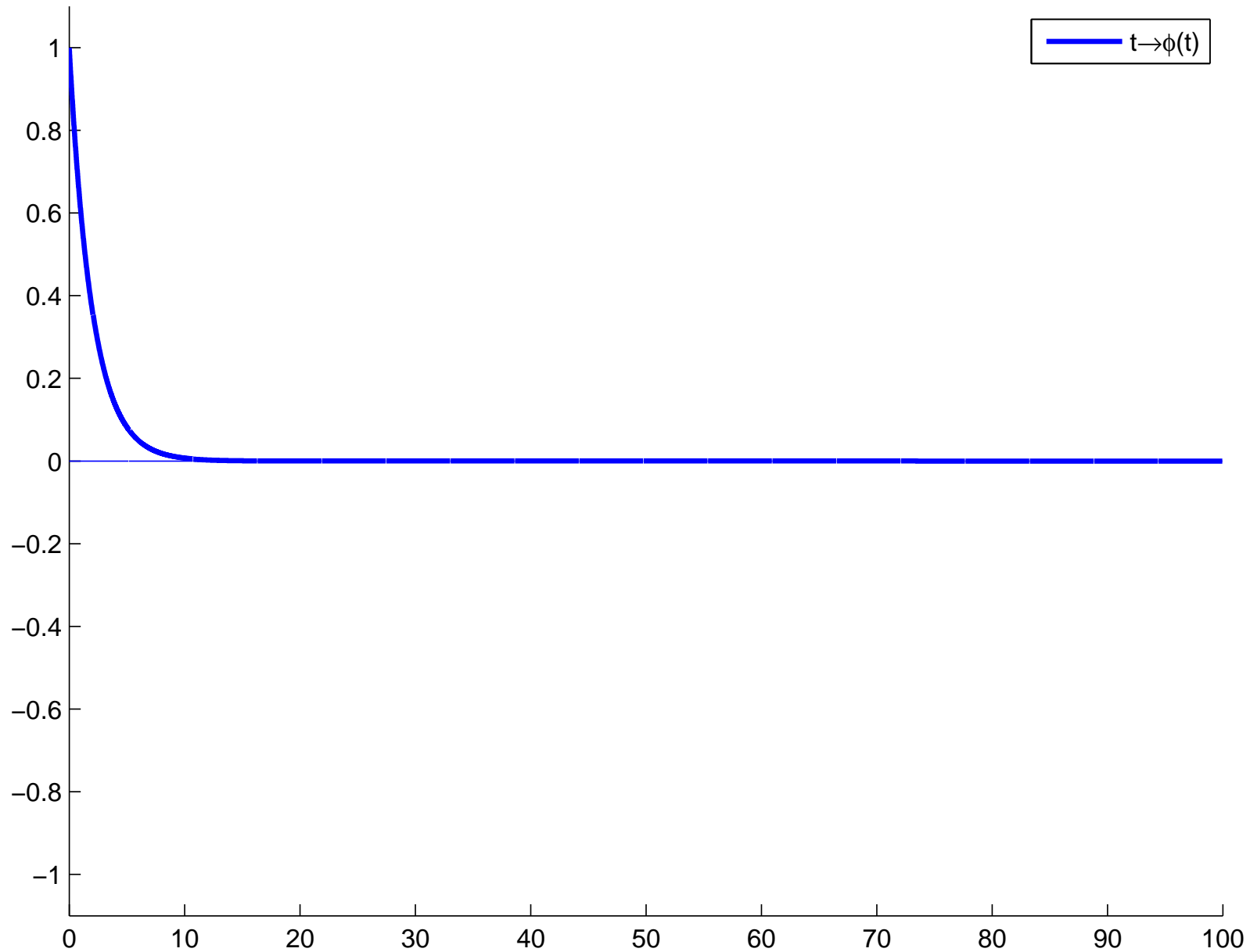
Gedempte slinger, $\nu=1$, $c/l=0.1$



Kritische demping

$$(\rho = \nu)$$

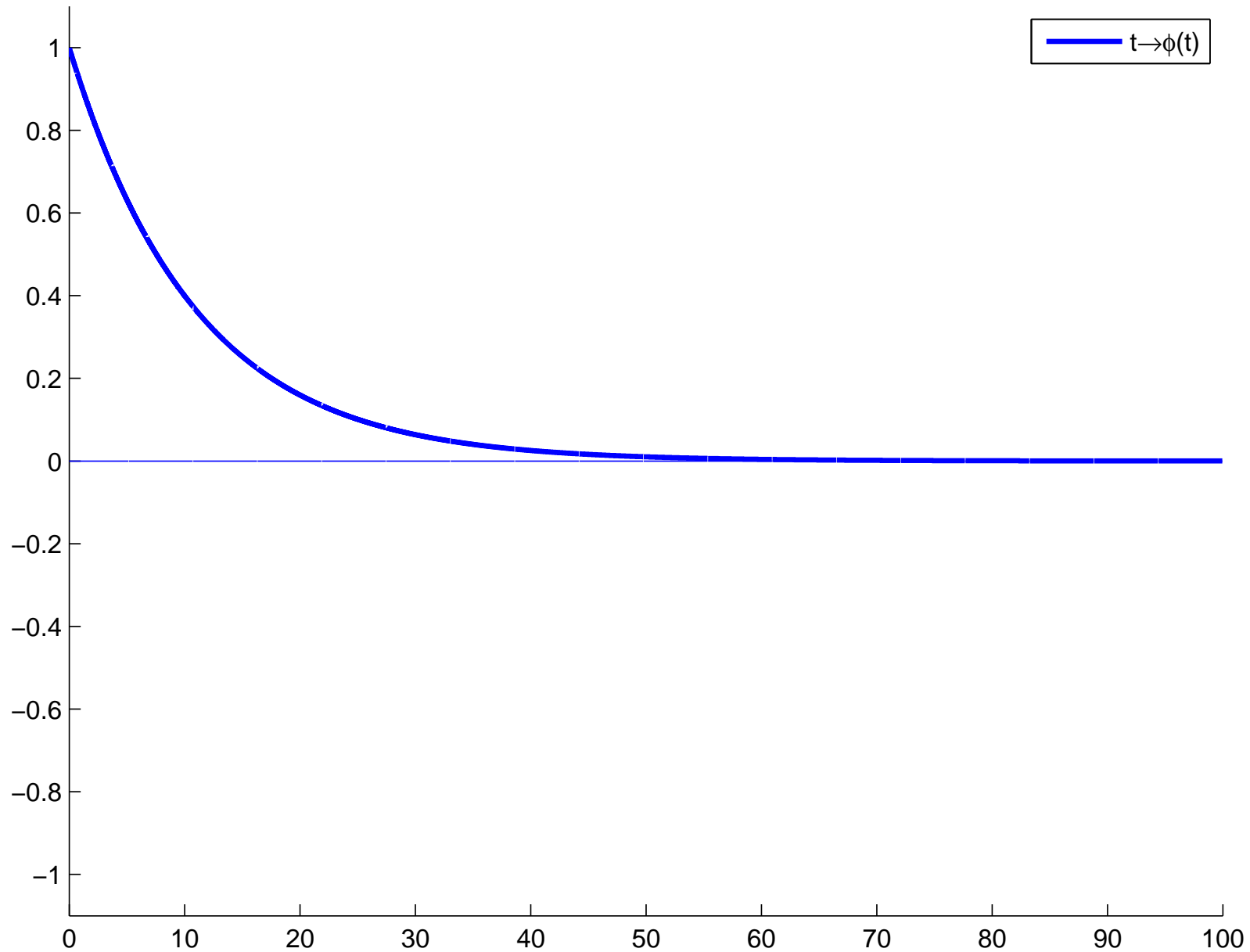
Gedempte slinger, $\nu=1$, $c/l=1$



Overdamping

$$(\rho > \nu)$$

Gedempte slinger, $\nu=1$, $c/l=1.1$



Slinger

$$\phi'' = -\frac{c}{m}\phi' - \frac{g}{\ell}\phi$$

Wiskunde: λ_i **eigenwaarden** (van het systeem).

Dagelijks taalgebruik:

$\text{Im}(\lambda_i)$ **eigenfrequentie** van het systeem.

Slinger

$$\phi'' = -\frac{c}{m}\phi' - \frac{g}{\ell}\phi$$

Wiskunde: λ_i **eigenwaarden** (van $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{c}{m} & -\frac{g}{\ell} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$).

Dagelijks taalgebruik:

$\text{Im}(\lambda_i)$ **eigenfrequentie** van het systeem.

Slinger

$$\phi'' = -\frac{c}{m} \phi' - \frac{g}{\ell} \phi$$

Wiskunde: λ_i **eigenwaarden** (van $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{c}{m} & -\frac{g}{\ell} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$).

Dagelijks taalgebruik:

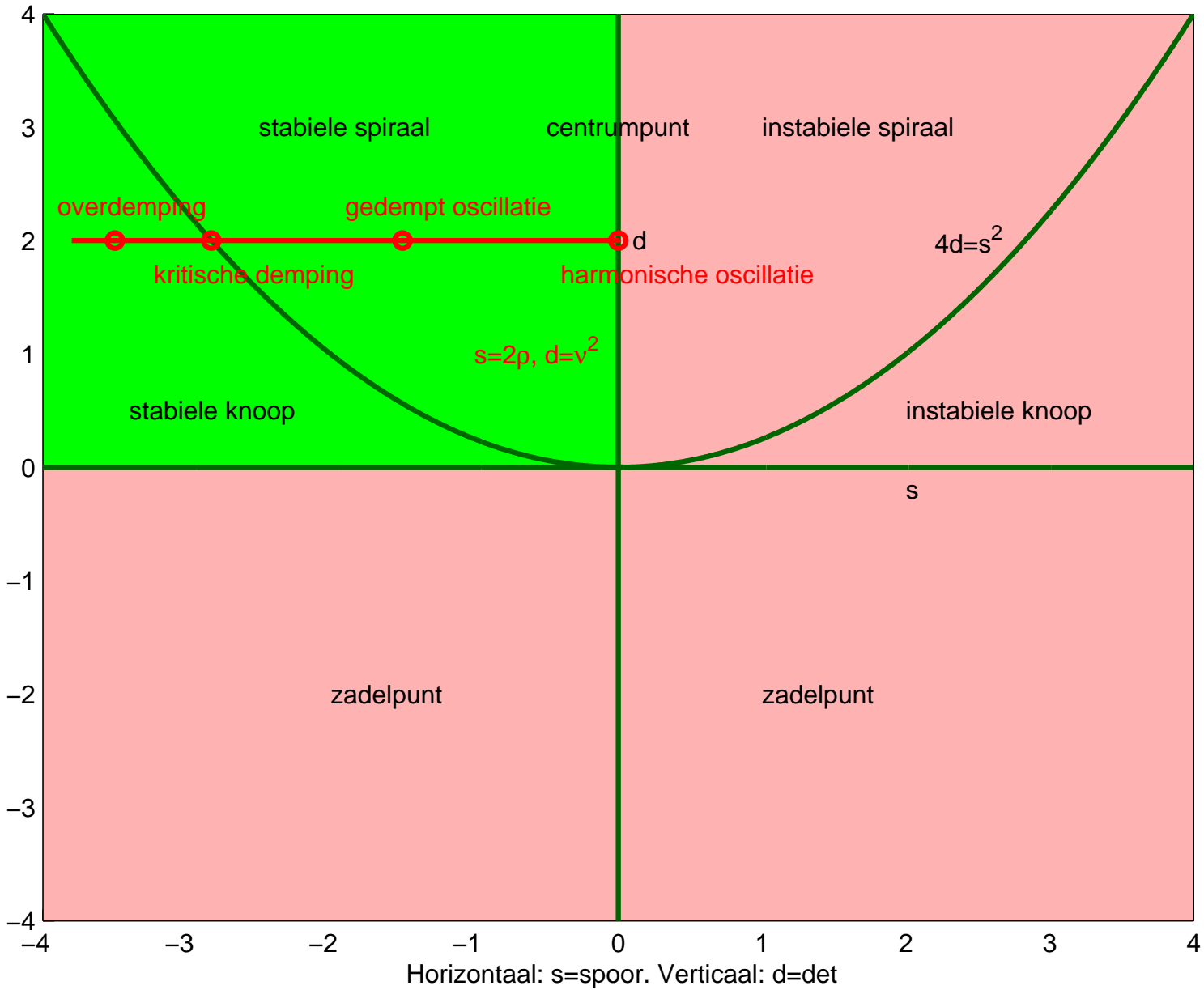
$\text{Im}(\lambda_i)$ **eigenfrequentie** van het systeem.

$$p(\lambda) \equiv \lambda^2 + \frac{c}{m} \lambda + \frac{g}{\ell} = 0$$

$$s = \text{spoor} = -\frac{c}{m} = -2\rho \quad \text{en} \quad d = \det = \frac{g}{\ell} = \nu^2.$$

c verhogen (= wrijving verhogen = demping verhogen) betekent spoor verlagen.

De Slinger: s en d bij oplopende wrijving (damping)



Slinger

$$\phi'' = -\frac{c}{m} \phi' - \frac{g}{\ell} \phi$$

Opmerkingen.

- In de bovenstaande analyse hebben we aangenomen dat $\phi(t)$ voor iedere t zo klein is dat $\sin(\phi(t)) \approx \phi(t)$.
(In een volgende les laten we deze aanname vallen.)
- Verder hebben we aangenomen dat de grootte van de wrijving evenredig is met de grootte van de snelheid. In geval van luchtweerstand is dit maar alleen correct bij lage snelheden (de wet van Stokes). Bij grotere snelheden is de wrijving door luchtweerstand evenredig met de snelheid in het kwadraat (wet van Rayleigh).

Program

- Continue modellen
- Voorbeeld
- Oplosmethoden
- Evenwicht, stabiliteit
- Discreet versus continue
- Terminologie
- Meer dimensionale eerste orde modellen
- Een dimensionale hogere orde modellen
- Resonantie
- Meer dimensionale eerste orde modellen, II

Slinger

$$\phi'' + \frac{c}{m} \phi' + \frac{g}{\ell} \phi = 0$$

Slinger

$$\phi'' + \frac{c}{m} \phi' + \frac{g}{\ell} \phi = \cos(\mu t)$$

De inhomogene term (in dit geval $\cos(\mu t)$) wordt ook wel **aandrijving** of **forcing** term genoemd.

we zullen straks zien waarom.

Slinger

$$\phi'' + \frac{c}{m} \phi' + \frac{g}{\ell} \phi = \cos(\mu t)$$

Opmerking. Als $\phi = \phi_{\text{part}}$ een oplossing is van

$$\phi'' + \frac{c}{m} \phi' + \frac{g}{\ell} \phi = \cos(\mu t)$$

dan is $\phi = \varepsilon \phi_{\text{part}}$ een oplossing is van

$$\phi'' + \frac{c}{m} \phi' + \frac{g}{\ell} \phi = \varepsilon \cos(\mu t)$$

Slinger

$$\phi'' + \frac{c}{m} \phi' + \frac{g}{\ell} \phi = \cos(\mu t)$$

Iedere oplossing is

$$\phi = \phi_{\text{part}} + \phi_{\text{hom}}$$

de som van een particuliere oplossing ϕ_{part} en een oplossing ϕ_{hom} van het homoge deel van de differentiaalvergelijking.

Opmerking. De beginwaarden $\phi(0)$ en $\phi'(0)$ leggen de oplossing van het homogene deel vast, en daarmee de oplossing.

Slinger

$$\phi'' + \frac{c}{m} \phi' + \frac{g}{\ell} \phi = \cos(\mu t)$$

De (algemene) oplossing ϕ_{hom} homogeen deel is bekend
(zie vorige transparanten).

We bepalen nu een particuliere oplossing ϕ_{part} .

Opmerking. Als $c > 0$ en $c \approx 0$, dan dempt de oplossing van het homogene deel uit: **op den duur is de oplossing** $\approx \phi_{\text{part}}$.

In het bijzonder: $\phi(0)$, $\phi'(0)$ spelen op den duur geen rol.

Slinger

$$\phi'' + \frac{c}{m} \phi' + \frac{g}{\ell} \phi = \cos(\mu t)$$

De (algemene) oplossing ϕ_{hom} homogeen deel is bekend
(zie vorige transparanten).

We bepalen nu een particuliere oplossing ϕ_{part} .

Opmerking. Als $c > 0$ en $c \approx 0$, dan dempt de oplossing van het homogene deel uit: **op den duur is de oplossing** $\approx \phi_{\text{part}}$.

In het bijzonder: $\phi(0)$, $\phi'(0)$ spelen op den duur geen rol.

Voor kleinere t speelt een homogene oplossing wel een rol.
In sommige toepassingen spreekt men dan van een **inscha-
kelverschijnsel**.

Slinger

$$\phi'' + \frac{c}{m} \phi' + \frac{g}{\ell} \phi = \cos(\mu t)$$

De (algemene) oplossing ϕ_{hom} homogeen deel is bekend
(zie vorige transparanten).

We bepalen nu een particuliere oplossing ϕ_{part} .

Opmerking. Als $c > 0$ en $c \approx 0$, dan dempt de oplossing van het homogene deel uit: **op den duur is de oplossing** $\approx \phi_{\text{part}}$.

In het bijzonder: $\phi(0)$, $\phi'(0)$ spelen op den duur geen rol.

In sommige toepassingen wordt de inhomogene term ook wel **input** of **input signaal** genoemd. De oplossing ϕ_{part} is dan de **output** of het **output signaal**.

Slinger

$$\phi'' + 2\rho\phi' + \nu^2\phi = \cos(\mu t) \quad \text{met} \quad \rho \equiv \frac{c}{2m}, \quad \nu \equiv \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

Opmerking. $\phi = \text{Re}(\tilde{\phi})$ als $\tilde{\phi}'' + 2\rho\tilde{\phi}' + \nu^2\tilde{\phi} = e^{i\mu t}$.

Slinger

$$\phi'' + 2\rho\phi' + \nu^2\phi = \cos(\mu t) \quad \text{met} \quad \rho \equiv \frac{c}{2m}, \quad \nu \equiv \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

Opmerking. $\phi = \text{Re}(\tilde{\phi})$ als $\tilde{\phi}'' + 2\rho\tilde{\phi}' + \nu^2\tilde{\phi} = e^{i\mu t}$.

Probeer $\tilde{\phi}(t) = H e^{i\mu t}$, voor een geschikt $H = H(\mu)$.

(H hangt niet van t af, wel van μ)

Slinger

$$\phi'' + 2\rho\phi' + \nu^2\phi = \cos(\mu t) \quad \text{met} \quad \rho \equiv \frac{c}{2m}, \nu \equiv \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

Opmerking. $\phi = \text{Re}(\tilde{\phi})$ als $\tilde{\phi}'' + 2\rho\tilde{\phi}' + \nu^2\tilde{\phi} = e^{i\mu t}$.

Probeer $\tilde{\phi}(t) = H e^{i\mu t}$. Schrijf $p(\lambda) \equiv \lambda^2 + 2\rho\lambda + \nu^2$.

$$\Rightarrow \quad H = H(\mu) = \frac{1}{p(i\mu)} = \frac{1}{-\mu^2 + 2\rho i\mu + \nu^2}$$

Schrijf $H = |H| e^{-i\delta}$. Dan

$$\phi_{\text{part}}(t) = |H(\mu)| \cos(\mu t - \delta)$$

Slinger

$$\phi'' + 2\rho\phi' + \nu^2\phi = \cos(\mu t) \quad \text{met} \quad \rho \equiv \frac{c}{2m}, \nu \equiv \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

Opmerking. $\phi = \text{Re}(\tilde{\phi})$ als $\tilde{\phi}'' + 2\rho\tilde{\phi}' + \nu^2\tilde{\phi} = e^{i\mu t}$.

Probeer $\tilde{\phi}(t) = H e^{i\mu t}$. Schrijf $p(\lambda) \equiv \lambda^2 + 2\rho\lambda + \nu^2$.

$$\Rightarrow H = H(\mu) = \frac{1}{p(i\mu)} = \frac{1}{-\mu^2 + 2\rho i\mu + \nu^2}$$

Schrijf $H = |H| e^{-i\delta}$. Dan

$$\phi_{\text{part}}(t) = |H(\mu)| \cos(\mu t - \delta)$$

Conclusie. Als de input een harmonische oscillatie is, dan is de output, op een fase verschuiving (nl. δ) en een amplitude verandering (nl. $|H|$) na, dezelfde harmonische oscillatie (d.w.z. met dezelfde frequentie μ).

Slinger

$$\phi'' + 2\rho\phi' + \nu^2\phi = \cos(\mu t) \quad \text{met} \quad \rho \equiv \frac{c}{2m}, \nu \equiv \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

Opmerking. $\phi = \text{Re}(\tilde{\phi})$ als $\tilde{\phi}'' + 2\rho\tilde{\phi}' + \nu^2\tilde{\phi} = e^{i\mu t}$.

Probeer $\tilde{\phi}(t) = H e^{i\mu t}$. Schrijf $p(\lambda) \equiv \lambda^2 + 2\rho\lambda + \nu^2$.

$$\Rightarrow H = H(\mu) = \frac{1}{p(i\mu)} = \frac{1}{-\mu^2 + 2\rho i\mu + \nu^2}$$

Schrijf $H = |H| e^{-i\delta}$. Dan

$$\phi_{\text{part}}(t) = |H(\mu)| \cos(\mu t - \delta)$$

$H = |H| e^{-i\delta}$ wordt de **transfer functie** genoemd: het vertelt hoe een systeem de amplitude en de fase verandert (met $|H|$, respectievelijk δ) als reactie op een harmonische oscillatie als aandrijver.

Slinger

$$\phi'' + 2\rho\phi' + \nu^2\phi = \cos(\mu t) \quad \text{met} \quad \rho \equiv \frac{c}{2m}, \nu \equiv \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

Opmerking. $\phi = \text{Re}(\tilde{\phi})$ als $\tilde{\phi}'' + 2\rho\tilde{\phi}' + \nu^2\tilde{\phi} = e^{i\mu t}$.

Probeer $\tilde{\phi}(t) = H e^{i\mu t}$. Schrijf $p(\lambda) \equiv \lambda^2 + 2\rho\lambda + \nu^2$.

$$\Rightarrow H = H(\mu) = \frac{1}{p(i\mu)} = \frac{1}{-\mu^2 + 2\rho i\mu + \nu^2}$$

Schrijf $H = |H| e^{-i\delta}$. Dan

$$\phi_{\text{part}}(t) = |H(\mu)| \cos(\mu t - \delta)$$

$$|H| = \frac{1}{|p(i\mu)|} = \frac{1}{\sqrt{(\nu^2 - \mu^2)^2 + (2\rho\mu)^2}}$$

Merk op $\lambda_{1,2} = -\rho \pm i\sqrt{\nu^2 - \rho^2}$ en $p(\lambda_1) = p(\lambda_2) = 0$.

Slinger

$$\phi'' + 2\rho\phi' + \nu^2\phi = \cos(\mu t) \quad \text{met} \quad \rho \equiv \frac{c}{2m}, \quad \nu \equiv \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

Opmerking. $\phi = \text{Re}(\tilde{\phi})$ als $\tilde{\phi}'' + 2\rho\tilde{\phi}' + \nu^2\tilde{\phi} = e^{i\mu t}$.

Probeer $\tilde{\phi}(t) = H e^{i\mu t}$. Schrijf $p(\lambda) \equiv \lambda^2 + 2\rho\lambda + \nu^2$.

$$\Rightarrow \quad H = H(\mu) = \frac{1}{p(i\mu)} = \frac{1}{-\mu^2 + 2\rho i\mu + \nu^2}$$

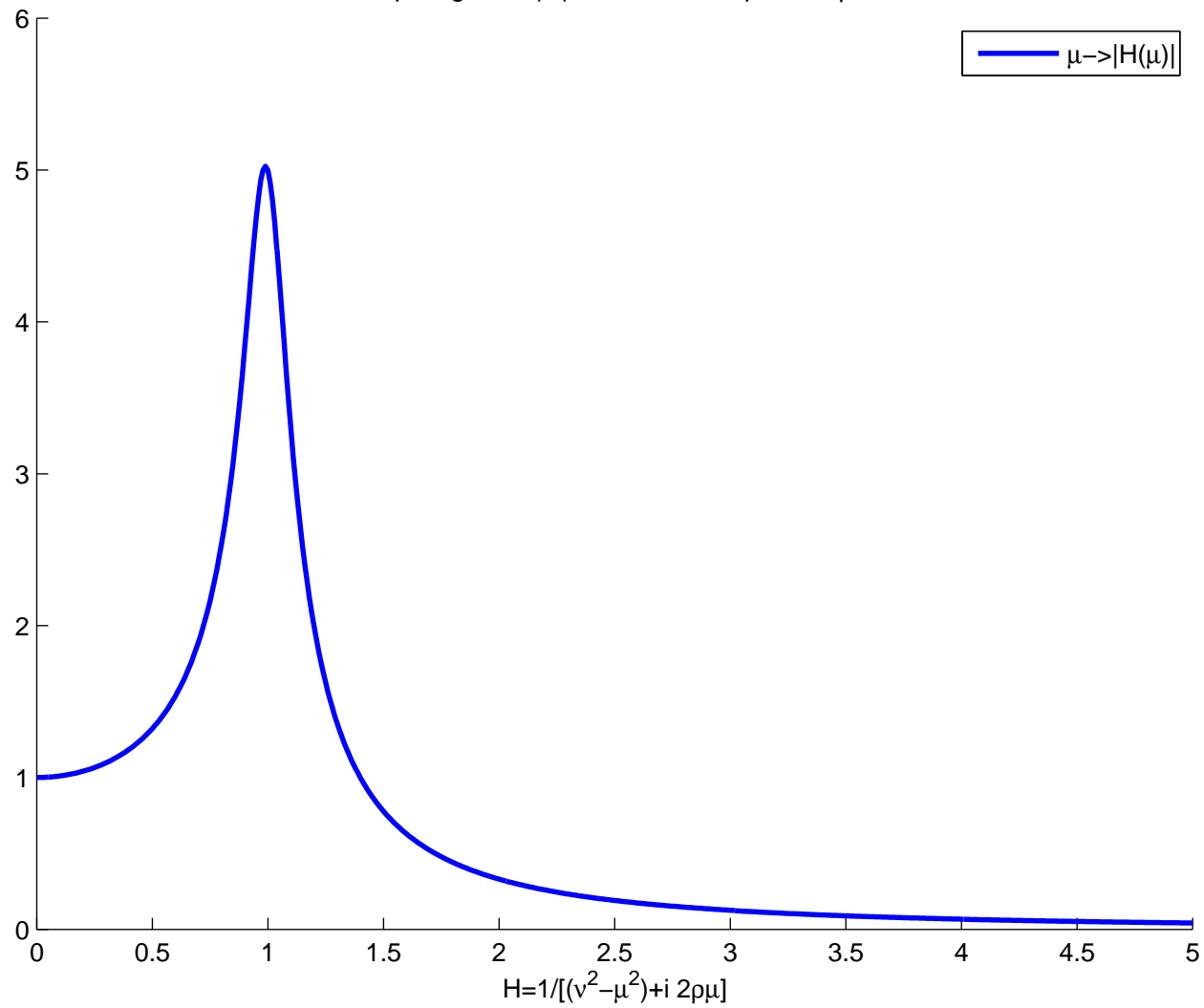
Schrijf $H = |H| e^{-i\delta}$. Dan

$$\phi_{\text{part}}(t) = |H(\mu)| \cos(\mu t - \delta)$$

$$|H| = \frac{1}{|p(i\mu)|} = \frac{1}{\sqrt{(\nu^2 - \mu^2)^2 + (2\rho\mu)^2}}$$

$|H|$ groot als $i\mu \approx \lambda_1$ of $i\mu \approx \lambda_2$, met λ_i zodat $p(\lambda_i) = 0$
dus als $-\rho = \text{Re}(\lambda_{1,2}) \approx 0$ en $\mu \approx \nu = |\lambda_{1,2}|$.

Bode plot: grafiek $|H|$ als functie van $\mu, \nu=1, \rho=0.1$



Bode plot: $|H|$ als functie van μ .

$$|H| = \frac{1}{\sqrt{(\nu^2 - \mu^2)^2 + (2\rho\mu)^2}}$$

Slinger

$$\phi'' + 2\rho\phi' + \nu^2\phi = \cos(\mu t) \quad \text{met} \quad \rho \equiv \frac{c}{2m}, \quad \nu \equiv \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

Opmerking. $\phi = \text{Re}(\tilde{\phi})$ als $\tilde{\phi}'' + 2\rho\tilde{\phi}' + \nu^2\tilde{\phi} = e^{i\mu t}$.

Probeer $\tilde{\phi}(t) = H e^{i\mu t}$. Schrijf $p(\lambda) \equiv \lambda^2 + 2\rho\lambda + \nu^2$.

$$\Rightarrow \quad H = H(\mu) = \frac{1}{p(i\mu)} = \frac{1}{-\mu^2 + 2\rho i\mu + \nu^2}$$

Schrijf $H = |H| e^{-i\delta}$. Dan

$$\phi_{\text{part}}(t) = |H(\mu)| \cos(\mu t - \delta)$$

$\mu \approx \nu$ en $\rho \approx 0$ is de **respons** ϕ_{part} op het **input signaal** op de duur groot (veel groter dan de input): we spreken over

resonantie

Slinger

$$\phi'' + 2\rho\phi' + \nu^2\phi = \cos(\mu t) \quad \text{met} \quad \rho \equiv \frac{c}{2m}, \quad \nu \equiv \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

Samenvatting voor het geval $c > 0$, $\rho \equiv \frac{c}{2m} \ll \nu \equiv \sqrt{\frac{g}{\ell}}$.

- Homogeen deel heeft eigenwaarden $\lambda_{i,2} = -\rho \pm i\sqrt{\nu^2 - \rho^2}$
eigenfrequentie $\sqrt{\nu^2 - \rho^2}$.
- Inhomogeen systeem: oplossing $\phi =$
particuliere oplossing ϕ_{part} + oplossing ϕ_{hom} homogeen deel.
Op den duur: $\phi \approx \phi_{\text{part}}$.
- Oscillerende input (aandrijving) met (hoek)frequentie μ
levert oscillerende respons (output) ϕ_{part} met
 - \approx zelfde frequentie μ , maar met verschoven fase,
 - amplitude groot als $\mu \approx \nu$ en $\rho \approx 0$ (resonantie),
anders amplitude klein.

Grote resonantie als

frequentie aandrijving \approx eigenfrequentie systeem

Slinger

$$\phi'' + 2\rho\phi' + \nu^2\phi = \varepsilon \cos(\mu t)$$

In de praktijk duurt het input signaal $\varepsilon \cos(\mu t)$ maar een beperkte tijd.

Of de response in geval $\mu \approx \nu$ en $\rho \approx 0$ dan ook daadwerkelijk groot wordt hangt af van de 'inschakeltijd', d.w.z., de tijd dat ϕ_{hom} de oplossing $\phi_{\text{part}} + \phi_{\text{hom}}$ domineert: de inschakeltijd moet korter zijn dan de tijd van aandrijving. De inschakeltijd hangt af van de demping ρ .

Slinger

In de praktijk:

$$\phi'' + 2\rho\phi' + \nu^2\phi = r(t) \quad \text{met} \quad r(t) = \sum_j \alpha_j \cos(\mu_j t)$$

Het input signaal r kan opgebouwd zijn uit meerdere harmonische oscillaties $\alpha_j \cos(\mu_j t)$ (met iedere zijn eigen frequentie μ_j).

Fourier theorie (in een later college) vertelt ons dat vrijwel iedere functie r in zekere zin opgebouwd is uit harmonische oscillaties.

Slinger

In de praktijk:

$$\phi'' + 2\rho\phi' + \nu^2\phi = r(t) \quad \text{met} \quad r(t) = \sum_j \alpha_j \cos(\mu_j t)$$

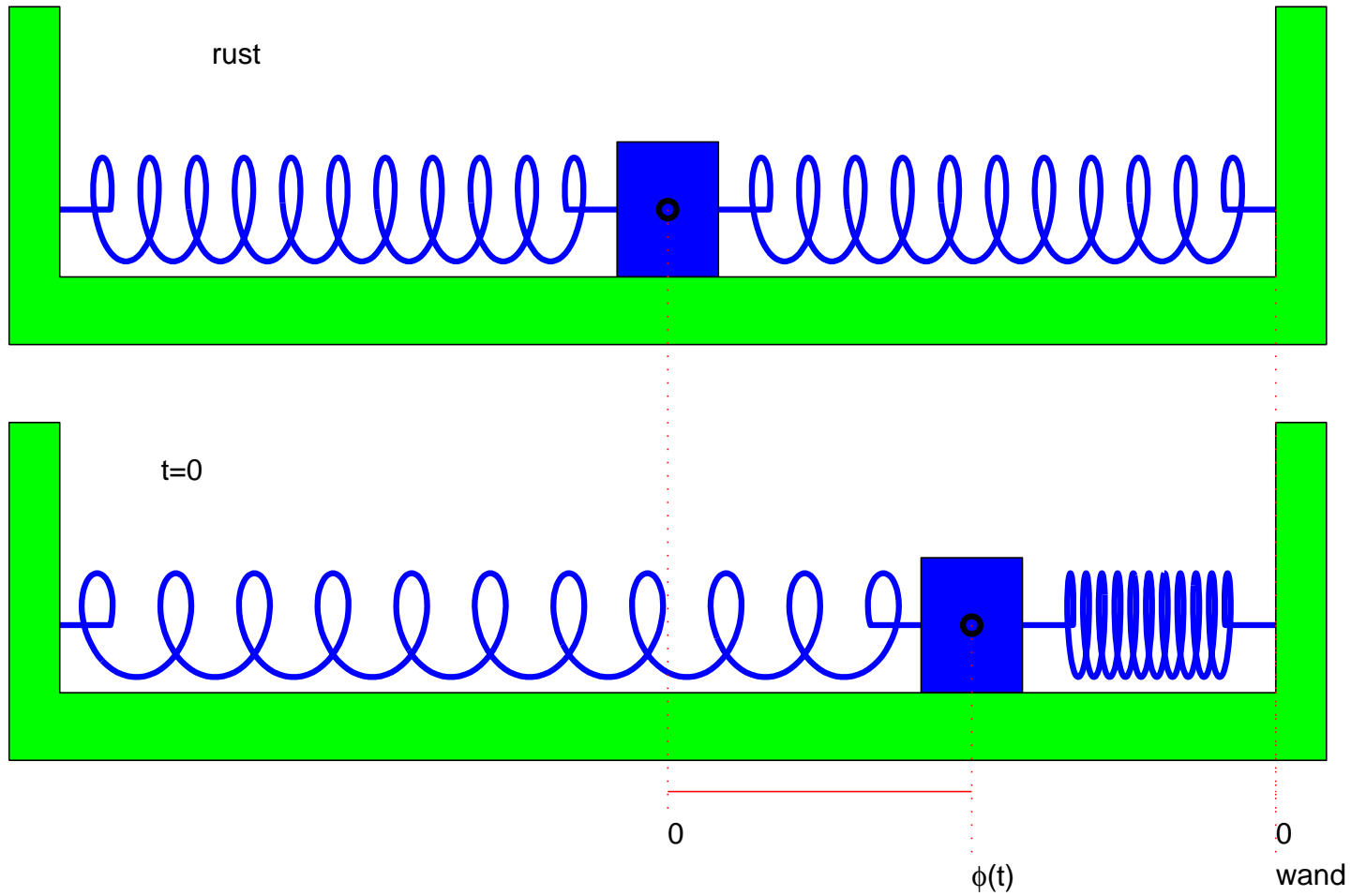
Sterke respons als aan de volgende voorwaarden voldaan is.

- *De eigenfrequentie ν van het systeem zit in de buurt van de frequentie μ_j van 'n harmonische oscillatie $\alpha_j \cos(\mu_j t)$ in het input signaal r .*
- *Die oscillatie is significant: $\alpha_j \neq 0$.*
- *De demping is gering: $\rho \approx 0$.*

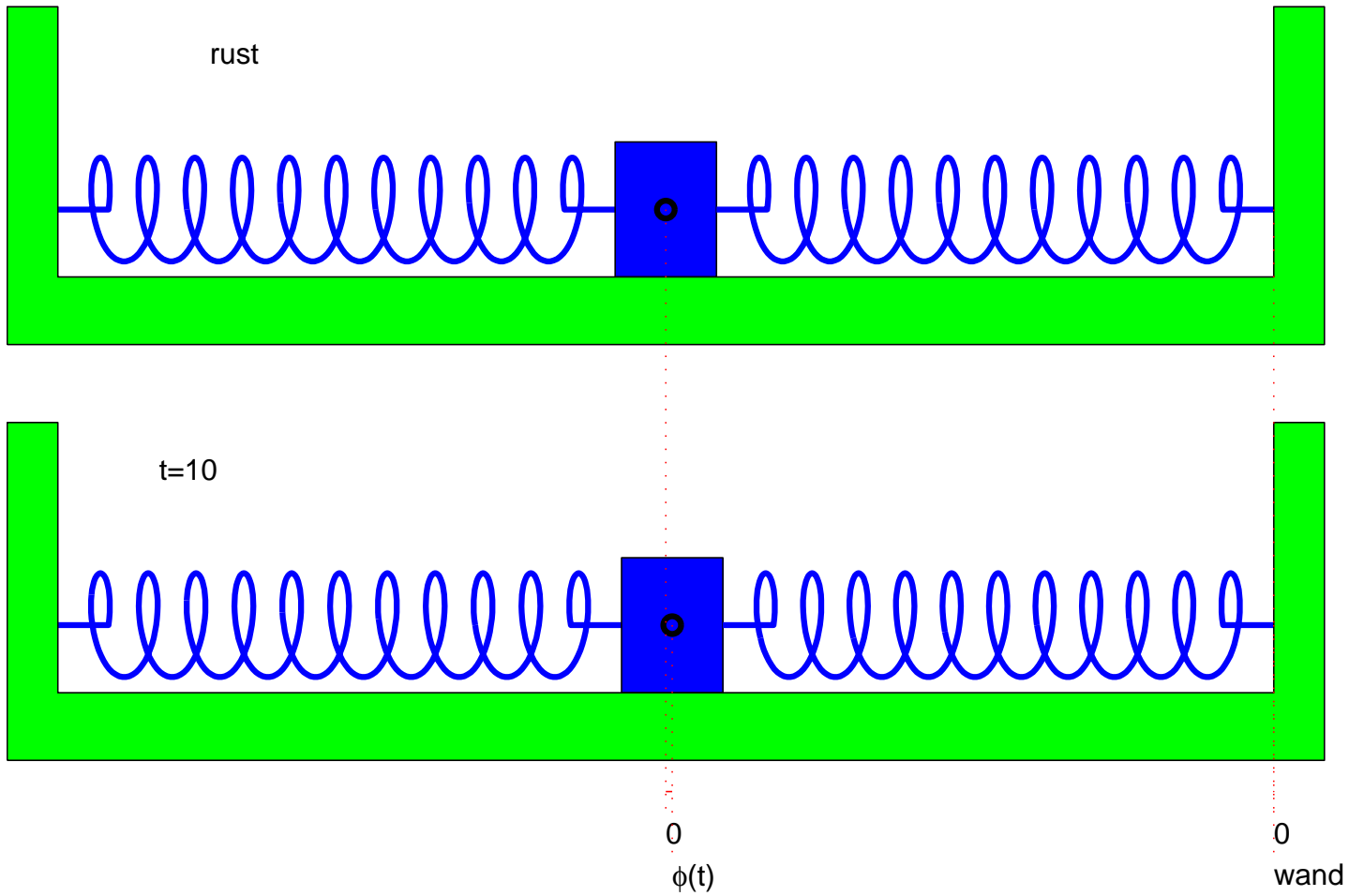
Als particuliere oplossing hebben we namelijk

$$\phi_{\text{part}}(t) = \sum_j \alpha_j |H(\mu_j)| \cos(\mu_j t - \delta_j)$$

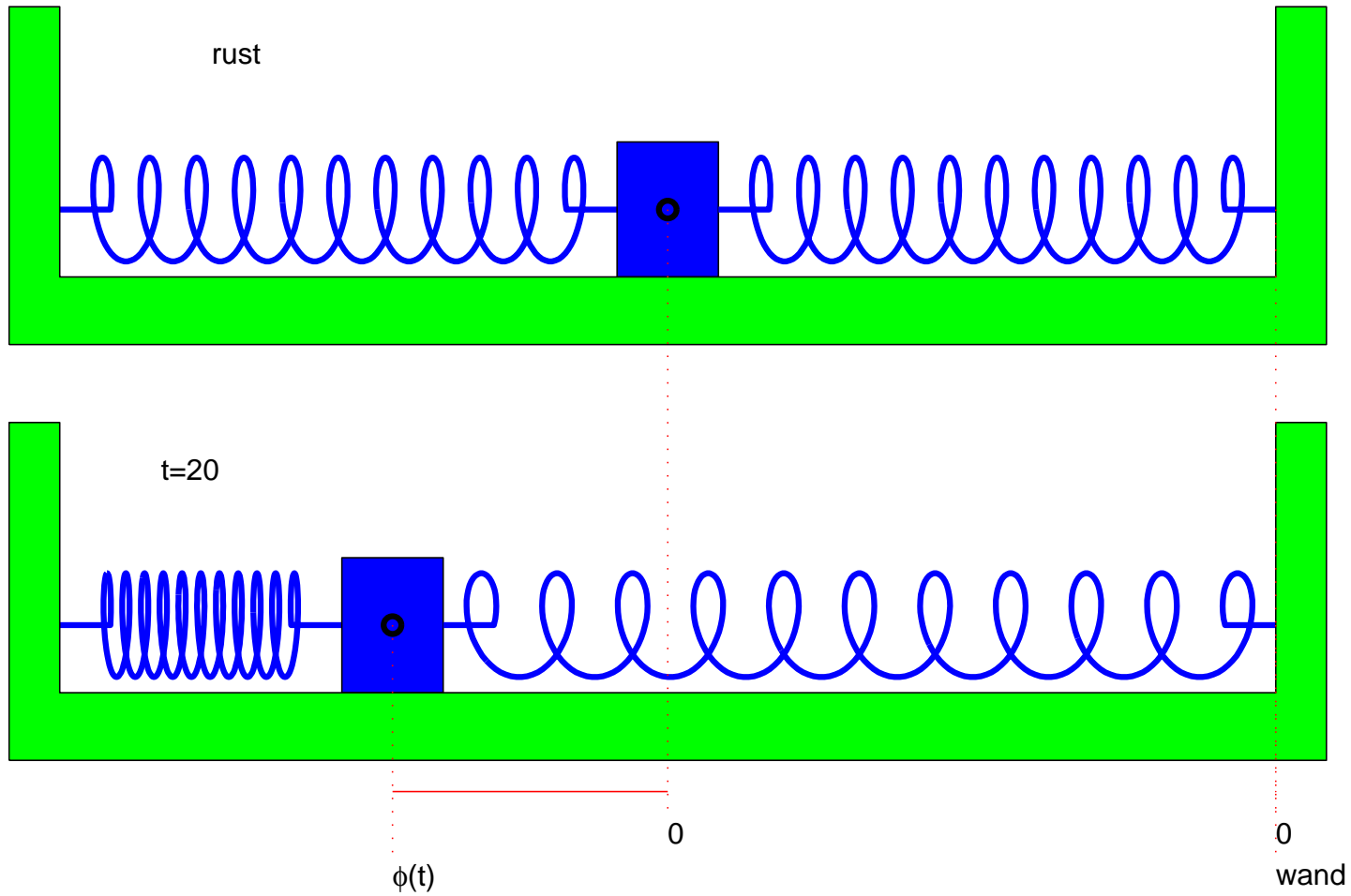
Een systeem met een blokje en twee veren



Een systeem met een blokje en twee veren



Een systeem met een blokje en twee veren



Een verensysteem

We bekijken de afwijking van de positie het blokje van diens rustsituatie (evenwicht). Het blokje is in positie ϕ als het midden van het blokje op afstand ϕ is vanaf het midden van het blokje bij evenwicht. Rechts van het evenwicht is $\phi \geq 0$, links is $\phi \leq 0$.

Beide veren trekken aan het blokje. In evenwicht zijn de resulterende veerkrachten even groot (en tegengesteld). Als het blokje in positie ϕ is, $\phi \neq 0$, dan leveren de veren een extra kracht. Voor veer 1 is die $-k_1\phi$ en voor veer 2 $-k_2\phi$: *de extra kracht is evenredig met de verandering van de lengte van de veer*; k_1 en k_2 zijn **veerkrachtconstanten**. Merk op dat beide krachten dezelfde kant op werken (de ene veer trekt, de andere duwt).

De bewegingsvergelijking

Laten we op tijdstip $t = 0$ het blokje los op positie ϕ_0 , dan zal het blokje bewegen: $\phi = \phi(t)$ is een functie van de tijd met (**beginwaarde**) $\phi(0) = \phi_0$ en $\phi'(0) = 0$.

Op tijdstip t is de veerkracht: $-k_1 \phi(t) - k_2 \phi(t)$.

Bij snelheid $\phi'(t)$ ondervindt het blokje een **wrijvingskracht** $-c \phi'(t)$ waarbij c de **wrijvingscoëfficiënt** is.

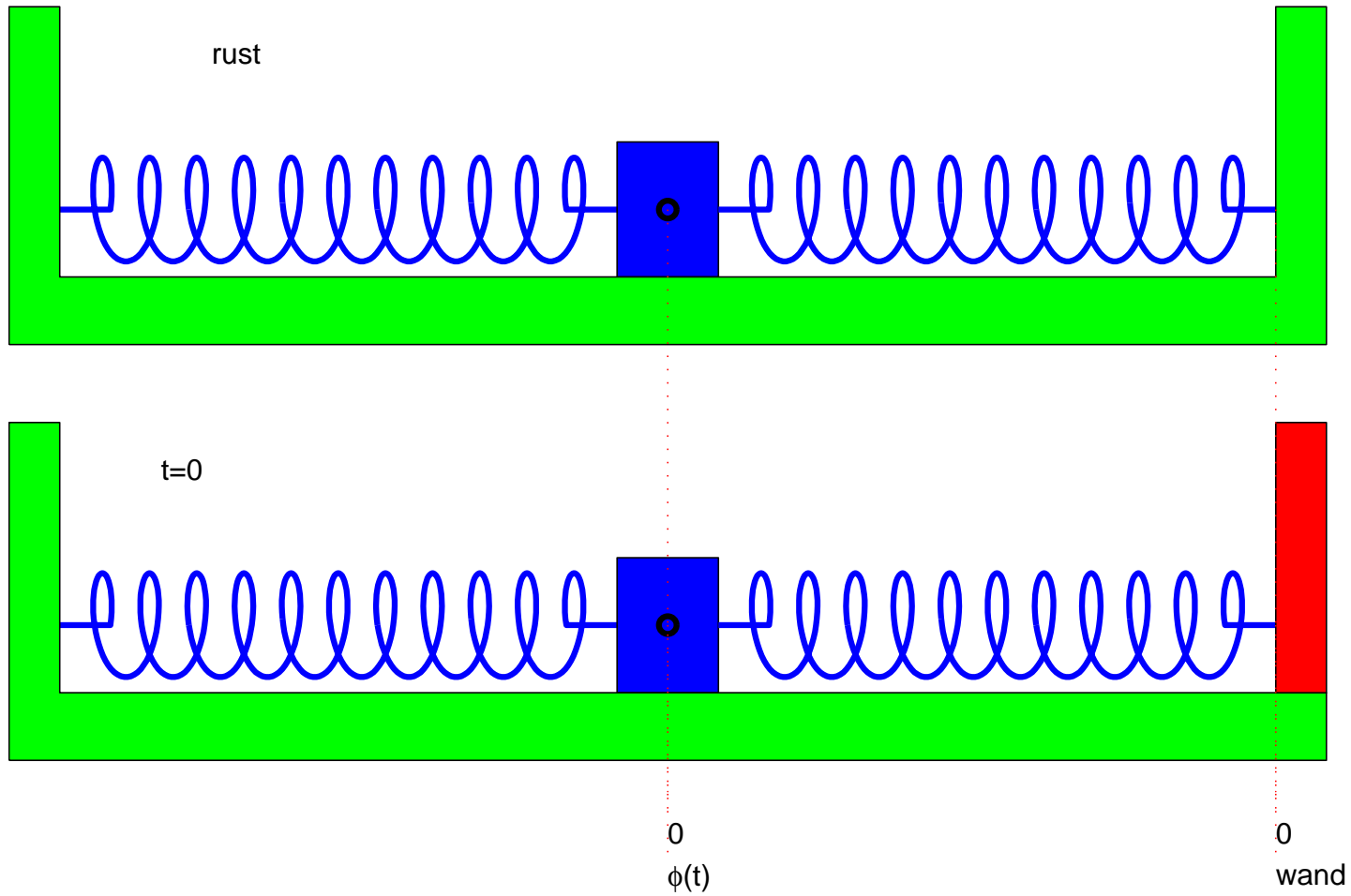
Als het blokje versnelt is de vertragende kracht $-m \phi''(t)$: m is de massa van het blokje (Newton).

De som de krachten is 0 (Newton). Dus

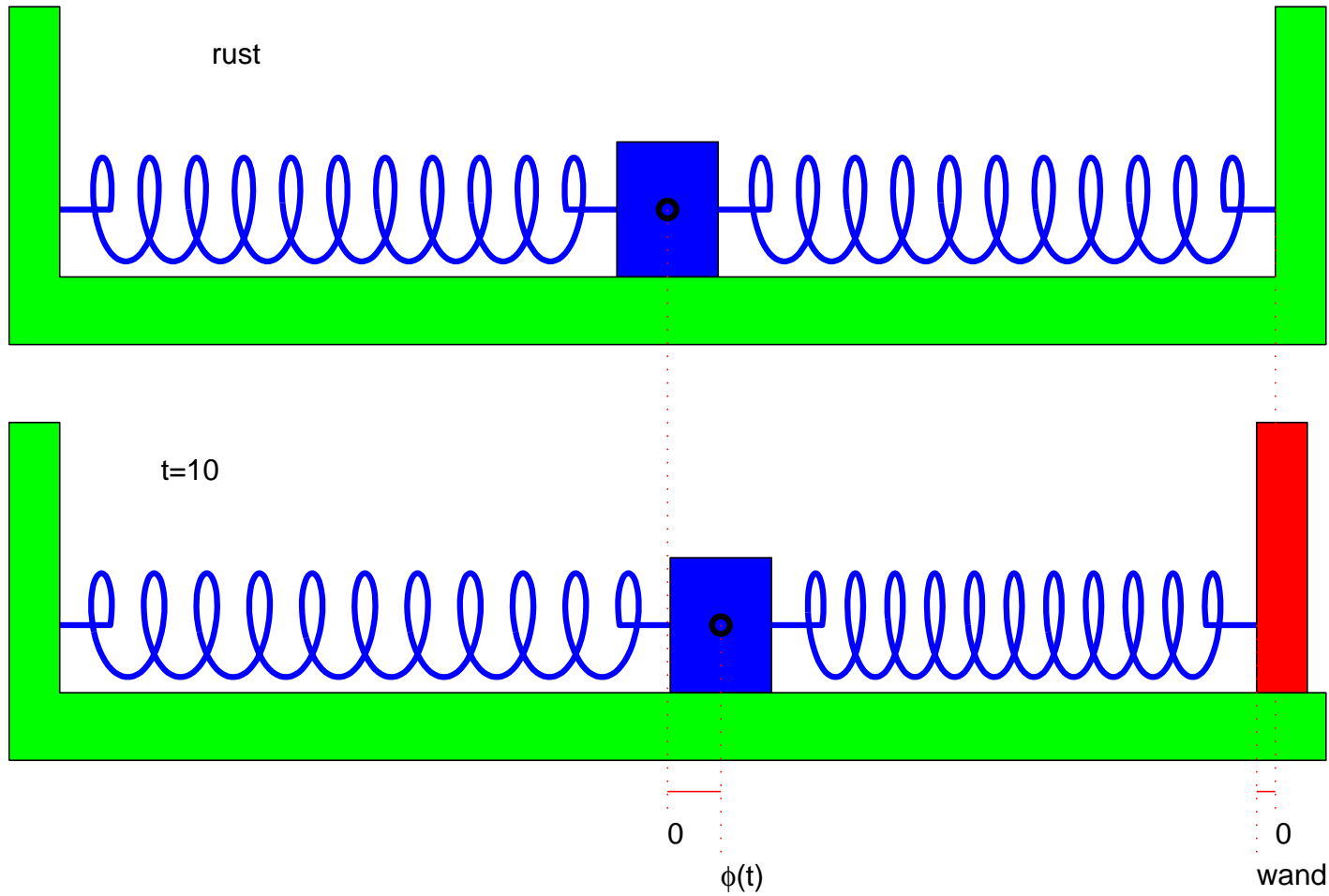
$$\begin{cases} m \phi'' + c \phi' + k_1 \phi + k_2 \phi = 0 \\ \phi(0) = \phi_0, \quad \phi'(0) = 0 \end{cases}$$

In plaatjes, $m = 1$, $c = 1$, $k_1 = k_2 = 1$

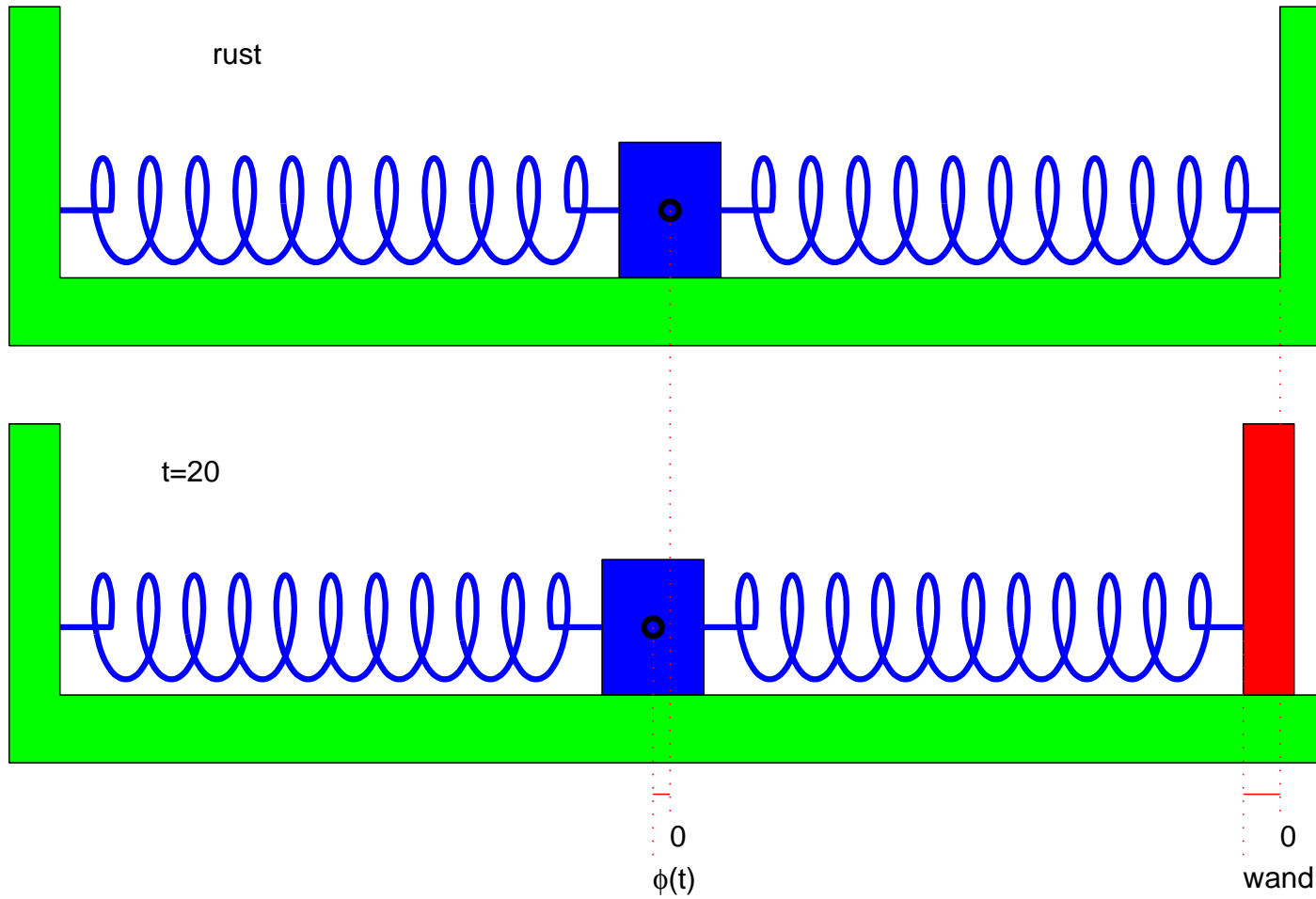
Een aangedreven systeem



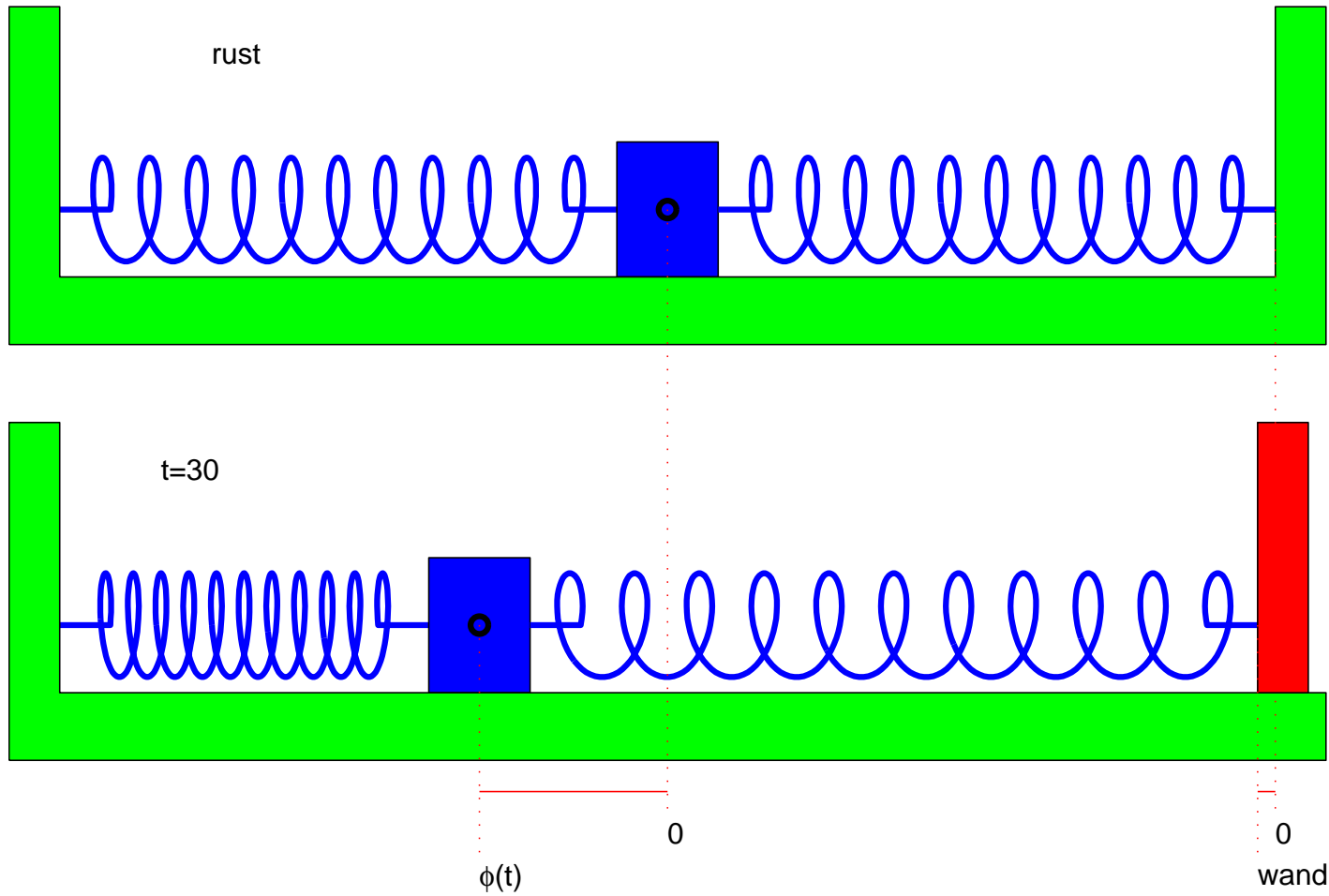
Een aangedreven systeem



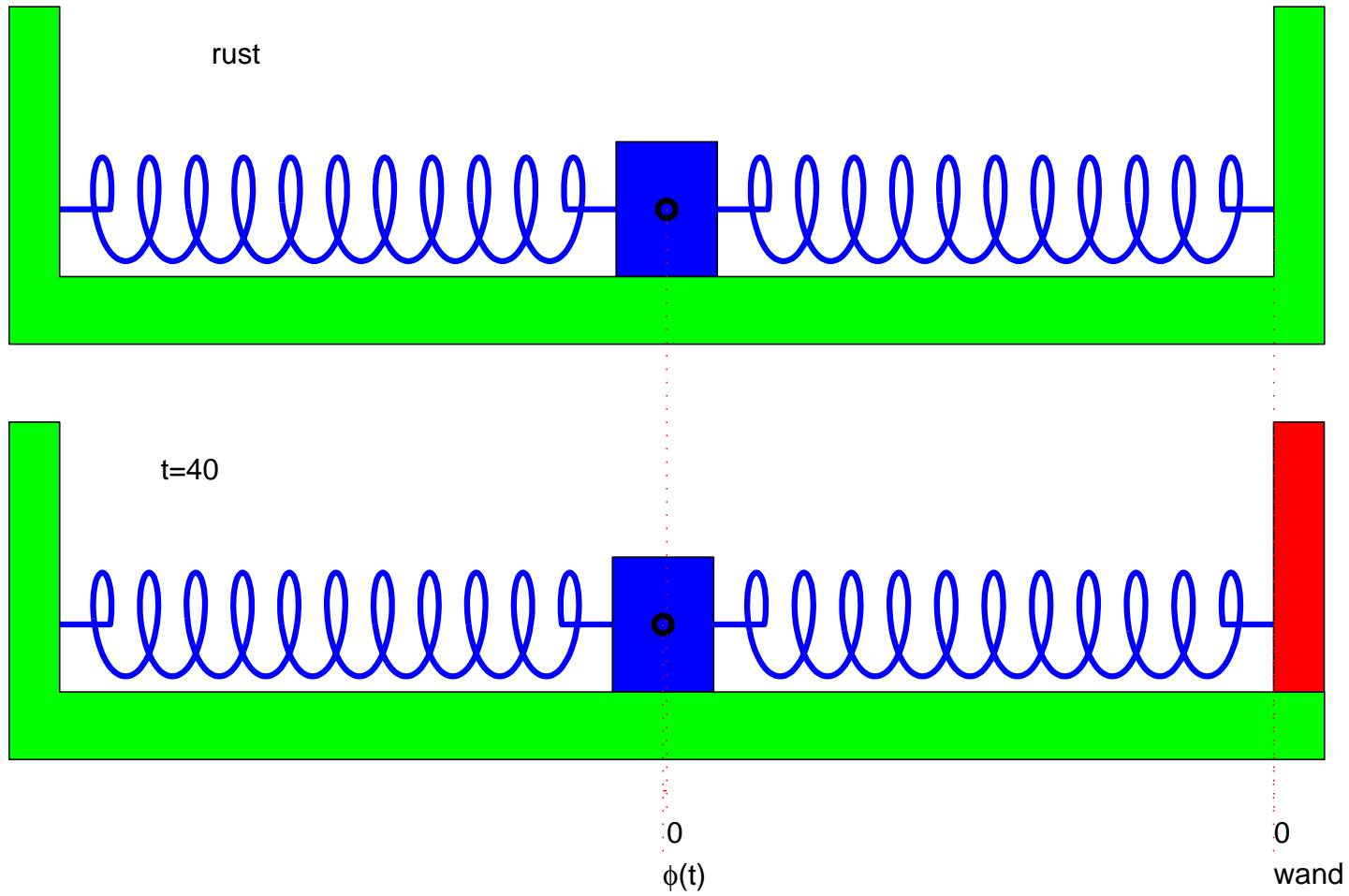
Een aangedreven systeem



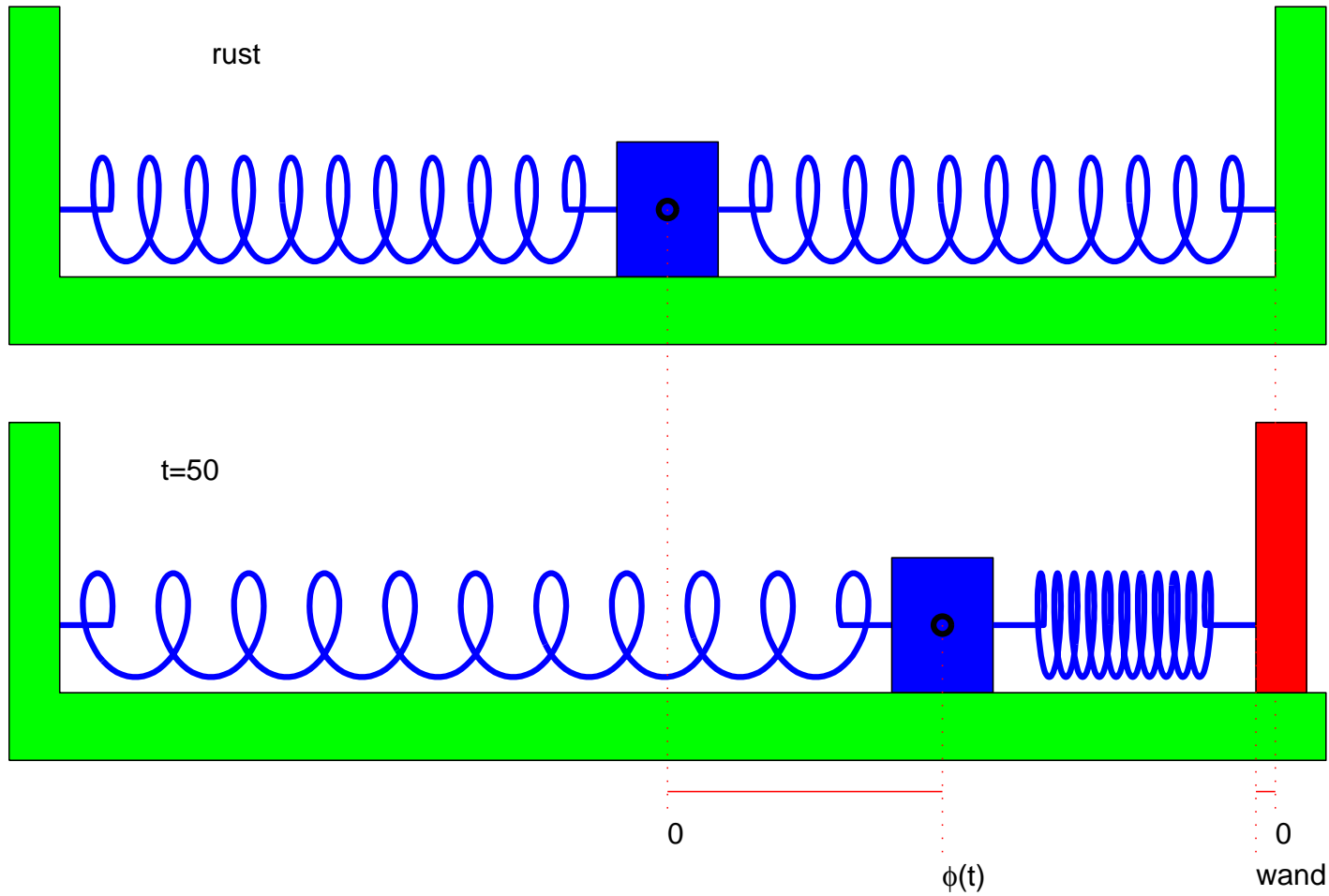
Een aangedreven systeem



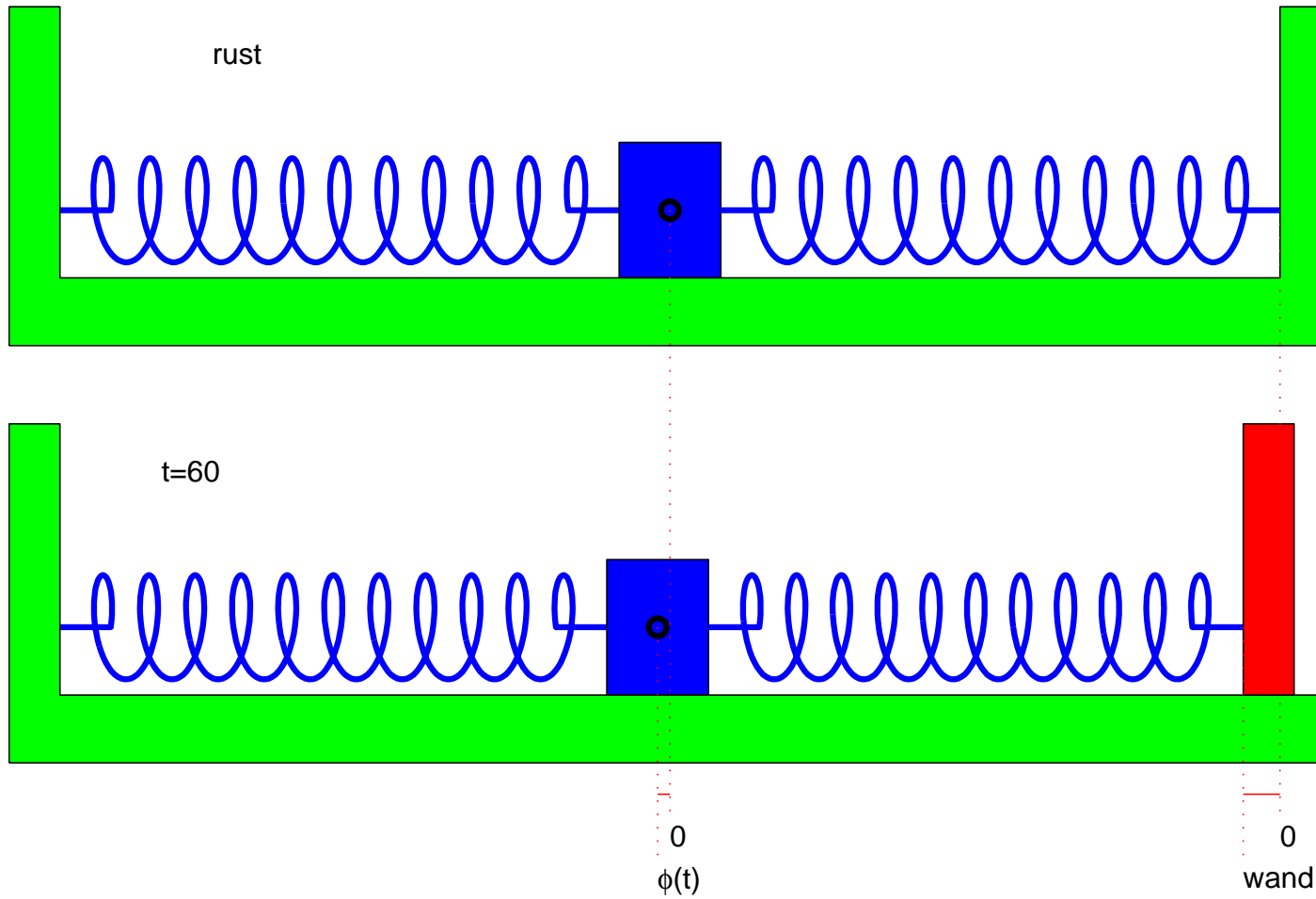
Een aangedreven systeem



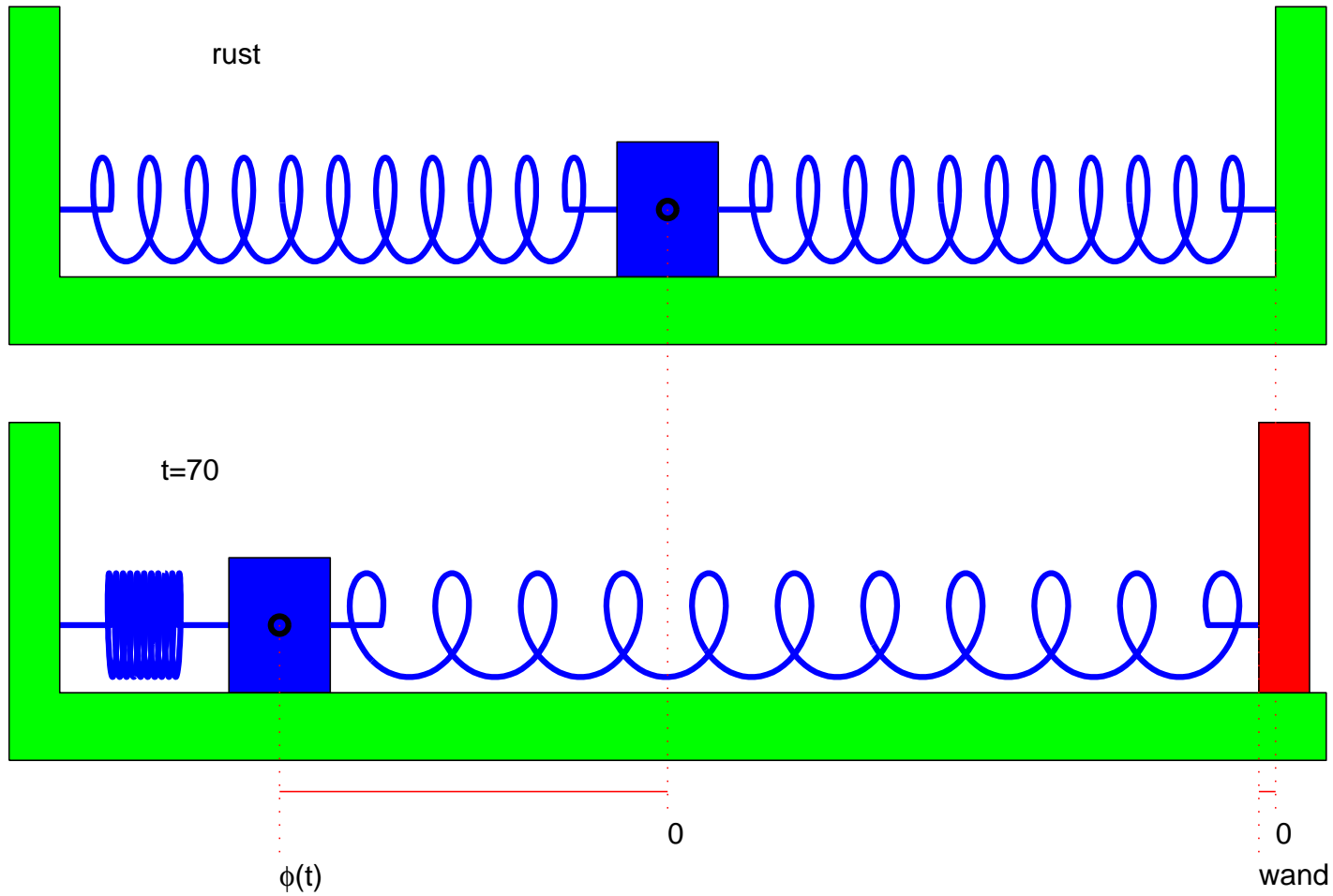
Een aangedreven systeem



Een aangedreven systeem



Een aangedreven systeem



Met aandrijving

Stel dat het rechteruiteinde van veer 2 ook verandert: op tijdstip t is het rechteruiteinde over een afstand $f(t)$ verschoven van diens rustpositie. Dan is de lengte verandering van veer 2 gelijk aan $\phi(t) - f(t)$. Dus is

$$m\phi'' + c\phi' + k_1\phi + k_2(\phi - f) = 0$$

met andere woorden

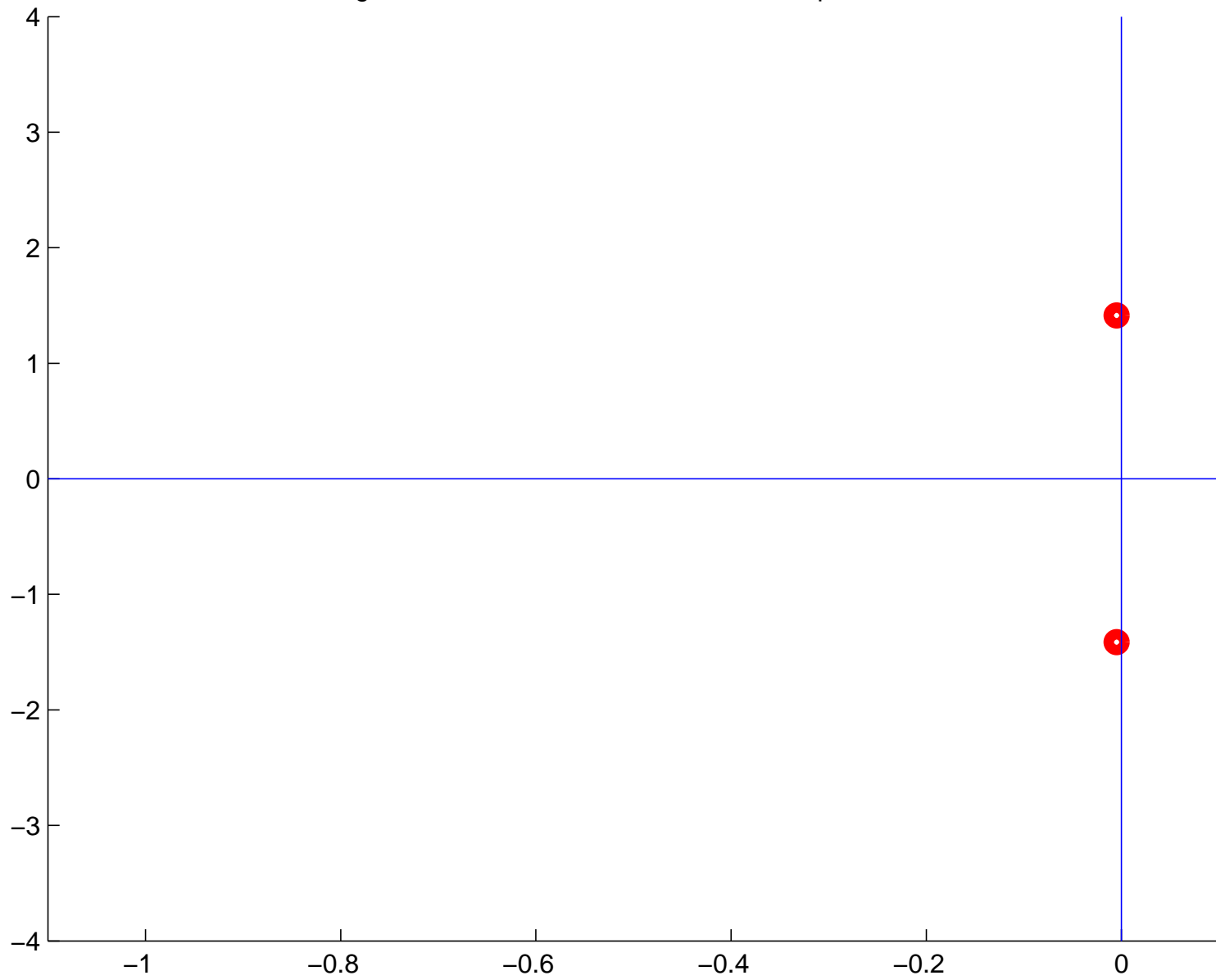
$$m\phi'' + c\phi' + k_1\phi + k_2\phi = k_2f$$

Merk op dat dit dezelfde vergelijking is als voor de aangedreven slinger. Dus

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} \phi \\ \phi' \end{bmatrix}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + f\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k_1+k_2}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi \\ \phi' \end{bmatrix} + f \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k_2}{m} \end{bmatrix}$$

en de eigenwaarden $\lambda_{1,2}$ van \mathbf{A} bepalen de oplossing.

eigenwaarden van de matrix A in het complexe vlak



Met aandrijving

Stel dat het rechteruiteinde van veer 2 ook verandert: op tijdstip t is het rechteruiteinde over een afstand $f(t)$ verschoven van diens rustpositie. Dan is de lengte verandering van veer 2 gelijk aan $\phi(t) - f(t)$. Dus is

$$m \phi'' + c \phi' + k_1 \phi + k_2 (\phi - f) = 0$$

met andere woorden

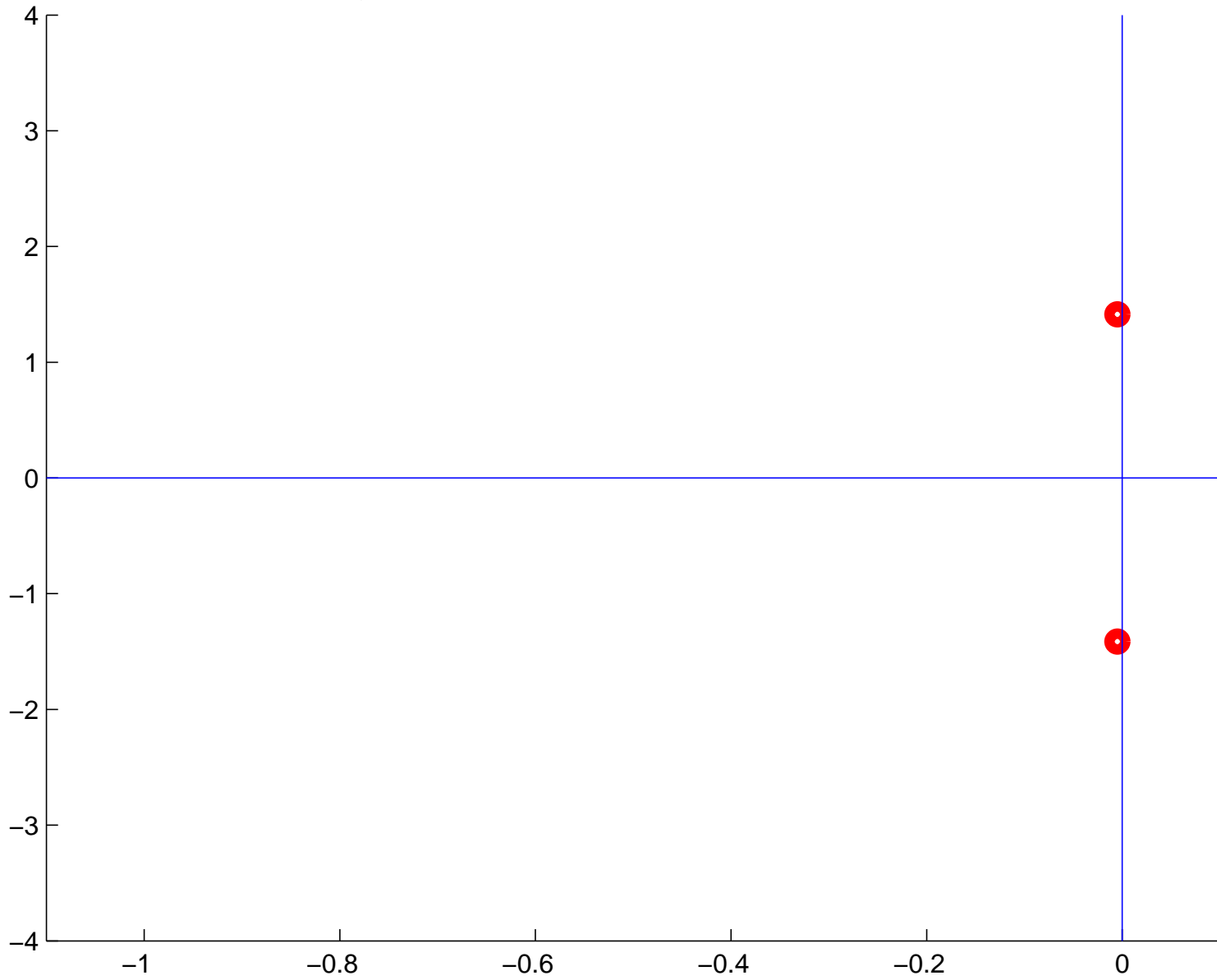
$$m \phi'' + c \phi' + k_1 \phi + k_2 \phi = k_2 f$$

Als $f = \cos(\mu t)$, dan is de particuliere oplossing ϕ_p het reële deel van $H(\mu) e^{i\mu t}$ met H de reponse functie. In feite is,

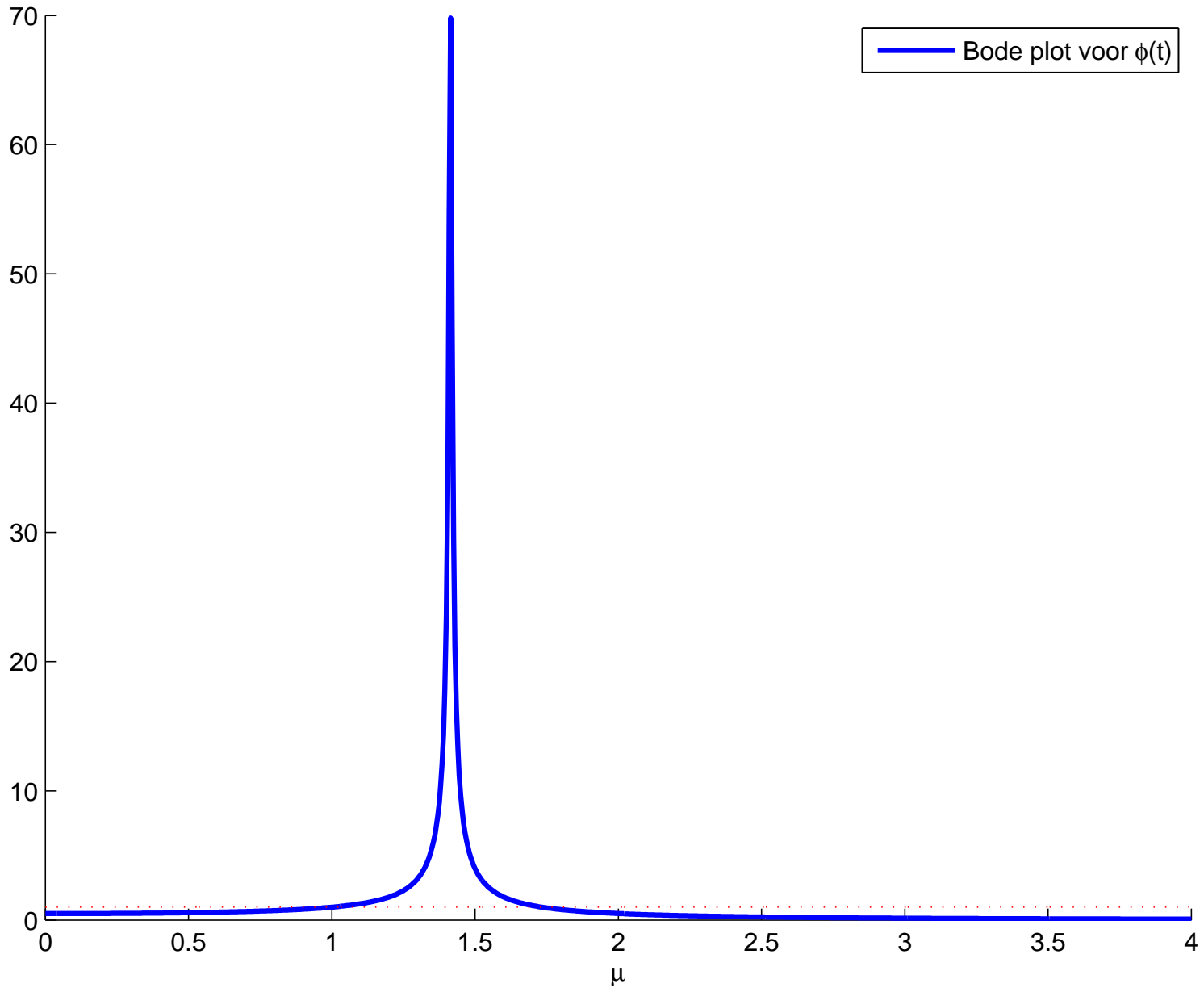
$$\text{met } \mathbf{c} \equiv \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad H(\mu) = \mathbf{c}^\top (i\mu I - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b}.$$

$|H(\mu)|$ is groot (resonantie) als $i\mu \approx \lambda_1$.

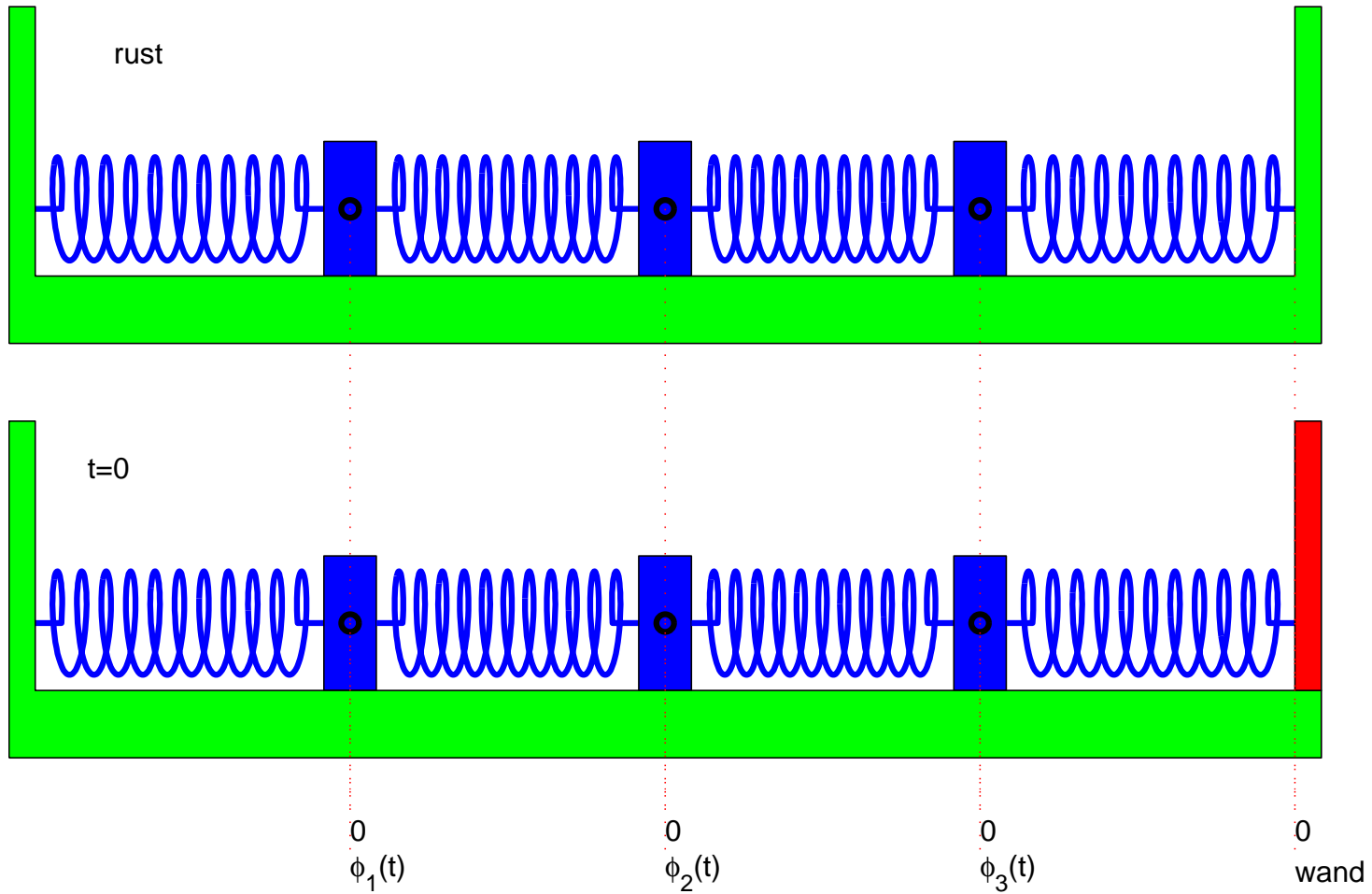
eigenwaarden van de matrix A in het complexe vlak



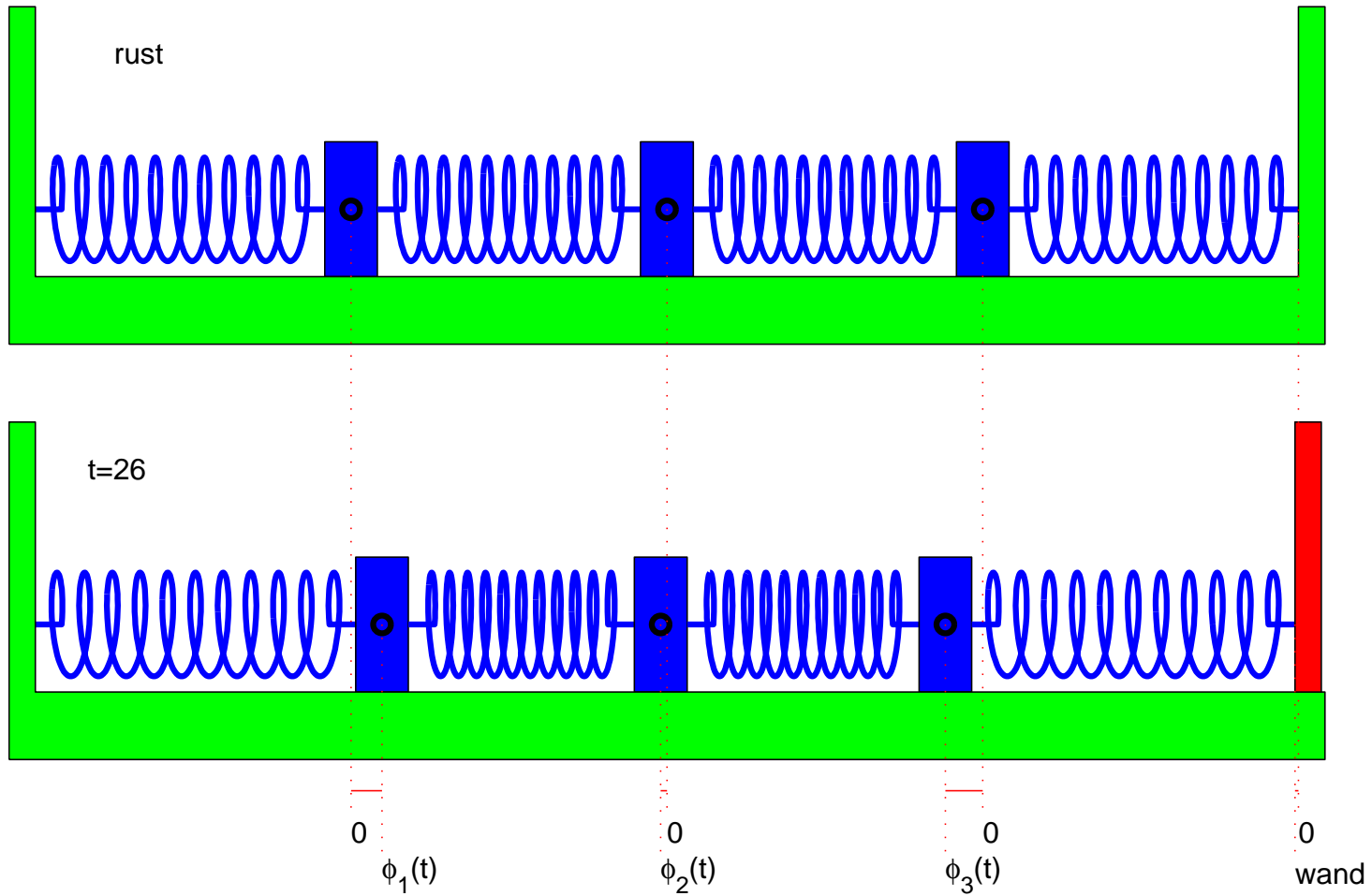
Bode plot: $\mu \rightarrow |H(\mu)|$



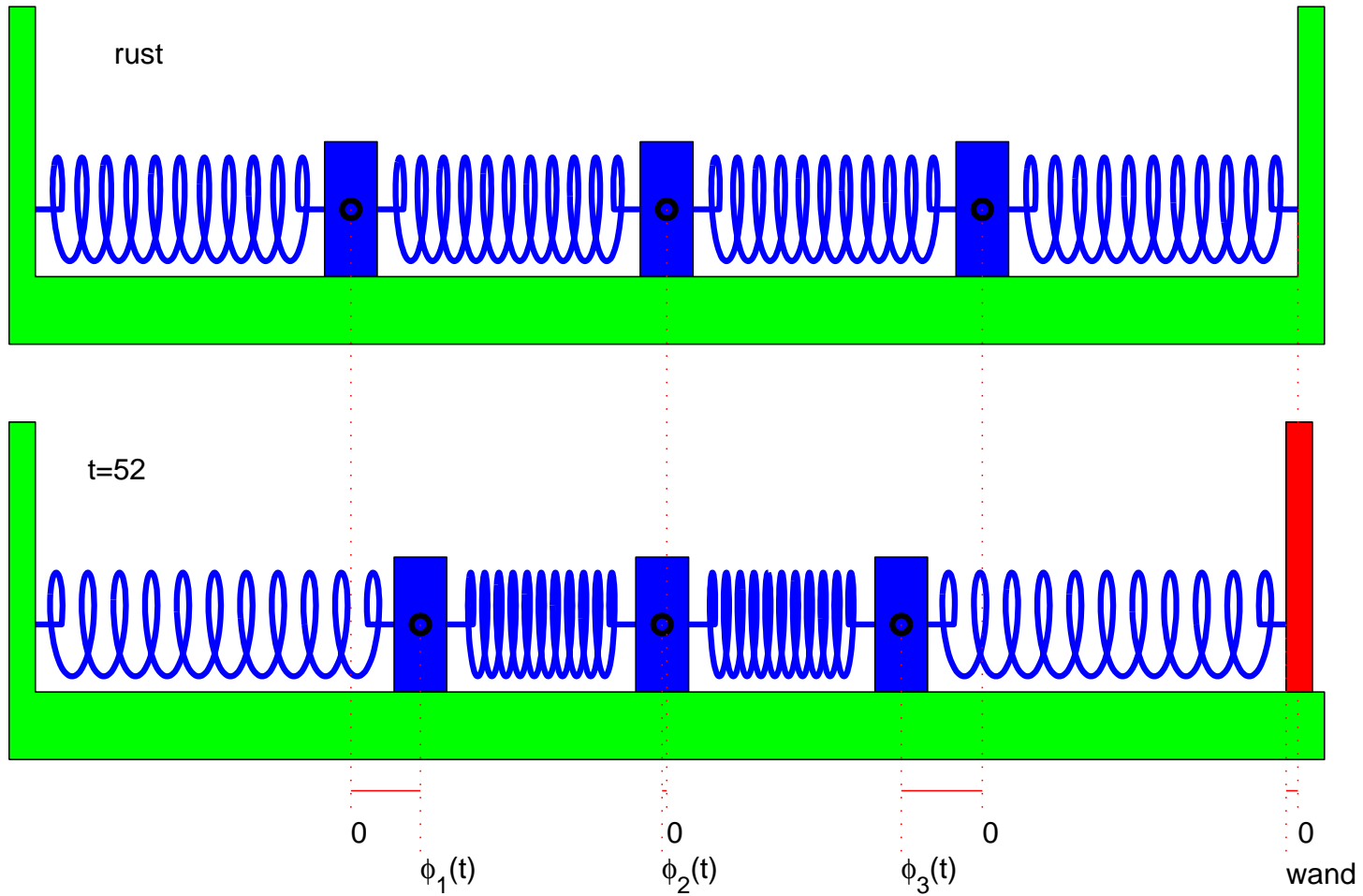
Een systeem met meerdere blokjes



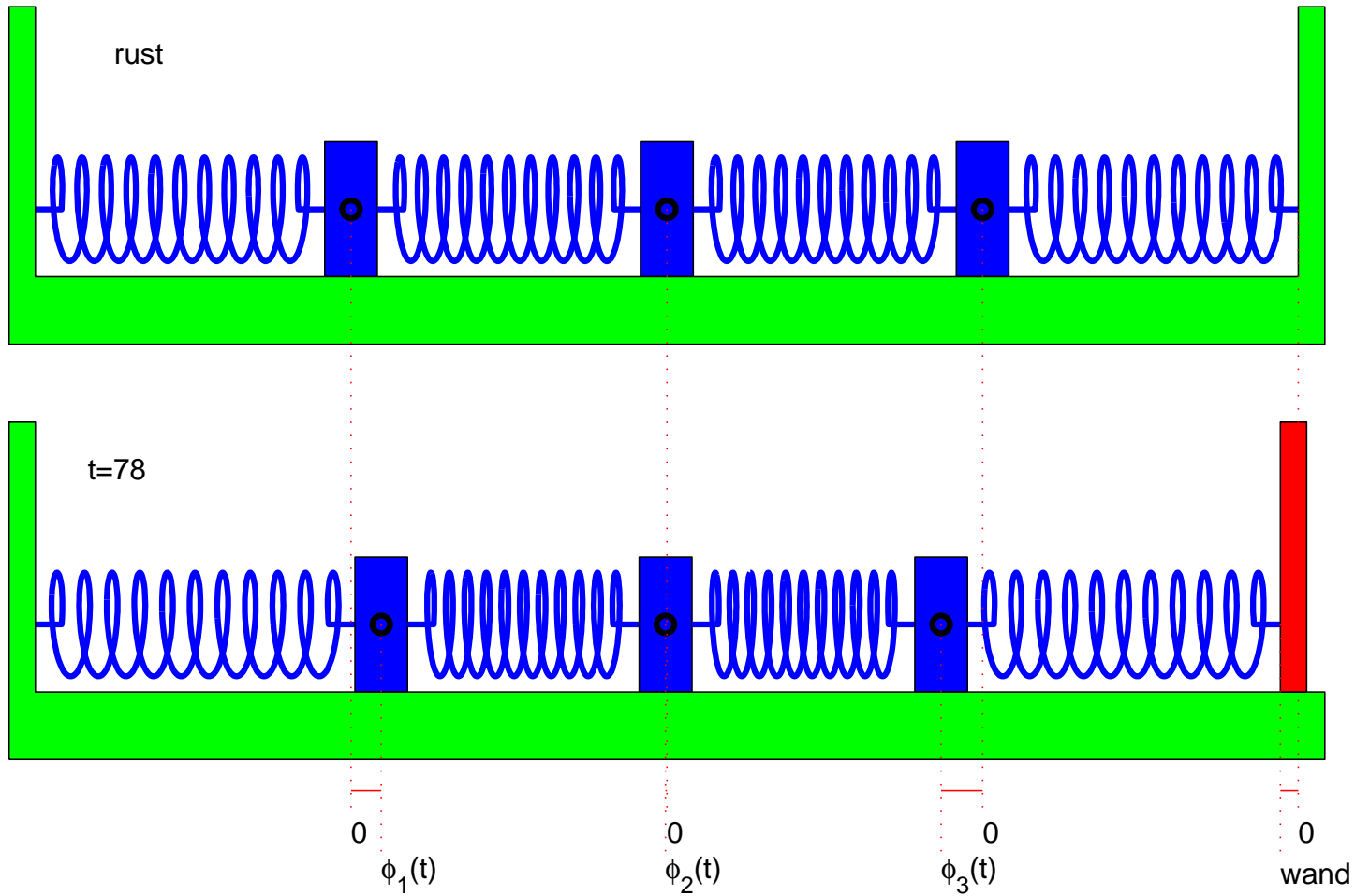
Een systeem met meerdere blokjes



Een systeem met meerdere blokjes



Een systeem met meerdere blokjes



Een systeem met meerdere blokjes

In een systeem met zeg drie blokjes en vier veren is ϕ_j de positie van het j -de blokje van links gemeten vanaf diens evenwichtspositie. Er geldt

$$\begin{cases} m_1 \phi_1'' + c_1 \phi_1' + k_1 \phi_1 + k_2(\phi_1 - \phi_2) = 0 \\ m_2 \phi_2'' + c_2 \phi_2' + k_2(\phi_2 - \phi_1) + k_3(\phi_2 - \phi_3) = 0 \\ m_3 \phi_3'' + c_3 \phi_3' + k_3(\phi_3 - \phi_2) + k_4 \phi_3 = k_4 f \end{cases}$$

Hierbij is gebruikt dat, bijvoorbeeld, de lengte van veer 2 veranderd is met $\phi_2 - \phi_1$. De kracht die hiervan uitgaat is op blokje 2 uiteraard van dezelfde grootte als op blokje 1, maar werkt in tegengestelde richting. f geeft de verandering weer van het rechteruiteinde van de meest rechtse veer.

Een systeem met meerdere blokjes

In een systeem met zeg drie blokjes en vier veren is ϕ_j de positie van het j -de blokje van links gemeten vanaf diens evenwichtspositie. Er geldt

$$\begin{cases} m_1 \phi_1'' + c_1 \phi_1' + k_1 \phi_1 + k_2(\phi_1 - \phi_2) = 0 \\ m_2 \phi_2'' + c_2 \phi_2' + k_2(\phi_2 - \phi_1) + k_3(\phi_2 - \phi_3) = 0 \\ m_3 \phi_3'' + c_3 \phi_3' + k_3(\phi_3 - \phi_2) + k_4 \phi_3 = k_4 f \end{cases}$$

$$\text{Met } \Phi \equiv \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix}, M \equiv \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}, C \equiv \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 \end{bmatrix},$$

$$K \equiv \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 \end{bmatrix}, F \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ k_4 \end{bmatrix}$$

is

$$M \Phi'' + C \Phi' + K \Phi = f F.$$

Notatie. Kleinere matrices en vectoren kunnen bouwstenen zijn voor grotere matrices. De afmetingen moeten wel 'kloppen'.

Voorbeeld.

$$\text{Als } H \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}, c \equiv \begin{bmatrix} \pi \\ 2.3 \end{bmatrix}, \gamma = 7,$$

$$\text{dan is } A \equiv \begin{bmatrix} H & b \\ c^\top & \gamma \end{bmatrix}$$

$$\text{de matrix } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ \pi & 2.3 & 7 \end{bmatrix}.$$

Eerste orde vorm

$$M \Phi'' + C \Phi' + K \Phi = fF.$$

$$\text{Met } \mathbf{x} \equiv \begin{bmatrix} \Phi \\ \Phi' \end{bmatrix}, \mathbf{A} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{0}_3 & \mathbf{I}_3 \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix}, \mathbf{b} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ M^{-1}F \end{bmatrix} \text{ is}$$

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + f\mathbf{b}$$

Hiermee zijn de

drie 1-dimensionale gekoppelde tweede orde stelsels
omgeschreven tot

één 6-dimensionaal eerste orde stelsel.

In de zogenaamde **stelsel matrix** \mathbf{A} is

$\mathbf{0}_3$ de 3×3 nul matrix,

\mathbf{I}_3 de 3×3 identiteitsmatrix en

$\mathbf{0}$ in de vector \mathbf{b} is de nul vector van dimensie 3.

Eerste orde vorm

$$M \Phi'' + C \Phi' + K \Phi = fF.$$

Met $\mathbf{x} \equiv \begin{bmatrix} \Phi \\ \Phi' \end{bmatrix}$, $\mathbf{A} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{0}_3 & \mathbf{I}_3 \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ M^{-1}F \end{bmatrix}$ is

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + f\mathbf{b}$$

Stabiliteit. Iedere oplossing van het homogene deel

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

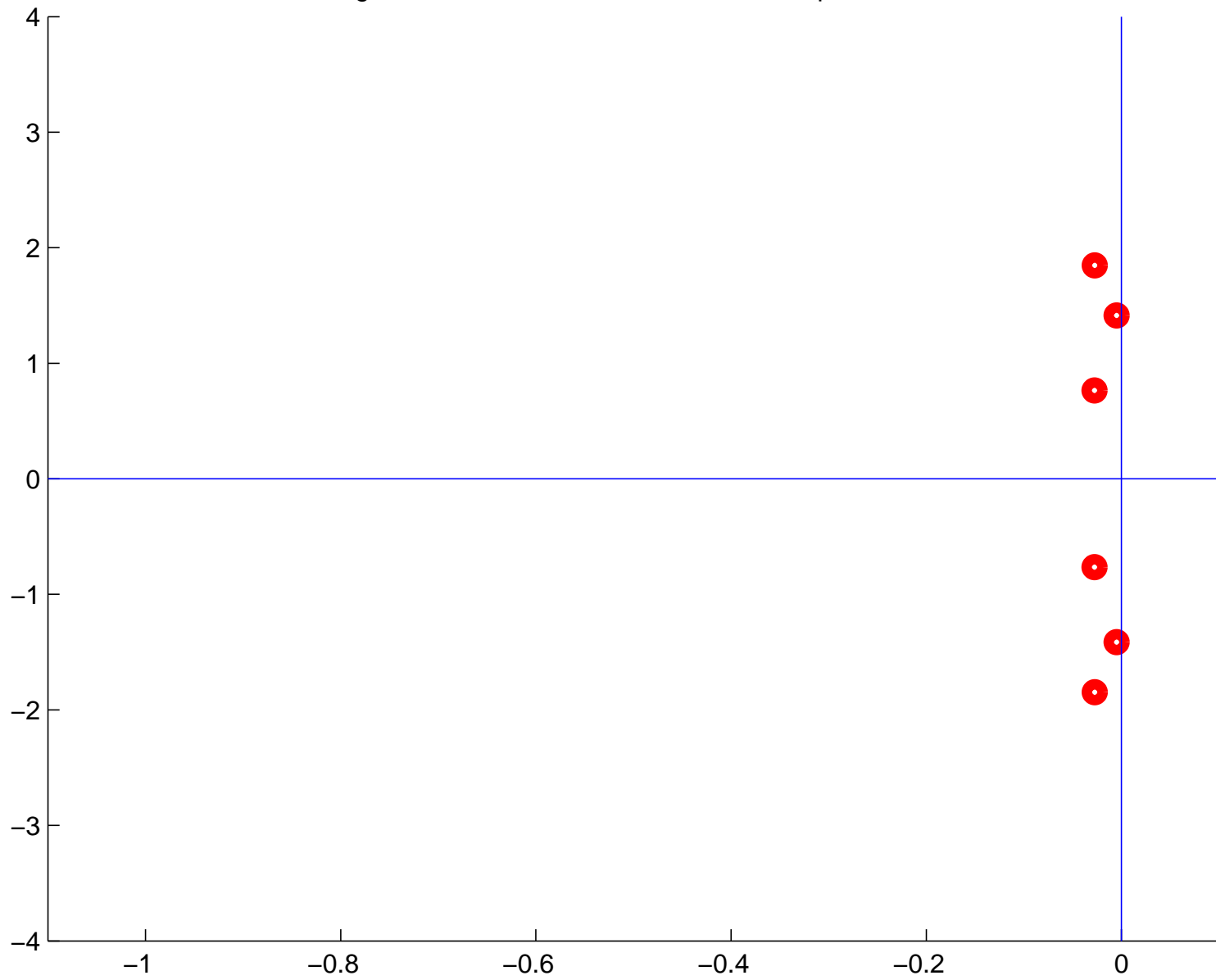
gaat op den duur naar $\mathbf{0} \Leftrightarrow$

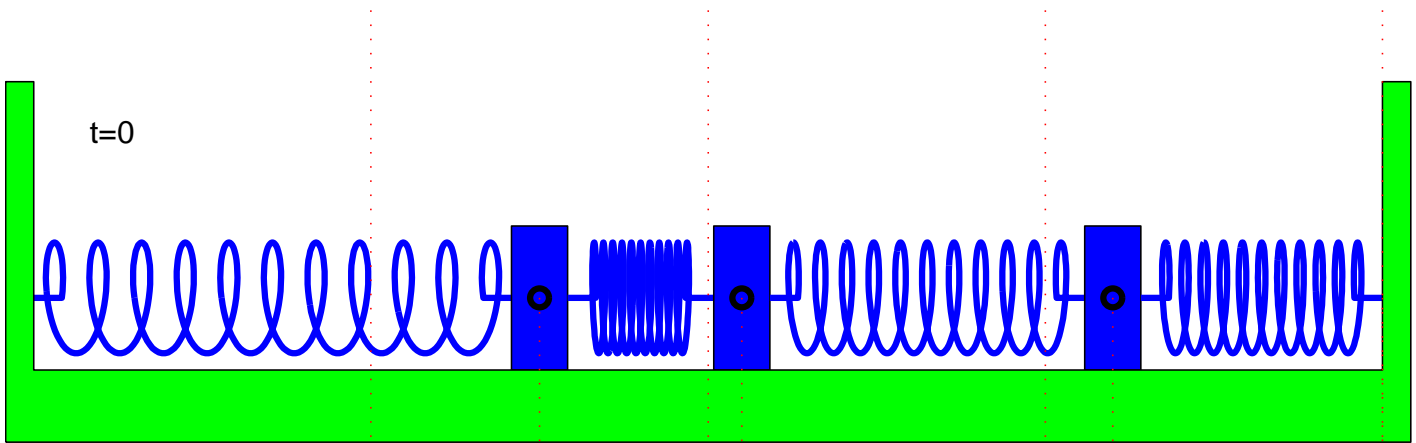
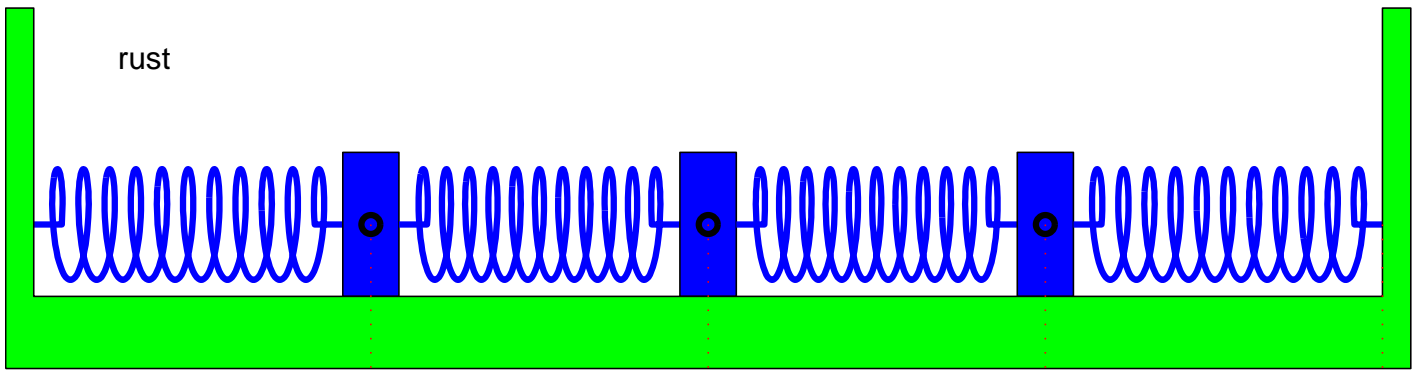
$\text{Re}(\lambda_j) < 0$ voor alle eigenwaarden $\lambda_1, \dots, \lambda_6$ van \mathbf{A} .

In plaatjes is

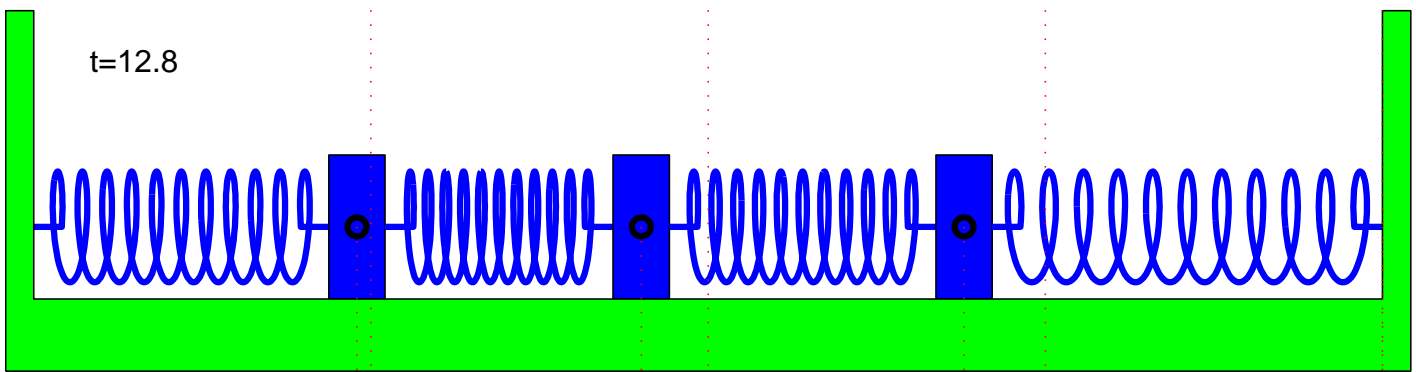
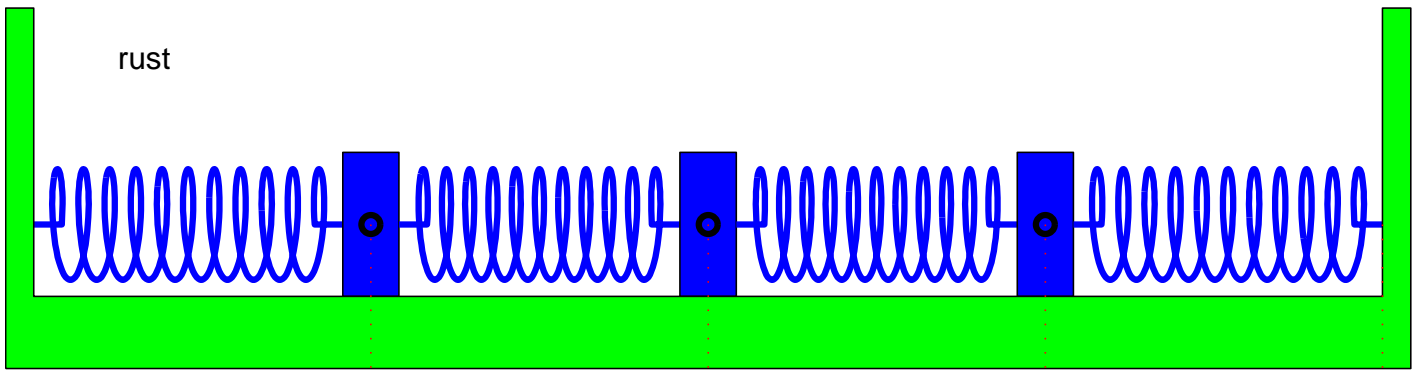
$m_j = 1$, $k_j = 1$, ($j = 1, 2, 3$) en $c_1 = c_3 = 0.01$, $c_2 = 0.1$.

eigenwaarden van de matrix A in het complexe vlak

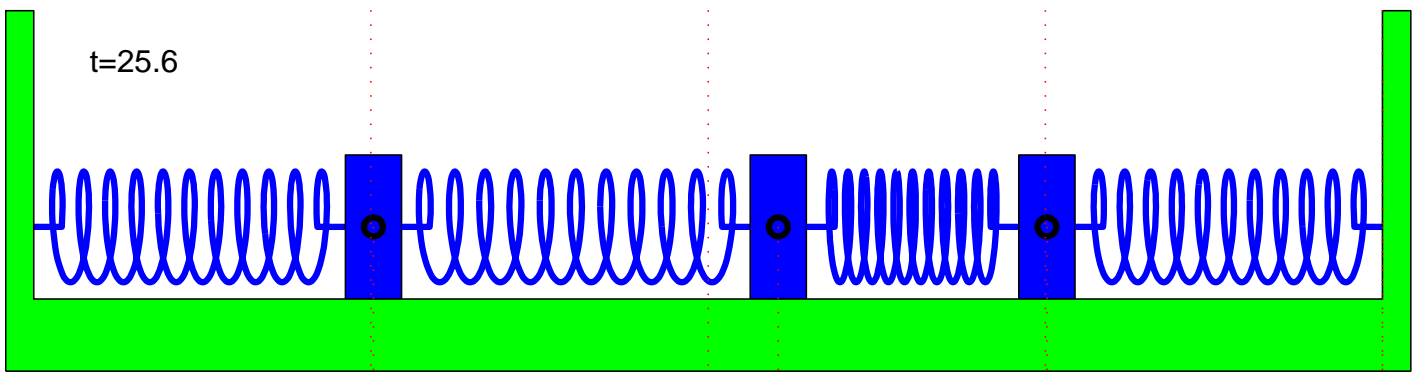
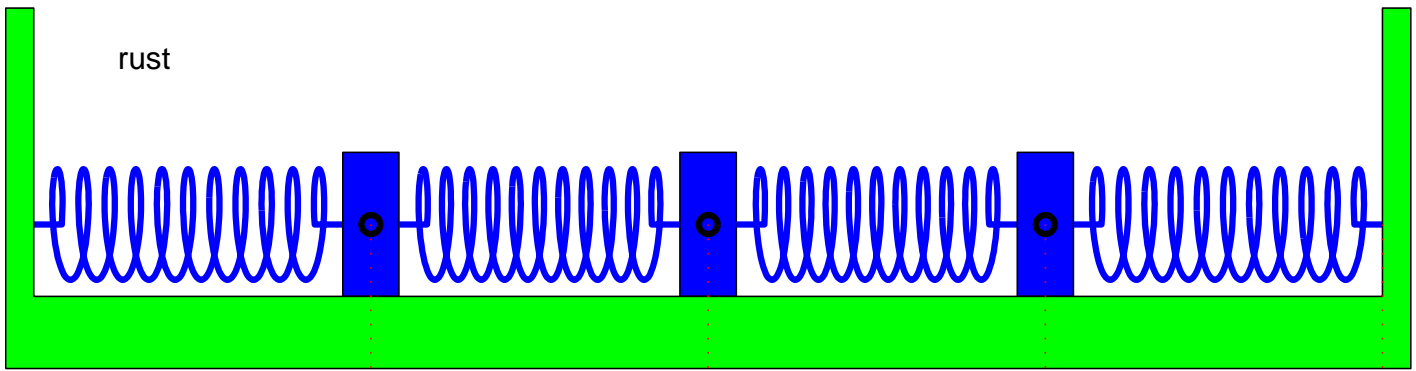




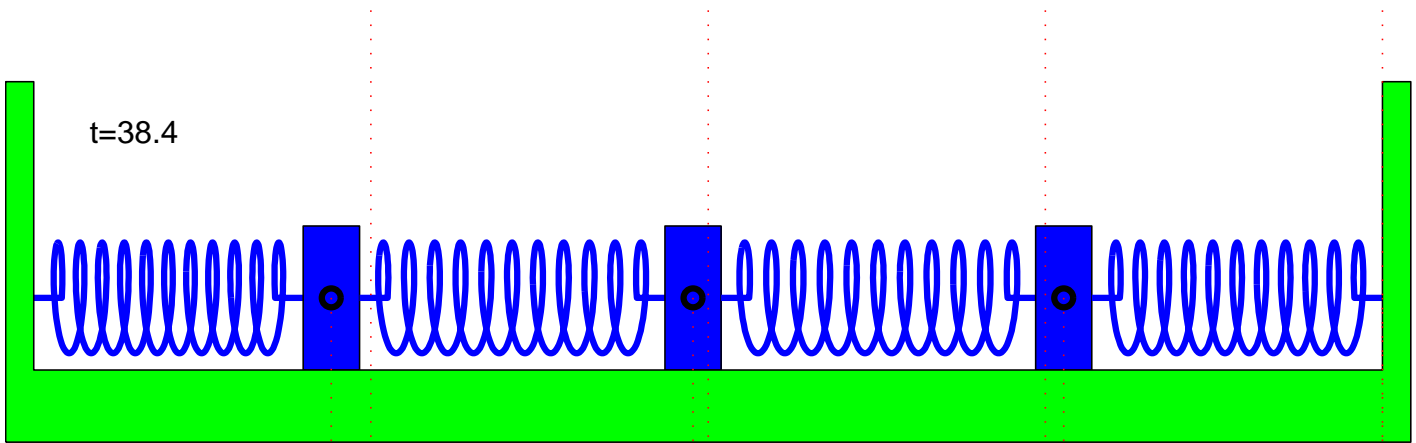
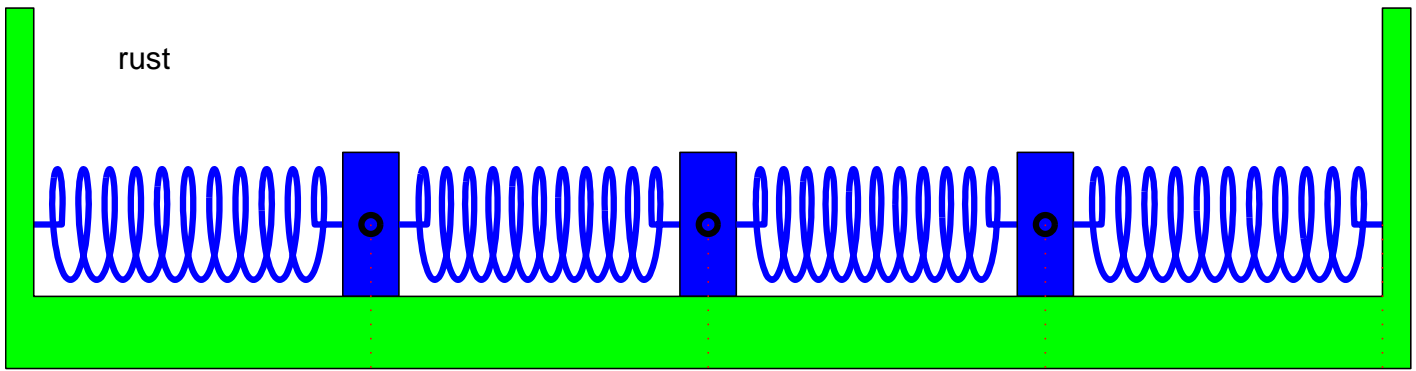
0 $\phi_1(t)$ 0 $\phi_2(t)$ 0 $\phi_3(t)$ 0 wand



0 $\phi_1(t)$ 0 $\phi_2(t)$ 0 $\phi_3(t)$ 0 wand



0 $\phi_1(t)$ 0 $\phi_2(t)$ 0 $\phi_3(t)$ 0 wand

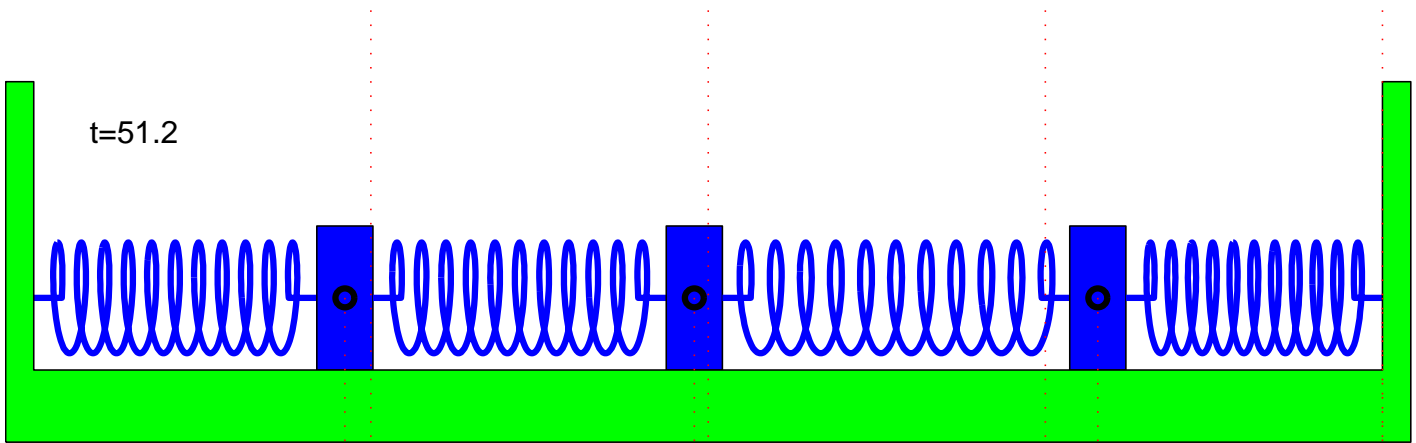
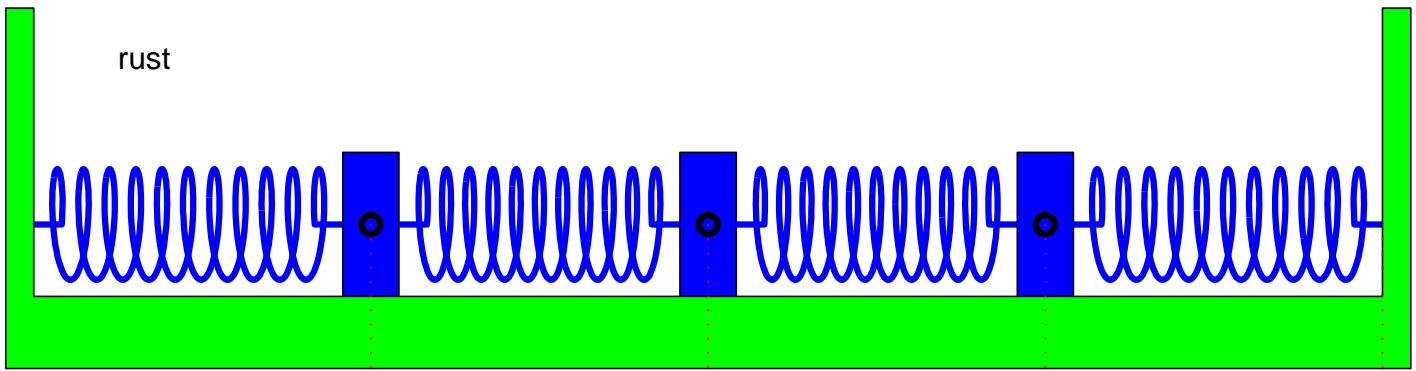


0
 $\phi_1(t)$

0
 $\phi_2(t)$

0
 $\phi_3(t)$

0
wand



0 $\phi_1(t)$ 0 $\phi_2(t)$ 0 $\phi_3(t)$ 0 wand

Eerste orde vorm

$$M \Phi'' + C \Phi' + K \Phi = fF.$$

Met $\mathbf{x} \equiv \begin{bmatrix} \Phi \\ \Phi' \end{bmatrix}$, $\mathbf{A} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{0}_3 & \mathbf{I}_3 \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ M^{-1}F \end{bmatrix}$ is

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + f\mathbf{b}$$

Oplossing. Stel $f = e^{i\mu t}$. Probeer $\mathbf{x}(t) = \mathbf{H}(\mu) e^{i\mu t}$.

Dan
$$i\mu e^{i\mu t} \mathbf{H}(\mu) = e^{i\mu t} \mathbf{A} \mathbf{H}(\mu) + e^{i\mu t} \mathbf{b}.$$

Dus
$$\mathbf{H}(\mu) = (i\mu \mathbf{I}_6 - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b}$$

Blijkbaar is een particuliere oplossing voor ϕ_1

$$\phi_1(t) = [\mathbf{c}^\top (i\mu \mathbf{I}_6 - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b}] e^{i\mu t}$$

met $\mathbf{c}^\top \equiv (1, 0, 0, 0, 0, 0)$.

Voor reële oplossingen en als $f(t) = \cos(\mu t)$, dan moeten we van ϕ_1 nog het reële deel nemen.

Eerste orde vorm

$$M \Phi'' + C \Phi' + K \Phi = fF.$$

Met $\mathbf{x} \equiv \begin{bmatrix} \Phi \\ \Phi' \end{bmatrix}$, $\mathbf{A} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{0}_3 & \mathbf{I}_3 \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ M^{-1}F \end{bmatrix}$ is

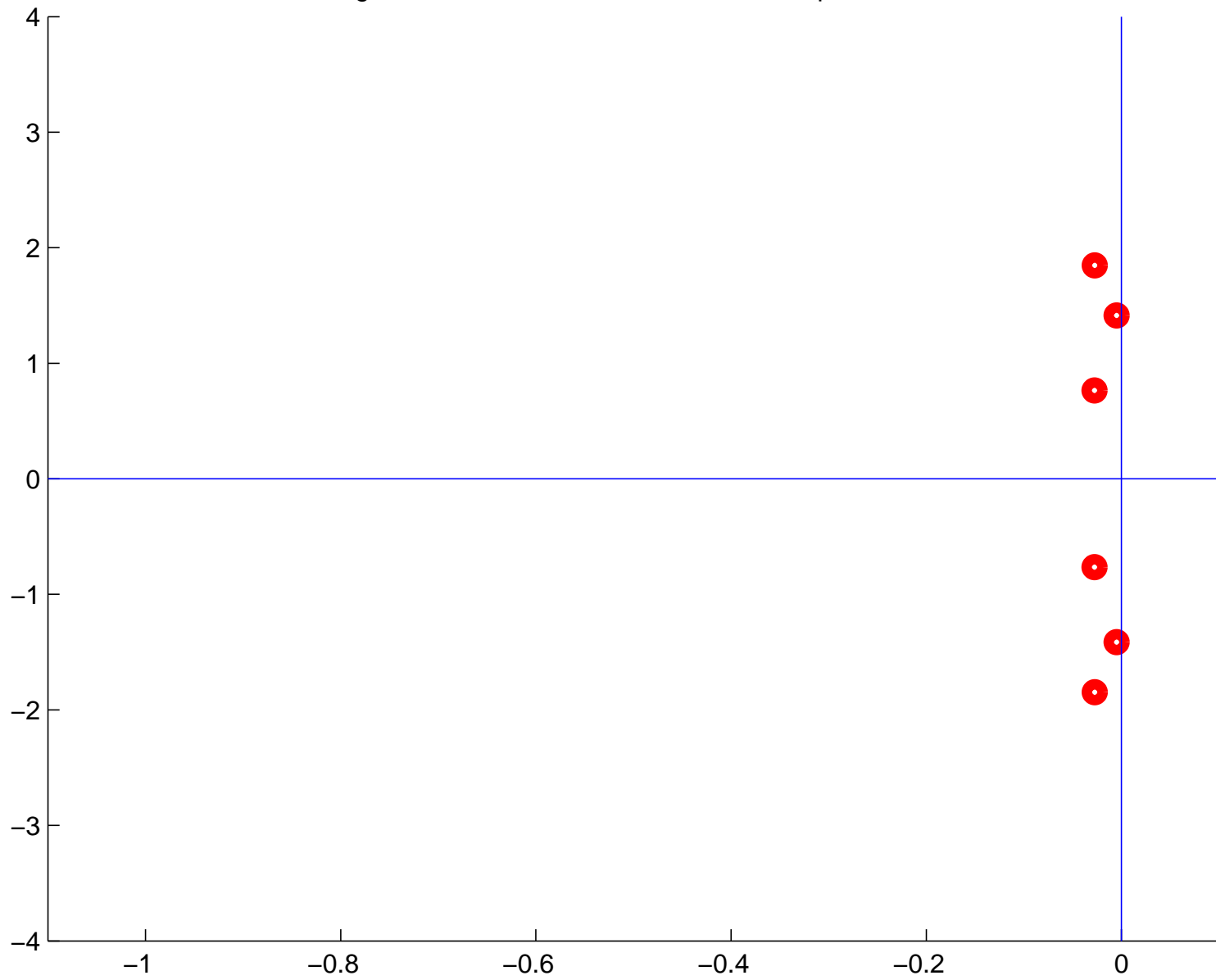
$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + f\mathbf{b}$$

Oplossing. Stel $f(t) = \cos(\mu t)$. Dan geldt op den duur

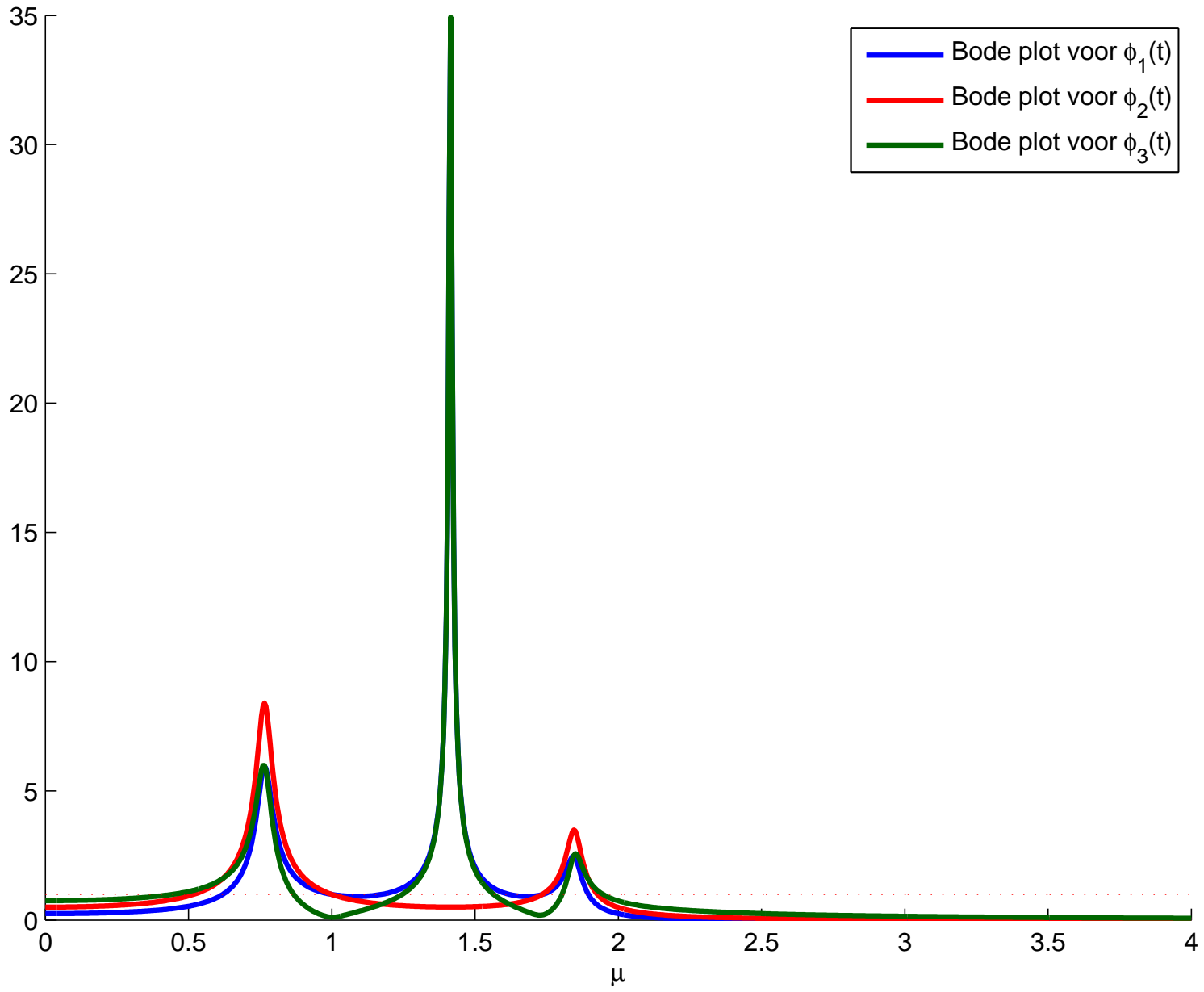
$$\phi_1(t) = |H(\mu)| \cos(\mu t + \delta(\mu))$$

waarbij $H(\mu) \equiv \mathbf{c}^\top (i\mu \mathbf{I}_6 - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} = |H(\mu)| e^{i\delta(\mu)}$.

eigenwaarden van de matrix A in het complexe vlak



Bode plot: $\mu \rightarrow |H(\mu)|$



Eerste orde vorm

$$M \Phi'' + C \Phi' + K \Phi = fF.$$

Met $\mathbf{x} \equiv \begin{bmatrix} \Phi \\ \Phi' \end{bmatrix}$, $\mathbf{A} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{0}_3 & \mathbf{I}_3 \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ M^{-1}F \end{bmatrix}$ is

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + f\mathbf{b}$$

Oplossing. Stel $f(t) = \cos(\mu t)$. Dan geldt op den duur

$$\phi_1(t) = |H(\mu)| \cos(\mu t + \delta(\mu))$$

waarbij $H(\mu) \equiv \mathbf{c}^\top (i\mu \mathbf{I}_6 - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} = |H(\mu)| e^{i\delta(\mu)}$.

Discussie. $H(\mu)$ is de **transfer functie**.

Als de input f een harmonische oscillatie is, dan is de output ϕ_1 dat ook en wel met dezelfde frequentie maar met een **faseverschuiving** $\delta(\mu)$ en **amplitudeverandering** met factor $|H(\mu)|$. Faseverschuiving en amplitudeverandering hangen beide af van de frequentie μ .

Eerste orde vorm

$$M \Phi'' + C \Phi' + K \Phi = fF.$$

$$\text{Met } \mathbf{x} \equiv \begin{bmatrix} \Phi \\ \Phi' \end{bmatrix}, \mathbf{A} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{0}_3 & \mathbf{I}_3 \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix}, \mathbf{b} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ M^{-1}F \end{bmatrix} \text{ is}$$

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + f\mathbf{b}$$

Oplossing. Stel $f(t) = \cos(\mu t)$. Dan geldt op den duur

$$\phi_1(t) = |H(\mu)| \cos(\mu t + \delta(\mu))$$

waarbij $H(\mu) \equiv \mathbf{c}^\top (i\mu \mathbf{I}_6 - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} = |H(\mu)| e^{i\delta(\mu)}$.

Discussie. Als $i\mu$ een eigenwaarde is van \mathbf{A} dan bestaat de inverse van $i\mu \mathbf{I}_6 - \mathbf{A}$ niet ('door de inverse kunnen vectoren ∞ groot worden').

Als $i\mu$ dicht bij een eigenwaarde van \mathbf{A} ligt dan vergroot de inverse van $i\mu \mathbf{I}_6 - \mathbf{A}$ vectoren (behalve als die vectoren een kleine component hebben in de bijbehorende eigenvector richting) en zal $|H(\mu)|$ groot zijn.

Veersystemen in meerdere ruimte dimensies

Het veersysteem kan uitgebreid worden tot een systeem met met meerdere blokjes en veren. Het ligt voor de hand hoe je dat moet doen als die blokjes en veren op een lijn moet liggen, d.w.z., in een 1-dimensionale ruimte.

Als de blokjes in een 3-dimensionale ruimte liggen dan kan de afwijking van de rust situatie voor iedere blokje beschreven worden met drie coördinaten: voor het j -de blokje met $(\phi_{x,j}, \phi_{y,j}, \phi_{z,j})$, de afwijking in achtereenvolgens de x -richting, de y -richting en de z -richting. Met N blokjes hebben we dan te maken met $3N$ gekoppelde tweede orde differentiaal vergelijkingen, die omgezet kunnen worden in een $6N$ -dimensionaal eerste orde systeem.

Veersystemen in meerdere ruimte dimensies

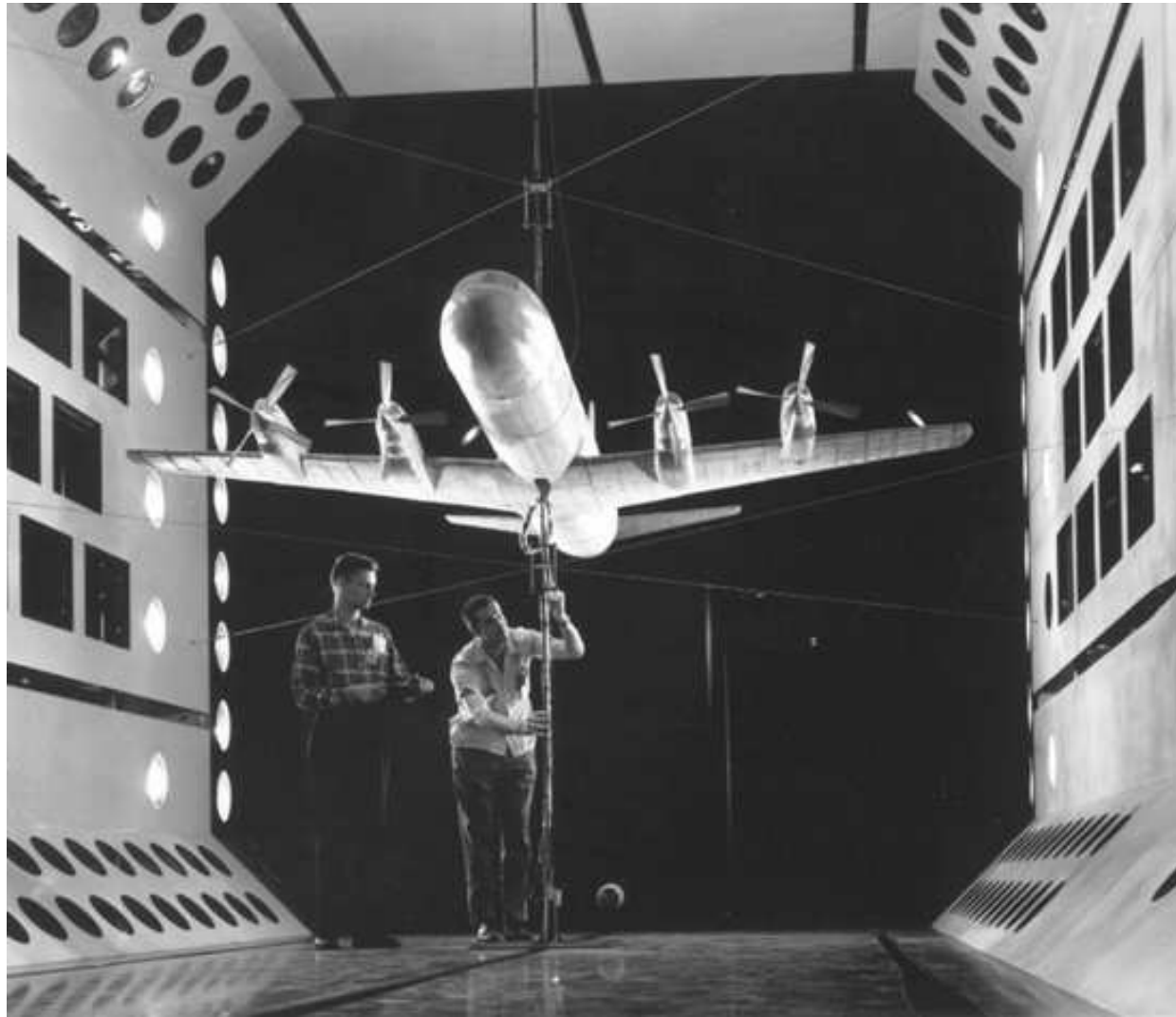
In een 3-dimensionale ruimte hebben de blokjes niet alleen de vrijheid om in de ruimte te bewegen, maar kunnen ze wellicht ook roteren om zekere assen. Zoals je een verschuiving in een 3 dimensionale ruimte kunt ontbinden in verschuivingen langs de drie hoofd-assen (x -, y - en z -as) en dus met drie coördinaten $(\phi_{x,j}, \phi_{y,j}, \phi_{z,j})$, zo kan je een rotatie ontbinden in rotatie rond de drie hoofd-assen en dus met drie hoeken. De veren “proberen” de rotaties ongedaan te maken. Het traagheidsmoment voor rotaties is het analogon van de tweede wet van Newton voor verschuivingen. Kortom, met N -blokjes heb je te maken met $6N$ gekoppelde tweede orde differentiaal vergelijkingen die omgezet kunnen worden in een $12N$ -dimensionaal eerste orde systeem.

Stabiliteit van constructie

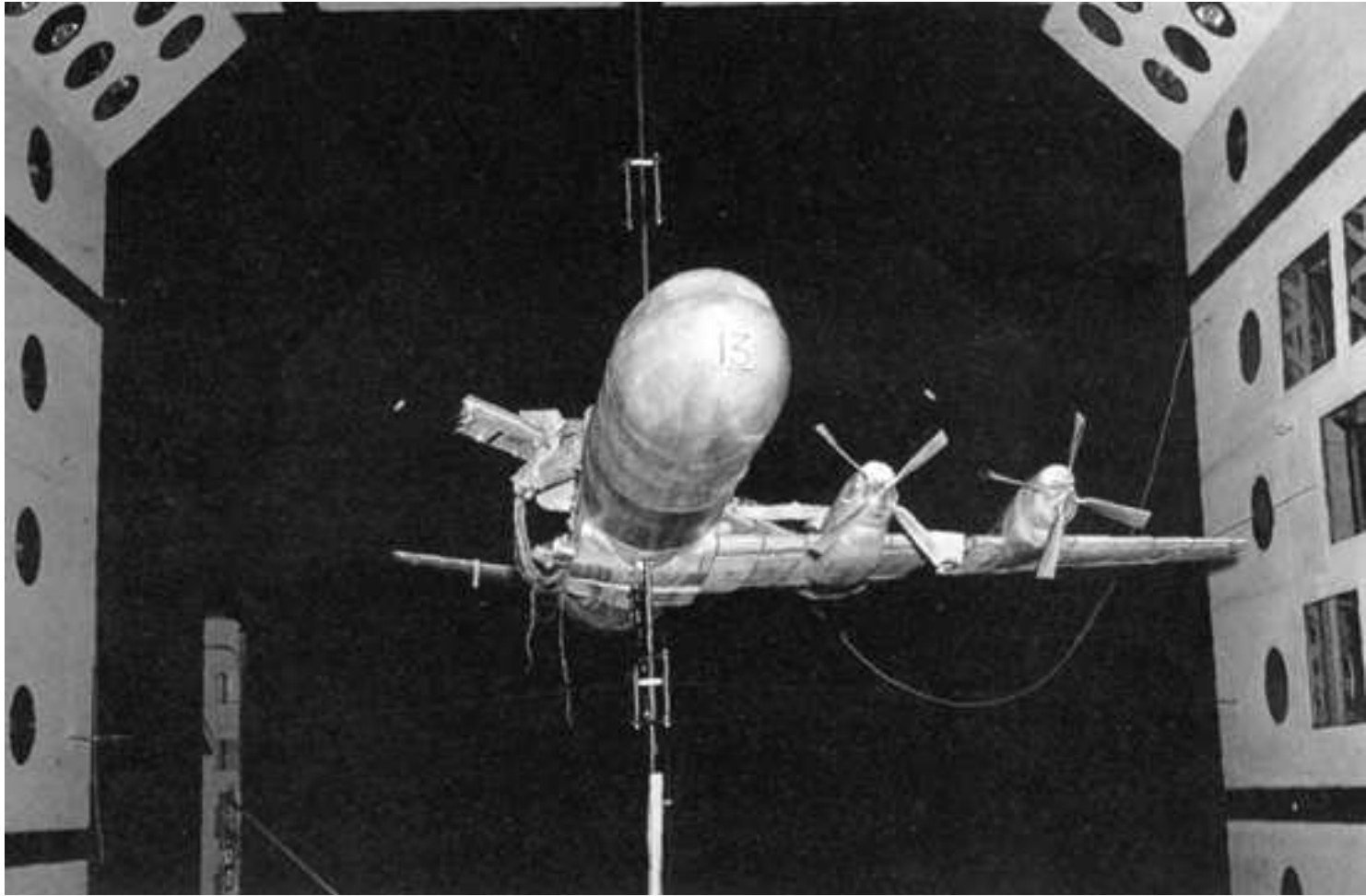
Om te voorspellen hoe constructies als bruggen, vliegtuigen, gebouwen, etc., zullen reageren op trillingen van buitenaf (kolkjes in de lucht, aardbevingen)

- wordt het ontwerp voor de constructie **gediscretiseerd**, d.w.z., benaderd door een systeem van veren en blokjes als zo juist beschreven.
- Gekeken wordt of er eigenwaarden zijn die dicht bij de imaginary as liggen bij $i\mu$ in de buurt met μ de frequentie die voorkomt in (potentiële) aandrijvende trillingen.
- Als dat zo is, wordt de constructie aanpast (met bijvoorbeeld een extra balk op een strategische plek).
- Deze procedure wordt herhaald tot er geen vervelende resonanties meer te verwachten zijn.

Dus, in een ontwerp fase spelen eigenwaarden van de “systeem matrix” een grote rol.



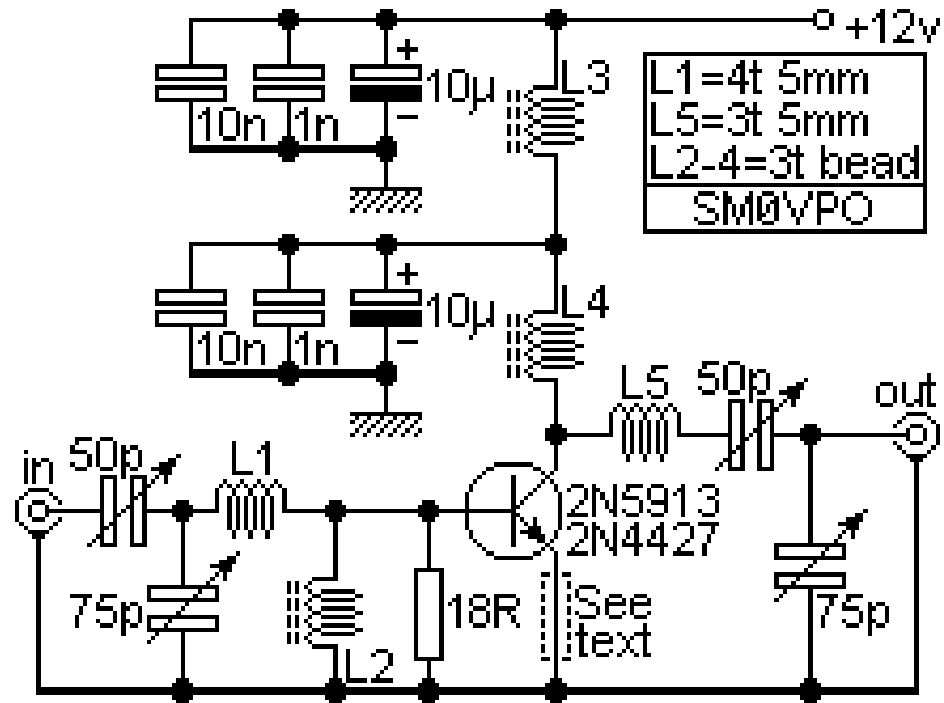








Electronische Circuits.



Kanttekeningen.

In praktijk heeft men te maken met (zeer) hoog dimensionale lineaire differentiaalvergelijkingen (met zeer veel eigenwaarden/eigenfrequenties).

Hogere orde vergelijkingen worden middels 'n companion vorm omgeschreven naar een eerste orde vergelijking (waarvoor de dimensie nog verder toeneemt).

Electronische circuits (chips) hebben tot 100 000 000 elektrische componenten (Wet van Moore) (weerstand, condensators, spoelen, etc.). $\dim > 4 \cdot 10^8$.

Andere toepassingen:

- Getijden (eb en vloed)
- Muziek (sithar, viool)
- **Magnetic Resonance Imaging**
-

Kanttekeningen.

Soms is resonantie een verschijnsel dat men wil voorkomen (bijvoorbeeld in geval van vliegtuigen en bruggen die kunnen resoneren op de kolkjes in de lucht (**flutter**), of gebouwen die kunnen resoneren op schokgolven van aardbevingen, of microfon-versterker-luidspreker systemen die kunnen 'rondzingen', etc.).

Men probeert dat te doen door het systeem zo te veranderen dat met name die eigentrillingen (d.w.z. $\text{Im}(\lambda_k)$) van het systeem sterker gedempt worden (d.w.z. $\text{Re}(\lambda_k)$ sterker negatief maken) die dicht in de buurt zitten van de belangrijke frequenties in het aandrijvend signaal.

Kanttekeningen.

Soms is resonantie een verschijnsel dat men wil uitbuiten. Men probeert dan een systeem te ontwerpen dat alleen resonanceert bij zekere specifieke frequenties in het aandrijvend signaal en niet bij andere frequenties (in geval van een radio probeert men bijvoorbeeld de oscillaties in het signaal met frequentie 98.8 Mhz te versterken (resonantie) en de andere oscillaties te dempen. De aandrijving is op de contactpunten van de antenne, het output signaal komt op de contactpunten van de luidsprekers).

Program

- Continue modellen
- Voorbeeld
- Oplosmethoden
- Evenwicht, stabiliteit
- Discreet versus continue
- Terminologie
- Meer dimensionale eerste orde modellen
- Een dimensionale hogere orde modellen
- Resonantie
- Meer dimensionale eerste orde modellen, II

Classificatie evenwichten 2-d (reëel)

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{met} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

met eigenwaarden λ_1 en λ_2 .

Mogelijkheden.

- $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$
 - 1) $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < \lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \lambda_1 < 0$
 - 2) $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$, $\lambda_2 = 0 = \lambda_1$
 - 3) $0 < \lambda_2 < \lambda_1$, $0 = \lambda_2 < \lambda_1$, $0 < \lambda_2 = \lambda_1$
- $\lambda_1 = \overline{\lambda_2} \notin \mathbb{R}$
 - 4) $\text{Re}(\lambda_1) < 0$
 - 5) $\text{Re}(\lambda_1) > 0$
 - 6) $\text{Re}(\lambda_1) = 0$

Classificatie evenwichten 2-d (reëel)

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{met} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

met eigenwaarden λ_1 en λ_2 .

Mogelijkheden.

- $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$
 - 1) $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < \lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \lambda_1 < 0$
 - 2) $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$, $\lambda_2 = 0 = \lambda_1$
 - 3) $0 < \lambda_2 < \lambda_1$, $0 = \lambda_2 < \lambda_1$, $0 < \lambda_2 = \lambda_1$
- $\lambda_1 = \overline{\lambda_2} \notin \mathbb{R}$
 - 4) $\text{Re}(\lambda_1) < 0$
 - 5) $\text{Re}(\lambda_1) > 0$
 - 6) $\text{Re}(\lambda_1) = 0$

Classificatie evenwichten 2-d (reëel)

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{met} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

met eigenwaarden λ_1 en λ_2 .

$$d \equiv a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} = \det(\mathbf{A}) = \lambda_1 \lambda_2$$

$$s \equiv a_{11} + a_{22} = \text{spoor}(\mathbf{A}) = \lambda_1 + \lambda_2$$

Classificatie evenwichten 2-d (reëel)

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{met} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

met eigenwaarden λ_1 en λ_2 .

$$d \equiv a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} = \det(\mathbf{A}) = \lambda_1 \lambda_2$$

$$s \equiv a_{11} + a_{22} = \text{spoor}(\mathbf{A}) = \lambda_1 + \lambda_2$$

$d > 0$ en $s < 0$: **Stabiel**

$$4d \leq s^2 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{Knoop}$$

$$4d > s^2 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{Spiraal}$$

$d \leq 0$ of $s \geq 0$: **Instabiel**

$$d < 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{Zadelpunt}$$

$$d > 0 \ \& \ 4d \leq s^2 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{Knoop}$$

$$d > 0 \ \& \ 4d > s^2 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{Spiraal}$$

Classificatie evenwichten 2-d (reëel)

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{met} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

met eigenwaarden λ_1 en λ_2 .

$$d \equiv a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} = \det(\mathbf{A}) = \lambda_1 \lambda_2$$

$$s \equiv a_{11} + a_{22} = \text{spoor}(\mathbf{A}) = \lambda_1 + \lambda_2$$

$d > 0$ en $s < 0$: **Stabiel**

$$4d \leq s^2 \quad \Rightarrow \quad \text{Knoop}$$

$$4d > s^2 \quad \Rightarrow \quad \text{Spiraal}$$

Put

$d \leq 0$ of $s \geq 0$: **Instabiel**

$$d < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Zadelpunt}$$

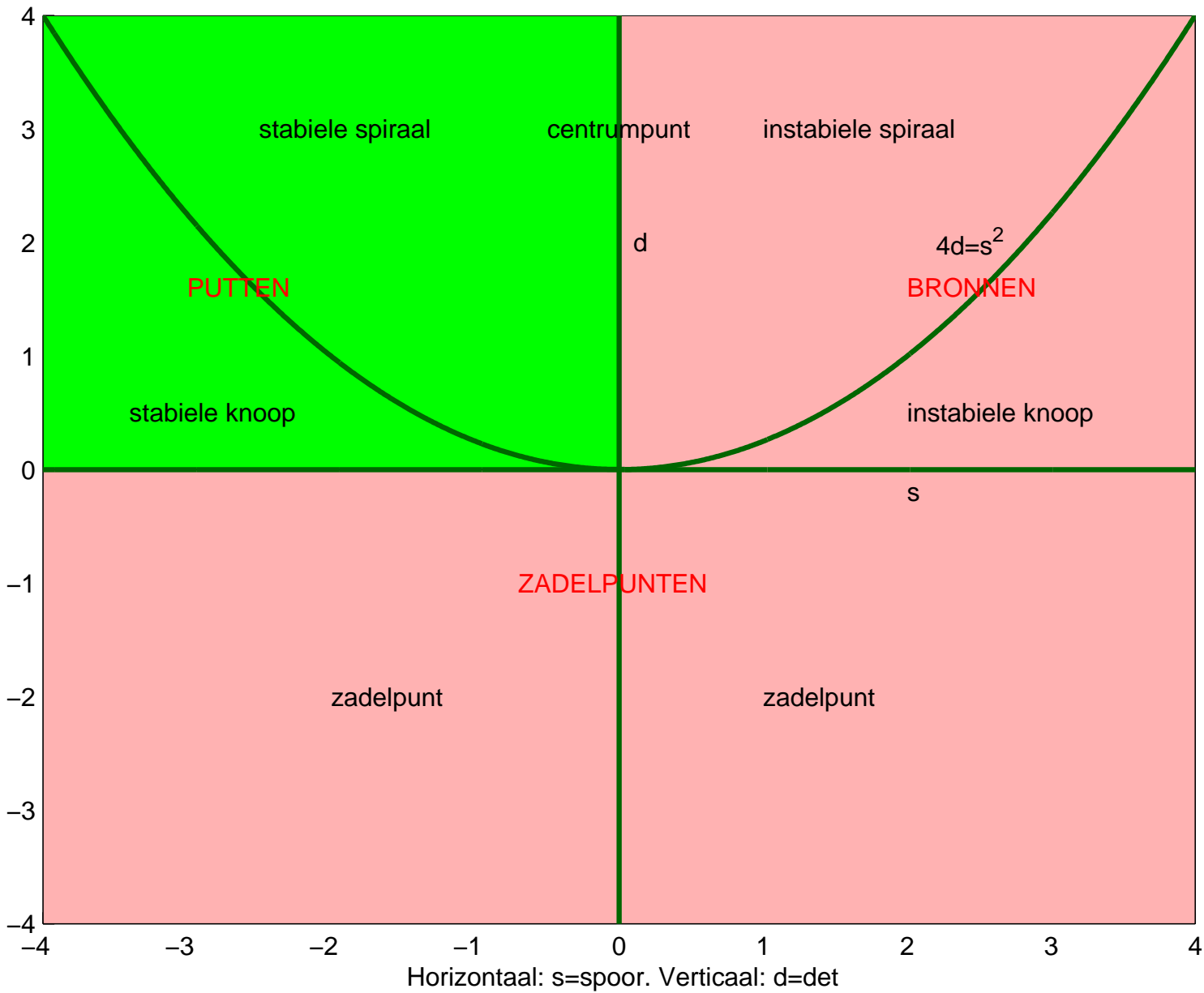
$$d > 0 \ \& \ 4d \leq s^2 \quad \Rightarrow \quad \text{Knoop}$$

$$d > 0 \ \& \ 4d > s^2 \quad \Rightarrow \quad \text{Spiraal}$$

ZADELPUNT

BRON

Overzicht classificatie evenwichten in 2-d

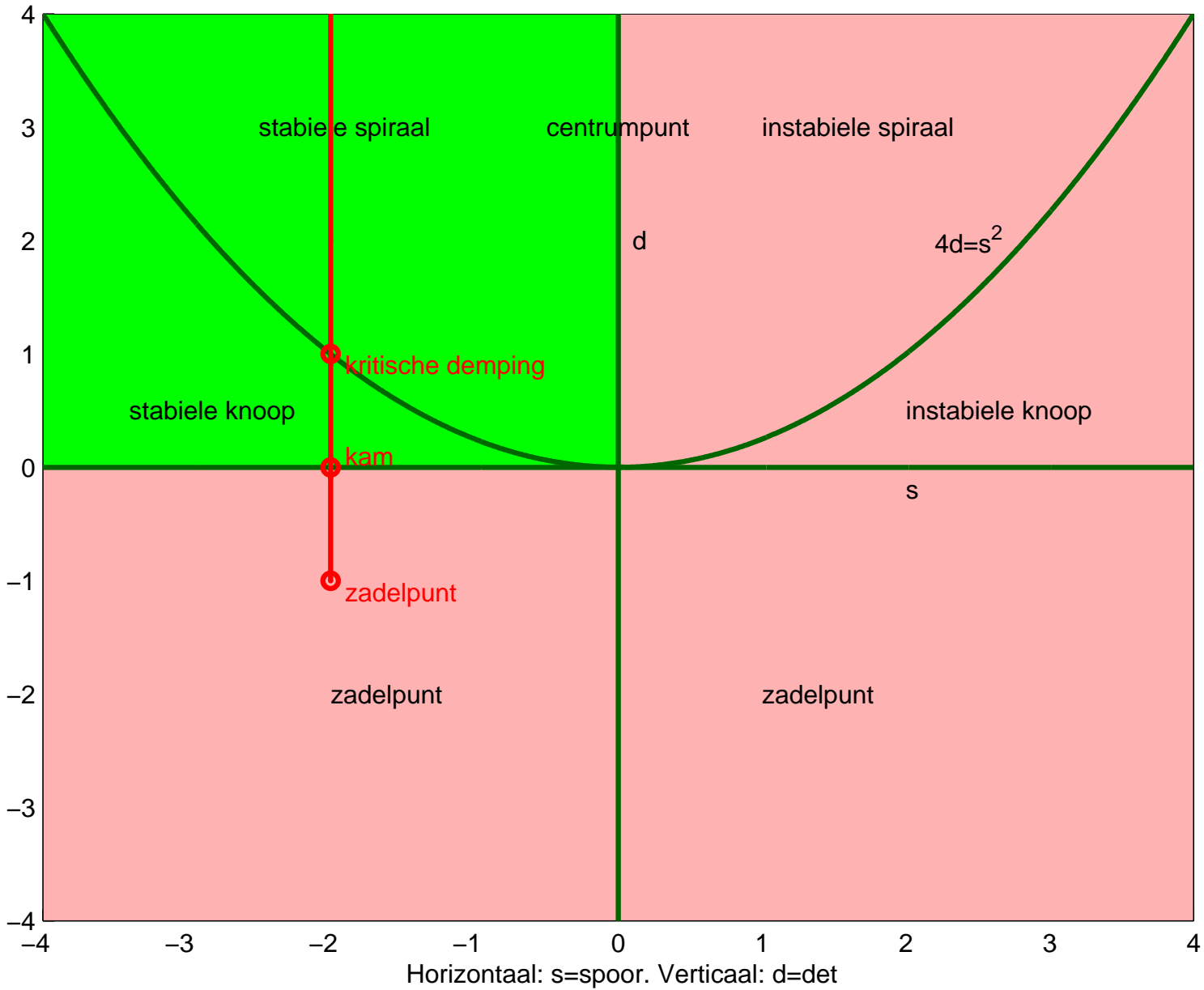


Vast spoor, oplopende determinant

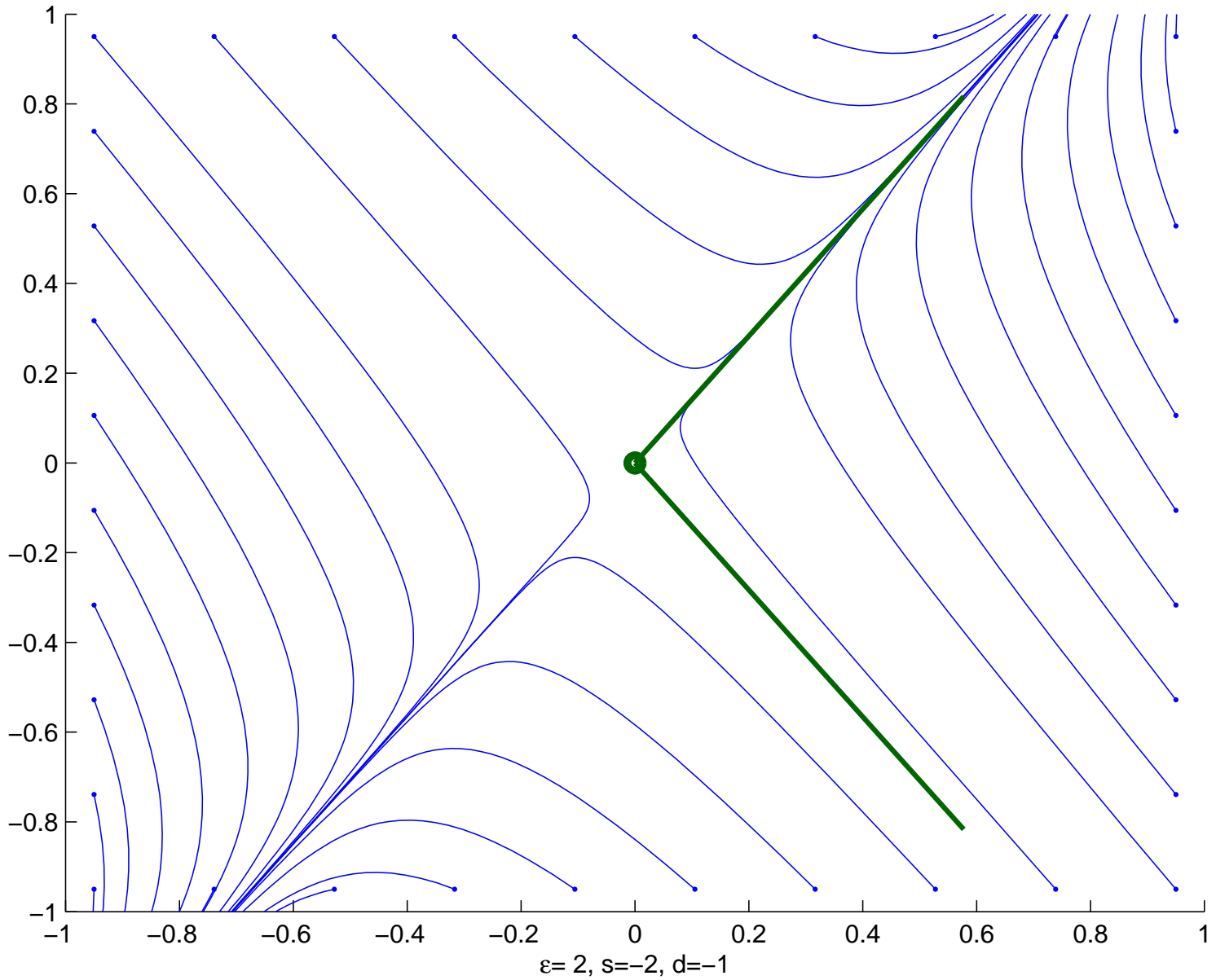
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ \varepsilon & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad s = \text{spoor} = -2, \quad d = \det = 1 - \varepsilon$$

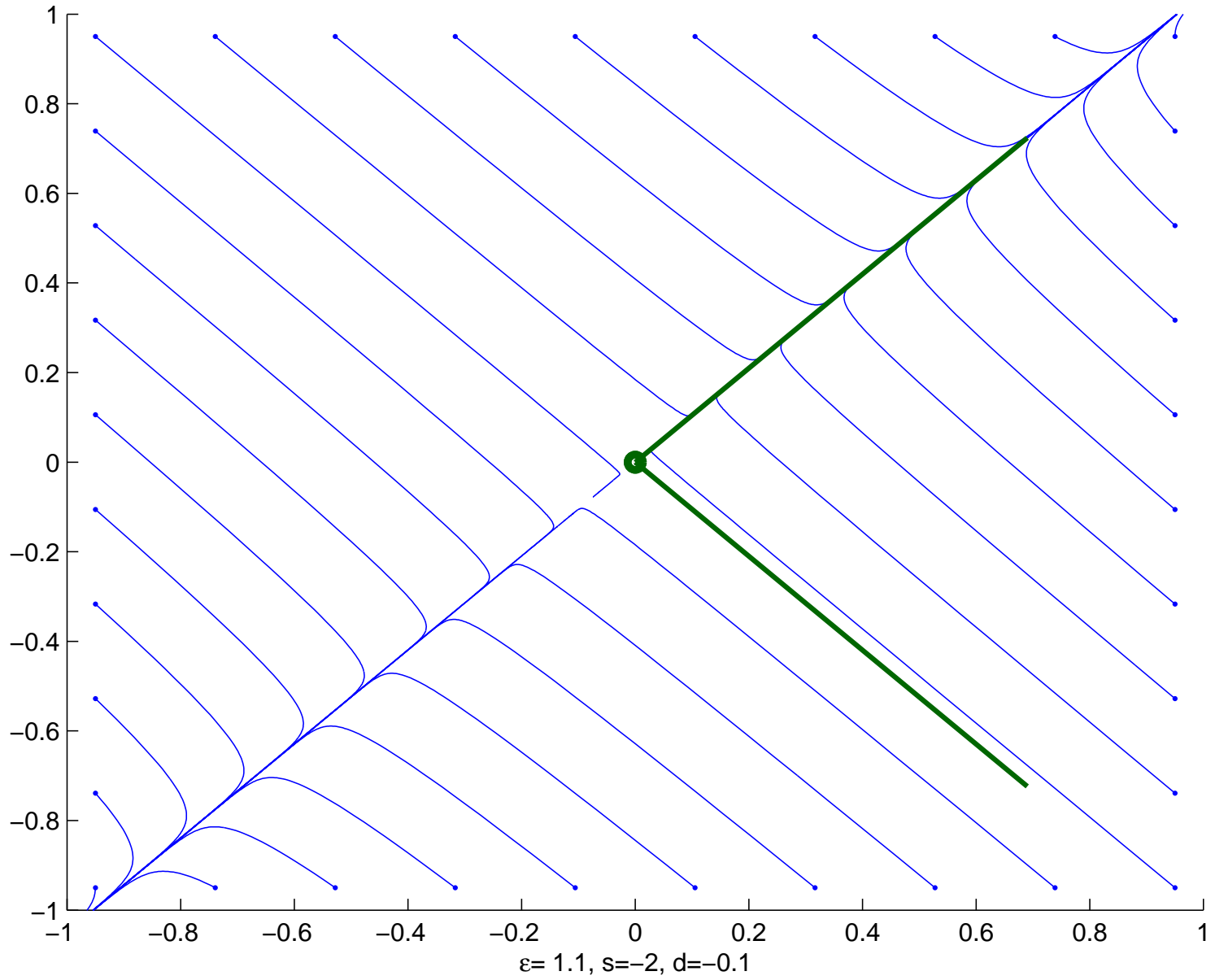
s en d bij oplopende d



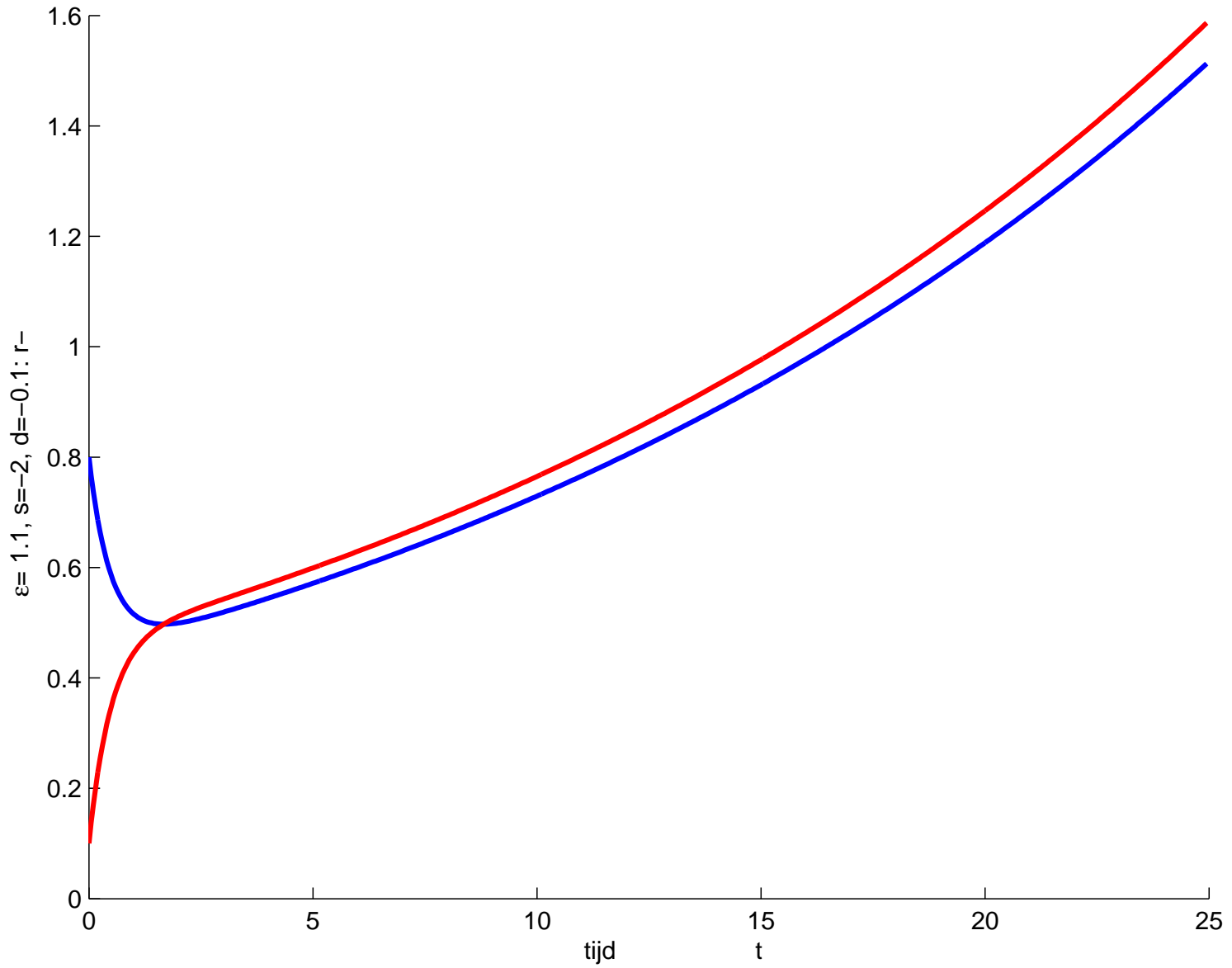
2-d Lineaire differentiaal vergelijking met $\lambda_1=0.414214$, $\lambda_2=-2.41421$



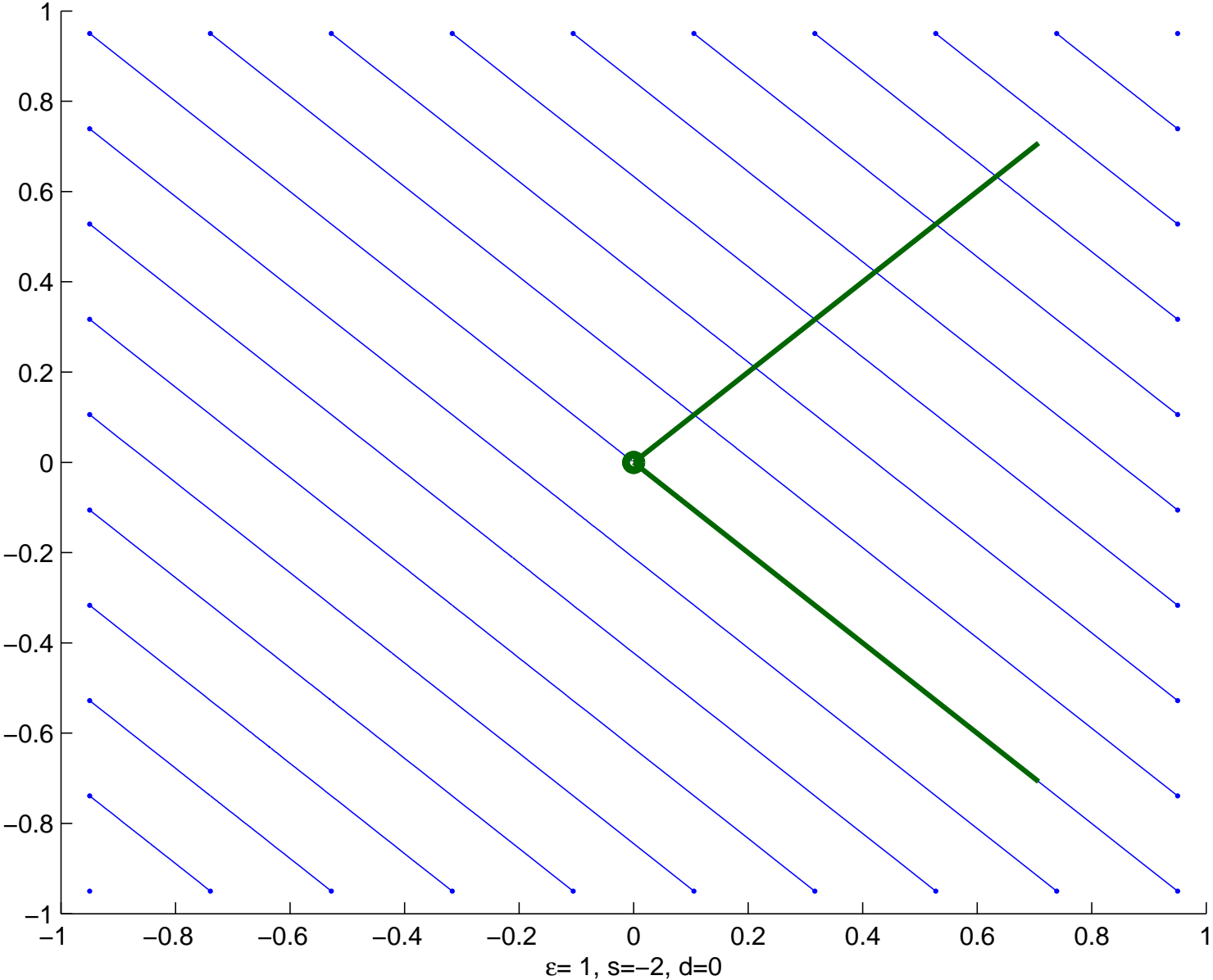
2-d Lineaire differentiaal vergelijking met $\lambda_1=0.0488088$, $\lambda_2=-2.04881$



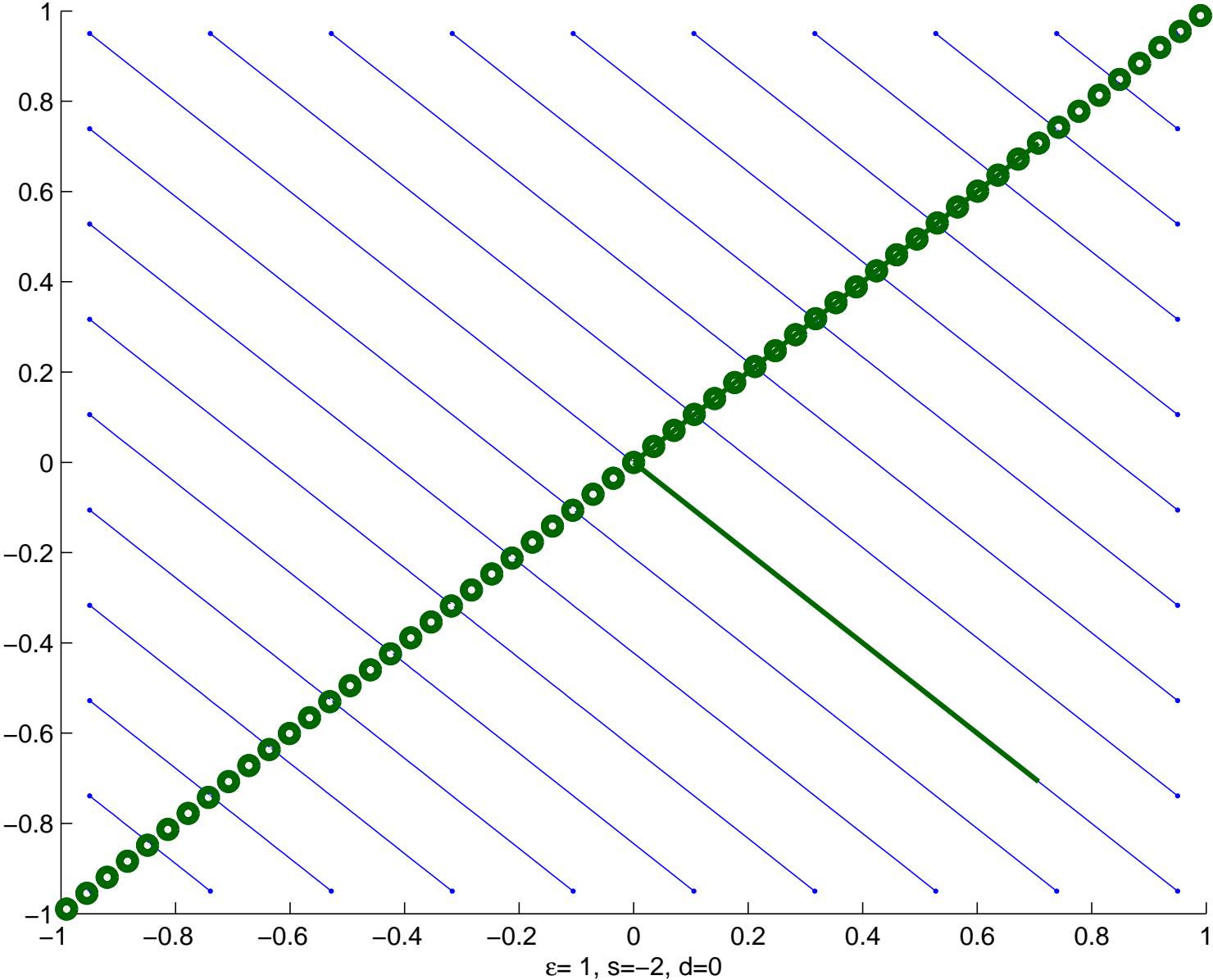
2-d Lineaire differentiaal vergelijking met $\lambda_1=-2.04881$, $\lambda_2=0.0488088$



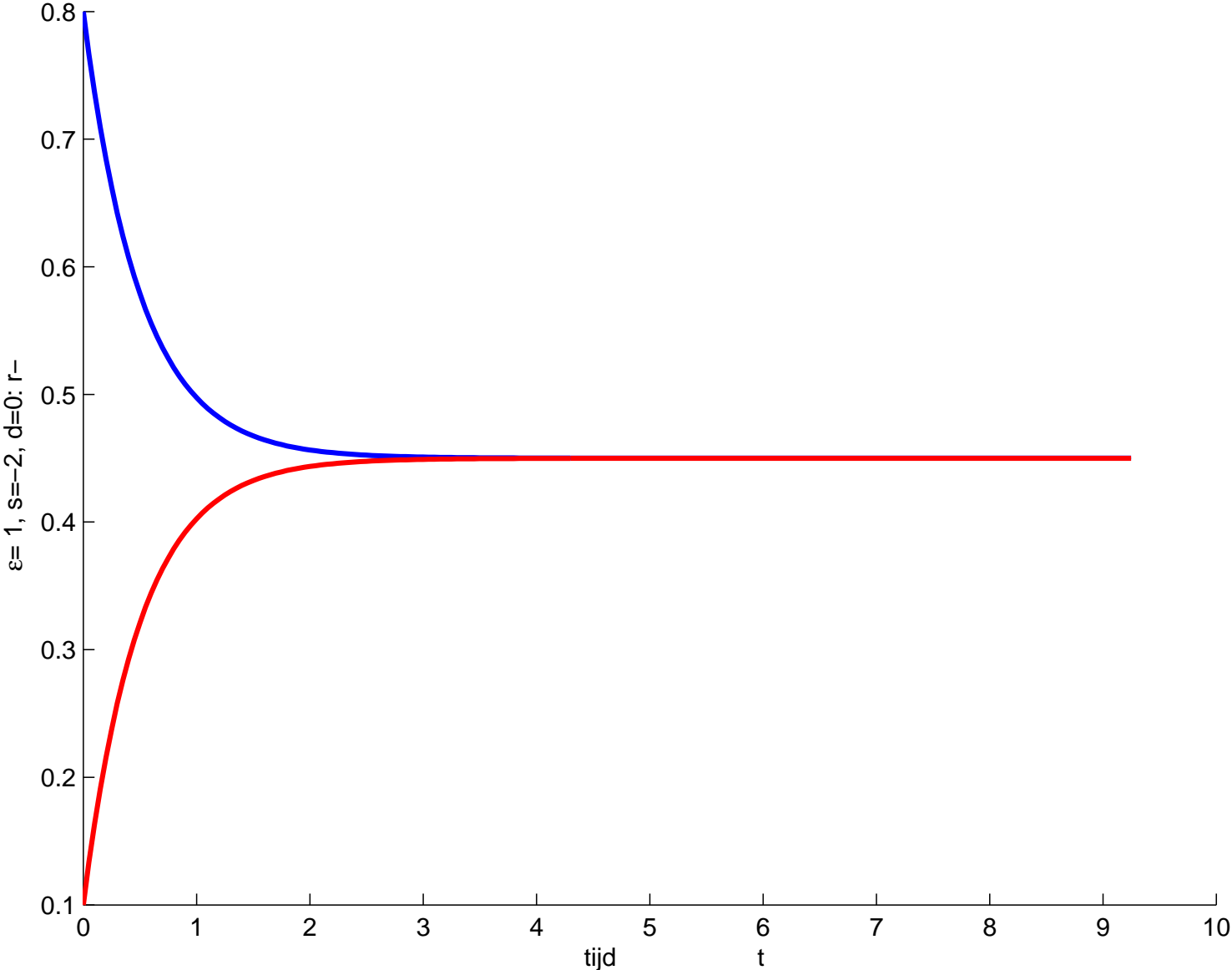
2-d Lineaire differentiaal vergelijking met $\lambda_1=-2, \lambda_2=0$



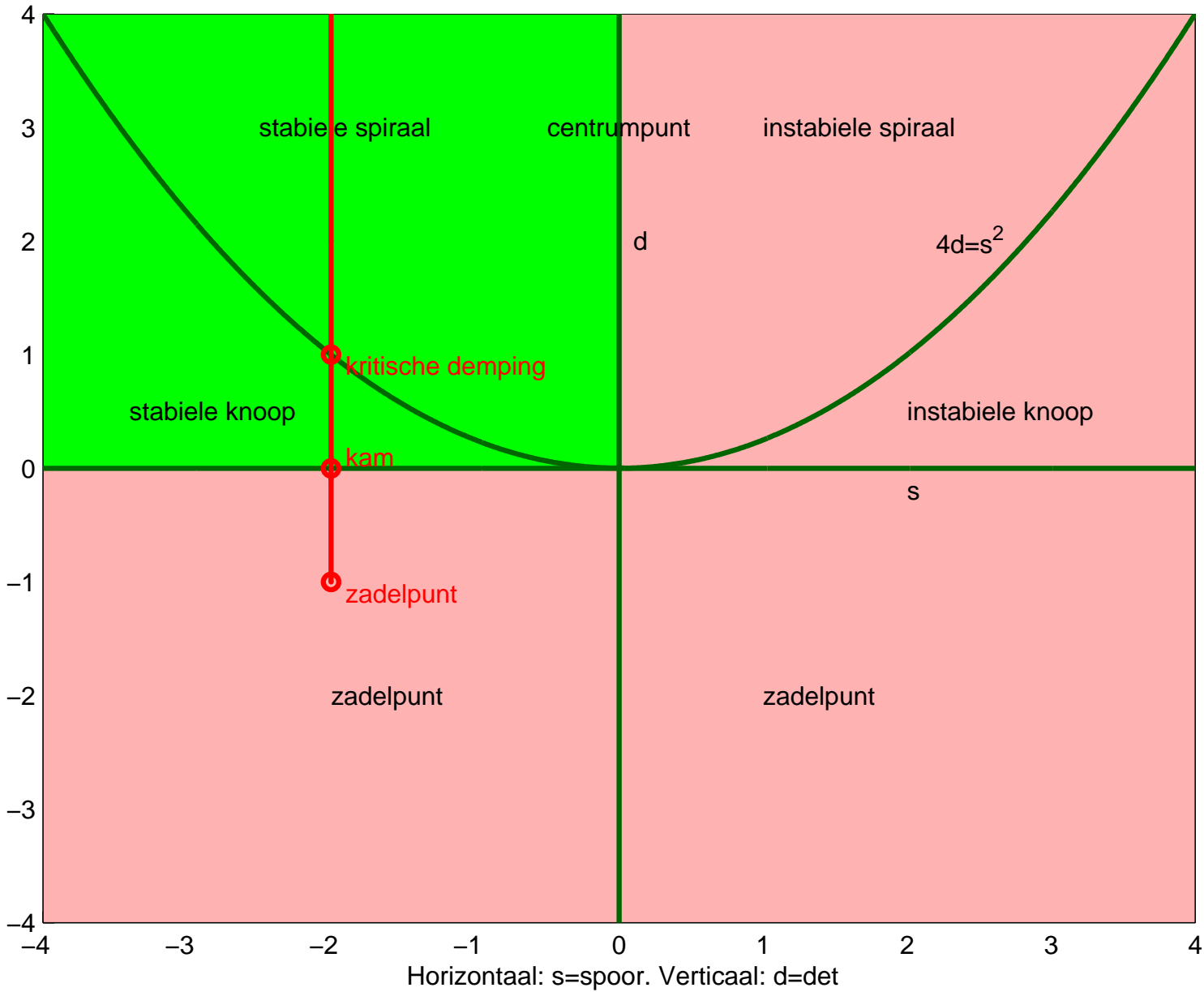
2-d Lineaire differentiaal vergelijking met $\lambda_1=-2, \lambda_2=0$



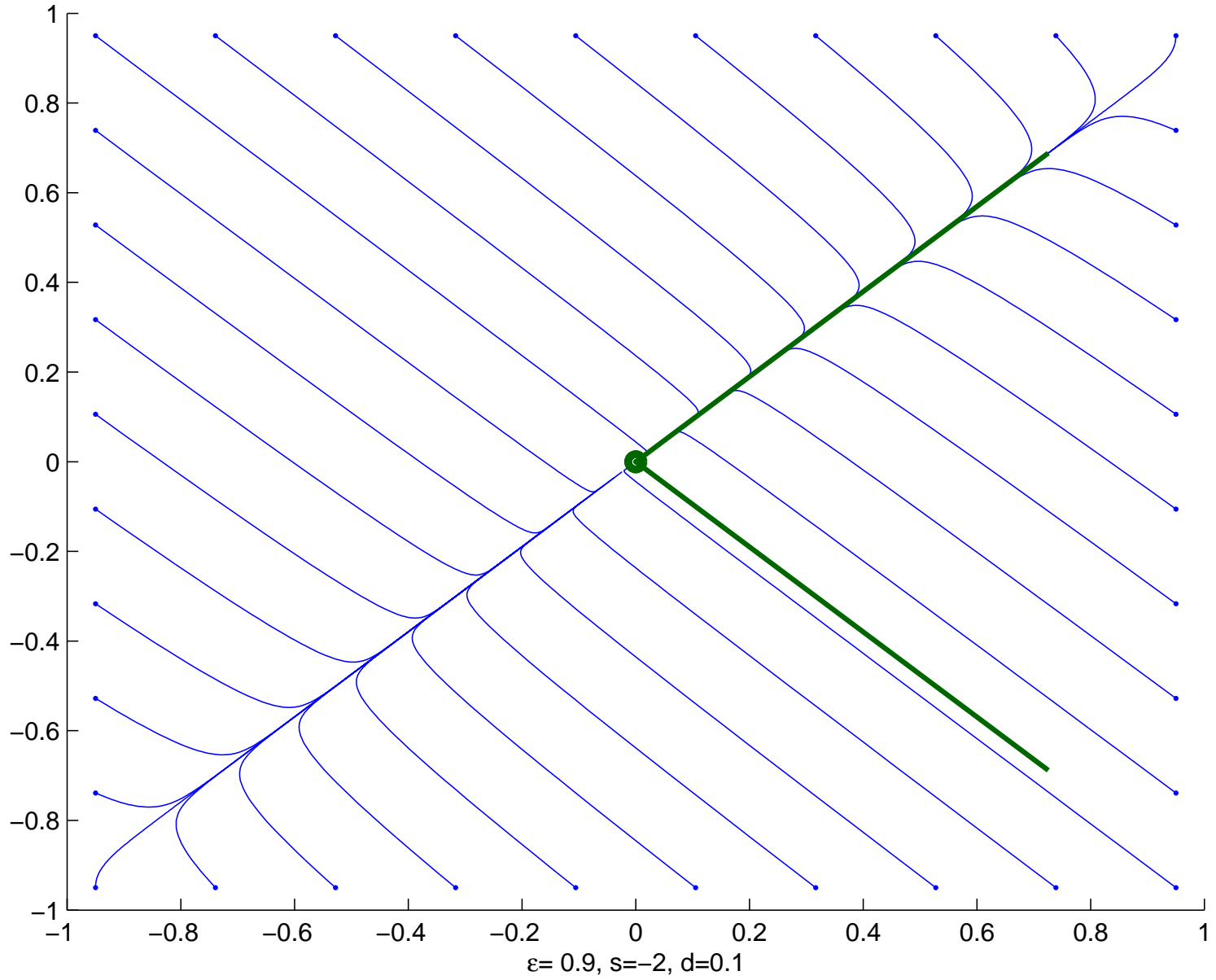
2-d Lineaire differentiaal vergelijking met $\lambda_1=-2, \lambda_2=0$



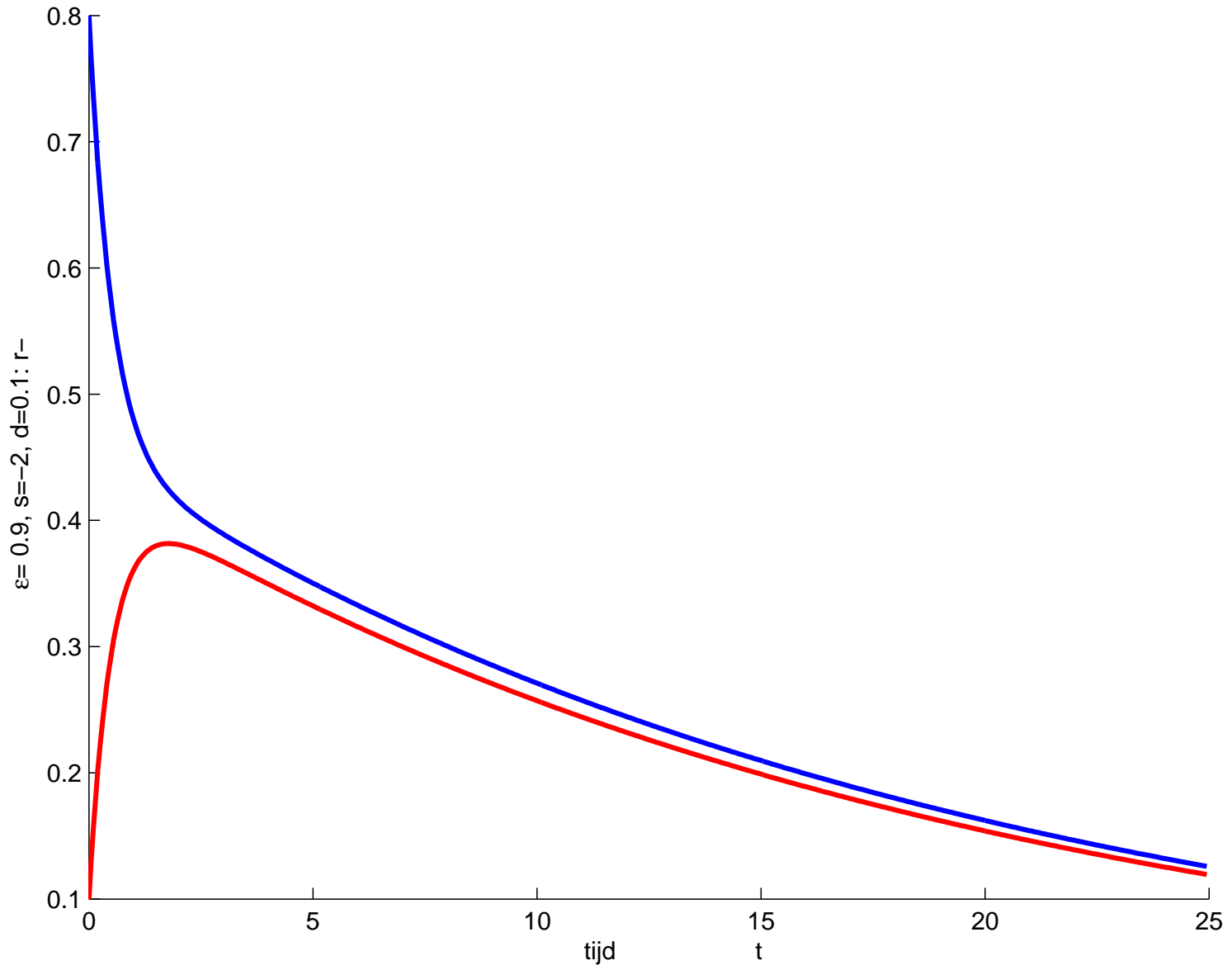
s en d bij oplopende d



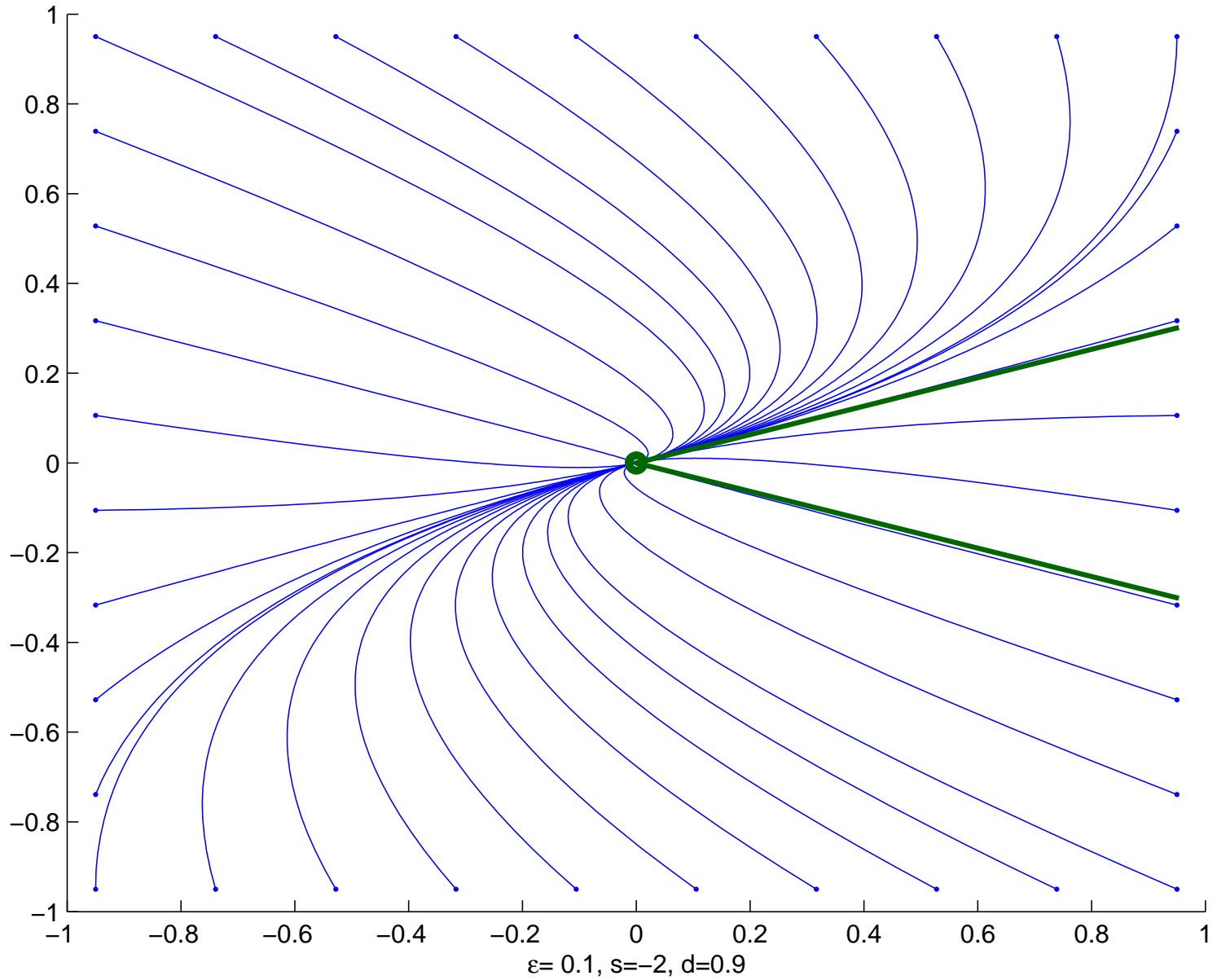
2-d Lineaire differentiaal vergelijking met $\lambda_1=-0.0513167$, $\lambda_2=-1.94868$



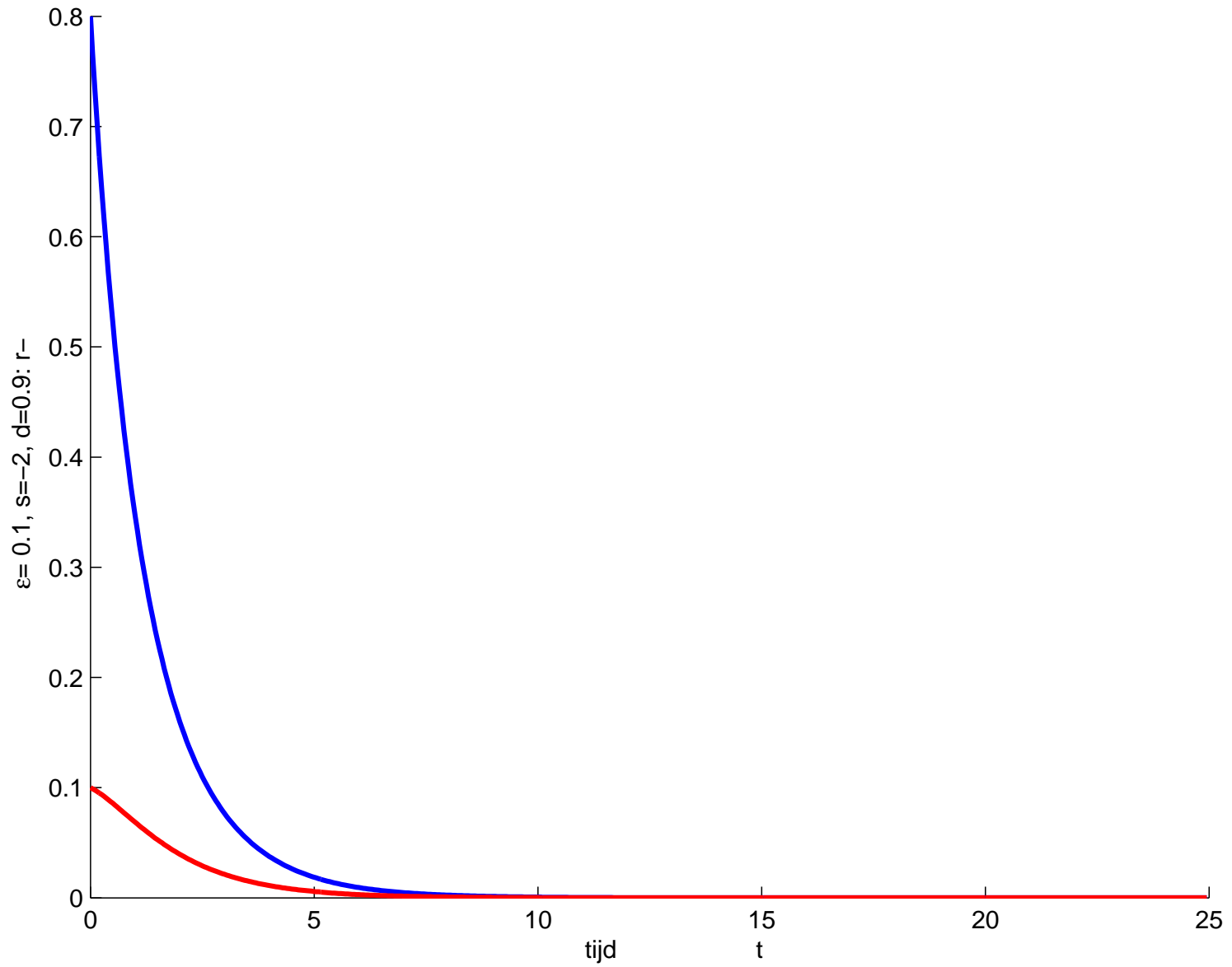
2-d Lineaire differentiaal vergelijking met $\lambda_1=-1.94868$, $\lambda_2=-0.0513167$



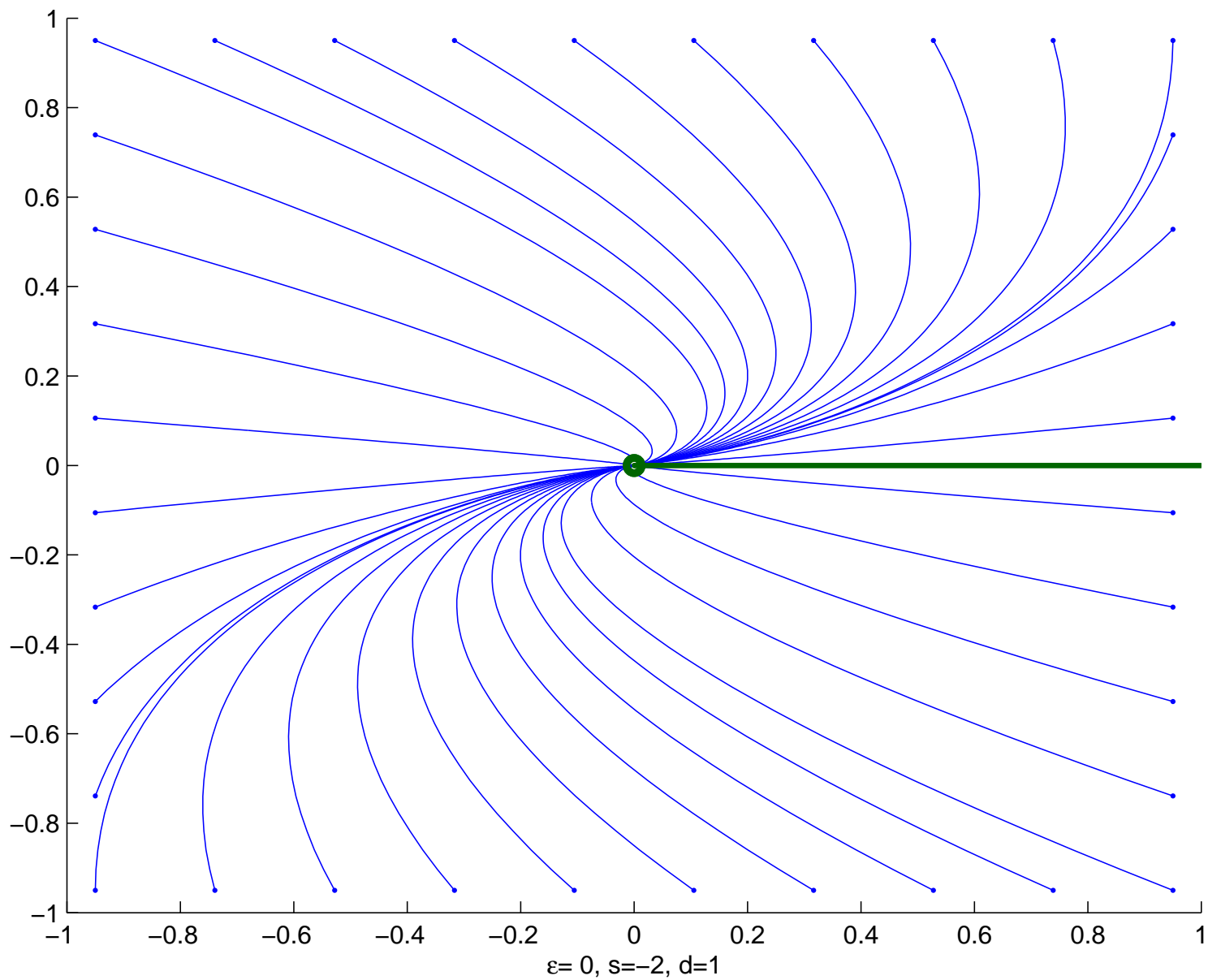
2-d Lineaire differentiaal vergelijking met $\lambda_1=-0.683772$, $\lambda_2=-1.31623$



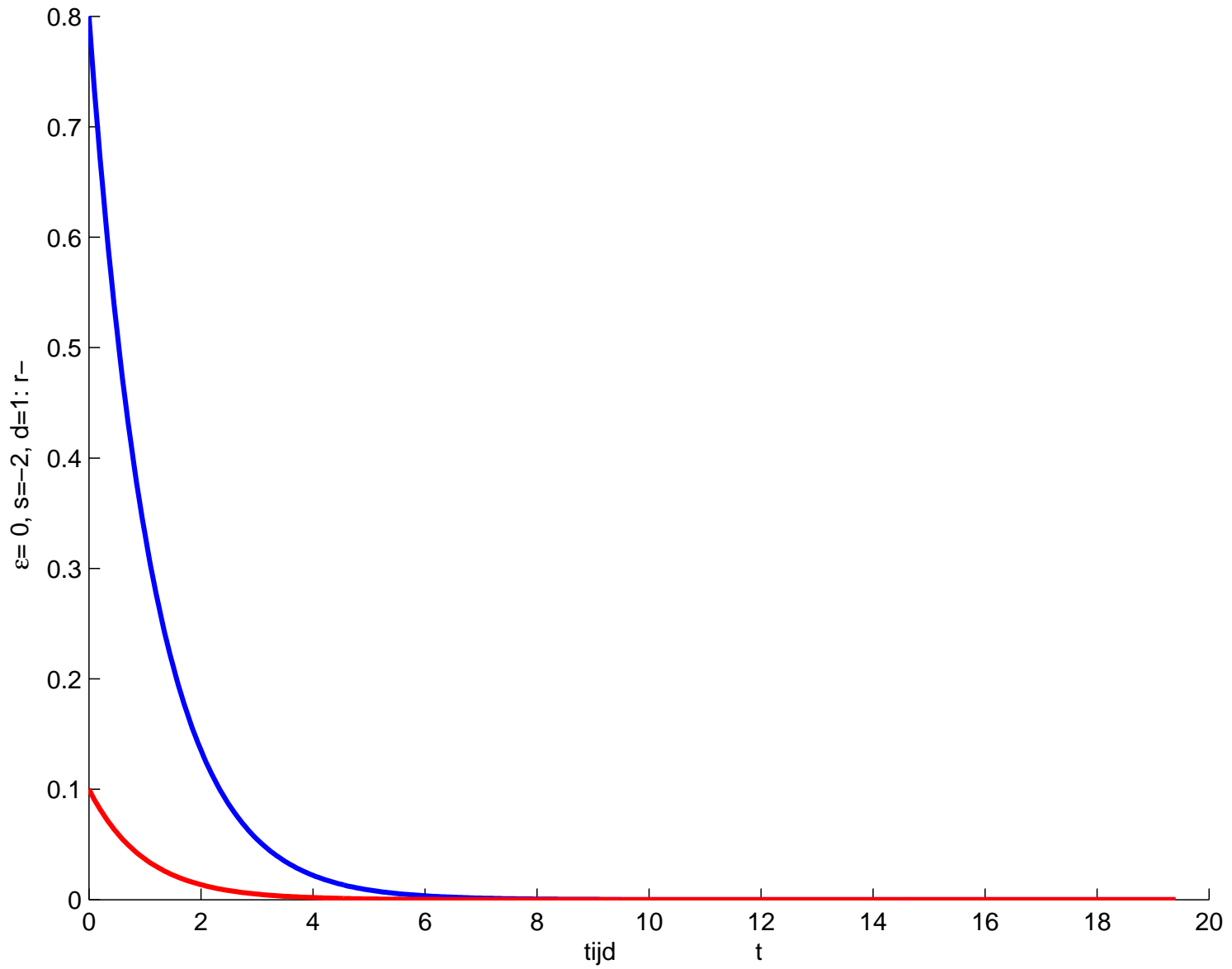
2-d Lineaire differentiaal vergelijking met $\lambda_1=-1.31623$, $\lambda_2=-0.683772$



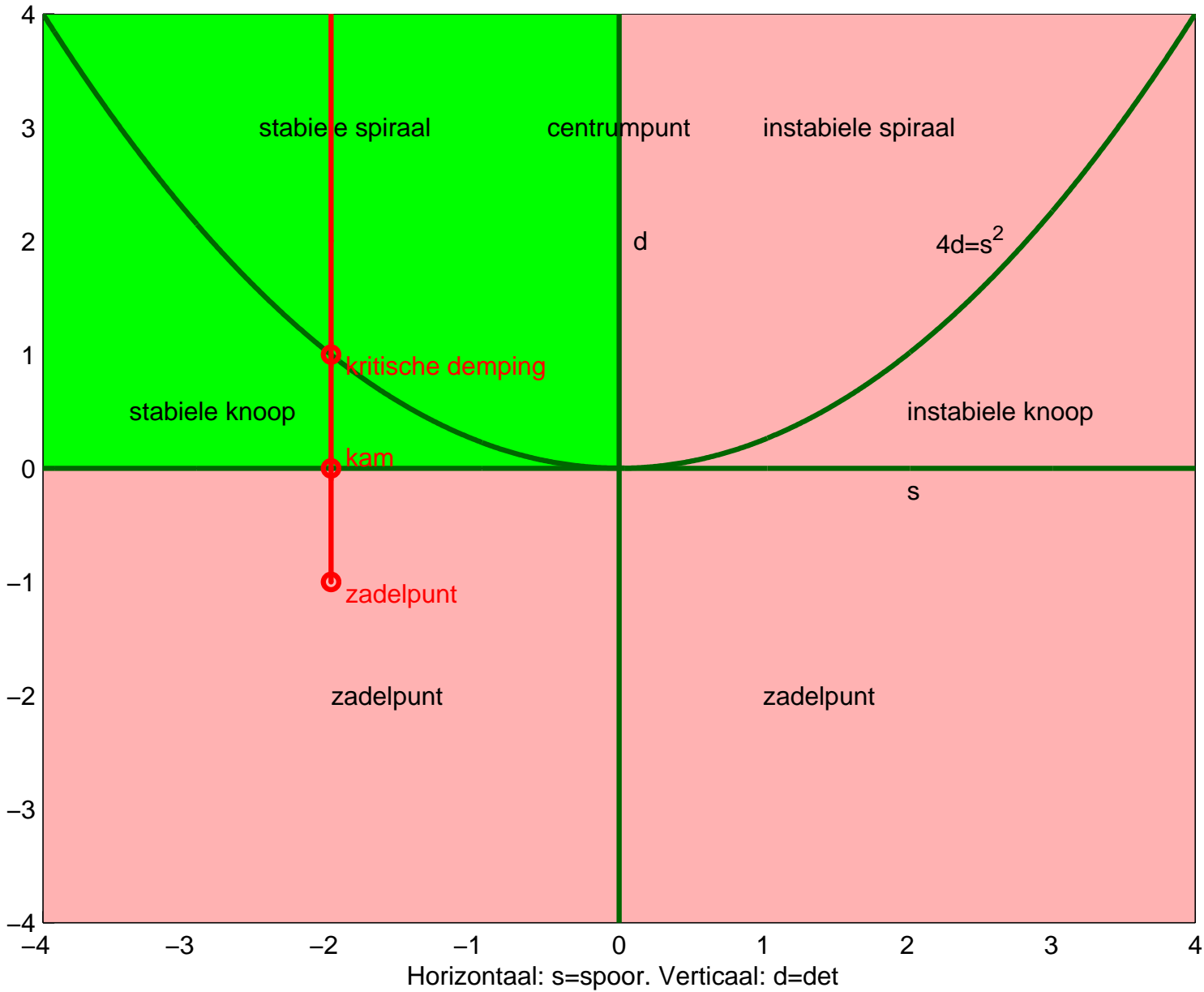
2-d Lineaire differentiaal vergelijking met $\lambda_1=-1, \lambda_2=-1$



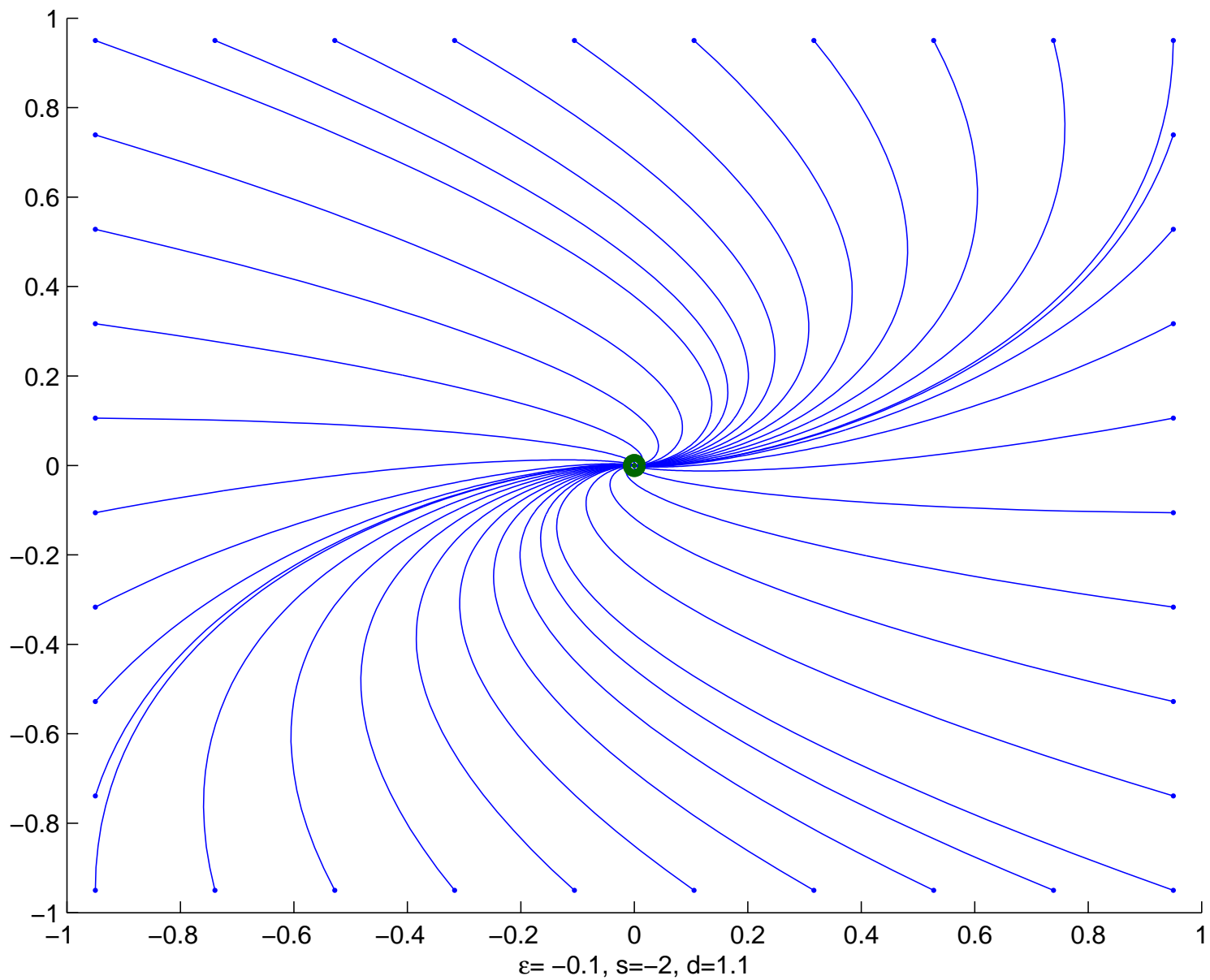
2-d Lineaire differentiaal vergelijking met $\lambda_1=-1, \lambda_2=-1$



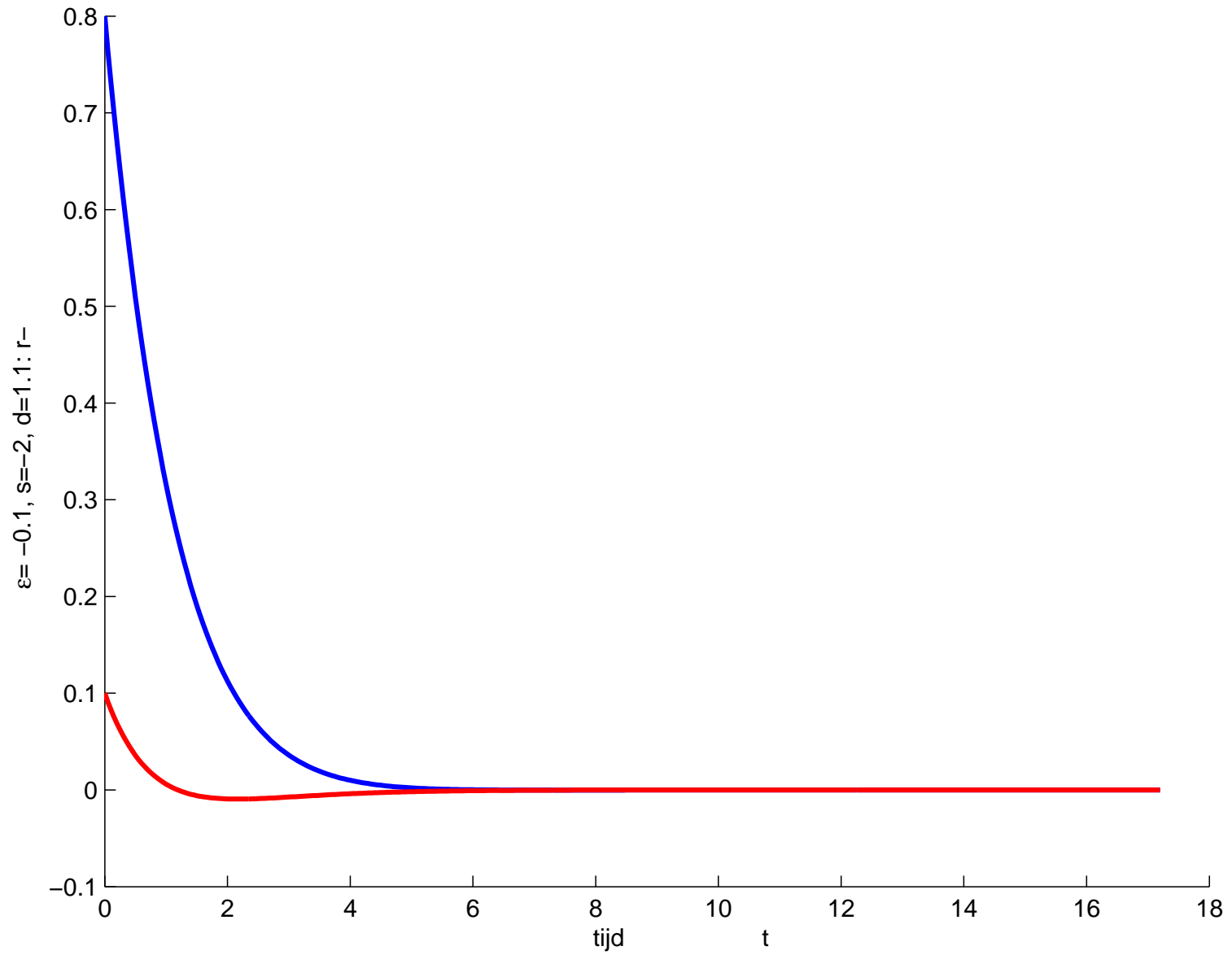
s en d bij oplopende d



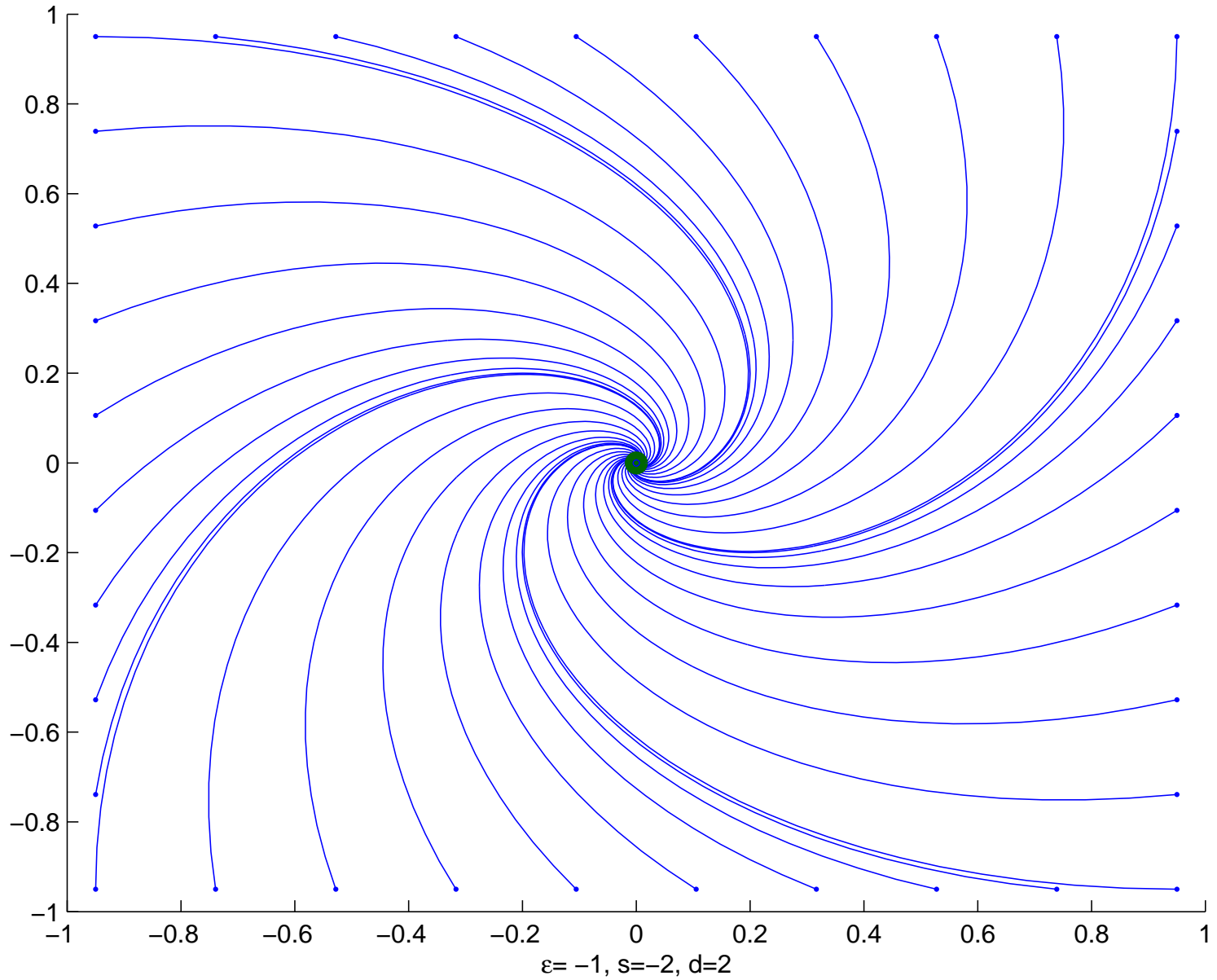
2-d Lineaire differentiaal vergelijking met $\lambda_1 = -1 + 0.316228 i$, $\lambda_2 = -1 - 0.316228 i$



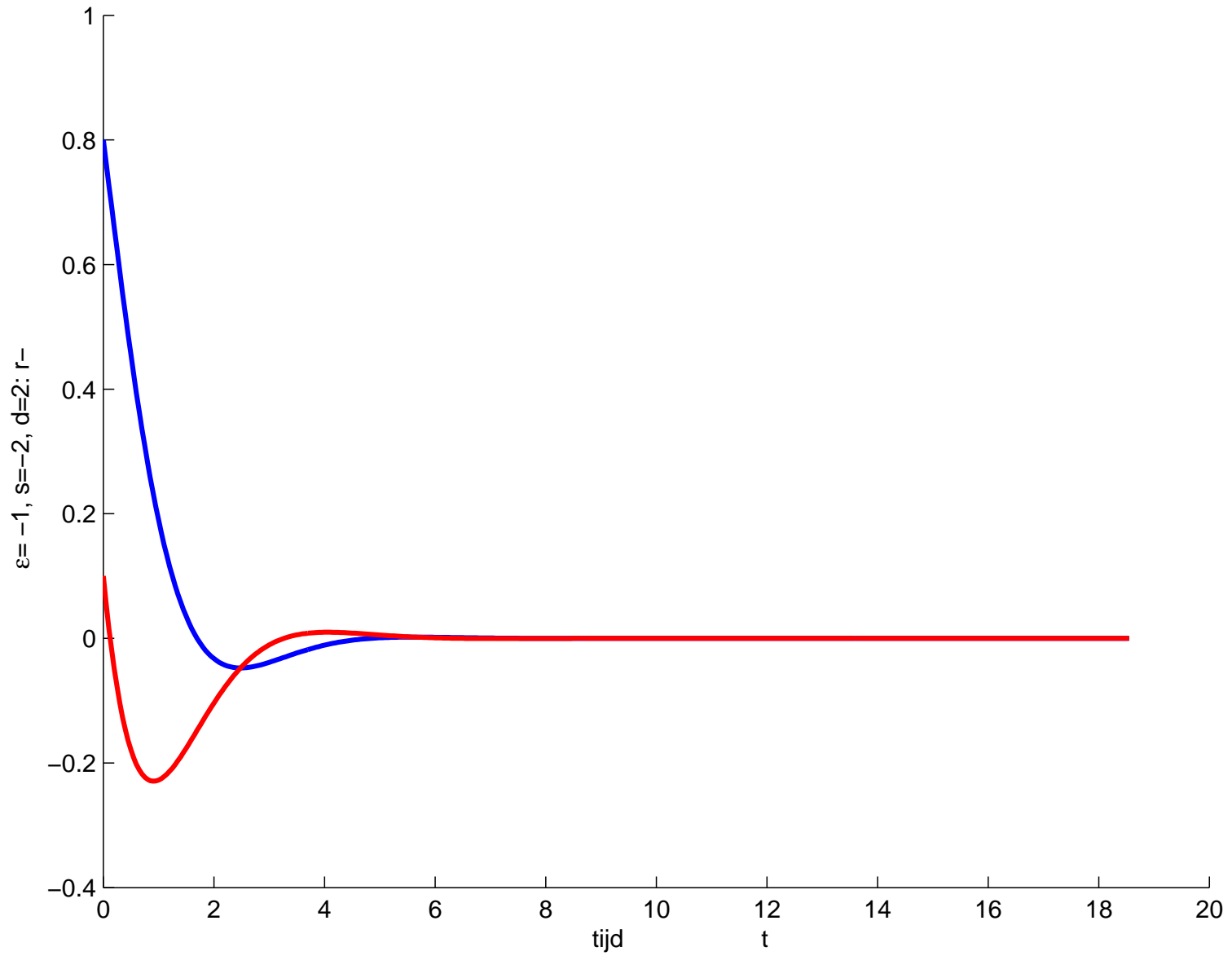
2-d Lineaire differentiaal vergelijking met $\lambda_1 = -1 - 0.316228 i$, $\lambda_2 = -1 + 0.316228 i$



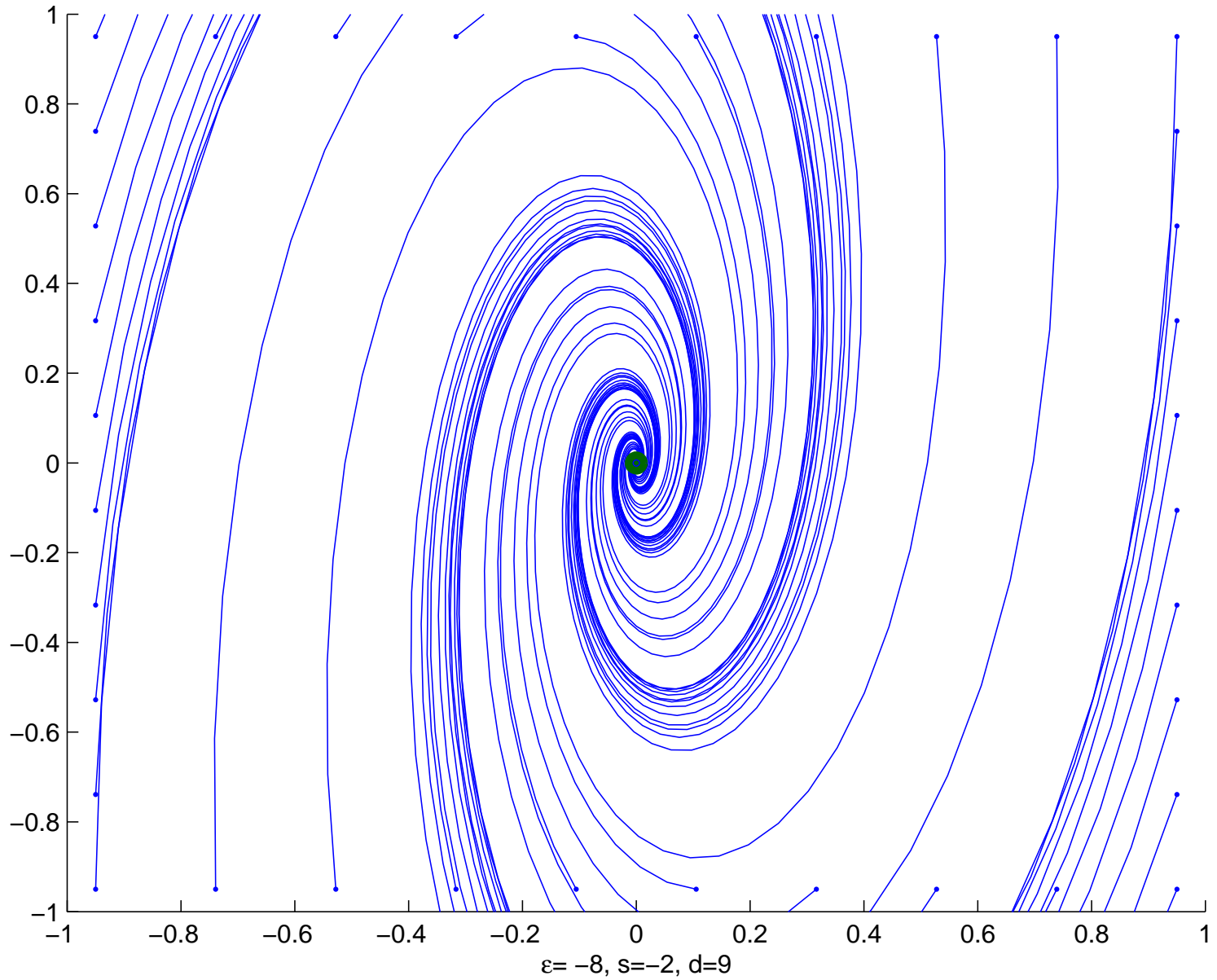
2-d Lineaire differentiaal vergelijking met $\lambda_1 = -1 + 1i$, $\lambda_2 = -1 - 1i$



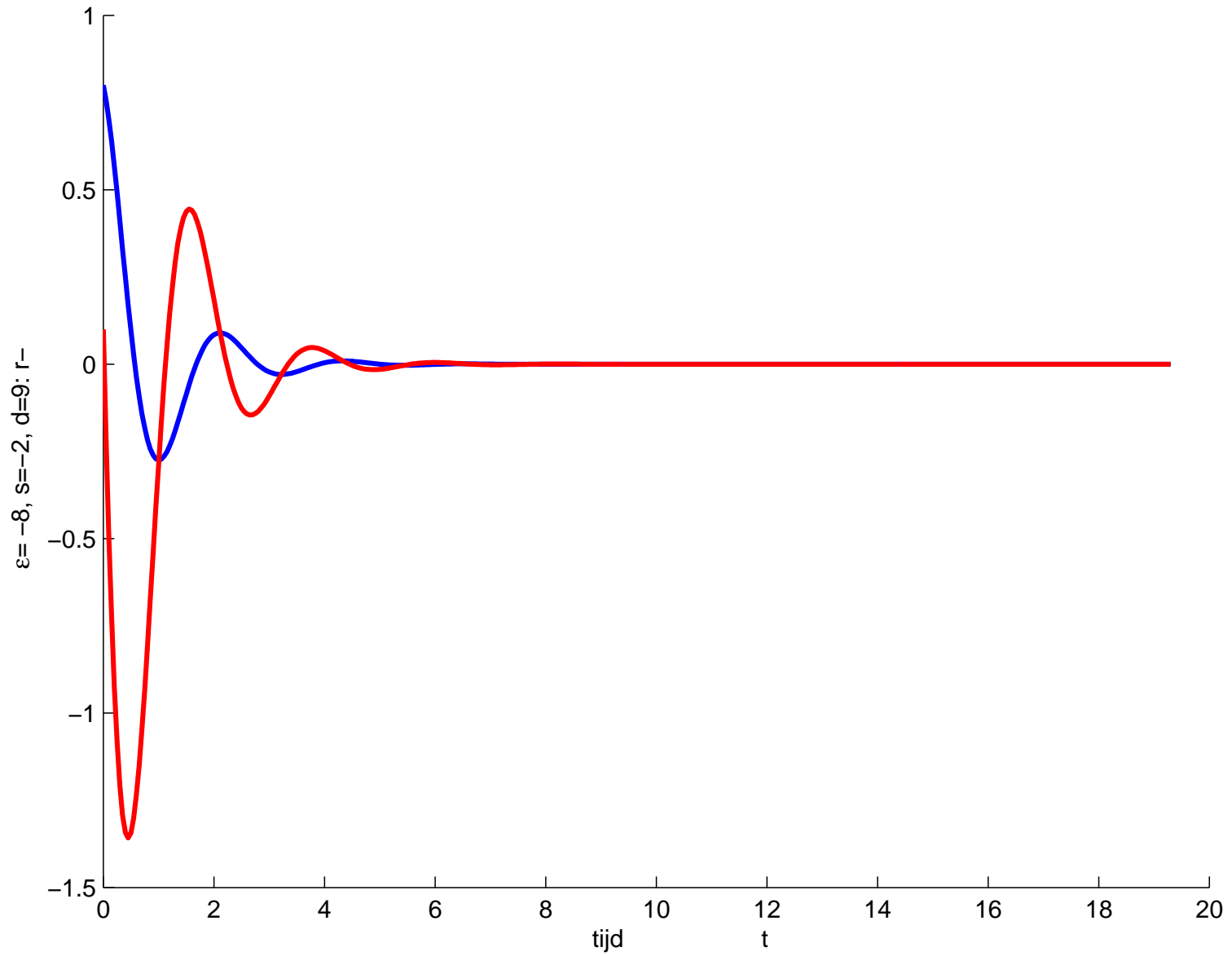
2-d Lineaire differentiaal vergelijking met $\lambda_1 = -1 - 1i$, $\lambda_2 = -1 + 1i$



2-d Lineaire differentiaal vergelijking met $\lambda_1 = -1 + 2.82843 i$, $\lambda_2 = -1 - 2.82843 i$



2-d Lineaire differentiaal vergelijking met $\lambda_1 = -1 - 2.82843 i$, $\lambda_2 = -1 + 2.82843 i$



Vast determinant, aflopende spoor

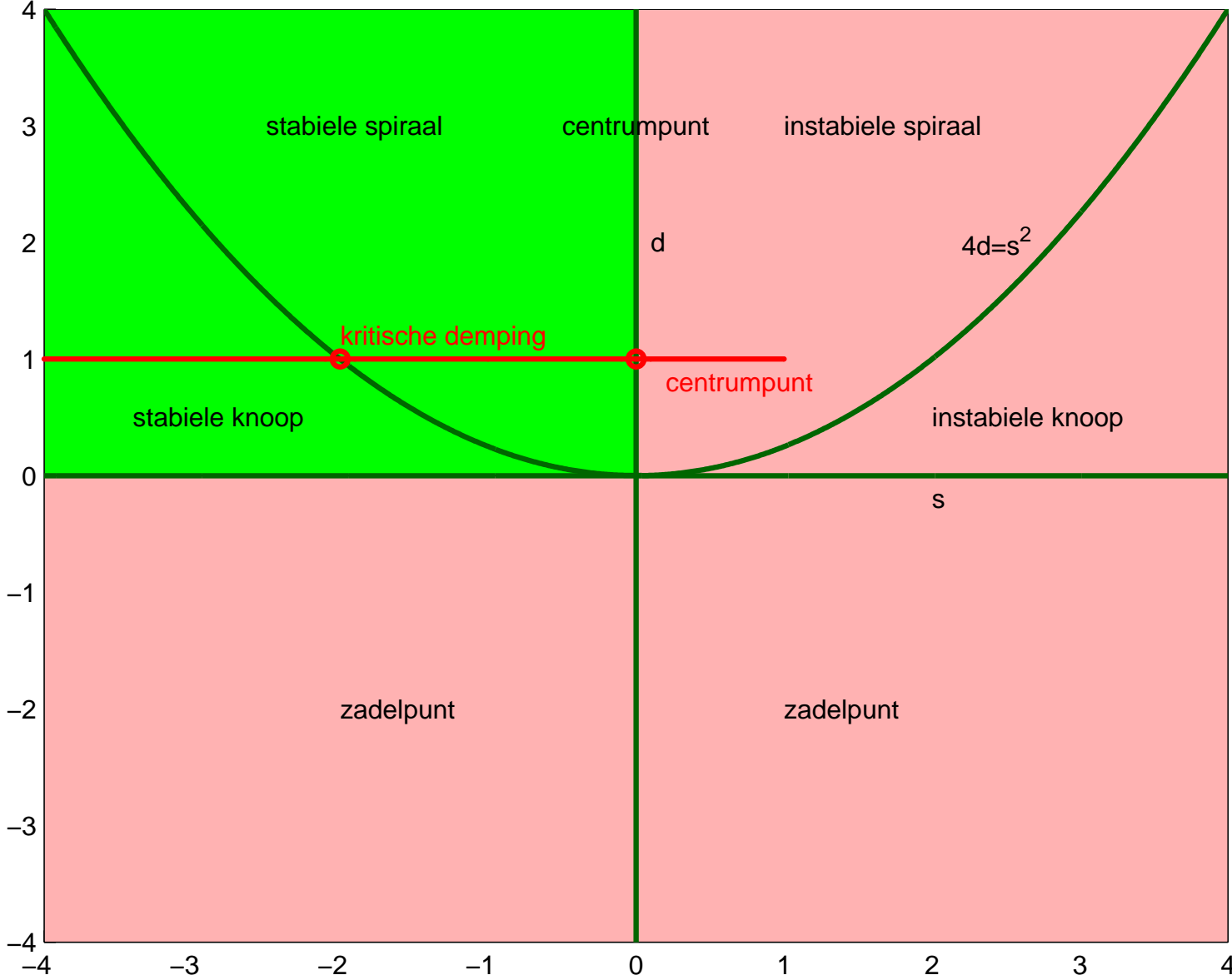
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \varepsilon & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad s = \text{spoor} = \varepsilon, \quad d = \det = 1$$

Voorbeeld. Slinger. Met $y = \phi, \quad x' = \phi'$

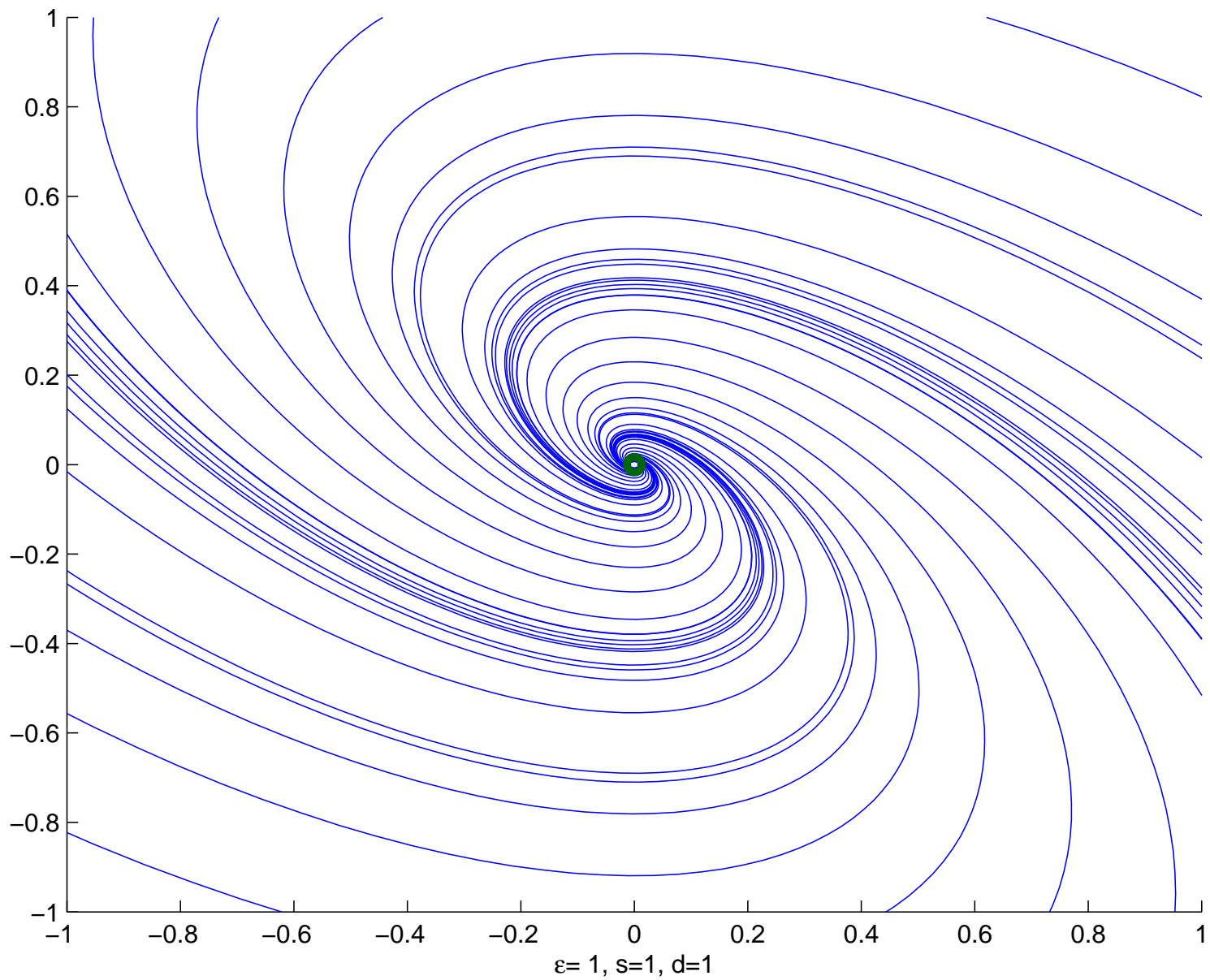
$$\phi'' = -\frac{c}{m}\phi' - \frac{g}{\ell}\phi \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{c}{m} & -\frac{g}{\ell} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$$

s en d bij aflopende s

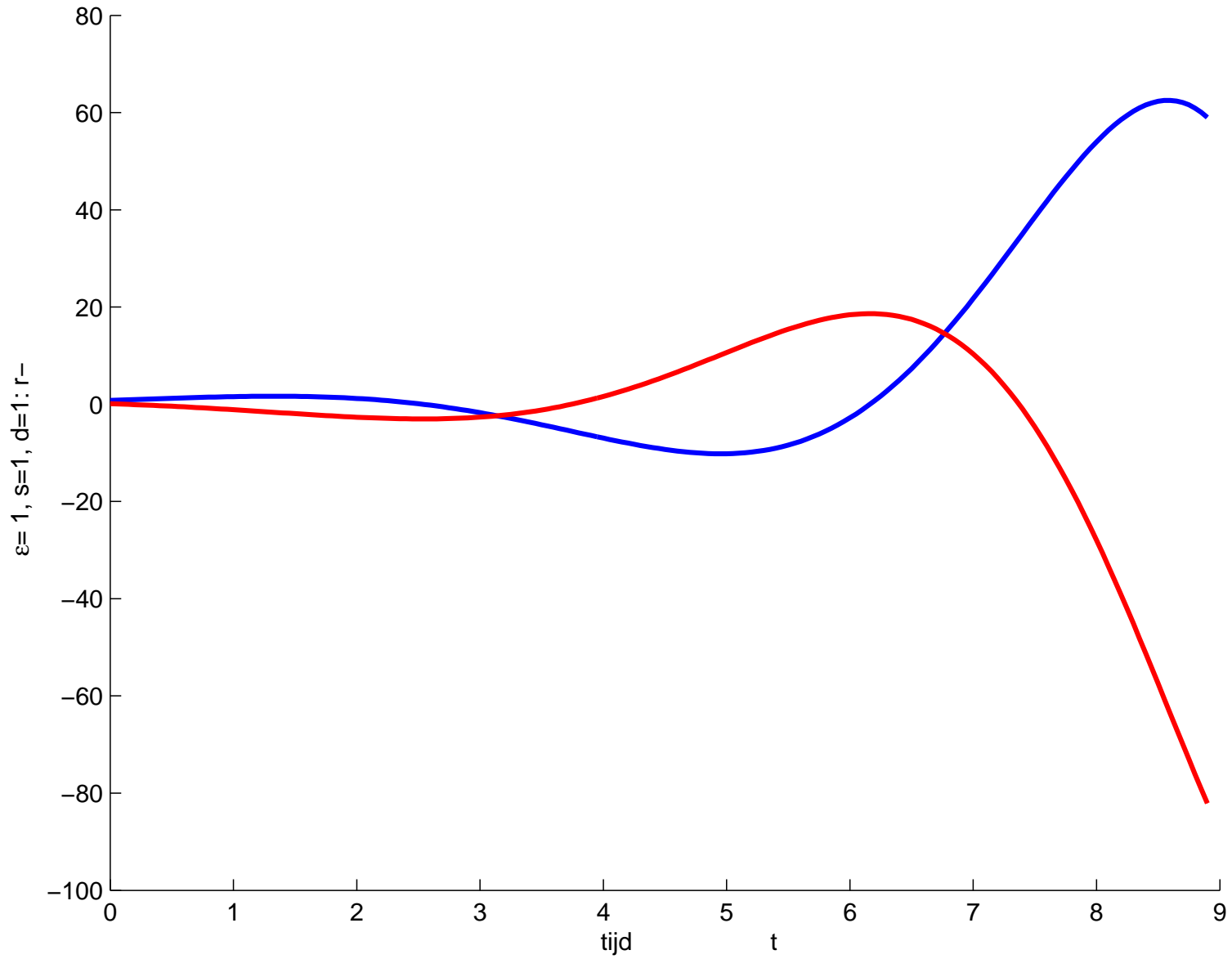


Horizontaal: s =spoor. Verticaal: d =det

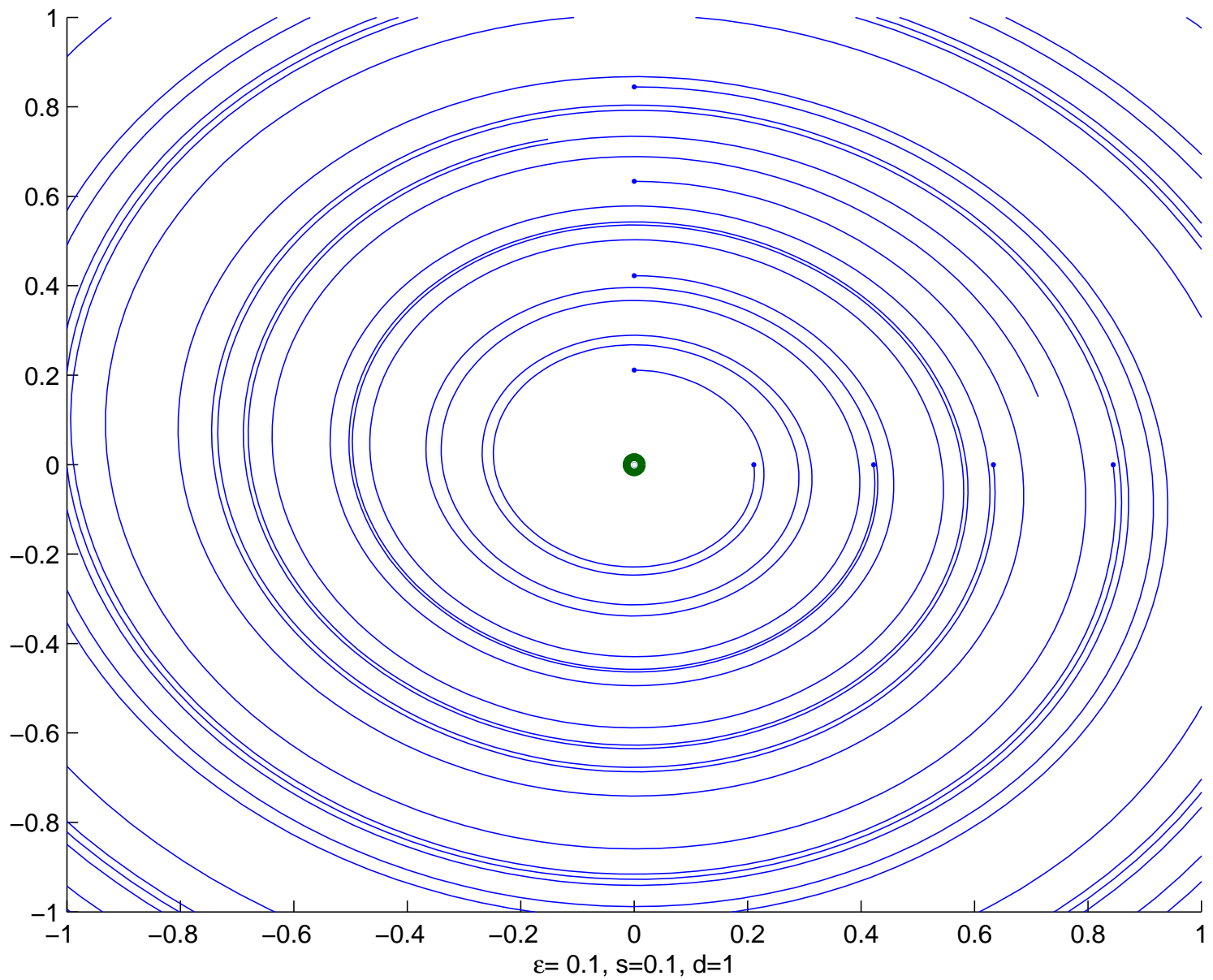
2-d Lineaire differentiaal vergelijking met $\lambda_1=0.5+0.866025 i$, $\lambda_2=0.5-0.866025 i$



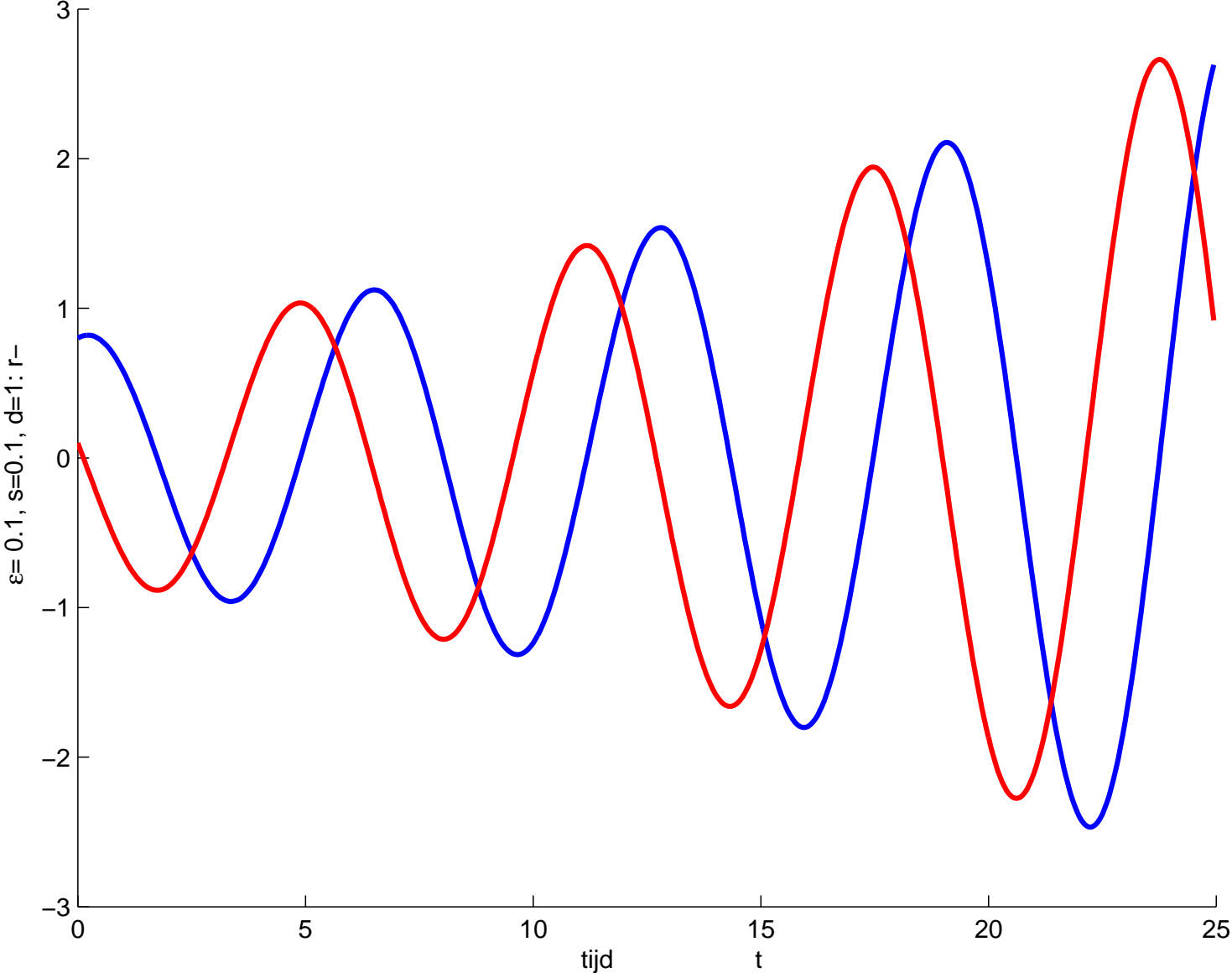
2-d Lineaire differentiaal vergelijking met $\lambda_1=0.5-0.866025 i$, $\lambda_2=0.5+0.866025 i$



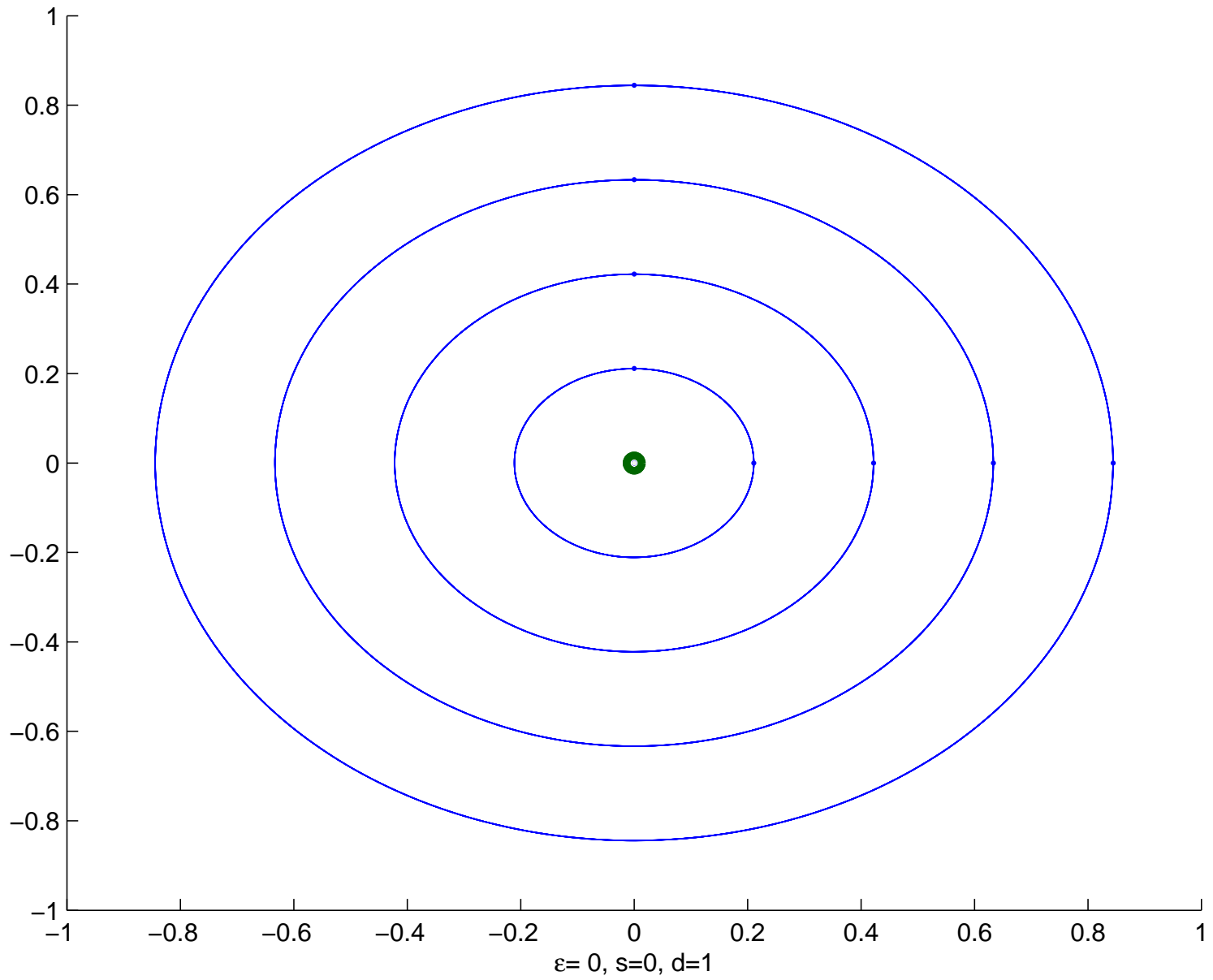
2-d Lineaire differentiaal vergelijking met $\lambda_1=0.05+0.998749 i$, $\lambda_2=0.05-0.998749 i$



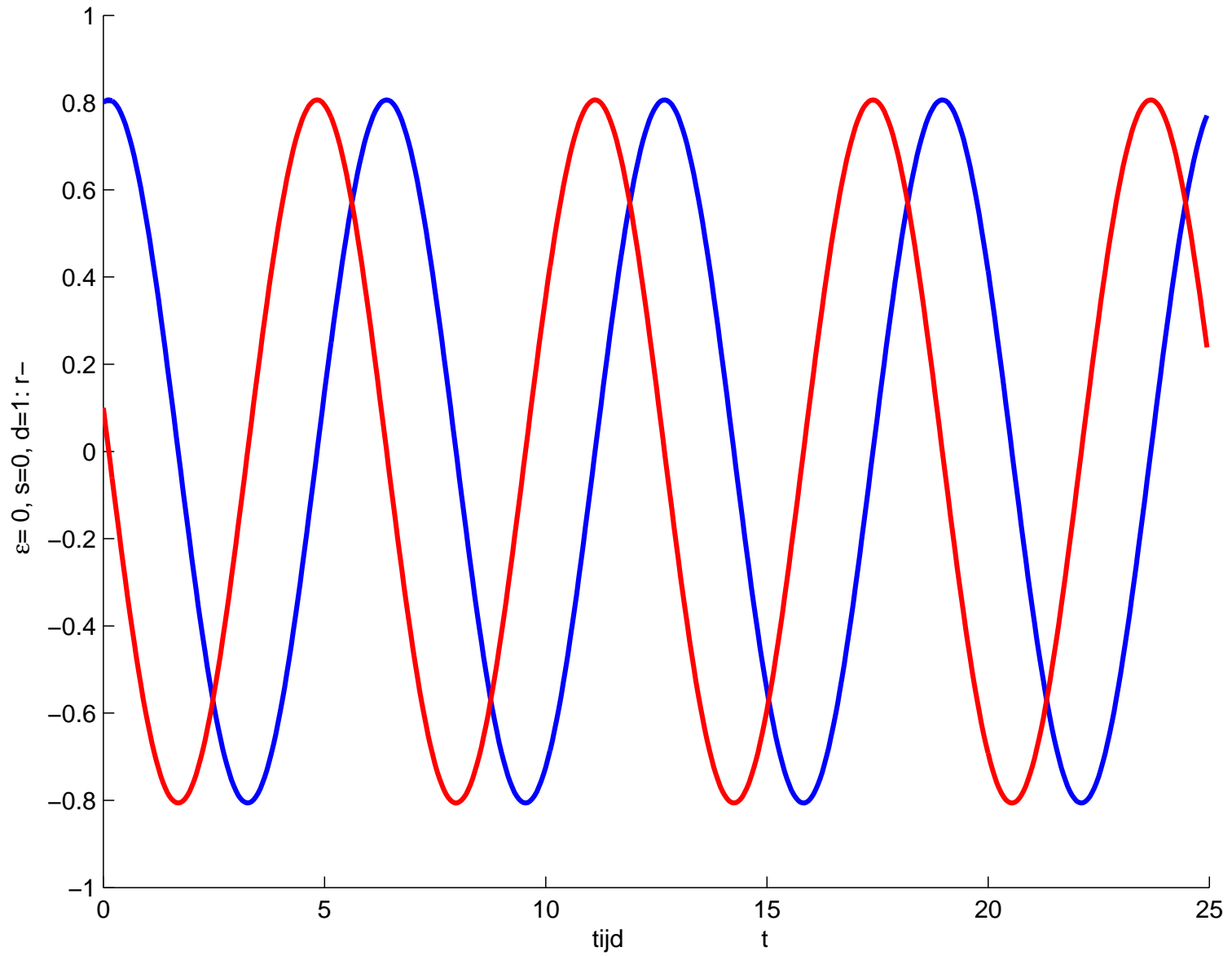
2-d Lineaire differentiaal vergelijking met $\lambda_1=0.05-0.998749 i$, $\lambda_2=0.05+0.998749 i$



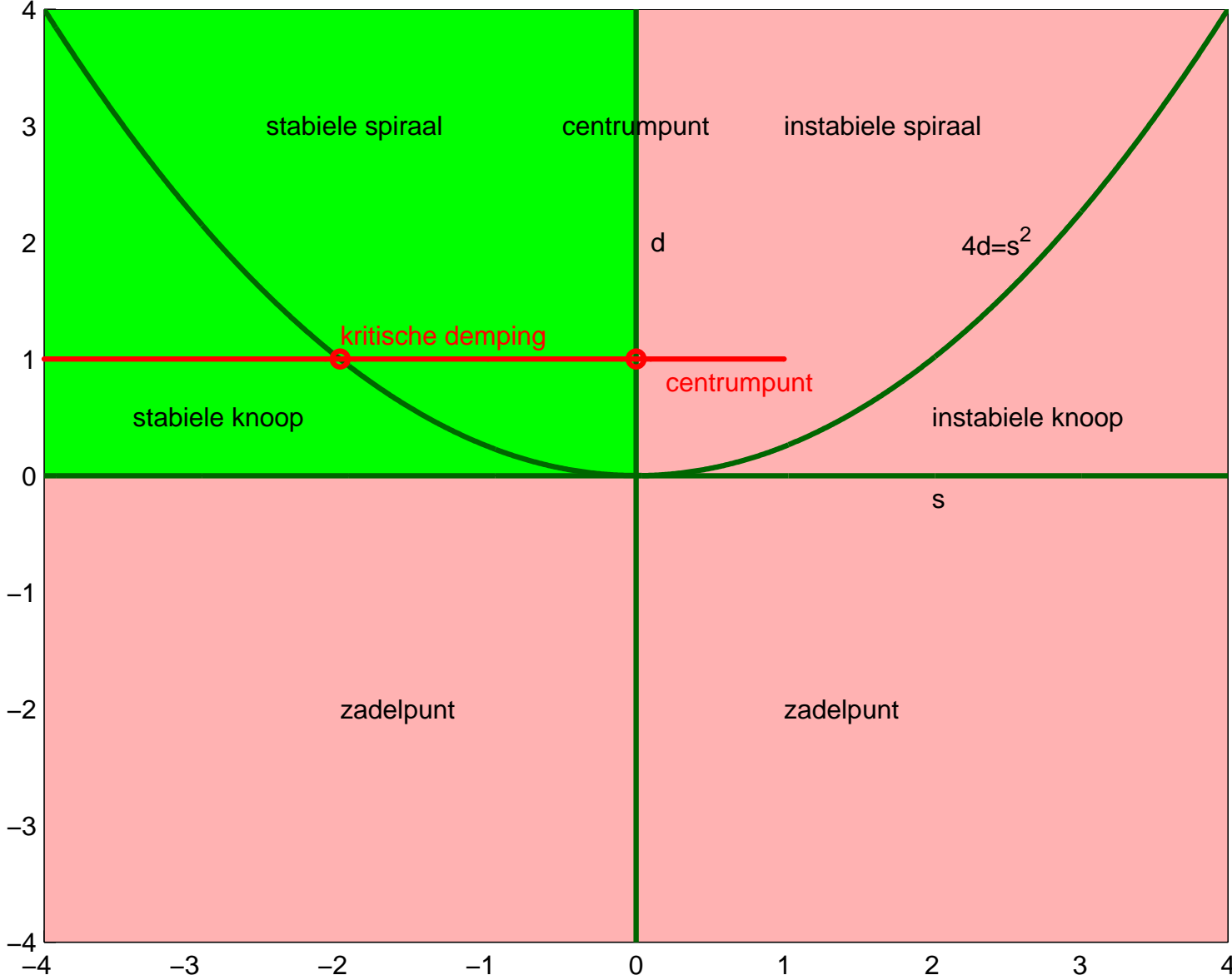
2-d Lineaire differentiaal vergelijking met $\lambda_1=1 i$, $\lambda_2=-1 i$



2-d Lineaire differentiaal vergelijking met $\lambda_1=-1 i$, $\lambda_2=1 i$

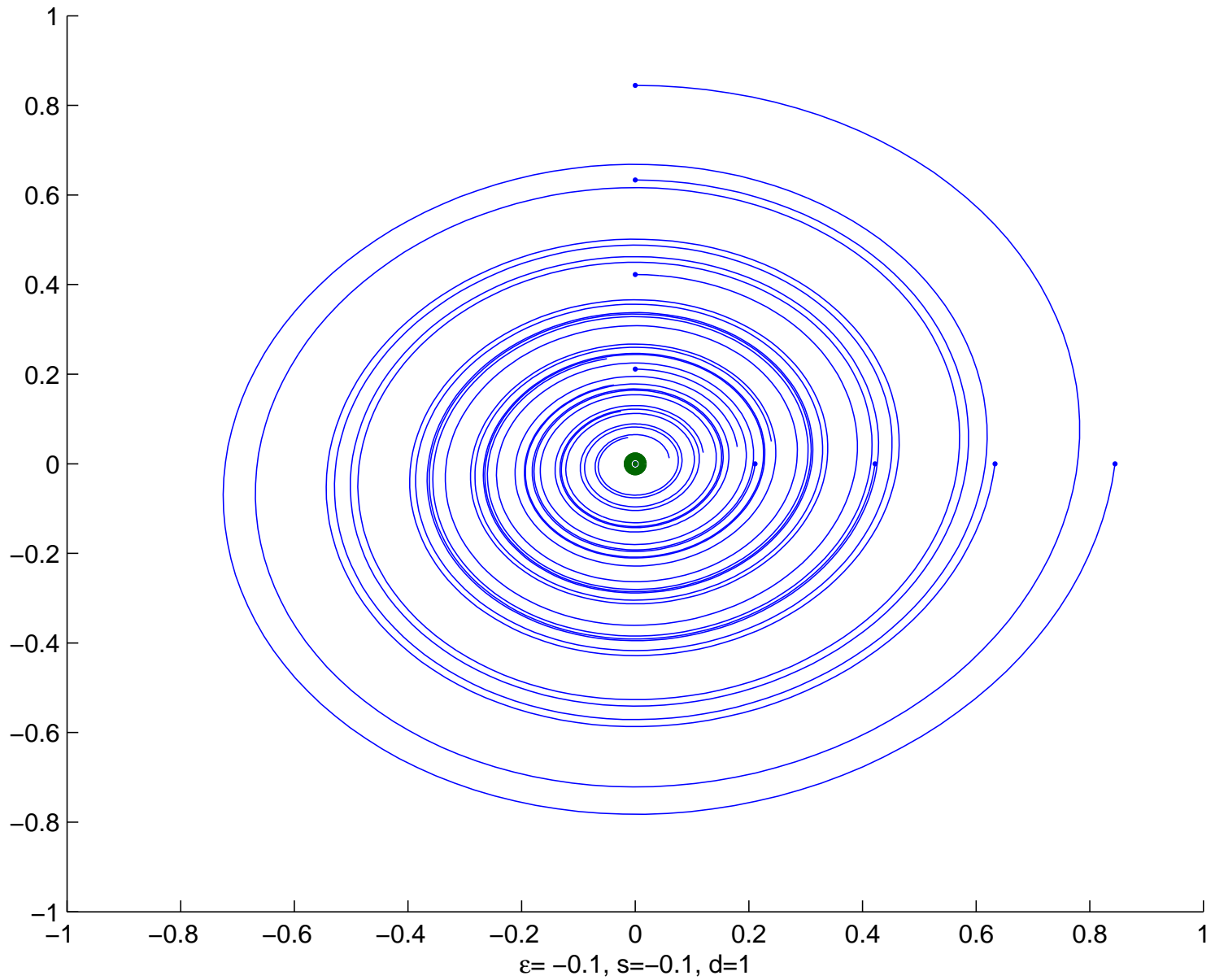


s en d bij aflopende s

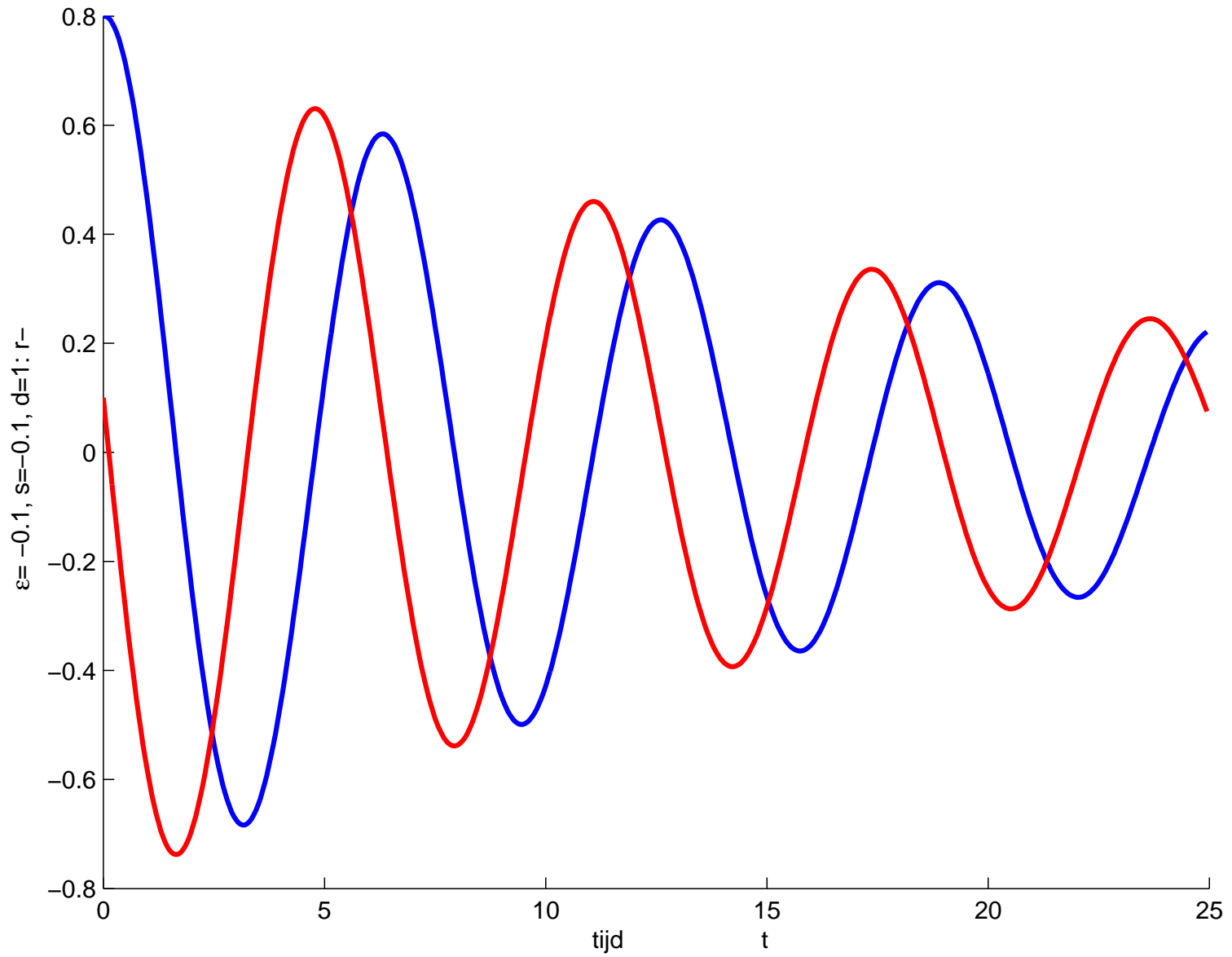


Horizontaal: s =spoor. Verticaal: d =det

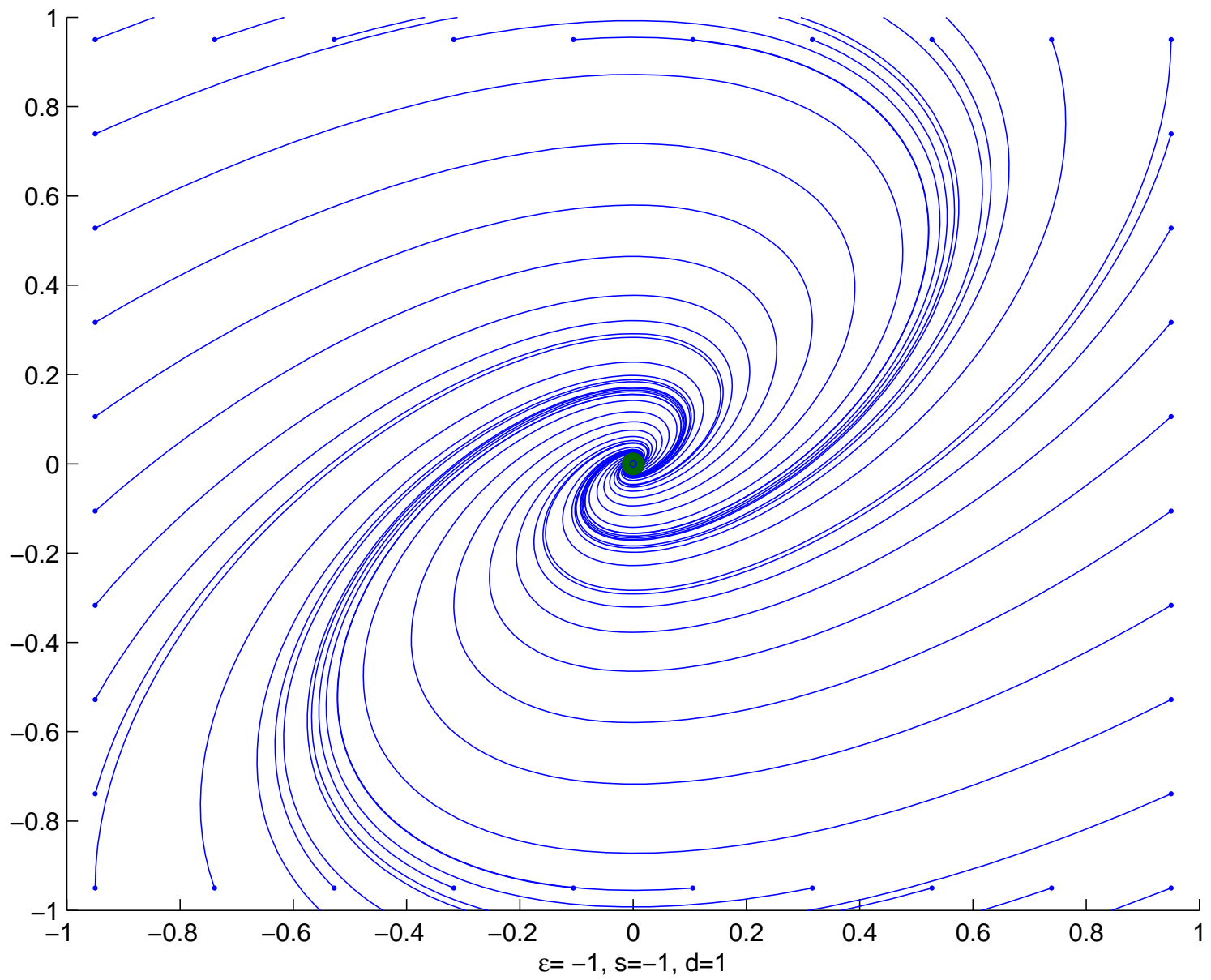
2-d Lineaire differentiaal vergelijking met $\lambda_1 = -0.05 + 0.998749 i$, $\lambda_2 = -0.05 - 0.998749 i$



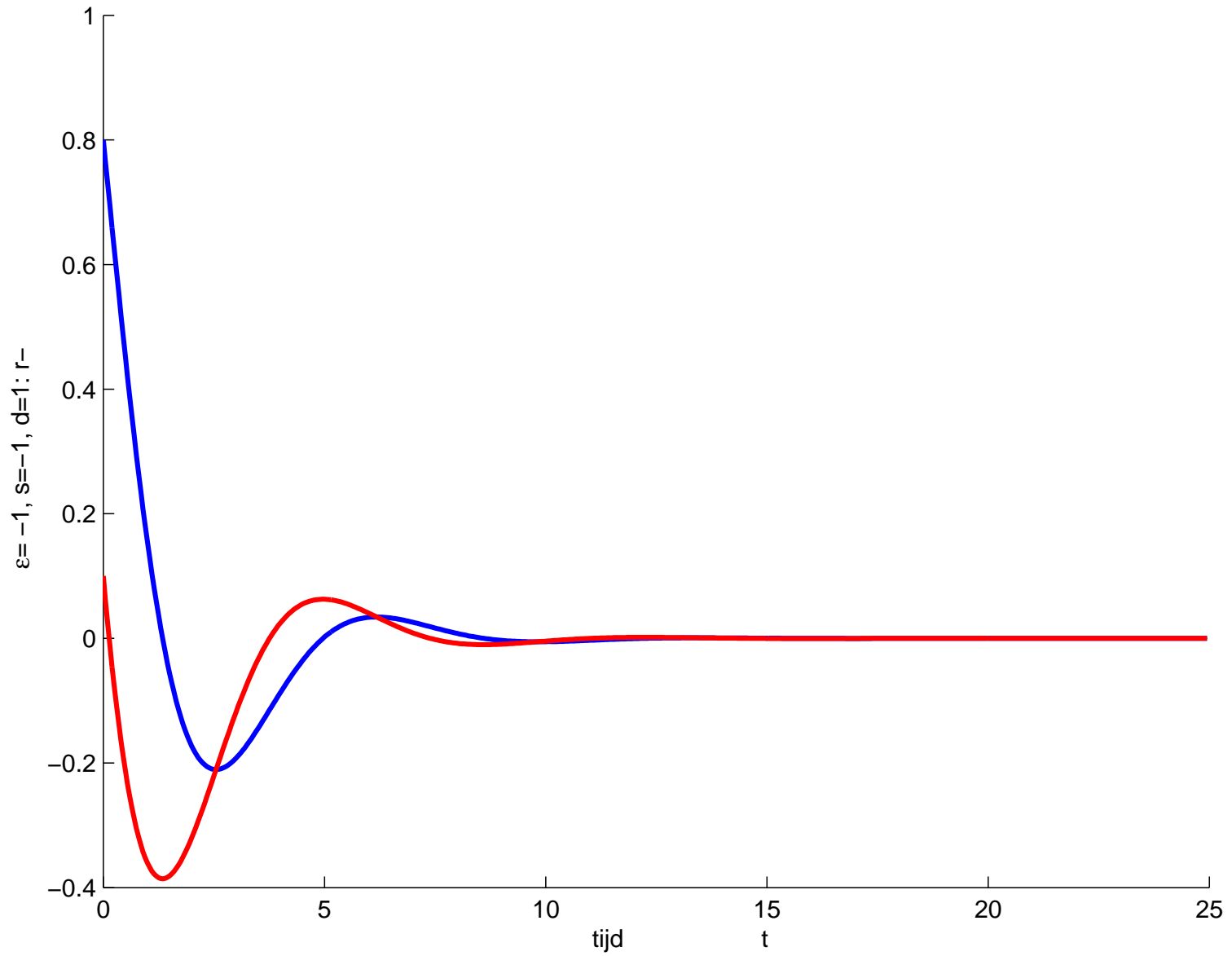
2-d Lineaire differentiaal vergelijking met $\lambda_1 = -0.05 - 0.998749 i$, $\lambda_2 = -0.05 + 0.998749 i$



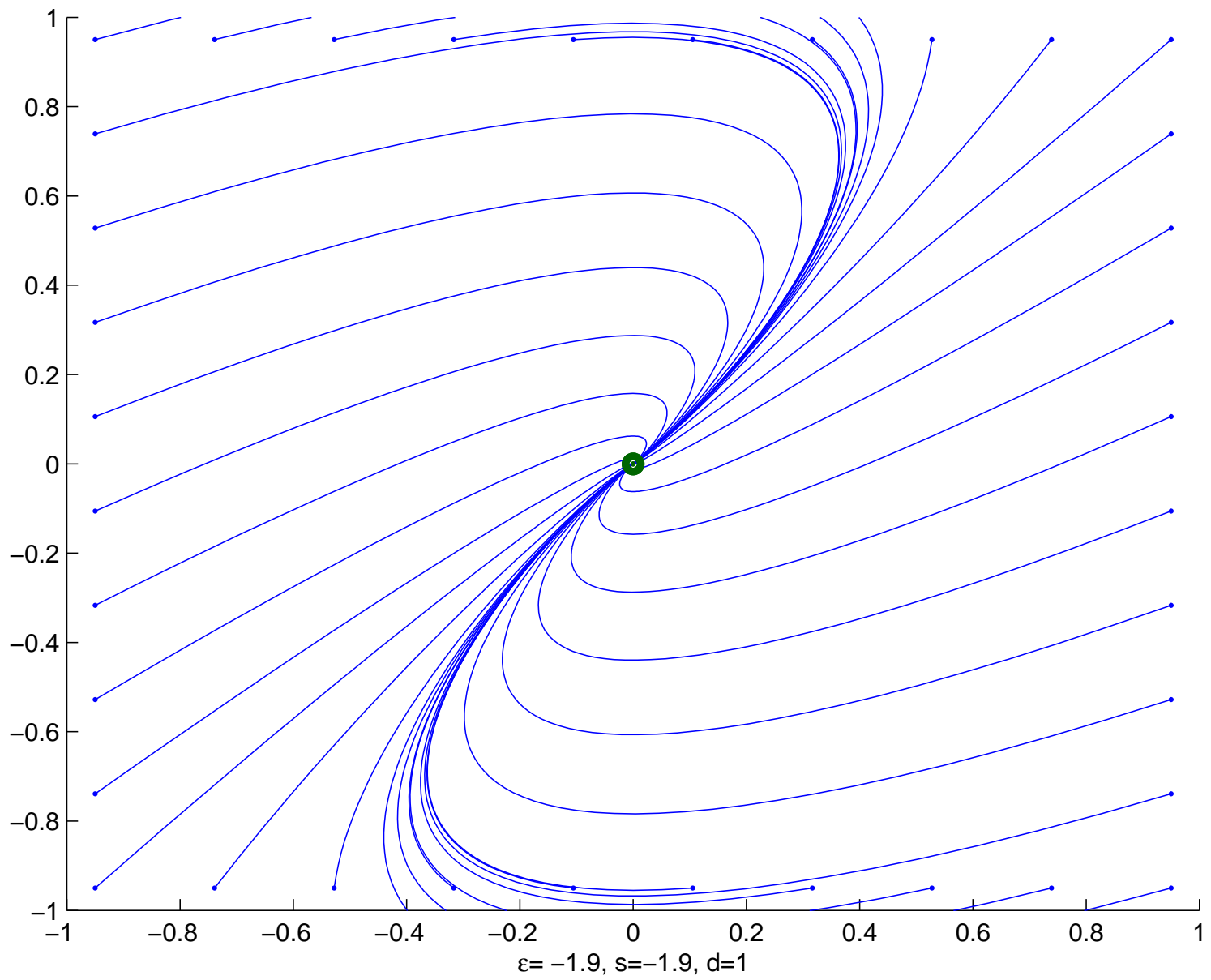
2-d Lineaire differentiaal vergelijking met $\lambda_1 = -0.5 + 0.866025 i$, $\lambda_2 = -0.5 - 0.866025 i$



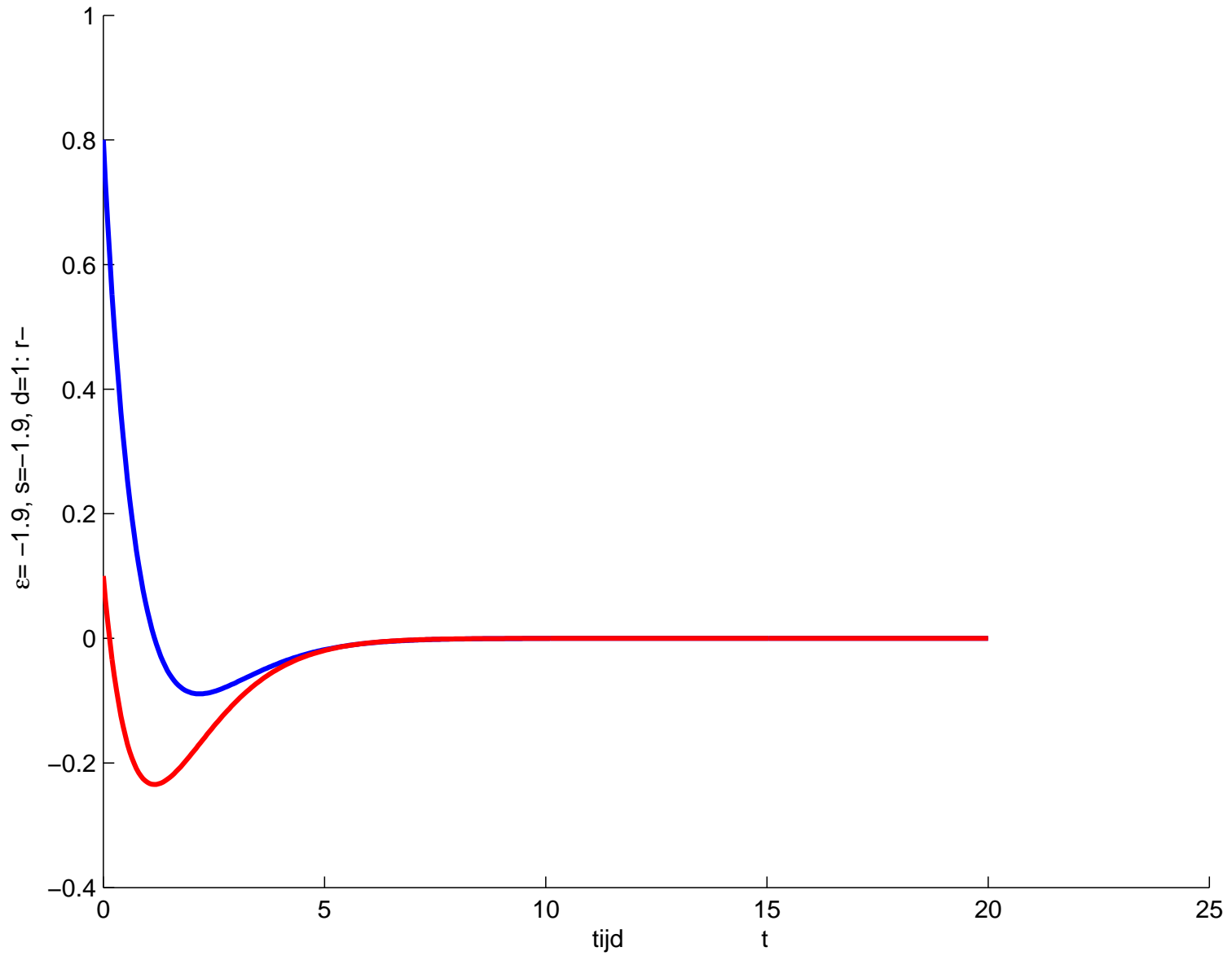
2-d Lineaire differentiaal vergelijking met $\lambda_1 = -0.5 - 0.866025 i$, $\lambda_2 = -0.5 + 0.866025 i$



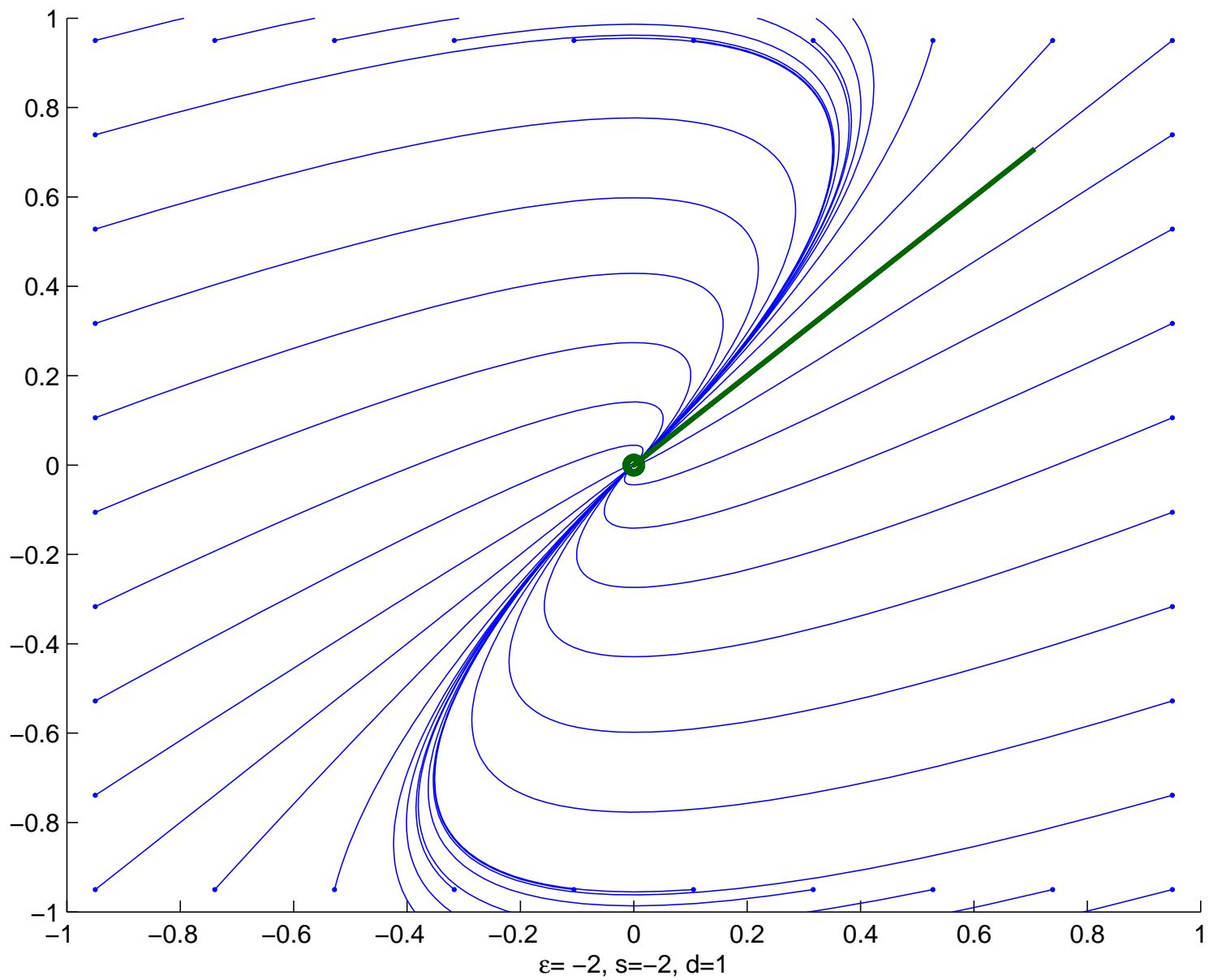
2-d Lineaire differentiaal vergelijking met $\lambda_1 = -0.95 + 0.31225 i$, $\lambda_2 = -0.95 - 0.31225 i$



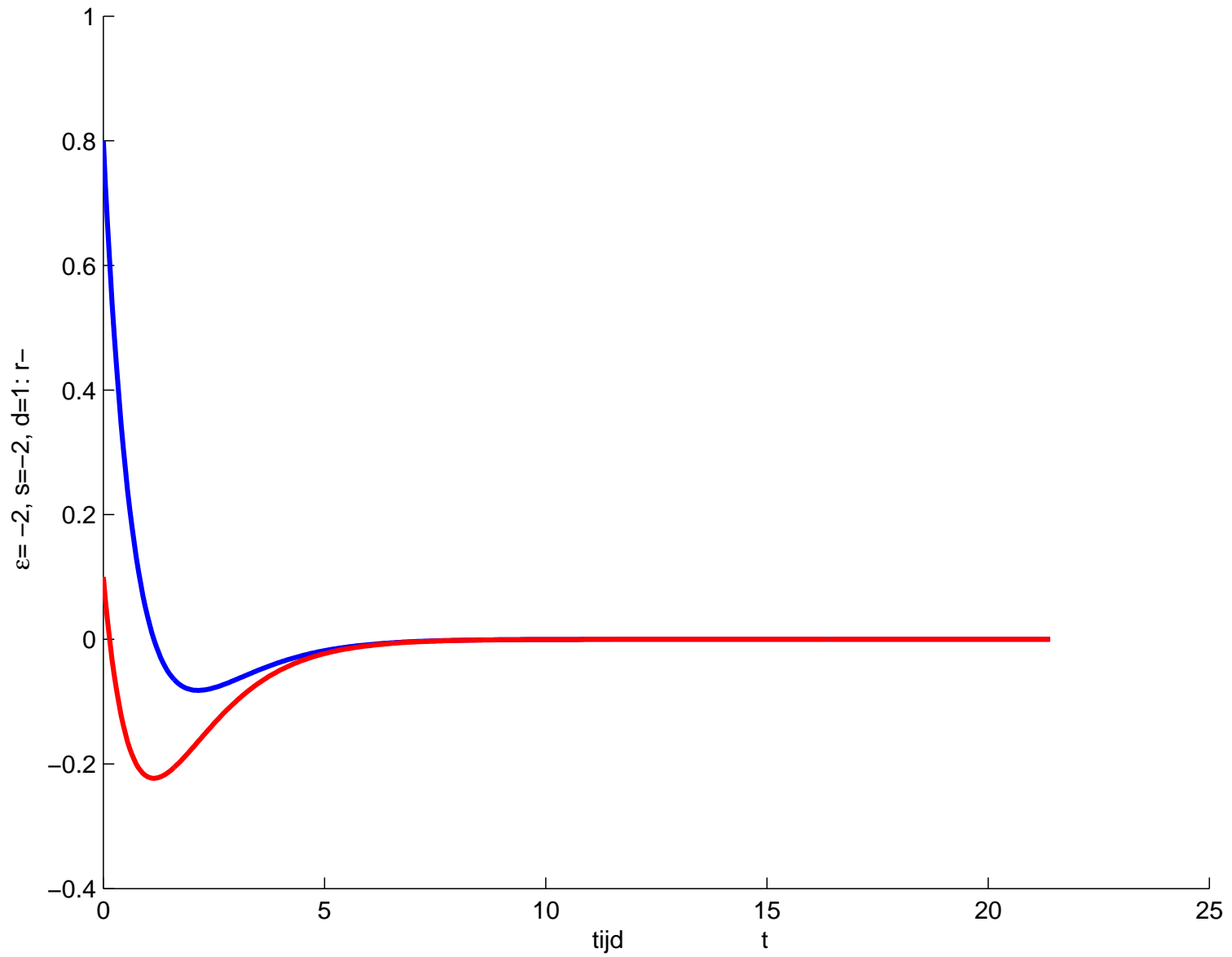
2-d Lineaire differentiaal vergelijking met $\lambda_1 = -0.95 - 0.31225 i$, $\lambda_2 = -0.95 + 0.31225 i$



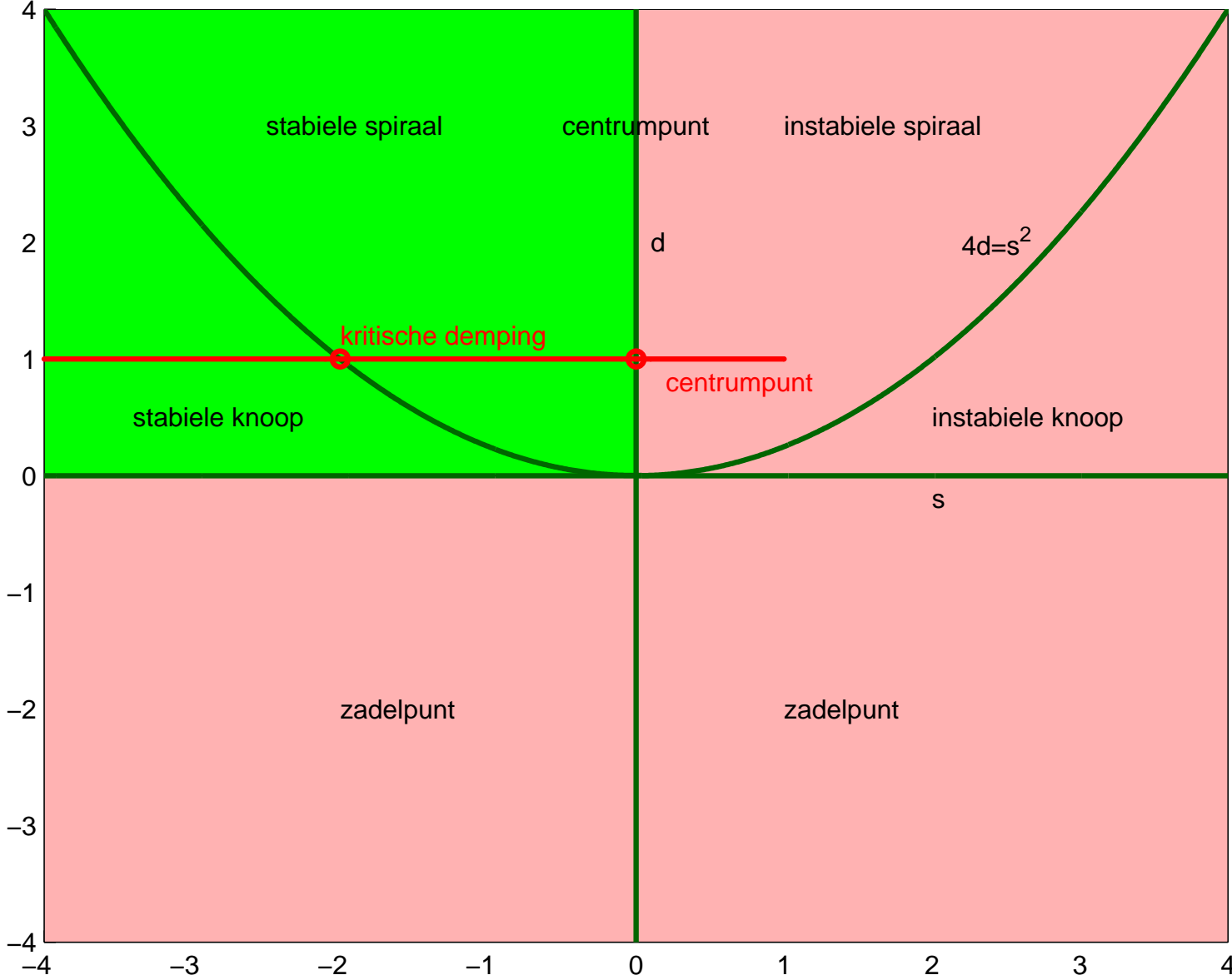
2-d Lineaire differentiaal vergelijking met $\lambda_1=-1, \lambda_2=-1$



2-d Lineaire differentiaal vergelijking met $\lambda_1=-1, \lambda_2=-1$

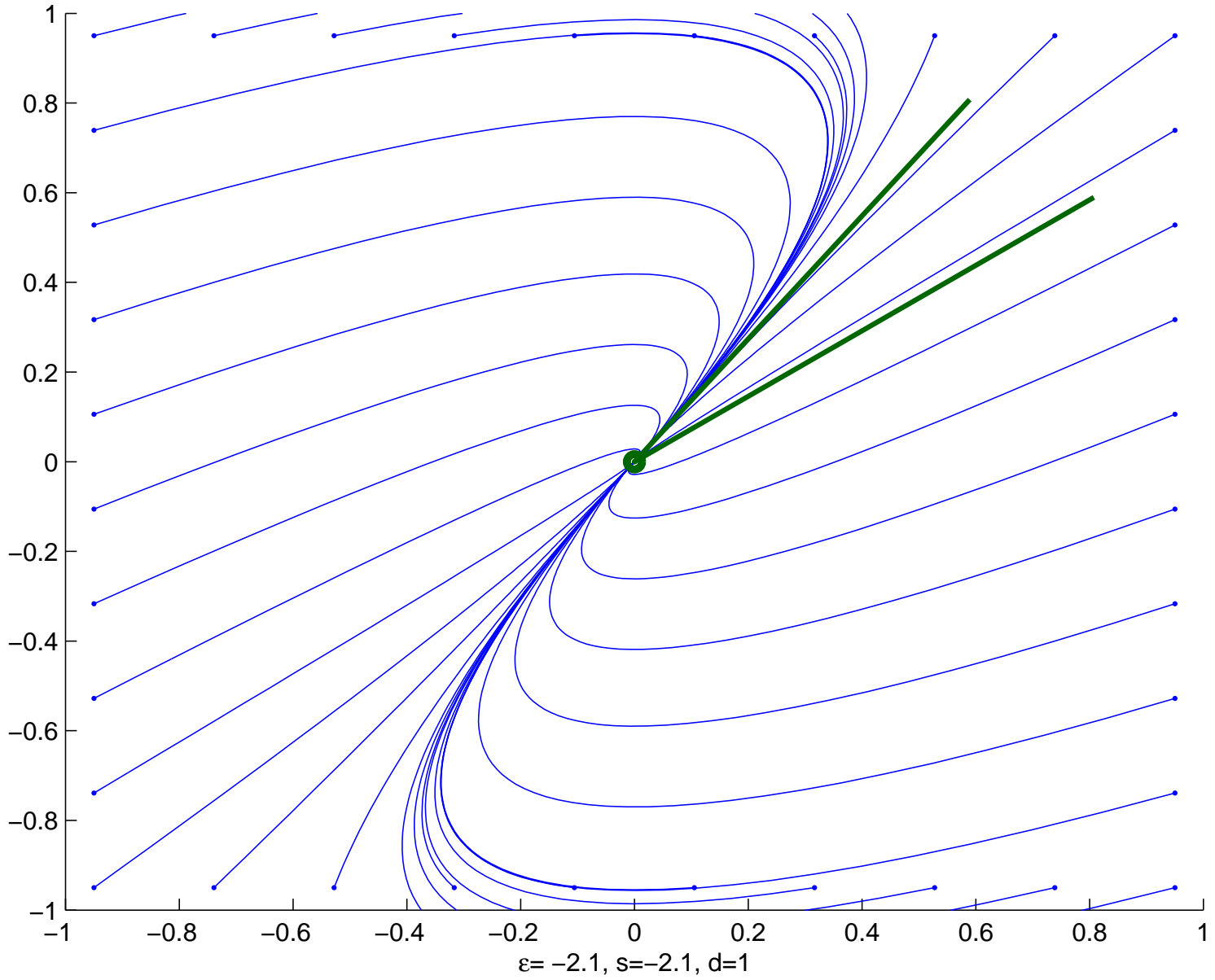


s en d bij aflopende s

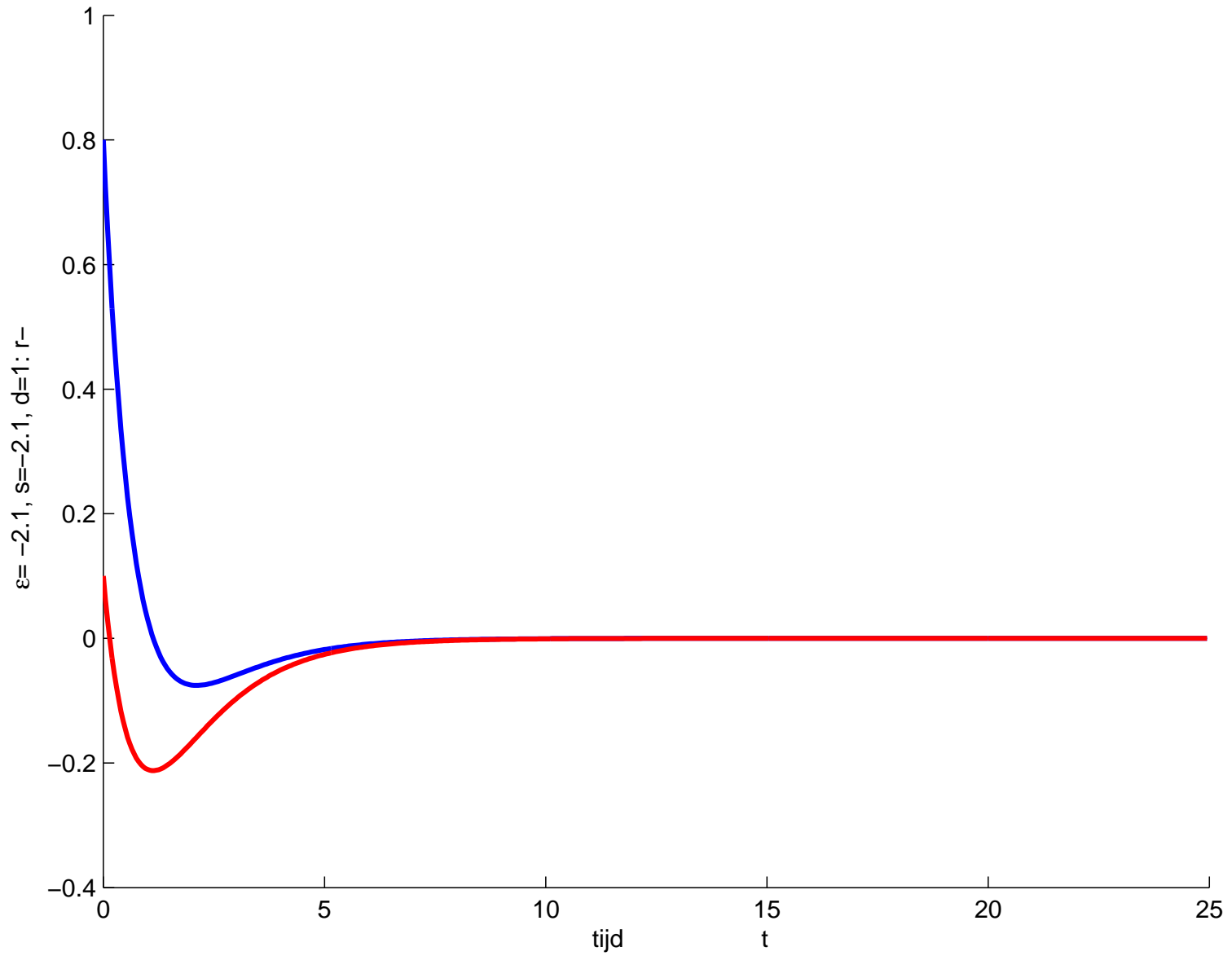


Horizontaal: s =spoor. Verticaal: d =det

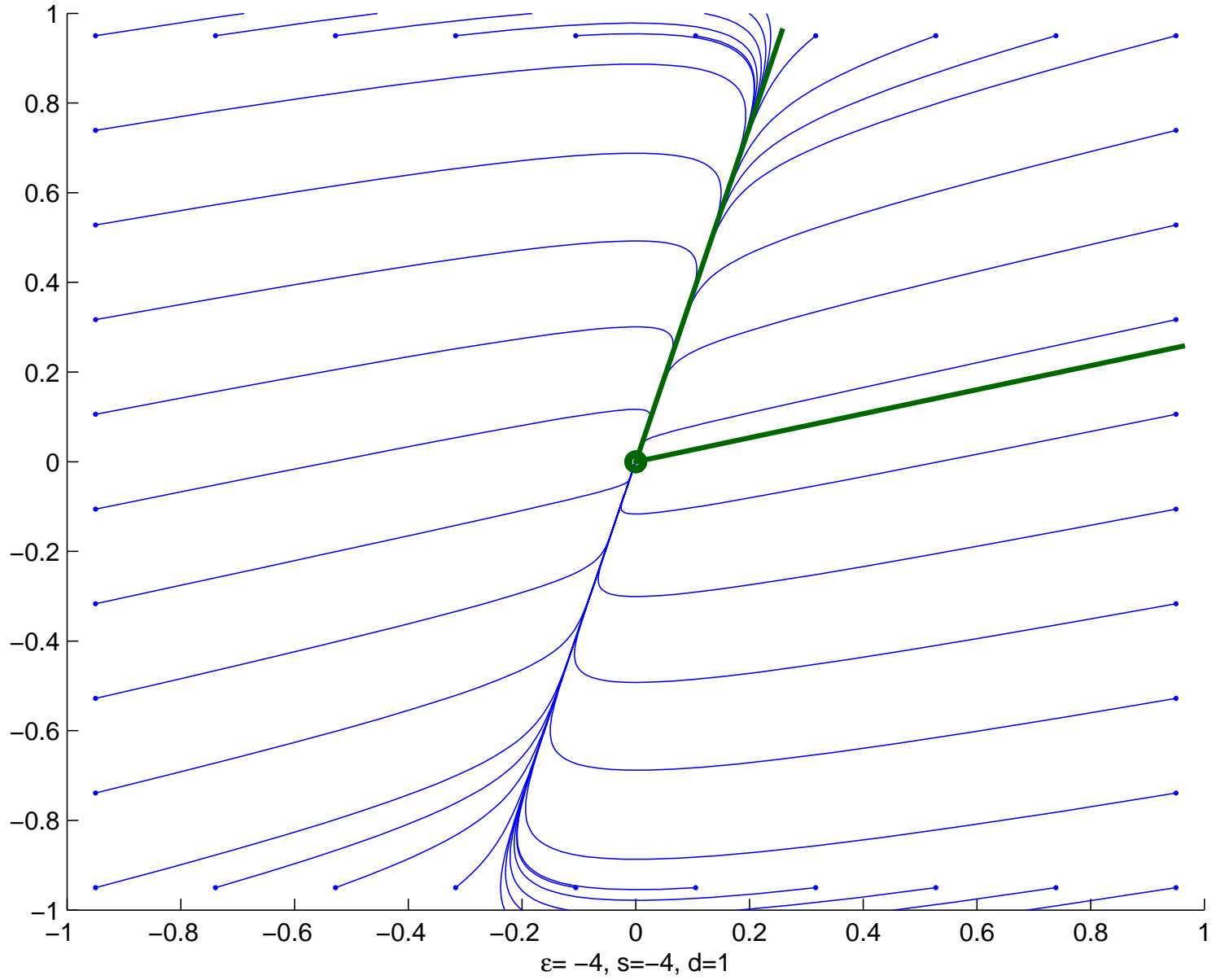
2-d Lineaire differentiaal vergelijking met $\lambda_1=-1.37016$, $\lambda_2=-0.729844$



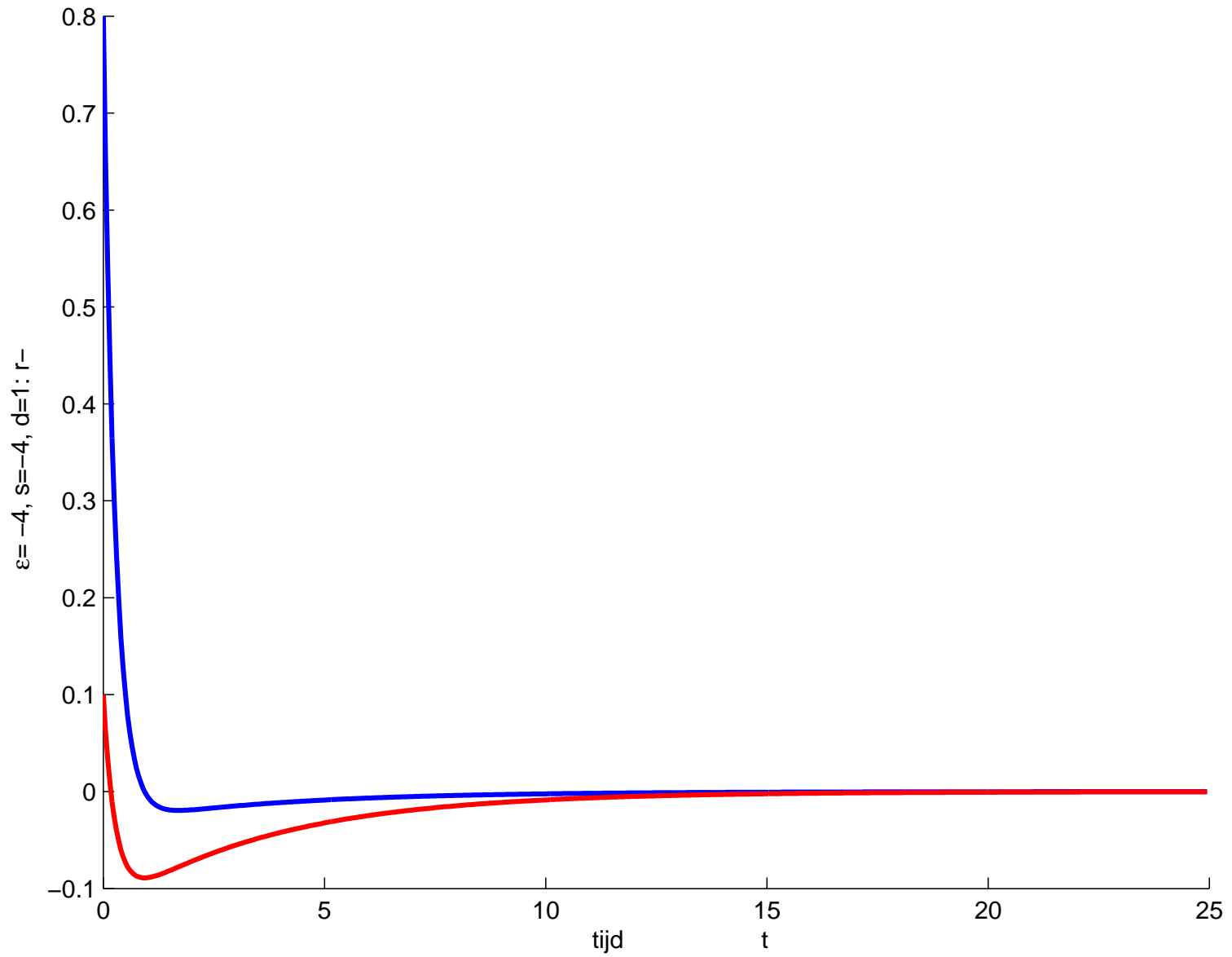
2-d Lineaire differentiaal vergelijking met $\lambda_1=-1.37016$, $\lambda_2=-0.729844$



2-d Lineaire differentiaal vergelijking met $\lambda_1=-3.73205$, $\lambda_2=-0.267949$



2-d Lineaire differentiaal vergelijking met $\lambda_1 = -3.73205$, $\lambda_2 = -0.267949$



Analyse 'determinant is 0'

$$d = \det = 0, \quad s = \text{spoor} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_2 < \lambda_1 = 0$$

$$\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$$

Analyse 'determinant is 0'

$$d = \det = 0, \quad s = \text{spoor} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_2 < \lambda_1 = 0$$

$$\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = C_1 \mathbf{v}_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{v}_2$$

met $\mathbf{v}_1 = (0, 1)^\top$ en $\mathbf{v}_2 = (1, 0)^\top$

Analyse 'determinant is 0'

$$d = \det = 0, \quad s = \text{spoor} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_2 < \lambda_1 = 0$$

$$\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = C_1 \mathbf{v}_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{v}_2$$

met $\mathbf{v}_1 = (0, 1)^\top$ en $\mathbf{v}_2 = (1, 0)^\top$

Op den duur (d.w.z., voor t groot) $\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \approx C_1 \mathbf{v}_1$

Analyse 'determinant is 0'

$$d = \det = 0, \quad s = \text{spoor} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_2 < \lambda_1 = 0$$

$$\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = C_1 \mathbf{v}_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{v}_2$$

met $\mathbf{v}_1 = (0, 1)^\top$ en $\mathbf{v}_2 = (1, 0)^\top$

Op den duur (d.w.z., voor t groot) $\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \approx C_1 \mathbf{v}_1$

Instabiel. Instabiele kam?

Jordan kastjes, $d = 2$

$$4d = s^2, s \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2, \quad \text{Im}(\lambda_1) = 0$$

$$\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$$

Jordan kastjes, $d = 2$

$$4d = s^2, s \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2, \quad \text{Im}(\lambda_1) = 0$$

$$\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$$

$$y' = \lambda_1 y \quad \Rightarrow \quad y(t) = C_2 e^{\lambda_1 t}.$$

$$x \text{ voldoet aan } x'(t) = \lambda_1 x(t) + C_2 e^{\lambda_1 t}.$$

Jordan kastjes, $d = 2$

$$4d = s^2, s \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2, \quad \text{Im}(\lambda_1) = 0$$

$$\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$$

$$y' = \lambda_1 y \quad \Rightarrow \quad y(t) = C_2 e^{\lambda_1 t}.$$

$$x \text{ voldoet aan } x'(t) = \lambda_1 x(t) + C_2 e^{\lambda_1 t}.$$

Oplossing homogeen deel: $C_1 e^{\lambda_1 t}$

Particuliere oplossing (variatie van constante):

$$C_2(1 + t) e^{\lambda_1 t}.$$

Jordan kastjes, $d = 2$

$$4d = s^2, s \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2, \quad \text{Im}(\lambda_1) = 0$$

$$\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$$

$$y' = \lambda_1 y \quad \Rightarrow \quad y(t) = C_2 e^{\lambda_1 t}.$$

$$x \text{ voldoet aan } x'(t) = \lambda_1 x(t) + C_2 e^{\lambda_1 t}.$$

Oplossing homogeen deel: $C_1 e^{\lambda_1 t}$

Particuliere oplossing (variatie van constante):

$$C_2(1 + t) e^{\lambda_1 t}.$$

Algemene oplossing:

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2(1 + t) e^{\lambda_1 t}, \quad y(t) = C_2 e^{\lambda_1 t}$$

Jordan kastjes, $d = 2$

$$4d = s^2, s \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2, \quad \text{Im}(\lambda_1) = 0$$

$$\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}\mathbf{v}_1 = \lambda_1\mathbf{v}_1, \quad \mathbf{A}\tilde{\mathbf{v}}_1 = \lambda_1\tilde{\mathbf{v}}_1 + \mathbf{v}_1$$

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = (C_1 + C_2 t) e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1 + C_2 e^{\lambda_1 t} \tilde{\mathbf{v}}_1$$

met C_i zo dat $\begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} = C_1 \mathbf{v}_1 + C_2 \tilde{\mathbf{v}}_1$.

Jordan kastjes, $d = 2$

$$4d = s^2, s \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2, \quad \text{Im}(\lambda_1) = 0$$

$$\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}\mathbf{v}_1 = \lambda_1\mathbf{v}_1, \quad \mathbf{A}\tilde{\mathbf{v}}_1 = \lambda_1\tilde{\mathbf{v}}_1 + \mathbf{v}_1$$

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = (C_1 + C_2 t) e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1 + C_2 e^{\lambda_1 t} \tilde{\mathbf{v}}_1$$

met C_i zo dat $\begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} = C_1 \mathbf{v}_1 + C_2 \tilde{\mathbf{v}}_1$.

Op den duur (t groot) $\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \approx C_2 t e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1$

Jordan kastjes, $d > 2$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3, \quad \text{Im}(\lambda_1) = 0$$

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_3'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

$$x_1(t) = e^{\lambda_1 t} \left[C_1 + C_2 (1 + t) + C_3 \left(1 + t + \frac{1}{2} t^2 \right) \right]$$

$$x_2(t) = e^{\lambda_1 t} [C_2 + C_3 (1 + t)]$$

$$x_3(t) = e^{\lambda_1 t} [C_3]$$

Jordan kastjes, $d > 2$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3, \quad \text{Im}(\lambda_1) = 0$$

$$\begin{bmatrix} x'_1(t) \\ x'_2(t) \\ x'_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

$$x_1(t) = e^{\lambda_1 t} \left[C_1 + C_2 (1 + t) + C_3 \left(1 + t + \frac{1}{2} t^2 \right) \right]$$

$$x_2(t) = e^{\lambda_1 t} [C_2 + C_3 (1 + t)]$$

$$x_3(t) = e^{\lambda_1 t} [C_3]$$

Op den duur (t groot) $x_1(t) \approx C_3 \frac{1}{2} t^2 e^{\lambda_1 t}, \dots$

Jordan kastjes & Companion vorm

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3, \quad \text{Im}(\lambda) = 0$$

$$\phi^{(3)} + \alpha_0 \phi^{(2)} + \alpha_1 \phi^{(1)} + \alpha_2 \phi = 0$$

met α_i zodat $(\lambda - \lambda_1)^3 = \lambda^3 + \alpha_0 \lambda^2 + \alpha_1 \lambda + \alpha_2$

Algemene oplossing:

$$\phi(t) = e^{\lambda_1 t} [\tilde{C}_1 + \tilde{C}_2 t + \tilde{C}_3 t^2]$$

Kritische demping bij de slinger

$$\phi'' + 2\rho\phi' + \nu^2\phi = 0$$

Stel kritische demping: $\rho = \nu$. Dan

$$p(\lambda) \equiv \lambda^2 + 2\rho\lambda + \nu^2 = (\lambda - \rho)(\lambda - \rho).$$

Dus, voor zekere constanten C_1, C_2 is

$$\phi(t) = (C_1 + C_2 t) e^{-\rho t}.$$

Als $\phi(0) = \phi_0$ en $\phi'(0) = 0$, dan

$$\phi(t) = \phi_0(1 + \rho t) e^{-\rho t}$$

Merk op dat $\phi_{\text{hom}} = \phi$ in geval van een aandrijvende term. Ook hier geldt $\phi_{\text{hom}}(t) \rightarrow 0$ als $t \rightarrow \infty$ en dus zijn de eerdere resultaten mbt respons en resonantie correct.

$$\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu & 1 \\ \varepsilon & \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \quad \text{met } \varepsilon \neq 0$$

$$\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu & 1 \\ \varepsilon & \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \quad \text{met } \varepsilon \neq 0$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \varepsilon & 0 \end{bmatrix} : \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \varepsilon & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \pm\sqrt{\varepsilon} \end{bmatrix} = \pm\sqrt{\varepsilon} \begin{bmatrix} 1 \\ \pm\sqrt{\varepsilon} \end{bmatrix}.$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \mu \pm \sqrt{\varepsilon}, \quad \mathbf{v}_{1,2} = \begin{bmatrix} 1 \\ \pm\sqrt{\varepsilon} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu & 1 \\ \varepsilon & \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \quad \text{met } \varepsilon \neq 0$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \varepsilon & 0 \end{bmatrix} : \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \varepsilon & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \pm\sqrt{\varepsilon} \end{bmatrix} = \pm\sqrt{\varepsilon} \begin{bmatrix} 1 \\ \pm\sqrt{\varepsilon} \end{bmatrix}.$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \mu \pm \sqrt{\varepsilon}, \quad \mathbf{v}_{1,2} = \begin{bmatrix} 1 \\ \pm\sqrt{\varepsilon} \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon > 0: \quad C_1 e^{(\mu+\sqrt{\varepsilon})t} \mathbf{v}_1 + C_2 e^{(\mu-\sqrt{\varepsilon})t} \mathbf{v}_2, \quad C_i \in \mathbb{R} \quad \text{knoop}$$

$$\varepsilon < 0: \quad \text{Re} \left(C e^{\mu t} e^{i\sqrt{|\varepsilon|}t} \mathbf{v}_1 \right), \quad C \in \mathbb{C} \quad \text{spiraal}$$

$$\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu & 1 \\ \varepsilon & \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \quad \text{met } \varepsilon \neq 0$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \varepsilon & 0 \end{bmatrix}: \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \varepsilon & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \pm\sqrt{\varepsilon} \end{bmatrix} = \pm\sqrt{\varepsilon} \begin{bmatrix} 1 \\ \pm\sqrt{\varepsilon} \end{bmatrix}.$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \mu \pm \sqrt{\varepsilon}, \quad \mathbf{v}_{1,2} = \begin{bmatrix} 1 \\ \pm\sqrt{\varepsilon} \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon > 0: \quad C_1 e^{(\mu+\sqrt{\varepsilon})t} \mathbf{v}_1 + C_2 e^{(\mu-\sqrt{\varepsilon})t} \mathbf{v}_2, \quad C_i \in \mathbb{R} \quad \text{knoop}$$

$$\varepsilon < 0: \quad \text{Re} \left(C e^{\mu t} e^{i\sqrt{|\varepsilon|}t} \mathbf{v}_1 \right), \quad C \in \mathbb{C} \quad \text{spiraal}$$

Schrijf $C = |C| e^{i\delta}$. Dan oplossing:

$$|C| e^{\mu t} \text{Re} \left(e^{i(\sqrt{|\varepsilon|}t + \delta)} \begin{bmatrix} 1 \\ i\sqrt{|\varepsilon|} \end{bmatrix} \right) = |C| e^{\mu t} \begin{bmatrix} \cos(\sqrt{|\varepsilon|}t + \delta) \\ -\sqrt{|\varepsilon|} \sin(\sqrt{|\varepsilon|}t + \delta) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad a_{i,j} \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} d \equiv \det(\mathbf{A}) = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} \\ s \equiv \text{spoor}(\mathbf{A}) = a_{11} + a_{22} \end{cases}$$

